UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Economía Aplicada I

La Aportación al Desarrollo del Cálculo de Probabilidades de la Obra de P. R. de Montmort

Trabajo presentado por **María Dolores Pérez Hidalgo** para la obtención del grado de doctor, dirigido por los doctores **D. Jesús Basulto Santos** y **D. Jose Antonio Camúñez Ruiz**

Sevilla, Octubre 2015

¡Qué gloria sería para esta Ciencia si ella pudiese servir para regular los juicios y la conducta de los hombres en la práctica de las cosas de la vida!

Montmort (1713), pág. *iii*

Agradecimientos

El trabajo que aquí se presenta no se hubiese podido llevar a cabo sin el apoyo, el asesoramiento y ayuda de numerosas personas a las que estaré siempre agradecida.

En primer lugar a mis directores de tesis, Dr. D. Jesús Basulto Santos y Dr. D. José Antonio Camúñez Ruiz. Ellos me iniciaron en el estudio de la historia de la Estadística y de la Probabilidad. A ellos les debo mi ilusión al abordar estos temas. Mi gratitud por todos los consejos que de ellos he recibido, por el tiempo y el esfuerzo que me han dedicado, por su aliento y ánimo en los momentos de desánimo; por la calma y reflexión que me transmitieron en momentos de nerviosismo y por su constante y permanente confianza en mí.

Quiero agradecer al Director de mi departamento, Economía Aplicada I, su implicación y facilitación del proceso final de este trabajo, así como a Lola Gómez y Rosa Mª Paz, personal administrativo de nuestro departamento, su aliento y ánimo constante y su eficiencia y rapidez en todos los trámites que involucran la finalización de este trabajo.

A todos mis compañeros de departamento por su constante apoyo.

A mis padres, por su esfuerzo y sacrificio para cursar mis estudios. Y por supuesto a Arturo, Ana y Arturo, por su infinita paciencia en momentos de tensión y su ánimo permanente.

ÍNDICE

CAPITULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Breves detalles bibliográficos

1.2. Sobre el contenido del Essay

1.3. Sobre el contenido de la tesis

La última parte del siglo XVII es notable en la historia de las matemáticas. No sólo estaba Newton (1642-1727), el más grande matemático de todos los tiempos, en su etapa de mayor productividad, sino que además, en toda Europa había matemáticos que competían con él en su propio campo, a la hora de volcar sus ideas sobre álgebra y el nuevo cálculo. Desde luego, la influencia y ejemplo de Newton se hizo sentir con fuerza en el trabajo de los filósofos naturales.

En este periodo, nos encontramos con el filósofo Leibniz (1646-1716) como un árbitro del destino científico. Las opiniones pueden diferir respecto a su poder creativo en el campo del análisis, pero Leibniz se convierte en un foco que da luz y es referente para los matemáticos europeos, con su actitud crítica en ocasiones y con su poder diseminador de sus sugerentes nuevos teoremas. Su influencia sobre la familia Bernoulli y sobre el grupo de matemáticos que trabajaban en París no puede ser subestimada. Él apenas si contribuye al propio cálculo de probabilidades, (la profesora de Mora Charles, 2011 y 2012 ha ido mostrando las aportaciones de esta autor a la resolución de algunos problemas relacionados con el nuevo cálculo) pero no hay duda de que su exposición del cálculo diferencial y su trabajo sobre series exponenciales (por acotar sólo dos de sus contribuciones) facilita el camino a posteriores avances en teoría de la probabilidad.

Las aplicaciones de nuevas técnicas matemáticas a problemas de datos observacionales siempre muestran un desfase, y en ningún asunto es evidenciado con más claridad que en el cálculo de probabilidades. James Bernoulli, enseñante e investigador en Basilea entre 1685 y 1705, condensando las ideas matemáticas de Leibniz y añadiendo muchas propias, fue el primero en apreciar cómo el entonces "moderno" análisis podía ser usado en el cálculo de juegos de azar. Tanto él como De Moivre (1667-1754) no hubiesen contribuido tanto como lo hicieron sin la ayuda de es "nuevo" análisis. Montmort tomó las ideas de James de sus trabajos de 1685 en adelante y llevó a cabo un estudio minucioso de varios juegos de azar usando el análisis matemático conocido por él, mientras que De Moivre, cuyas primeras ideas eran hasta cierto punto reflexiones de Montmort y Bernoulli, finalmente alcanzó su altura completa generalizando y extendiendo su trabajo. Montmort es un personaje atractivo sobre quien, quizás, se ha prestado atención insuficiente. Pero indudablemente, él inspiró a De Moivre, y de su correspondencia con Nicholas Bernoulli conseguimos una mayor apreciación sobre James, que era tío de Nicholas.

Para 1708, año de la publicación de la primera edición del *Essay* de Montmort, el cálculo de probabilidades, aunque aún incipiente, ya había generado frutos importantes. En verano de 1654 se produce la famosa correspondencia entre Pascal y Fermat (Basulto, Camúñez, 2007). Aunque no fue publicada hasta años más tarde, formando parte de las obras completas póstumas de Pascal, el contenido de la misma fue conocido rápidamente por sus contemporáneos geómetras. En 1657, el holandés Huygens publica un pequeño tratado sobre cálculo de probabilidades, formando parte de una obra enciclopédica matemática de su maestro Von Schooten (Camúñez, Basulto, 2011). Huygens aborda todos los problemas tratados en la correspondencia antes citada y le da su visión particular y su forma de resolución incorporando por primera vez el término “esperanza”. En 1670, el español Juan Caramuel publica una obra enciclopédica de contenido matemático en la que se incluye un tomo titulado Kybeia (juegos de dados, en griego) donde sigue en la misma línea de Huygens incorporando la resolución de problemas en nuevos juegos (Camúñez, Basulto, García del Hoyo, 2007).

Otros autores que hicieron pequeñas aportaciones durante este periodo previo a la publicación de la primera edición del Essay son: en 1678, el británico Thomas Strode publica en Londres un tratado sobre combinatoria, en 1679, el matemático francés Joseph Sauver publica en *Journal des Sçavans* alguna fórmula sin demostración sobre la ventaja del Banquero en el juego de la Bassette (juego de cartas de moda en la alta sociedad parisina y sobre el que Montmort realizará sus propios cálculos), en 1685, Wallis publica su *Algebra* donde incluye una sección sobre combinatoria, y en 1685, James Bernoulli propone en el *Journal des Sçavans* dos problemas sobre juego de dados (generalizaciones del Problema 1 del final del Tratado Huygens) para ser resueltos (Hald, 1989). James Bernoulli tenía casi completamente redactado su “revolucionario” tratado *Ars Conjectandi*, pero su muerte prematura (1705) retrasó su publicación hasta 1713. Con la publicación de la primera edición del *Essay* en 1708 se inicia una larga lista de importantes publicaciones y de reputados autores sobre el asunto que nos ocupa. Es lo que el propio Hald (1989) titula “El gran salto hacia delante”: Nicolás Bernoulli (1709 y 1717), J. Arbuthnott (1712), A. de Moivre (1712, 1717 y 1718), James Bernoulli (1713), la segunda edición del *Essay* de Montmort (1713), N. Struyck (1716).

1.1. BREVES DETALLES BIOGRÁFICOS

El *Éloge de M. de Montmort* de Fontenelle está incluido en el volumen de 1719 de la *Hist. de 1'Acad...Paris,* que fue publicado en 1721; de este tomamos algunos detalles biográficos sobre nuestro autor. También, en David (1962) encontramos ricos comentarios biográficos en los que nos basamos para elaborar estas notas.

La vida de Pierre-Rémond de Montmort, después de un comienzo tormentoso, fue simple, feliz. Pierre Rémond, que más tarde se conocería como Pierre Rémond de Montmort, nació en París, el 27 de octubre de 1678, en una familia acomodada noble, siendo el segundo de tres hijos de François Rémond, señor de Breviande y Marguerite Rallu. François, de carácter rígido e inflexible aconsejó a su hijo Pierre estudiar leyes, teniéndolo todo dispuesto para que Pierre ocupara una magistratura que él dejó vacante después de haberla conseguido.

Después de la universidad comenzó a estudiar leyes pero a la edad de dieciocho años se fue de casa. En primer lugar a Inglaterra para estudiar inglés, aficionándose al estilo de vida inglés. Después viajó a los Países Bajos y, a continuación, a Alemania. Allí visitó a su primo M. de Chamoys, en Regensburg, donde encontró una copia de *La Recherche de la Vérité* de Malebranche, cuya lectura afectó significativamente al joven Rémond. Decidió volver a su casa y hacer las paces con su padre. Así, en 1699, a la edad de 21 años vuelve a Francia, donde comenzó a estudiar con Malebranche. Su padre falleció poco después, dejándole, a la edad de 22 años, una inmensa fortuna.

A pesar de la conducta anterior de Rémond, no cayó en la vida disipada en la que era natural pensar que cayese un joven noble de su época, y por el contrario, siguió sus estudios con vigor. Su conversión le fue muy útil y continuó ocupando su tiempo con la religión, y estudiando filosofía y matemáticas con su guía, su maestro y amigo el Padre Nicholas de Malebranche que estaba entonces en la Casa del Oratorio de Saint Honoré de París. Estudió álgebra y geometría con M. Carré y M. Guisnée. Durante tres años, él y otro joven matemático, François Nicole (1683-1758) aprenden por sí mismos sobre los últimos desarrollos matemáticos.

En 1700 vuelve a Inglaterra de nuevo (en 1700), con el propósito de poder conocer a algunos matemáticos ingleses y en particular a Newton. Esta visita dio posteriormente ímpetu a su estudio de matemáticas, y regresó a París para proseguir sus estudios en álgebra, geometría y el nuevo cálculo, que él encontró "espinoso".[1]

Al volver a Francia Rémond siguió el consejo de su hermano y aceptó suceder a su hermano mayor como canónigo de Notre-Dame de Paris. Debido a su reciente herencia no necesitaba los ingresos de su posición en la Iglesia, por lo que donó una suma elevada para caridad. En 1704 compró una finca en Montmort (convirtiéndose entonces en Pierre Rémond de Montmort. También utilizó su fortuna para la ciencia, por ejemplo, en 1709 organizó y pagó la impresión de cien copias de la obra *De Quadratura* de Isaac Newton.

Dos años después de comprar la finca (1706) renunció a su canonjía con el fin de casarse con la sobrina nieta de la duquesa de Angulema. La duquesa vivió en el castillo de Mareuil, propiedad vecina a la finca de Montmort y ello provoca el encuentro, en una visita de cortesía a sus vecinos, con Marguerite. Vivió la mayor parte de su vida muy feliz en su castillo de Montmort, donde invitaba a menudo a los principales matemáticos.

[1] Se puede especular aquí sobre el nuevo cálculo. Montmort puede haber oído hablar del mismo en Londres, pero él usa la notación *d* de Leibniz lo que implicaría que lo aprendió de una fuente no inglesa.

Después de su matrimonio se instaló en su casa de campo y se dedicó a trabajar sobre teoría de la probabilidad. No se sabe por qué eligió este tópico, pues él no era jugador. Era conocido en Francia y también conocido por Montmort, que James Bernoulli había dejado, en el momento de su muerte, el manuscrito de un libro sobre el asunto. Posiblemente Montmort tuvo contacto con algún discípulo de James (aunque se piensa que no se encontró con Nicolás hasta 1709) y este contacto le inspiró a perseguir el nuevo cálculo con sus fascinantes líneas colaterales como la suma de series infinitas o la manipulación de coeficientes binomiales (a través de John Bernoulli, también se ofreció para imprimir *Ars Conjectandi*).

La fama de Montmort se debe a su libro sobre la probabilidad *Essay d'Analyse sur les Jeux d'Hazard*. Como dice Todhunter (1865), "En 1708 publicó su trabajo sobre Probabilidad donde, con la valentía de Colón, reveló un nuevo mundo a los matemáticos".

La introducción de Montmort en estos estudios surge, según el propio Montmort nos indica, a partir de la petición de algunos amigos de determinar la ventaja del banquero en el juego del Pharaon. En el prefacio de su obra Montmort dice:

> *Varios de mis amigos me habían incitado, hace ya tiempo, a ensayar si el Álgebra no podría lograr determinar cuál es la ventaja del Banquero en el Juego del Faraón. Nunca había osado acometer esa investigación, pues sabía que el número de todas las diversas ordenaciones posibles de cincuenta y dos cartas, sobrepasa más de cien mil millones de veces la de los granos de arena que pueda contener el globo terráqueo; y no me parecía posible discernir, en un número tan grande, las ordenaciones que son ventajosas al banquero, de aquellas que son contrarias o indiferentes. Estaría aún en este prejuicio si los éxitos*

luminosos del señor Bernoulli no me hubiesen invitado hace algunos años a buscar los diferentes azares de este juego. Fui más dichoso de lo que no había osado esperar, pues además de la solución general de este problema, he descubierto los caminos que eran necesarios disponer para descubrir una infinidad de problemas similares, o incluso mucho más difíciles. He sabido que se puede ir más lejos en este terreno donde nadie aún había estado; me precio de que se podía hacer una amplía recolección de verdades igualmente curiosas y nuevas: esto me ha hecho pensar en trabajar a fondo sobre esta materia, y el deseo de compensar de alguna manera al Público de la pérdida que se daría si estuviese privado de la excelente Obra del señor Bernoulli. Diversas reflexiones me han confirmado en este designio.

El resultado de sus investigaciones fue publicado en el *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hasard* impreso en París en 1708. Ésta primera edición es, a menudo, pasada por alto debido a la mayor extensión de la segunda. El incremento se debe a la introducción de un tratado sobre combinaciones que ocupa las páginas 1-72, así como a la incorporación en ésta última de la correspondencia Montmort-Bernoulli, digna de comentario.

Montmort colaboró con Nicolás Bernoulli en una correspondencia fascinante que comenzó en 1710. Discutieron muchos temas, en particular, preguntas sobre probabilidad que surgen del libro de Montmort. N. Bernoulli pasó tres meses en el castillo de Montmort él cual le había invitado y le escribe en una carta de fecha 5 de septiembre de 1712: *La esperanza que usted me da, Señor, de darme el honor de que llegue a visitarme aquí, me da un placer infinito.* Sin embargo, N. Bernoulli y Montmort no discuten sólo de probabilidad en sus cartas.

En la primera edición sólo hay un autor, el propio Montmort; la segunda edición, mucho más completa, nos atrevemos a decir que es probablemente una mixtura de Montmort y Nicolás Bernoulli. El hecho de que él lo escribiera todo fue probablemente una suerte para el cálculo de probabilidades. Que un noble de Francia y ex-canónigo de Notre-Dame encuentre tales problemas dignos de especulación y no como un estudio impío, dará al asunto un cierto caché y un aire de respetabilidad que permitió a los simples mortales la libertad para trabajar sin ser molestados. Aun así, Montmort consideró necesario escribir una apología sobre el hecho de haber pasado su tiempo trabajando sobre tales problemas y escribió esto con una rectitud autoconsciente:

> *Es particularmente en los Juegos de azar donde aparece la debilidad del espíritu humano y la inclinación que tiene hacia la superstición. Nada es tan ordinario como ver a unos Jugadores atribuir sus desgracias a las personas que se les acercan, y a otras circunstancias que no son menos indiferentes a los acontecimientos del juego. Hay quien se hace una ley de no tomar nada más que cartas con las que han ganado, con el pensamiento de que una cierta suerte les une. Otros, por el contrario, se atan a tomar cartas perdedoras, en la opinión de que habiendo perdido varias veces, es menos verosímil que ellas seguirán perdiendo, como si el pasado pudiese decidir algo sobre el futuro. Hay a quienes les afectan ciertos lugares y ciertos días. Se ve que rehúsan mezclar las cartas, si éstas no están en ciertas situaciones, y quienes creerían perder infaliblemente si estuviesen separadas de sus reglas. En fin, la mayoría busca sus ventajas donde no están, o bien las descuidan enteramente.*
>
> *Se puede decir más o menos lo mismo de la conducta de los hombres en todas las acciones de la vida donde el azar toma parte. Estos son los mismos prejuicios que los gobernantes, es la imaginación quien*

regula sus pasos, y que hace nacer a ciegas sus temores y sus esperanzas. Con frecuencia ellos abandonan un pequeño bien seguro para correr temerariamente tras un bien mayor, cuya adquisición es casi imposible; y con frecuencia, por demasiada desconfianza, renuncian a esperanzas considerables y bien fundadas, por conservar un bien cuyo valor no tiene punto de proporción con lo que ellos rechazan. El principio general de estos prejuicios y de estos errores es que la mayoría de los hombres atribuyen la distribución de los bienes y de los males y, en general, de todos los acontecimientos de este mundo a una fuerza fatal que actúa sin orden y sin regla, creyendo ellos que vale tanto abandonarse a esta Divinidad ciega, que se llama Fortuna, como forzarla a serle favorable siguiendo reglas de prudencia que les aparecen imaginariamente.

He creído pues que sería útil, no sólo a los jugadores sino a los hombres en general, saber que el azar tiene reglas que pueden ser conocidas y que por falta de conocimiento de estas reglas cometen todos los días errores, cuyos resultados molestos les deben ser imputados con más razón que al destino al que ellos acusan. Yo podría proporcionar en prueba una infinidad de ejemplos extraídos o bien de los juegos, o bien de otras cosas de la vida en las que el suceso depende del azar. Es cierto que los hombres no se sirven lo suficiente de su espíritu para obtener lo que ellos desean incluso con el mayor ardor, y que no hacen suficiente esfuerzo para quitarle a la Fortuna lo que ellos podrían sustraerle por las reglas de la prudencia.

Se ha creído que esta materia podría excitar la curiosidad de aquellos que incluso tienen menos en conocimientos abstractos. Naturalmente, se desea ver claro en aquello que se hace, incluso independientemente cualquier interés. Se jugaría, sin duda, con más agrado si se pudiese saber en cada lanzamiento la esperanza que se tiene *de ganar, o el riesgo que se corre de perder. Se estaría más tranquilo sobre los acontecimientos del juego, y se evitaría más el ridículo de aquellas quejas continuas en las que se dejara ir la mayor parte de los Jugadores en los desafíos más comunes, los que le son contrarios.*

Si el conocimiento exacto de los azares del juego no es suficiente a los jugadores para hacerles ganar, puede al menos servir para hacerle tomar el mejor partido en las cosas dudosas y, lo que es más importante, enseñarle hasta qué punto son desfavorables para ellos las condiciones de ciertos juegos que la avaricia y la ociosidad introducen todos los días. Para mí, creo que si los jugadores supieran que cuando ponen en el Faraón un luis de trece libras sobre una carta que ha pasado tres veces, no siendo el montón más que de doce cartas, es precisamente lo mismo que si diesen como pura donación una libra, un sol y ocho deniers al Banquero, entonces habría pocos que quisiesen tentar la Fortuna con tanta desventaja.

La conducta de los hombres hace la mayor parte de las veces su buena o mala fortuna, y las personas prudentes dan al azar lo menos que ellos pueden.

No podemos conocer el futuro, pero siempre podemos en los juegos de azar y, con frecuencia, en las otras cosas de la vida, conocer con exactitud ¡cuánto es más probable que cierta cosa ocurra de tal manera antes que todas las demás! Y puesto que están aquí los límites de nuestro conocimiento, debemos al menos tratar de alcanzarlos.

Todo el mundo sabe que en el defecto de la evidencia, debemos buscar la verosimilitud para aproximarnos a la verdad; pero no se sabe bastante qué hay de las verosimilitudes más grandes y más pequeñas en el *infinito, y cuál es el espíritu para ser buen juez, debiéndose distinguir todos los grados, puesto que ocurre con frecuencia que una cosa siendo incierta, es sin embargo cierta e incluso igual de evidente que la que es verosímil, y más verosímil que todas las demás.*

Parece que no se está bastante advertido hasta el presente que se puede dar reglas infalibles para calcular las diferencias que se encuentra entre diversas posibilidades.

Se ha querido dar en esta Obra un ensayo de este nuevo arte, aplicándolo a una materia en la que ha habido hasta aquí una gran oscuridad, y que no parecía susceptible de precisión alguna. Se ha creído que era más apropiada que cualquier otra, que sea valorada por el Análisis, este arte maravilloso que es la llave de todas las ciencias exactas, y que no está al parecer descuidado nada más que porque no se conoce lo suficiente el alcance de sus usos; pues en vez de que solo se haya empleado justo hasta aquí el Álgebra y el Análisis más que para descubrir unas razones constantes e inmutables entre números y figuras, se sirve aquí para descubrir razones de probabilidades entre cosas inciertas y que no tienen nada de fijo, lo que parece muy opuesto al espíritu de la Geometría[2] *y, de alguna manera, fuera de sus reglas. Esto es lo que hace juiciosamente sentir al ilustre Autor de la Historia de la Academia en el pasaje que ya he citado. No es tan glorioso, dice él, al espíritu de la Geometría más que reinar en la Física, reinar en las cosas de moral, tan casuales, tan complicadas, tan cambiantes. Cuanto más una materia le es opuesta & rebelde, más honor tiene de domesticarla.*

En 1715 Montmort visitó Inglaterra, esta vez para ver el eclipse de sol en compañía del astrónomo real, Edmond Halley. En esta visita se encontró con

[2] En la época, Geometría y Matemáticas eran términos sinónimos.

numerosos matemáticos como Abraham De Moivre y Brook Taylor, de donde surgió una amistad, a pesar de la sospecha por parte de Montmort del plagio de A. De Moivre. A pesar del público desacuerdo científico, a raíz del ataque de De Moivre en su *De Mensura Sortis* (1711) sobre la primera edición del *Essay* de Montmort al que éste contesta en su segunda edición. Sin embargo, Montmort tiene más crédito al tratar de arreglar la disputa, al escribirle varias veces a De Moivre, no siempre con respuesta.

Después de regresar a Francia en la primavera de 1715 Montmort realiza una correspondencia muy activa con Taylor, que abarca incluso temas personales. Además de los mencionados anteriormente, Montmort mantiene correspondencia con John Craig, Edmond Halley, Gottfried Leibniz, Jakob Hermann y Giovani Poleni. En un momento álgido de la controversia Newton-Leibniz, Montmort fue capaz de mantener una estrecha amistad con ambos. En 1715 durante su viaje a Inglaterra fue elegido para ser miembro de la Royal Society de Londres. Montmort fue elegido miembro asociado de la Academçia Real de las Ciencias en 1716.

Montmort falleció de viruela en Paris en octubre 1719. La viruela era una enfermedad temida en ese momento con alrededor de 400.000 personas fallecidas cada año en Europa. Alrededor del 30 por ciento de los afectados por la enfermedad murieron por dicha causa. Hubo frecuentes epidemias, la que golpeó Paris en 1719 mató a 14.000 de los habitantes de la ciudad. Montmort estuvo infectado por la viruela durante la epidemia de 1719 y murió en octubre de ese año. Tenía 40 años de edad y estaba en el apogeo de su actividad científica. Después de su muerte, su papel en la suma de las series finitas, *De Seriebus Infinitis* Tractanus, fue publicado en las Philosophical Transactions de la Royal Society. Este trabajo tiene un apéndice de Taylor.

1.2. SOBRE EL CONTENIDO DEL *ESSAY*

El *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* fue publicado en 1708. Consta de un prefacio y tres partes sobre juegos de cartas, juegos de dados, y algunos otros problemas sobre juegos de azar, respectivamente. Se publicó una segunda edición en 1713. Ninguna de las dos ediciones contiene el nombre del autor ni en la página del título ni a lo largo de la obra. En la segunda edición el nombre Montmort aparece sólo en la página 337 haciendo referencia a un lugar.

> les beautés de votre Lettre. Ainſi en attendant que par
> mon retour à Montmort j'aye recouvré ce loiſir & cette
> tranquillité d'eſprit que j'eſtime tant, & dont j'ai d'ailleurs

y esperando mi regreso a Montmort he recuperado el tiempo
libre y esa tranquilidad de espíritu que yo estimo tanto

Los prefacios a las dos ediciones son idénticos, aparte de la sección en la que se mencionan brevemente los contenidos. Se añade un *Avertissement* (Advertencia) de 18 páginas a la segunda edición. Estas dos secciones, prefacio y advertencia, vienen numeradas con números romanos, el resto en arábigo.

El libro de su segunda edición se divide en cinco partes. La primera sección es sobre combinatoria, cuyos teoremas se encontraban diseminados en la primera edición y sobre lo que Montmort añade algunos teoremas más; después siguen las tres partes también analizadas en la primera edición relativas a juegos de azar con añadidos y generalizaciones, así como la solución a los problemas propuestos por Huygens y, finalmente, como quinta parte, 132 páginas de cartas entre Montmort y John y Nicolás Bernoulli. Haremos en este apartado un resumen de los contenidos, así como una imagen de la portada del Essay.

ESSAY D'ANALYSE SUR LES JEUX DE HAZARD.

SECONDE EDITION

Revûe & augmentée de plusieurs Lettres.

A PARIS,

Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande.

MDCCXIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Señalamos en negrita las novedades de la segunda edición frente a la primera.

Tabla de contenidos del *Essay* de Montmort, 1708 y 1713

MATERIA	Páginas EDICIÓN DE 1708	 EDICIÓN DE 1713
Prefacio	III -XXIV	III - XXIV
Advertencia		**XXV - XLII**
Sobre combinaciones	79 - 100	**1 - 72**
Sobre juegos de cartas	1- 108	73 - 172
Pharaon, lansquenet, treize, bassete, piquet, triomphe, l'ombre, brelan, imperiale, quinze		
Sobre juegos de dados	109 - 155	173 - 215
Quinquenove, hazard, esperance, trictrac, trois dez, passe-dix, raffle, jeu des noyaux		
Soluciones a problemas sobre juegos de azar	156 - 185	216 - 277
Los cinco problemas de Huygens, el problema de De Méré, el problema de los puntos, el problema de Robartes, la lotería de Lorraine, la duración del juego		
Cuatro problemas para resolver	185 - 189	278 - 282
Cartas entre Montmort, John Bernoulli y Nicolás Bernoulli		**283 - 414**

La principal fuente de inspiración de Montmort fue lo que había leído sobre el trabajo de James Bernoulli. La descripción más precisa de los contenidos de *Ars Conjectandi* conocida en 1708 es la dada por Saurin (1706), de la que citamos:

> *El autor se determina y reduce a un cálculo los diferentes grados de certidumbre o probabilidad de conjetura que uno puede hacer sobre materias dependientes del azar, y las extiende lo mismo a la vida civil como a asuntos privados… Es en la cuarta parte cuando el autor extiende su método y su razonamiento, como hemos dicho, a materias relacionadas con la vida civil y asuntos privados. El fundamento de esta parte es un importante problema, que primero resuelve, y que lo considera más importante que la cuadratura del círculo. Es la cuestión de determinar si incrementando el número de observaciones de un evento al mismo tiempo lleva a un correspondiente incremento del grado de probabilidad de encontrar la verdadera ratio del número de casos donde el evento puede ocurrir y el número de casos donde puede no ocurrir; de esta manera uno puede finalmente llegar a un grado de probabilidad más grande que cualquier grado dado, es decir, a la verdadera certeza.*

No se da ninguna indicación del método de demostración de Bernoulli. Dejemos que el mismo Montmort nos introduzca en su obra mostrando los primeros párrafos de su prefacio a la primera edición.

> *Hace tiempo que los Geómetras se jactan de poder, por sus métodos, descubrir en las Ciencias naturales, todas las verdades que están al alcance del espíritu humano; y es cierto que por la maravillosa aleación que han hecho desde hace cincuenta años de la Geometría con la Física, han forzado a los hombres a reconocer que lo que dicen sobre la ventaja de la Geometría no es sin fundamento. ¡Qué gloria sería para esta*

Ciencia si ella pudiese servir para regular los juicios y la conducta de los hombres en la práctica de las cosas de la vida!

El mayor de los señores Bernoulli, tan conocidos, uno y otro, en el mundo erudito, no ha creído que fuese imposible llevar la Geometría justo hasta este punto. Él se había propuesto dar reglas para estimar la probabilidad de los acontecimientos futuros, y cuyo conocimiento nos es ocultado, sea en los Juegos, sea en las otras cosas de la vida en las que el azar solo es parte. El título de esta Obra debía ser De Ars Conjectandi, el arte de adivinar. Una muerte prematura no le ha permitido dar el último retoque.

Así Montmort informa cómo ha tenido conocimiento del contenido de la obra de Bernoulli.

El señor de Fontenelle y el señor Saurin han ofrecido cada uno un pequeño análisis de este libro; el primero en l'Histoire de l'Academie (año 1705, página 148), el otro en los Journaux des Sçavans (año 1706, página 81) de Francia. He aquí, según estos autores, cuál era el plan de esta Obra. El señor Bernoulli la dividía en cuatro partes; en las tres primera daba las soluciones de diversos problemas sobre los Juegos de azar: se debía encontrar varias cosas nuevas sobre las series infinitas, sobre las combinaciones y los cambios de orden, con la solución de los cinco problemas propuestos desde hace tiempo a los Geómetras por el señor Huygens. En la cuarta parte, emplearía los métodos que había dado en las tres primeras para resolver diversas cuestiones morales, políticas y civiles.

No se nos ha hecho saber cuáles son los Juegos en los que el Autor determinaría los repartos, ni que asuntos de política y moral había *intentado esclarecer; pero por muy sorprendente que sea este proyecto, hay lugar para creer que este sabio Autor lo habrá ejecutado perfectamente. El señor Bernoulli era demasiado superior a los demás como para querer impresionar, era de ese pequeño número de hombres raros que son propios de inventar, y me persuado que él habría conseguido todo lo que prometía el título de su Libro.*

Nada retrasa más el avance de la ciencia, ni pone un mayor obstáculo al descubrimiento de las verdades ocultas, que la desconfianza que nosotros tenemos en nuestras fuerzas. La mayor parte de las cosas que parecen imposibles no lo son más que por falta de darle al espíritu humano toda la extensión que pueda tener.

Montmort, en su prefacio, da un pequeño repaso de los contenidos de este libro sobre el que hemos referido en la tabla previa. Él continúa

Si me hubiese propuesto seguir todo el proyecto del señor Bernoulli, habría debido añadir una quinta Parte, donde hubiese hecho aplicaciones de los métodos contenidos en las cuatro primeras a asuntos políticos, económicos o morales. Lo que me lo ha impedido, es el obstáculo en el que me he encontrado de construir unas hipótesis que estando apoyadas en hechos ciertos, pudiesen conducirme y sostenerme en mis investigaciones: Pero no habiendo tenido la comodidad de satisfacerme enteramente según eso, he creído que valdría más retomar este trabajo en otro momento, o dejarlo a la gloria de alguna otra persona más hábil que yo, que decir cosas o demasiado vulgares o poco exactas, que no habrían respondido a lo que espera el Lector, y a la belleza del asunto. Me limitaré a hacer notar con las pocas palabras que sea posible, la razón que hay entre esta materia y la de los Juegos, y las opiniones que serían necesarias tomar para acertar.

Para hablar con exactitud, nada depende del azar; cuando se estudia la naturaleza, se está pronto convencido que su Autor trata de una manera general y uniforme, y que lleva el carácter de una sabiduría y de una presciencia infinita. Así, para unir a esta palabra hazard una idea que sea conforme a la verdadera Filosofía, se debe pensar que todas las cosas están reguladas según leyes ciertas, donde la más de las veces el orden no nos es conocido, aquellas dependientes del azar en las que la causa natural nos es oculta. Después de esta definición se puede decir que la vida del hombre es un juego donde reina el azar.

Para hacer ver más precisamente que el Análisis de los Geómetras, y principalmente el que se emplea en este Tratado, es apropiado para disipar en parte las tinieblas que parecen esparcirse sobre las cosas de la vida civil que se refieren al futuro, es necesario señalar que incluso hay Juegos que se regulan sólo por el azar, y otros que se regulan en parte por el azar y en parte por la habilidad de los Jugadores; así entre las cosas de la vida hay las que el éxito depende enteramente del azar, y tras las cuales la conducta de los hombres tiene mucha parte; y que generalmente en todas las cosas de la vida sobre las que hemos tomado nuestro partido, nuestra deliberación debe reducirse, como en las apuestas sobre los Juegos, a comparar el número de los casos donde ocurrirá un cierto acontecimiento, al número de casos donde no ocurrirá; o, para hablar en Geometría, a examinar lo que esperamos multiplicado por el grado de probabilidad que hay de que lo obtengamos, que iguala o sobrepasa nuestra apuesta, es decir, los avances que debemos hacer, sea esfuerzo, sea dinero, sea crédito, y así.

Se sigue de aquí que las mismas reglas del Análisis que nos han servido para determinar en los Juegos los repartos de los Jugadores y la manera en la que ellos deben conducir su juego, pueden también servir *para determinar el justo grado de nuestras esperanzas en nuestras diversas empresas, y a enseñarnos la conducta que debemos tener para encontrar la mayor ventaja que sea posible. Está claro, por ejemplo, que el mismo método que nos ha servido para determinar en cuales circunstancias es a propósito del Hombre renunciar a las fichas debidas sin tener en cuenta la esperanza de conseguir quizás la totalidad empleada, aunque más difícilmente, sirva para determinar en cuáles circunstancias de la vida es necesario sacrificar un pequeño bien con la esperanza de conseguir uno mayor.*

Después de una larga discusión en la misma línea sobre las similitudes entre juegos de azar y problemas de la vida civil, Montmort concluye las siguientes dos reglas sirven para delinear los problemas de la vida real que pueden ser tratados por métodos de juegos azar.

Para terminar este paralelismo entre los Problemas sobre Juegos, y las cuestiones que se pueden proponer sobre las cosas económicas, políticas y morales, es necesario observar que en estas últimas como en aquellas de los Juegos, hay una especie de Problemas que se podrían resolver observando estas dos reglas; 1º, limitar la cuestión que se propone a un pequeño número de suposiciones, establecidas sobre hechos ciertos; 2º, hacer abstracción de todas las circunstancias en las cuales la libertad del hombre, este escollo perpetuo de nuestro conocimiento, podría tener alguna parte. Se cree que el señor Bernoulli había considerado estas reglas en la cuarta parte de su Obra, y es cierto que con estas dos restricciones se podrían tratar varios asuntos de política o de moral con toda la exactitud de las verdades geométricas.

Como “ejemplos admirables” en su prefacio Montmort cita los trabajos de Halley (1694) y el de Petty (1683) sobre aritmética política. Finalmente, da un pequeño recuento de la historia relacionada con De Méré, Pascal, Fermat y Huygens.

Entonces Montmort está motivado en parte por lo que ha leído sobre la obra de Bernoulli y en parte por los problemas sobre juegos de azar planteados por sus amigos y que estaba en el ambiente cultural de la élite científica francesa desde la correspondencia Pascal-Fermat (1654). Expresa puntos de vista sobre determinismo y probabilidad similares a los de Bernoulli. Sin embargo, los problemas más prácticos son tan complicados que es imposible evaluar el número de probabilidades a favor y en contra de la ocurrencia de un suceso y así calcular su probabilidad, y por lo tanto se limita a problemas sobre juegos de azar. Sin embargo, intenta (sin mucho éxito) formular restricciones a aquellos problemas susceptibles de análisis probabilístico.

El *Essay* (1708) es el primer texto íntegro publicado sobre teoría de la probabilidad, y representa un considerable avance comparado con los tratados de Huygens (1657) y Pascal (1665). Montmort continúa de una manera magistral el trabajo de Pascal sobre combinatoria y su aplicación a la solución de problemas sobre juegos de azar. También hace efectivo el uso de métodos de recurrencia y análisis para resolver problemas mucho más difíciles que los resueltos por Huygens. Finalmente, usa el método de series infinitas, como el indicado por Bernoulli (1690). Tras el Essay y de manera casi inmediata se publicaron varios textos más de una alta calidad y amplia información. Se produce lo que Hald denomina el "gran salto adelante".

Cuando el *Essay* fue escrito, los juegos de cartas se habían puesto muy de moda, y esto queda reflejado en el prominente lugar ocupado por el análisis probabilístico de tales juegos. También, con respecto a los juegos de dados el análisis de Montmort es mucho más extenso y general que las discusiones previas.

El trabajo pionero de Montmort tiene tres características: (1) introduce nuevos métodos de resolución de problemas asociados al nuevo cálculo; (2) da la solución de muchos nuevos problemas importantes; y (3) inspira a Nicolás Bernoulli y De Moivre a generalizar estos problemas y desarrollar nuevos métodos de demostración.

Los trabajos pioneros son con frecuencia de difícil lectura[3], y el *Essay* (1708) no es una excepción. En muchos lugares es también tedioso a causa de los numerosos detalles. Estas dificultades se han mejorado por la decisión de Montmort de presentar la solución de los problemas más interesantes con ejemplos numéricos solamente y establecer la solución general sin demostración. Sin embargo, en el *Avertissement* de la segunda edición, Montmort (1713) explica que ha omitido algunas demostraciones en la primera edición para estimular la curiosidad del lector –ciertamente tuvo éxito con respecto a Nicolás Bernoulli y De Moivre. Añade que ahora incluye estas demostraciones a requerimiento de algunos amigos.

En el *Avertissement* Montmort menciona la publicación de *De Mensura Sortis*. En 1712, De Moivre publica su *De Mensura Sortis* y en el prólogo escribe

> *Huygens fue el primero, que yo sepa, que presentó reglas para la solución de esta clase de problemas, que un autor francés ha ilustrado muy bien recientemente con varios ejemplos; pero este distinguido caballero no parece haber empleado la simplicidad y generalidad que la naturaleza de la materia demanda; por otra parte, como utiliza muchas incógnitas para representar las diversas condiciones de los jugadores, hace su cálculo muy complejo; y como supone que la destreza de los jugadores es siempre la misma, confina esta doctrina de juegos dentro de unos límites muy estrechos.*

[3] Un ejemplo, el pionero libro de Cardano sobre juego de dados, *Liber de Ludo Aleae*, 1564.

Desde luego es una gran injusticia caracterizar el trabajo de Montmort por el comentario de que ha ilustrado bien las reglas desarrolladas por Huygens con varios ejemplos. Montmort refuta enérgicamente la nota crítica de De Moivre, y en las páginas 361-370 en una carta dirigida a N. Bernoulli, da un “repaso” de *De Mensura Sortis* y hace una comparación con su propio trabajo. Así en la página 362 podemos leer:

> Problemes qui ſont reſolus dans mon Livre. Vous trouverés enfin que les queſtions qu'il traite, qui n'y ſont point réſolues, le ſont dans nos Lettres ; en ſorte que je ne crois pas qu'il y ait dans cet Ouvrage, d'ailleurs très bon, rien de nouveau pour vous, & rien qui puiſſe vous faire plaiſir

> Problemas que son resueltos en mi libro. Finalmente encontrará que los temas que aborda, cuyos puntos no se encuentran resueltos, lo están en nuestras cartas; así que no creo que haya en este libro, de hecho, muy bueno, algo nuevo para usted

O en su página 365:

> No sé por qué el autor se toma la molestia de resolver en las proposiciones 12, 13 y 14 de su libro los problemas propuestos por M Huygens que ya están resueltos por mí.

Y en la página siguiente:

> No puedo adivinar por qué razón este autor me hace reproches, y que motivo le lleva a pronunciarse contra mí, no dejándome el mérito de haber aplicado a los ejemplos las pretendidas reglas de M. Huygens, yo llamo a juicio a los geómetras que leyeron esto de M. Huygens y M. Pascal, los autores no hablan sobre esta materia. Pág. 369

De Moivre lamentó sus comentarios, y en el prefacio de la *Doctrine of Chances* (1718) escribe, *Sin embargo, si me hubiera permitido un poco más de tiempo para considerarlo, sin duda habría hecho justicia a su autor, por tener como propio que no sólo ha ilustrado el Método de Huygens con una gran variedad de bien elegidos ejemplos, sino que ha añadido diversas cosas curiosas de su propia invención… Desde la impresión de mi espécimen [De Mensura Sortis], el Sr. de Montmort, autor del Analyse des jeux de, ha publicado una segunda edición del libro en el que particularmente ha dado muchas pruebas de su singular genio y extraordinaria capacidad; testimonio que doy tanto a la verdad como a la amistad con la que él se complace en honrarme.*

La parte restante del *Avertissement* está ocupada por una historia de la teoría de la probabilidad antes de 1713. La segunda edición del *Essay* (1713) es una versión mejorada de la primera, no sólo porque Montmort recoge los teoremas combinatorios en una parte introductoria, sino también porque añade varias demostraciones y generalizaciones y su correspondencia con los Bernoulli. No hay duda que Montmort estaba muy influenciado por Nicolás Bernoulli y que las mejoras le deben mucho a la colaboración con él, por eso usábamos la expresión "mixtura" Montmort-Bernoulli para denominar la segunda edición.

Al publicar su correspondencia con los Bernoulli, Montmort deja cuidadosamente las cuestiones de prioridad a sus lectores.

La correspondencia con Nicolás Bernoulli es de una fascinante lectura. Toma la forma de una serie de intercambios amistosos de dificultad creciente. Habitualmente comienza con un problema planteado por Montmort, que ilustra la solución con un ejemplo numérico sin revelar su demostración; Nicolás Bernoulli entonces proporciona una demostración no sólo del problema original sino también de una generalización.

A juzgar por el número de referencias de los tres libros, el *Essay* nunca llegó a disfrutar de la popularidad del *Ars Conjectandi* de Bernoulli y *Doctrine of Chances* de De Moivre. Una razón de esto es que la segunda edición del *Essay* es una combinación de un libro de texto y una correspondencia científica sobre el desarrollo de los más importantes problemas del texto, por lo que es bastante difícil para el lector seguir la solución de un problema dado puesto que es tratado en muchos lugares diferentes del libro. Otra razón puede ser que Bernoulli y De Moivre fuesen renombrados matemáticos por lo que los demás matemáticos naturalmente mirasen a sus obras en lugar del trabajo de un “amateur”.

La contribución de Montmort (y la de Nicolás Bernoulli) ha sido pasada por alto e infravalorada por muchos autores. Existen, sin embargo, dos planteamientos integrales del trabajo de Montmort, a saber, el de Todhunter (1865) (Capítulo 8) y el de Henny (1975).

Concluimos este apartado utilizando las palabras finales del capítulo 8 de Todhunter:

> *El trabajo de Montmort en su conjunto debe ser considerado altamente meritorio por su agudeza, perseverancia y energía. Es digno de elogio el coraje que le llevó a trabajar en un campo hasta ahora tan poco cultivado, y su ejemplo sirvió para estimular a su más distinguido sucesor. De Moivre fue sin duda muy superior en capacidad matemática a Montmort, y disfrutó de la gran ventaja de una larga vida, que se extiende a más del doble de la duración de la de su predecesor; por el contrario, las circunstancias afortunadas de la posición de Montmort le dieron ese abundante tiempo libre, que a De Moivre en el exilio y la pobreza le debe haber resultado imposible asegurar.*

1.3. SOBRE EL CONTENIDO DE ESTA TESIS

En el siguiente capítulo analizamos el contenido combinatorio de la obra. A la manera de Pascal, Montmort nos introduce a su obra dando un importante repaso a la parte combinatoria conocida en su época.

En el capítulo 3 analizamos los juegos de azar contenidos en el *Essay*. Comenzaremos con los juegos de cartas, centrándonos en los que creemos más interesantes, como Pharaon, Lansquenet y Her. Analizamos a continuación los juegos de dados, especialmente el Quinquenove, así como otros juegos que hemos considerado interesantes de destacar.

En el capítulo 4 estudiamos la forma en que Montmort aborda la resolución del problema de los puntos (tópico de la literatura temprana del cálculo de probabilidades) aportando él mismo la resolución para el caso de jugadores con desigual destreza.

En el siguiente capítulo, en el quinto, otro tópico de la literatura incipiente, los cinco problemas propuestos por Huygens al final de su tratado, y que fueron tomados como retos por el resto de investigadores contemporáneos. Son analizadas sus resoluciones por parte de Montmort. Merece la pena detenerse en el quinto, sobre la "ruina del jugador" o "la duración del juego", que se ha repetido hasta nuestros días.

"El problema de la coincidencias" aparece por primera vez propuesto en el juego del *Treize*, estudiado por Montmort en su obra. Dedicamos el capítulo 6 a este asunto que tanta literatura ha generado en la historia del nuevo cálculo.

Como ya se ha comentado en varias ocasiones, la segunda edición del Essay contiene la correspondencia que Montmort mantuvo, tras la publicación de la primera edición, con James Bernoulli y, sobre todo, con el sobrino de éste, Nicolás. Aunque muchos detalles de la correspondencia ya son analizados en capítulos previos de la tesis, en los respectivos contextos de los problemas estudiados en ellos, dejamos el capítulo 7 para un análisis de la correspondencia. En este capítulo, hemos seguido la secuencia cronológica de la misma por lo que no hemos dividido el capítulo en apartados, sino que carta a carta se han analizado los contenidos más destacables en cada una de ellas.

Terminamos con un capítulo de conclusiones, futuras investigaciones y la bibliografía consultada.

CAPITULO 2

SOBRE COMBINATORIA

2.1. EL TRABAJO SOBRE COMBINATORIA DE MONTMORT

La primera parte del texto de Montmort está dedicada a la combinatoria, a imagen de cómo Pascal presentó su trabajo sobre cálculos de azar. Así, comienza presentando su propia tabla que le valdrá como instrumento de cálculo a lo largo de casi toda la obra:

Tabla del señor Pascal para las combinaciones

1.	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1
	1 .	2 .	3 .	4 .	5 .	6 .	7 .	8 .	9 .	10 .	11 .	12 .	13
		1 .	3 .	6 .	10 .	15 .	21 .	28 .	36 .	45 .	55 .	66 .	78
			1 .	4 .	10 .	20 .	35 .	56 .	84 .	120 .	165 .	220 .	286
				1 .	5 .	15 .	35 .	70 .	126 .	210 .	330 .	495 .	715
					1 .	6 .	21 .	56 .	126 .	252 .	462 .	792 .	1287
						1 .	7 .	28 .	84 .	210 .	462 .	924 .	1716
							1 .	8 .	36 .	120 .	330 .	792 .	1716
								1 .	9 .	45 .	165 .	495 .	1287
									1 .	10 .	55 .	220 .	715
										1 .	11 .	66 .	286
											1 .	12 .	78
												1 .	13
													1

Tabla 2.1

A la primera fila le llama “unidades”, a la segunda “números naturales”, a la tercera “número triangulares”, a la cuarta “número piramidales”, a la quinta “triángulo-piramidales”… *a causa de ciertas relaciones que ellos tienen con los triángulos, con las pirámides, & así, tienen propiedades muy singulares que los señores Fermat, Descartes, Pascal, y otros grandes Geómetras franceses y extranjeros han investigado con gran esmero.* Y añade: *Una de las principales, y de la cual se trata aquí, es que por su medio se puede encontrar de una vez en cuántas maneras diferentes un número cualquiera de fichas o de cartas o de cualquier otra cosa, puede ser combinado, es decir, tomados o bien de uno en uno, o dos a dos, o tres a tres, o cuatro a cuatro, y así, en un mayor número de fichas y de cartas.* O sea, identifica ya los números del triángulo con los números combinatorios y le sirve para introducirse en el cálculo de las combinaciones a través del propio triángulo aritmético, convirtiendo dicho cálculo en uno de sus objetivos fundamentales en esta parte del trabajo. Montmort es consciente de que con la combinatoria va a poder resolver los problemas sobre juegos que quiere abordar en su Tratado. La idea no era nueva, ya hemos citado a Pascal que 50 años antes escribe un tratado sobre el triángulo aritmético con la demostración de una serie de proposiciones que sirven para relacionar los números del triángulo y, con la identificación de dichos números, con los números figurados y los números combinatorios. El propio Pascal usa el triángulo para resolver uno de los problemas más famosos de la época sobre cálculo de probabilidades: el problema de los puntos. Estos trabajos de Pascal fueron publicados a título póstumo en 1665.

En la imagen que sigue mostramos un fragmento del inicio de esta parte del tratado. Hemos elaborado esa imagen imitando la edición de 1713, pero traducida al castellano:

T R A T A D O

DE LAS COMBINACIONES.

PRIMERA PARTE.

DEFINICIÓN.

Algunas veces se entiende por este término combinación, la manera en que varias cosas pueden ser tomadas diferentemente dos a dos. Yo le daría aquí una significación más extensa, y entendería por esta palabra la manera de encontrar de forma general todas las disposiciones que pueden tener sean dos, sean varias cosas, según las que se quiera tomar, o dos a dos, o tres a tres, o cuatro a cuatro, o cinco a cinco, o en fin de todas las maneras posibles.

PROPOSICIÓN I.

Siendo propuesto un número cualquiera de cosas, por ejemplo, las letras a, b, c, d, e, f, g, h, y así, se pide cuántas maneras diferentes hay de tomarlas, o una a una, o dos a dos, o tres a tres, o, en fin, de todas las maneras posibles.

Él mismo reconoce que Pascal en su tratado había dado la mejor y más completa exposición sobre combinatoria. El trabajo de Pascal consta de secciones separadas sobre los coeficientes binomiales, los números figurados, el desarrollo binomial, combinaciones, y sumas de potencias de números enteros, respectivamente. Las explicaciones de estas diferentes secciones se convierten, a veces, en una lectura tediosa dada las muchas repeticiones que nos encontramos. Sin embargo, Montmort da una teoría integrada de estos tópicos, pero para algunos resultados con demostraciones más simples sigue a Pascal. Desde luego lo hace después de haber leído la obra de Pascal.

En los primeros párrafos muestra de manera recurrente la coincidencia entre los números del triángulo y las combinaciones. En concreto, justifica con ejemplos repetidos la identificación de cada columna del triángulo con el número de combinaciones que se puedan formar considerando $n-1$ objetos (siendo n el número que identifica la posición de la columna), tomándolos de 1 en 1 (el número que ocupa la segunda posición), de 2 en 2 (el que ocupa la tercera), de 3 en 3 (el que ocupa la cuarta)… La lectura es prolija en detalles, pero ordenada, haciendo fácil la comprensión para el lector. Él da la expresión general para el término que ocupa un lugar asignado en el Triángulo Aritmético y fue el primero en darle nombre a dicho triángulo, antes que Blaise Pascal; le llamó *Table de M. Pascal pour les combinaisons*.

Al mismo tiempo, se va justificando el procedimiento de construcción de cada fila (cada elemento de una fila es la suma de los elementos de la fila inmediatamente superior, desde el primero hasta el que queda a una altura en un lugar anterior al número construido). La claridad en la exposición se muestra en el siguiente párrafo.

Por ejemplo, si se pide de cuántas maneras distintas seis cosas diferentes pueden ser tomadas dos a dos; se encontrará que el número quince, que responde a la tercera banda horizontal y a la séptima banda perpendicular, es el número que se busca: y, de la misma forma, si se quiere saber de cuántas maneras diferentes once cosas pueden ser tomadas cuatro a cuatro, se encontrará que el número 330, que responde a la quinta banda horizontal y a la décimo segunda banda perpendicular, es el número que se pide. Se encontrará del mismo modo todas las demás combinaciones imaginables, buscando el número que responde a una columna perpendicular, en la cantidad que sobrepasa una unidad el número de cosas propuestas, y en una columna horizontal que sea la tercera si las cosas se combinan de dos en dos, la cuarta si las cosas se combinan de tres en tres, y así.

Montmort demuestra la coincidencia entre los números del triángulo y las combinaciones en su *Proposición 1*. La demostración es muy del estilo de aquella época: mediante ejemplos. Así, considera seis objetos y calcula de cuántas maneras se pueden tomar de uno en uno, de dos en dos,…, de seis en seis. Acompaña los cálculos de referencias a los números del triángulo en los que comprueba las coincidencias. Tras el ejemplo con seis objetos propone una generalización para siete objetos, e indica que así se puede continuar hasta el infinito. Termina con una frase que en español se traduciría como *Lo que queda demostrado*.

Como es consciente de que puede ser tedioso y largo el procedimiento de construcción de la tabla para el cálculo de una combinación concreta, procede a dar una fórmula de cálculo construida a partir de las propiedades que ha ido citando para los números de la tabla. Así, Montmort escribe: *Para ahorrar el esfuerzo al Lector de formar Tablas que puedan servir para encontrar todas las combinaciones de las que se tenga necesidad en la serie, lo que es de una longitud excesiva cuando las combinaciones que se buscan son entre grandes números. Por ejemplo, cuando uno de los números es 49, y el otro es 100, es útil, incluso necesario encontrar alguna fórmula que pudiese dar el número buscado sin tener necesidad de conocer todas las combinaciones posibles entre números menores.* Montmort demuestra un lema (Lema I) e incorpora un corolario que describe la fórmula: *Se sigue del Lema precedente que si se busca de cuántas maneras el número q puede ser tomado en otro número mayor que sea llamado p, el número buscado será expresado por una fracción en la que el numerador será igual a tantos productos de p,* $p-1$, $p-2$, $p-3$, $p-4$, *& así, como q expresa de unidades, y cuyo denominador estará compuesto de un número igual de productos de números naturales* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *& así.*

La fórmula es la que ya Pascal ha dado en su tratado, y que con lenguaje actual podríamos escribir así:

$$C_p^q = \binom{p}{q} = \frac{p(p-1)(p-2)...(p-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot q}.$$

Montmort construye esta fórmula de manera recurrente empezando por un valor de p y q determinados e incrementando esos valores en una unidad. En el Corolario II Montmort demuestra la siguiente igualdad (escrita en términos actuales)

$$\binom{m}{p} = \binom{m}{q} \quad si \quad p + q = m\,.$$

A continuación Montmort aborda la construcción de los números figurados usando modificaciones del triángulo aritmético. Cita una demostración que ha leído en un *libro póstumo del señor Marqués de l'Hôpital* pero añade que su propia demostración es totalmente diferente a la de éste autor. En primer lugar propone escribir el triángulo en *forma cuadrada* desplazando hacia la derecha cada una de las filas de manera que todas comiencen a la misma altura. El resultado lo presenta en lo que él denomina Tabla II:

TABLA II.

1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1
1 .	2 .	3 .	4 .	5 .	6 .	7 .	8
1 .	3 .	6 .	10 .	15 .	21 .	28 .	36
1 .	4 .	10 .	20 .	35 .	56 .	84 .	120
1 .	5 .	15 .	35 .	70 .	126 .	210 .	330
1 .	6 .	21 .	56 .	126 .	252 .	462 .	792

Con esta tabla se da cuenta de que cada número de la misma es igual a la suma de aquel que está inmediatamente encima y aquel que está a la izquierda. Se da cuenta también de que cada banda perpendicular de esta tabla coincide con una banda horizontal de la del triángulo aritmético.

Montmort define los números figurados de manera ligeramente diferente a como lo hace Bernoulli, es decir, de la forma

$$f_n^m = \sum_{i=1}^{n+m-2} a_{i,m-1} = \binom{n+m-2}{m-1},$$

Es, sin embargo, notable la proximidad en la elección de los tópicos, demostraciones, y acuerdo en los ejemplos. Presenta una tabla con su regla para construir todos los números poligonales. Él escribe:

> Aunque esta investigación no tenga aparentemente utilidad alguna, y sea de pura curiosidad, he buscado *La Regla para todos los demás números polígonos hasta el infinito.*

	Núm. polígonos	Fórmulas de los números polígonos	Fórmula de los cuadrados	Fórmula de las raíces
Núm. triangulares	1. 3. 6. 10. 15. 21	$\frac{pp+p}{2}$	$\overline{\frac{pp+p}{2}\times 8+1}$	$2p+1$
Núm. cuadrados	1. 4. 9. 16. 25, 36	$\frac{2pp+0p}{2}$	$\frac{2pp+0}{2}$	$\frac{2p+0}{2}$
Núm. pentágonos	1. 5. 12. 22. 35. 52	$\frac{3pp-1p}{2}$	$\overline{\frac{3pp-p}{2}\times 24+1}$	$6p-1$
Núm. hexágonos	1. 6. 15. 28. 45. 66	$\frac{4pp-2p}{2}$	$\overline{\frac{4pp-2p}{2}\times 8+1}$	$\frac{8p-2}{2}$
Núm. heptágonos	1. 7. 18. 34. 55. 81	$\frac{5pp-3p}{2}$	$\overline{\frac{5pp-3p}{2}\times 40+9}$	$10p+3$
Núm. octógonos	1. 8. 21. 40. 65. 96	$\frac{6pp-4p}{2}$	$\overline{\frac{6pp-4p}{2}\times 12+4}$	$\frac{12p-4}{2}$
Núm. eneágonos	1. 9. 24. 46. 75. 111	$\frac{7pp-5p}{2}$	$\overline{\frac{7pp-5p}{2}\times 56+25}$	$14p-5$
Núm. decágonos	1. 10. 27. 52. 85. 126	$\frac{8pp-6p}{2}$	$\frac{8pp-6p}{2}\times 16+9$	$\frac{16p-6}{2}$
Núm. undecágonos	1. 11. 30. 58. 95. 141	$\frac{9pp-7p}{2}$	$\overline{\frac{9pp-7p}{2}\times 72+49}$	$18p-7$
Núm. dodecágonos	1. 12. 33. 64. 105. 156	$\frac{10pp-8p}{2}$	$\overline{\frac{10pp-8p}{2}\times 20+1}$[illegible]	$\frac{20p-8}{2}$

La primera de estas cuatro columnas representa los números poligonales y comprende hasta los dodecágonos. La segunda representa la fórmula de estos números. La tercera muestra por qué números es necesario multiplicar cada una de estas fórmulas y lo que es necesario sumar para convertirlos en cuadrado. La cuarta representa las raíces de la tercera.

Nada es más fácil que percibir el orden de la tercera y de la cuarta. Es suficiente señalar que en la tercera la diferencia que reina en los números 8, 12, 16, 20, & así, que deben multiplicar los polígonos pares es 4, y que es necesario sumar la serie de cuadrados 1, 4, 9, 16, 25, & así, y que la diferencia que reina en los números 24, 40, 56, 72, & así que deben multiplicar los polígonos impares es 16, y que se debe la serie de números cuadrados impares 1,9, 25, 49, & así por aquí se puede continuar esta Tabla hasta el infinito.

Nuestro autor no llega a la fórmula de Bernoulli para la suma de potencias de enteros.

Montmort introduce el símbolo $\underset{m}{\overset{n}{\square}}$ para el coeficiente Binomial, es decir, para denotar el número de combinaciones de n elementos tomados de m en m; sin embargo, mantendremos el moderno símbolo $\binom{n}{m}$ introducido por Euler.

2.2. SOBRE PROBLEMAS DE OCUPACIÓN. LA DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA MULTIVARIANTE Y LA DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL

Analizamos en primer lugar los resultados de Montmort para lo que hoy conocemos cada una de las dos distribuciones citadas. Sean N elementos divididos en f clases, con N_i elementos en la i-ésima clase, $N_1 + ... + N_f = N$. El número de formas en las que n elementos pueden ser seleccionados sin reemplazamiento entre los N elementos tal que n_i elementos son seleccionados de la clase i-ésima, $n = n_1 + ... + n_f$, es igual a

$$\binom{N_1}{n_1} ... \binom{N_f}{n_f} \tag{1}$$

Este es el número de posibilidades para conseguir un resultado específico. Dividiendo por el número total de posibilidades $\binom{N}{n}$ resulta lo que hoy es llamada *distribución hipergeométrica multivariante*. Pues bien, Montmort presenta (1) como uno de los muchos resultados que se desprenden del Triángulo Aritmético. Él presenta el problema de esta forma:

PROPOSICIÓN VII.

PEDRO, teniendo entre sus manos un número cualquiera de fichas de todos los colores, blancas, negras, rojas, verdes, & así, apuesta contra Pablo, que sacando al azar un número cualquiera determinado de fichas, él sacará tantas blancas, tantas negras, tantas rojas, tantas verdes, & así. Se pide cuántos azares tiene Pedro para hacer lo que se propone.

La demostración, muy al estilo de la época, aunque retórica es sencilla a partir de razonamientos condicionados. Un fragmento de la misma es como sigue:

20. ES necesario multiplicar el número que expresa de cuántas maneras las fichas blancas que Pedro debe tomar al azar, pueden ser tomadas de forma diferente en el número de fichas blancas propuestas, por el número que expresa de cuántas maneras las fichas negras que Pedro debe tomar al azar, pueden ser tomadas de forma diferente en el número entero de fichas negras propuestas; multiplicar a continuación este producto por el número que expresa de cuántas maneras diferentes las fichas rojas que Pedro se propone

extraer, pueden ser tomadas en las fichas rojas propuestas, multiplicar de nuevo ese producto por el número que expresa de cuántas maneras diferentes las fichas verdes que se piden pueden ser tomadas entre todas las verdes, & así, sucesivamente, se tendrá el número buscado.

Esta solución lleva consigo la demostración, y no tiene dificultad alguna; pero como este Teorema será un resultado de un gran uso, voy a hacer aquí la aplicación sobre un ejemplo.

EJEMPLO.

Pedro tiene cincuenta y dos fichas entre sus manos, a saber, trece blancas, trece negras, trece rojas, trece azules, o, lo que viene a ser lo mismo, un juego entero compuesto de cincuenta y dos cartas. Se pide de cuántas maneras diferentes él puede sacar cuatro cartas al azar de estas cincuenta y dos, sacando un rombo, un corazón, una pica y un trébol.

21. SI no tiene más que trece rombos y trece corazones, tendría ciento sesenta y nueve maneras diferentes de tomar en esas veintiséis cartas dos cartas de esas dos clases; pues cada uno de los trece rombos podría ser tomado con el as de corazones, lo que hace trece, o con el dos de corazones, lo que hace aún trece, y así, sucesivamente, cada uno de los trece rombos podría ser tomado con cada uno de los trece corazones, lo que hace 13×13, es decir, ciento sesenta y nueve maneras de tomar un rombo y un corazón en veintiséis cartas.

Ahora si a estos trece rombos y a estos trece corazones se añaden trece tréboles, sería necesario para tener todas las maneras posibles de tomar un rombo, un corazón y un trébol en estas treinta y nueve cartas, multiplicar por 13 las ciento sesenta y nueve maneras precedentes, pues cada una de estas ciento sesenta y nueve maneras diferentes se podrían encontrar con el as de trébol, lo que hace $13\times13\times1$, y con el dos, lo que hace $13\times13\times2$, es decir, trescientos treinta y ocho maneras diferentes, y con el tres, lo que hace quinientas siete maneras diferentes, y así sucesivamente, cada una de los ciento sesenta y nueve formas diferentes se podría encontrar con cada uno de los trece trébol, lo que hace $13\times13\times13$, es decir, dos mil ciento noventa y siete maneras diferentes de tomar un rombo, un corazón y un trébol en estas treinta y nueve cartas. Se observará de igual forma que la cuarta potencia de trece expresará de cuántas diferentes cuatro cartas de diferentes clases, a saber, un rombo, un corazón, un pica y un trébol, pueden ser tomadas en las cincuenta y dos cartas: Éste sería el mismo razonamiento en todas las demás clases. Por tanto, & así.

Consideramos a continuación *n* pruebas independientes con *f* resultados igualmente probables en cada prueba, por ejemplo, *n* lanzamientos de un dado que tiene *f* caras. El número de maneras de conseguir n_i resultados de un tipo determinado, por ejemplo, n_i lanzamientos con la cara *i*, $n_1 + ... + n_f = n$, es igual a

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}...\binom{n-n_1-...-n_{f-1}}{n_f} = \frac{n!}{n_1!\cdots n_f!}. \qquad (2)$$

Dividiendo por f^n, conseguimos la *distribución multinomial*, la cual es presentada también por nuestro autor, de la siguiente forma:

PROPOSICIÓN XII.

Arrojando al azar un número cualquiera p *de dados donde el número de caras* f *sea también cualquiera; encontrar cuántos lanzamientos hay para llevar un cierto número fijo y determinado* q, *de ases.*

Montmort hace tres interpretaciones del coeficiente multinomial (2), a saber, como el número de combinaciones, como el número de permutaciones, y como un coeficiente en el desarrollo multinomial.

En su análisis Montmort usa tres ejemplos:

1. Extraer sin reemplazamiento desde una baraja (muestreo aleatorio en población finita), que es el fragmento presentado arriba.
2. Lanzamiento de un número de dados cada uno teniendo *f* caras (muestreo aleatorio en población infinita o muestreo con reemplazamiento en una población finita).
3. Los coeficientes en el desarrollo multinomial $\left(a_1 + \ldots + a_f\right)^n$.

Hoy han sido estudiados muchos más ejemplos de este tipo; por ejemplo, el muestreo de poblaciones clasificadas en diversas categorías; la distribución del número de accidentes entre los días de la semana, y la distribución de un número de partículas en compartimentos, habitualmente discutido en términos de una distribución aleatoria de bolas en celdas, por tal razón estos problemas son llamados *problemas de ocupación*.

Consideremos una tabla bidimensional cuyos elementos los denotamos por$\left(a_{ij}\right)$; supongamos, por ejemplo, una baraja, donde $i = 1,\ldots, f$ denota el número que corresponde a la cara y $j = 1,\ldots, s$, el número del palo, por lo que el número total de elementos es igual a $N = f \cdot s$. En una baraja de 52 naipes, por ejemplo, tendríamos $i = 1,\ldots,13$, (donde 1 es el as, 2 es el dos,…, 11 es la sota, 12 el caballo, y 13 el rey) y $j = 1,2,3,4$, siendo entonces $s = 4$, representando *j* cada uno de los cuatro palos de la baraja.

Supongamos que se extraen *n* elementos sin reemplazamiento de un total de *N* elementos y que contamos el número de elementos en la muestra para cada valor de la cara, sin tener en cuenta el número del palo. Esto lleva a la *distribución de ocupación,* $n_1, n_2, \ldots, n_f$, donde n_i denota el número de elementos cuya cara es igual a *i*, $n_1 + ... + n_f = n$, $n_i = 0,1,...,s$, y $0 \le n_i \le n$. Según (1), la correspondiente probabilidad de ocurrencia de ese resultado es

$$\binom{s}{n_1} \cdots \binom{s}{n_f} \Big/ \binom{s \cdot f}{n}. \tag{3}$$

Para encontrar la distribución de las n_i según el tamaño, tenemos que contar el número de los valores de las caras para los que los números de ocupación son igual $0,1,...,s$, respectivamente. Supongamos que la distribución resultante es

Valor de n_i	k_0	k_1	…	k_c
Número de valores de las caras	r_0	r_1	…	r_c

donde $0 \le k_0 < k_1 < ... < k_c \le s$, $\sum_0^c r_j = f$, y $\sum_0^c k_j r_j = n$. Para explicar esta tabla hacemos uso del siguiente ejemplo. Supongamos que extraemos 10 naipes al azar y que los resultados han sido: 2 ases, 3 sotas, 3 caballos y 2 reyes. k_0 sirve para indicar las caras que no han aparecido en esta extracción. En este caso, $k_0 = 0$. Mientras que r_0 cuenta el número de caras que no han aparecido. Igualmente, k_1 lo empleamos para indicar que las caras que han aparecido una sola vez, mientras que r_1 es el número de caras distintas que han aparecido una sola vez, y así. La tabla anterior, para este caso particular, quedaría de esta forma.

Valor de n_i	$k_0 = 0$	$k_1 = 1$	$k_2 = 2$	$k_3 = 3$
Número de valores de las caras	$r_0 = 9$	$r_1 = 0$	$r_2 = 2$	$r_3 = 2$

En el caso de la baraja, esta distribución da el número de valores de las caras que faltan en una determinada extracción, el número de valores no repetidos, el número de dobles, etc. En el ejemplo de las bolas, la distribución da el número de celdas vacías, el número de celdas ocupadas por una, doblemente ocupadas, etc. Con esta notación (3) puede escribirse como

$$\binom{s}{k_1}^{r_1} \cdots \binom{s}{k_c}^{r_c}.$$

Sin embargo, esta expresión no proporciona el número de posibilidades de conseguir la distribución en cuestión dado que no hemos tenido en cuenta el hecho de que no se consideran los valores de las caras. Estamos interesados sólo en el número de triples, por ejemplo, que ocurren en la muestra, no en sus valores de las caras. El número de posibilidades de arriba debe por tanto multiplicarse por el número de formas en que el número dado de valores de las caras puede ser elegido entre los f valores de las caras; esto es, por

$$\binom{f}{r_1}\binom{f-r_1}{r_2}\cdots\binom{f-r_1-\ldots-r_{c-1}}{r_c} = \frac{f!}{r_1!\cdots r_c!},$$

por lo que el resultado final se convierte en

$$\binom{s}{k_1}^{r_1} \cdots \binom{s}{k_c}^{r_c} \frac{f!}{r_1!\cdots r_c!}. \tag{4}$$

Este es el resultado dado por Montmort en 1708, Proposición 14, sin demostración, y en 1713, Proposición 8, que presentamos a continuación, con una demostración similar a la que hemos dado.

22. LLAMARÉ cartas simples a las cartas de diferentes tipos; carta doble, dos cartas de la misma clase; por ejemplo, dos Reyes, dos Damas, dos Sotas, & así, carta triple, tres cartas de una misma categoría; por ejemplo, tres ases, tres sotas, tres diez, & así, carta

cuádruple, cuatro cartas de una misma especie, carta quíntuplo, cinco cartas de una misma clase, & así.

PROPOSICIÓN VIII.

Sea un número de cartas cualquiera compuesto de un número igual de ases, de dos, de tres, de cuatro, & así. Se pide cuántos azares hay para que Pedro sacando entre esas cartas un cierto número de cartas a voluntad, extraiga tantas de simples, tantas de dobles, tantas de triples, tantas de cuádruples, tantas de quíntuplos, & así.

Consideremos a continuación el lanzamiento de n dados, cada uno con f caras numeradas desde 1 hasta f. Esta configuración es análoga a la anterior, con la modificación de que s palos han sido reemplazados por n dados en los que el resultado de cada dado es independiente de los resultados de los otros dados, correspondiente a la extracción con reemplazamiento en lugar de sin reemplazamiento.

Sin tener en cuenta la numeración de los dados, la distribución de los n resultados según los valores de las caras es dada por $\left(n_1,...,n_f\right)$, $n_i = 0,1,...,n$, y $n_1 + ... + n_f = n$. La correspondiente distribución de probabilidad se obtiene dividiendo el coeficiente multinomial (2) por el número total de resultados f^n. Señalemos que para extracciones sin reemplazamiento, consideramos $\binom{fs}{n}$ muestras igualmente probables, mientras que para extracciones con reemplazamiento tenemos f^n muestras igualmente probables.

Como antes, ahora nos olvidamos de los números de las caras y consideramos la distribución de las n_i según el tamaño. Usando la misma notación, excepto que $k_c \le n$ en lugar de $k_c \le s$, el número de posibilidades para la distribución de ocupación dada se convierte en

$$\frac{n!}{(k_1!)^{r_1}\cdots(k_c!)^{r_c}}\frac{f!}{r_1!\cdots r_c!} \qquad (5)$$

donde el coeficiente multinomial (2) se ha escrito en términos de los k y los r y después multiplicado por el número de maneras en las que el número dado de valores de las caras puede elegirse entre los f valores de las caras. Este es el resultado dado por Montmort en 1708, Proposición 30, sin demostración, y con un error de imprenta en la fórmula, pero con la fórmula correcta usada en los ejemplos numéricos, y en 1713, Proposición 15, con la demostración como se da arriba.

PROPOSICIÓN XV.

Sea un número cualquiera p *de dados, cuyo número de caras* f *sea también cualquiera. Se pide cuántos azares hay para que se encuentren tanto de simples, tantos de dobles, tantos de triples, & así, indeterminados. Llamo dados simples, los dados de diferente clase, o que marcan diferentes puntos, dado doble, dos dados de la misma clase, o que marcan los mismos puntos; por ejemplo, doble dos o ternas, & así, dado triple, tres dados de la misma clase, por ejemplo, tres ases o tres dos, & así, y así, dado cuádruplo, quíntuplo, séxtuplo, & así, cuatro, o cinco, o seis dados de la misma clase.*

SOLUCIÓN.

42. COMO en este supuesto puede haber varios múltiplos igualmente elevados; es decir, que varias de entre las letras *b, c, d, e, & así* del Problema precedente que expresan los números o los exponentes de los múltiplos, pueden aquí ser iguales. Sea llamado B el número que expresa cuántos múltiplos hay del primer exponente dado, C el número que expresa cuántos múltiplos hay del segundo exponente, D el número que expresa cuántos hay del tercero, & así. La fórmula que da el número buscado es

$$\begin{matrix} p \\ \square \\ b \end{matrix} \times \begin{matrix} p-b \\ \square \\ c \end{matrix} \times \begin{matrix} p-b-c \\ \square \\ d \end{matrix} \times \begin{matrix} p-b-c-d \\ \square \\ e \end{matrix} \times \text{ \& así} \times \begin{matrix} f \\ \square \\ B \end{matrix} \times \begin{matrix} f-B \\ \square \\ C \end{matrix} \times \begin{matrix} f-B-C \\ \square \\ D \end{matrix} \times$$

$$\begin{matrix} f-B-C-D \\ \square \\ E \end{matrix} \times \text{ \& así}.$$

Por ejemplo, si lanzando nueve dados al azar se pide cuántas maneras diferentes hay de sacar un cuádruplo, dos dobles y un simple, se tendrá $b=4$, $c=2$, $d=$ también 2, porque se pide dos dobles, y $e=1$, se tendrá también $B=1$, $C=2$, y $D=1$, y, por tanto, la fórmula dará

$$\binom{9}{4}\times\binom{9-4}{2}\times\binom{9-4-2}{2}\times\binom{9-4-2-2}{1}\times\binom{6}{1}\times\binom{6-1}{2}\times\binom{6-1-2}{1}=$$
$$126\times10\times3\times1\times6\times10\times3=680400.$$

Es necesario observar que la primera parte de la fórmula debe tener tantos términos como múltiplos hay, y la segunda tantos términos como diferentes múltiplos.

Esta fórmula puede aún recibir otra forma

$$q\times\frac{\binom{f}{B}\times\binom{f-B}{C}\times\binom{f-B-C}{D}\times\binom{f-B-C-D}{D}\times\&\text{ así}}{k\times l\times m\times n\times\ \&\text{ así}}.$$

Entiendo por *q* el número de todas las ordenaciones posibles de *p*, y por *k, l, m, n, & así*, los números que expresan todas las diversas ordenaciones posibles, de *b, c, d, e, & así.*

DEMOSTRACIÓN.

LA primera parte de la formula está demostrada en la Proposición precedente. La demostración de la segunda es casi la misma, pues se ve bien que el número de casos determinados de la Proposición precedente debe ser multiplicado por el número de las diferentes combinaciones que los múltiplos pueden recibir en el número de caras *f*. Ahora bien, cuando ciertas caras se emplean por un número *B* de múltiplos, no queda más que $f-B$ caras; y cuando las otras caras son empleadas por los *C*, no queda más que $f-B-C$ de las caras, y así el resto. Por tanto, & así.

COROLARIO.

43. SE sigue de esta Proposición y del *art. 29*, que en un polinomio $q=A+B+C+D+E+F+\ \&\text{ así}$, elevado al exponente *p*, la fórmula de arriba dará la suma de los coeficientes de todos los términos donde los exponentes de una o varias letras indeterminadamente serán elevadas a la

primera, o segunda, o tercera potencia, & así. Si se pide, por ejemplo, la suma de los coeficientes de todos los términos donde habrá una letra cualquiera a la cuarta potencia, dos cualquiera a la segunda, y por fin, cualquiera a la primera, se encontrará por la fórmula de arriba la suma buscada $=680400$.

Para el uso de dados de los jugadores, Montmort da una tabla de los valores de (2) y (5) para $f=6$, y $n=2,\ldots,9$, ver 1708, pp. 138-140, y 1713, pp. 200-202. Montmort vuelve a una discusión de (5) y sus aplicaciones (1713, pp. 353-355) y reclama prioridad para esta fórmula.

números a conseguir	8 o 48	1	maneras de conseguirlos
	9 o 47	8	
	10 o 46	36	
	11 o 45	120	
	12 o 44	330	
	13 o 43	792	
	14 o 42	1716	$-\ 8\times 1$
	15 o 41	3432	$-\ 8\times 8$
	16 o 40	6435	$-\ 8\times 36$
	17 o 39	11440	$-\ 8\times 120$
	18 o 38	19448	$-\ 8\times 330$
	19 o 37	31824	$-\ 8\times 792$
	20 o 36	50388	$-\ 8\times 1716\ +28\times 1$
	21 o 35	77520	$-\ 8\times 3432\ +28\times 8$
	22 o 34	116280	$-\ 8\times 6435\ +28\times 36$
	23 o 33	170544	$-\ 8\times 11440\ +28\times 120$
	24 o 32	245157	$-\ 8\times 19448\ +28\times 330$
	25 o 31	346104	$-\ 8\times 31824\ +28\times 792$
	26 o 30	480700	$-\ 8\times 50388\ +28\times 1716-56\times 1$
	27 o 29	657800	$-\ 8\times 77520\ +28\times 3432-56\times 8$
	28	888030	$-\ 8\times 116280\ +28\times 6435-56\times 36$

Para un lanzamiento con n dados Montmort señala que el número total de resultados diferentes cuando se tiene en cuenta el orden es f^n mientras que el número de resultados diferentes es sólo

Para un lanzamiento con n dados Montmort señala que el número total de resultados diferentes cuando se tiene en cuenta el orden es f^n mientras que el número de resultados diferentes es sólo

$$\binom{f+n-1}{n}$$

cuando se ignora el orden (ver 1708, Proposición 32; 1713, Proposiciones 10 y 11).

PROPOSICIÓN XII.

Arrojando al azar un número cualquiera p *de dados donde el número de caras* f *sea también cualquiera; encontrar cuántos lanzamientos hay que realizar para conseguir un cierto número fijo y determinado* q, *de ases.*

SOLUCIÓN.

35. LA fórmula que da el número buscado es $\overline{f-1}^{p-q} \times \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4} \times \frac{p-4}{5} \times \frac{p-5}{6}$, & así. De manera que haya tantos de estos productos como unidades haya en q.

Por ejemplo, si se quiere saber cuántos azares hay para tener precisamente tres ases, ni más ni menos, con 9 dados ordinarios, se encontrará sustituyendo en la fórmula para *f*, 6, para *p*, 9, para *q*, 3. $5^6 \times \frac{9}{1} \times \frac{8}{2} \times \frac{7}{3} = 1312500$.

DEMOSTRACIÓN.

1º. $\overline{f-1}$ debe ser elevado al exponente $p-q$, pues un cierto número de dados q están limitados para marcar as, por ejemplo, con exclusión de todos los demás dados, esos otros dados no pueden marcar más que dos, tres, cuatros, & así, lo que da $f-1$, o $\overline{f-1}^2$, o $\overline{f-1}^3$, o $\overline{f-1}^4$, & así, según que haya o un dado, o dos dados, o tres dados, o cuatro dados de resto, & así, que por la suposición no deberían marcar el as, puesto que los demás dados pueden verse como dados que tuviesen sólo $\overline{f-1}$ caras, y que el exponente $p-q$ determina cuántos dados hay que están dispuestos en no marcar as.

Ahora, para ver que $\overline{f-1}^{p-q}$ debe ser multiplicado por tantos productos de cantidades p, $\frac{p-1}{2}$, $\frac{p-2}{3}$, $\frac{p-3}{4}$, & así, como unidades hay en q, es necesario observar que si se lanzan p dados al azar, se quiere que haya q que marquen ases, los otros dados marquen otros puntos cualquiera, se podrá determinar p dados en marcar as, de tantas maneras como q puede ser tomado en p. Ahora bien, por el *art. 5*, la fórmula $\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdot\frac{p-3}{4}\cdot\frac{p-4}{5}$, & así, expresa de cuántas maneras se puede tomar p, o una a una, o dos a dos, o tres a tres, o cuatro a cuatro, & así. Por tanto, & así.

También demuestra que el número de posibilidades para conseguir k ases, es

$$\binom{n}{k}(f-1)^{n-k}. \tag{6}$$

PROPOSICIÓN XIII.

Arrojando al azar un número cualquiera p *de dados, donde el número de caras* f *sea también cualquiera, encontrar cuántas maneras hay de conseguir al menos un cierto número* q *de ases.*

Vemos que no hay una distinción fuerte entre combinatoria y problemas de probabilidad en el libro de Montmort; muchos problemas tratados después podían haber sido incluidos en la Parte 1, y algunos de los problemas incluidos en la Parte 1 podrían haber sido tratados como juegos de cartas o dados.

El análisis combinatorio de Montmort es más profundo y amplio que el de Bernoulli y requiere más perseverancia del lector debido a su gran dificultad. Además, debido a que Montmort no escribe en el estilo pedagógico elaborado de Bernoulli, el texto no llegó a ser tan popular como el de Bernoulli.

2.3. ENCONTRAR EL NÚMERO DE POSIBILIDADES DE LANZAR *s* PUNTOS CON *n* DADOS, TENIENDO CADA UNO *f* CARAS

En su página 46 Montmort enuncia un problema nuevo que no aparecía en su primera edición. Aparece bajo Proposición XVI:

PROPOSITION XVI.

Jettant au hazard un nombre quelconque d *de dés, dont le nombre des faces,* f, *soit aussi quelconque, trouver combien il y a de hazards pour amener tel ou tel point,* p, *à volonté.*

PROPOSICIÓN XVI.

Lanzando al azar un número cualquiera d *de dados, cuyo número de caras,* f, *también es un número cualquiera, encontrar cuántos azares hay para sacar tal o tal punto,* p, *a voluntad.*

Hay *n* dados, cada uno con *f* caras enumeradas desde 1 hasta *f;* se trata de determinar cuántas posibles maneras hay de que la suma de los números que salgan en los dados sea igual a *p.*

Este problema fue resuelto para dos y tres dados comunes, por enumeración, por Cardano y Galileo y por Huygens en sus notas introductorias a la Proposición 10. La enumeración llega a ser bastante más complicada para más de tres dados y debió requerir una gran cantidad de trabajo a Montmort (1708, pp. 141, 143; 1713, pp. 203, 205) quien publicó una tabla con la distribución de los puntos desde dos hasta nueve dados comunes.

No reveló su método, pero en una carta a John Bernoulli de 15 de noviembre de 1710 (ver Montmort, 1713, p. 307) da la fórmula sin demostración para encontrar la distribución en el caso de $f = 6$, fórmula que es fácil de generalizar para cualquier *f*.

La fórmula general con una demostración combinatoria fue publicada por Montmort (1713, pp. 46-50). Mientras tanto, De Moivre (1712, pp. 220-22; 1718, pp. 17-19) publica la misma fórmula sin demostración; publicó por primera vez su demostración por medio de una función generatriz en su *Miscellanea Analytica* (1730, pp. 191-197), indicando que había sido derivada de la primera edición de Montmort. James Bernoulli (1713, pp. 23-25) da un algoritmo para encontrar la distribución y lo usa para tabular la distribución desde dos hasta seis dados. El mismo algoritmo fue dado por Montmort (1713, pp. 51-55).

En palabras de Todhunter (1865, p. 86), "*De Moivre parece aquí que apenas hace plena justicia a Montmort; este último tiene bastante derecho al crédito de la primera enunciación explícita de la regla, a pesar de que puede estar contenida implícitamente en los Principia y Methodus Differentialis de Newton*."

Presentaremos estos resultados, comenzando con Bernoulli, continuando con Montmort y terminando con De Moivre, aunque este no fue el orden de publicación.

Además del método clásico de combinatoria, se usan dos nuevos métodos de demostración, el método de inclusión y exclusión y el método de función generatriz.

2.3.1. EL PROCEDIMIENTO DE JAMES BERNOULLI

Bernoulli da su algoritmo con el formato de una tabla en el que introduce un dado más cada vez. Para un dado hay una posibilidad para cada uno de los seis puntos. Combinando dos dados hay $6^2 = 36$ posibilidades para distribuirse entre las posibles sumas de 2 a 12.

Como Bernoulli señala, el método de construcción es obvio; cada cara del primer dado es sucesivamente combinada con todas las caras del segundo dado, y las 36 posibilidades se distribuyen sobre la tabla de doble entrada teniendo en cuenta la suma de los puntos. Sumando el número de posibilidades en cada columna, se encuentra la distribución del número de posibilidades correspondientes a la suma de puntos.

Para tres dados el número de posibilidades es $6^3 = 216$, que se distribuirán entre las posibles sumas de 3 a 18. Combinando la distribución de las 36 posibilidades para dos dados con las seis posibilidades para el tercero en una tabla análoga a la Tabla 2, Bernoulli encuentra el resultado mostrado en la Tabla 3. Hemos abreviado la tabla de Bernoulli porque la segunda mitad es simétrica con la primera. De esta forma Bernoulli obtiene el número de posibilidades para un máximo de seis dados.

Tabla 2.2. Algoritmo de Bernoulli y Montmort para encontrar el número de posibilidades de lanzar un número dado de puntos con dos dados

	Suma de puntos para dos dados										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	2	3	4	5	6					
1	1	1	1	1	1	1					
2		1	1	1	1	1	1				
3			1	1	1	1	1	1			
4				1	1	1	1	1	1		
5					1	1	1	1	1	1	
6						1	1	1	1	1	1
Número de posibilidades	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tabla 2.3. Algoritmo para encontrar el número de posibilidades de lanzar un número dado de puntos con tres dados

	Suma de puntos para dos dados							
	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	5	4
2		1	2	3	4	5	6	5
3			1	2	3	4	5	6
4				1	2	3	4	5
5					1	2	3	4
6						1	2	3
Número de posibilidades	1	3	6	10	15	21	25	27

2.3.2. SOLUCIÓN COMBINATORIA DE MONTMORT

Sea x_i el número de puntos lanzados por el dado i, $x_i = 1, 2, ..., f$. El número total de puntos entonces es $s_n = x_1 + ... + x_n$, $s_n = n, n+1, ..., nf$. Dejemos que el número "reducido" de puntos sea $r_n = s_n - n + 1$, $r_n = 1, 2, ..., n(f-1)+1$.

La fórmula de Montmort para el número de posibilidades de conseguir s puntos puede entonces escribirse como

$$N(s;n,f) = \sum_{i=0}^{[(s-n)/f]} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{s-if-1}{r-if-1} = \sum_{i=0}^{[(s-n)/f]} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{s-if-1}{n-1} \qquad (1)$$

Montmort primero demuestra que

$$N(s;n,f) = \binom{s-1}{r-1} = \binom{s-1}{n-1} \quad \text{para} \quad f \geq r = s-n+1 \qquad (2)$$

Considera los casos para $n = 1, 2$ y 3, y por enumeración completa demuestra que el número de posibilidades puede encontrase por sucesivas adiciones en la misma vía que los números figurados por lo que (2) se cumple.

En la Tabla 2.4 damos una versión abreviada de la tabla de Montmort para $n = 3$. La tabla muestra la formación de cada suma listando los valores de los tres de *x* incrementando el orden de magnitud. Para contar el número de posibilidades es necesario tener en cuenta el número de permutaciones, 1, 3, y 6, respectivamente.

Tabla 2.4. Para valores dados de $s = x_1 + x_2 + x_3$, la tabla contiene las composiciones (x_3, x_2, x_1) en orden creciente de magnitud, y el correspondiente número de posibilidades

$s=$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	111	112	113	114	115	116	117	118	119	11,10
			122	123	124	125	126	127	128	129
					133	134	135	136	137	138
							144	145	146	147
									155	156
				222	223	224	225	226	227	228
						233	234	235	236	237
								244	245	246
										255
							333	334	335	336
									344	345
										444
N_0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
N_1					3	9	18	30	45	63
N_2									3	9
N	1	3	6	10	12	12	10	6	3	1

Fuente: Montmort (1713, p. 48)

La fila denotada por N_0 muestra el número de posibilidades cuando no hay restricciones sobre las *x*, por lo que para cada *s*, el mayor valor de cualquier *x* iguala a $s - 2$. Para cada *s*, el valor de N_0 se obtiene sumando el número de permutaciones de las composiciones listadas en la correspondiente columna.

La fila denotada por *N* se obtiene excluyendo todas las composiciones que contengan uno o más números mayores que 4, como se indica por los dominios triangulares por encima de la línea escalonada.

Esto significa que todos los *x* se restringen a los números 1,…, 4, y *N* entonces da el número de posibilidades de lanzar *s* puntos con 3 dados de cuatro caras.

El problema es probar que *N* puede también obtenerse de N_0 aplicando las correcciones N_1 y N_2, de acuerdo con (1), que demuestra que

$$N(s;3,4) = \binom{s-1}{2} - 3\binom{s-5}{2} + 3\binom{s-9}{2} = N_o - N_1 + N_2 \qquad (3)$$

Vemos que N_1 se obtiene simplemente multiplicando N_0 por 3 y moviendo cuatro lugares a la derecha, y que, similarmente, N_2 es obtenido multiplicando N_0 por 3 y moviendo ocho lugares a la derecha.

Restringimos primero una y solo una de las *x*, por ejemplo x_1, a tomar sobre los valores de 1 a 4. Considerando $s = 12$, la composición que será excluida se muestra en la Tabla 2.5.

Tabla 2.5. La composición (x_3, x_2) dando $s = x_1 + x_2 + x_3 = 12$ para x_1 mayor que 4

x_1	10	9	8	7	6	5
$s - x_1$	2	3	4	5	6	7
	11	12	13	14	15	16
			22	23	24	25
					33	34
Número de posibilidades	1	2	3	4	5	6

Montmort no incluye una tabla exactamente como ésta, sino que la tabla 2.5 es realmente sólo parte de su tabla para $n=2$. Se verá que el correspondiente número de posibilidades es igual a los números figurados de orden 2, siendo su suma 21. Este hecho es explicado por Montmort de la siguiente forma: Obtener 12 puntos con $x_1>4$ y (x_2,x_3) libre de restricciones es obviamente lo mismo que obtener $12-4=8$ puntos sin ningunas restricciones para las *x*.

Sin embargo, se sigue de (2) (ver también Tabla 2.4) para $s=8$, que el correspondiente número de posibilidades es igual 21, a saber, los números figurados de orden 3, que, como se muestra en la Tabla 2.5, se obtiene como la suma de los números figurados de orden 2. Dado que un dado se puede seleccionar entre los tres de tres maneras, tenemos que deducir $3\times 21=63$ si sólo uno de los *x* está restringido a la vez (ver N_1 en Tabla 2.4 para $s=12$).

Comparando las Tablas 2.4 y 2.5, vemos que hemos restado demasiado; en lugar de 3×21 casos, habría que deducir 3×18 casos. La diferencia se debe a las composiciones que contienen dos valores *x* mayores que 4, a saber, 156, 165, y 244. Para corregir este error hemos excluido el número de casos correspondientes a 165, que están incluidos en la Tabla 2.5 pero no en la Tabla 2.4, por lo que los 21 se reducirán a 19, y además debemos contar 255 sólo una vez en lugar de dos, por lo que 19 se reduce a 18.

Por lo tanto, tenemos que añadir $3(1+2)=9$, como se muestra en la Tabla 2.4 como N_2 para $s=12$. Montmort explica este resultado como sigue: Obtener 12 puntos con $x_1>4$, $x_2>4$, y ninguna restricción sobre x_3 es lo mismo que obtener $12-2\times 4=4$ puntos sin ninguna restricción sobre las *x*. A partir de (2) (ver también Tabla 2.4 para $s=4$) tenemos que el correspondiente número de posibilidades es igual a 3. Ya que las dos *x* bajo restricción pueden elegirse de tres maneras, tenemos que multiplicar por 3.

La demostración dada por Montmort sigue el razonamiento del ejemplo. Montmort (1713, p. 50) escribe,

> …pues siendo expresados los dados por las letras *A, B, C, D, E & así*, y que uno de estos dados, por ejemplo *A*, sea determinado por llevar un punto más alto que el número de caras *f*, es evidente que este dado *A*, con los demás dados *B, C, D, & así*, debe hacer otro *f*, puntos que están ciertamente comprendidos en una de las caras del dado *A*, incluso $p - f$ puntos: pues es necesario tomar el número de casos que expresa de cuántas maneras se puede conseguir $p - f$ puntos, y multiplicarlo por el número de dados; puesto que éste puede ser o el dado *A*, o el dado *B*, o el dado *C*, 6 así, que sea determinado en llevar un punto más alto que el número de caras. Ahora bien, puede ocurrir que se haya suprimido demasiado, a saber, en el caso donde dos dados son determinados por llevar cada uno un punto mayor que el número de caras; y entonces será necesario sumar el número de casos para conseguir $p - 2f$ puntos multiplicado por $\frac{d \cdot d - 1}{1 \cdot 2}$,

Montmort continúa esta vía de razonamiento hasta $s - 4f$ puntos.

Vemos que Montmort usa lo que hoy es llamado *método de inclusión y exclusión* en su demostración. Él no señala este método en su razonamiento, pero lo emplea como una cuestión de rutina; también lo usa en su demostración del número de coincidencias.

Ni Montmort ni De Moivre discuten las propiedades de la función $N(s; n, f)$ aparte de señalar su simetría alrededor de $s = n(f + 1)/2$. Montmort da una tabla completa de los términos de $N(s;8,6)$, de la que se puede ver la construcción. La distribución es, obviamente, una combinación lineal de $\left[(s-n)/f\right]$ polinomios de grado $n-1$, añadiéndose un nuevo término cada vez que *s* se incrementa por *f*.

Como se ha mencionado antes, Montmort tabula la distribución para $n=2,3,...,9$ y $f=6$. No hace comentarios sobre la forma de la distribución para valores crecientes de *n*.

2.3.3. GENERALIZACIONES

Montmort (1713, pp. 52-55) deriva un algoritmo para encontrar el número de posibilidades de lanzar *s* puntos con *n* dados, teniendo diferente número de caras, $f_1,...,f_n$. Esta es una extensión del algoritmo dado en las Tablas 2.2 y 2.3. Montmort y Bernoulli consideran otras dos interpretaciones (aplicaciones) del algoritmo, a saber, encontrar el número de combinaciones con repeticiones restringidas y el número de divisores de un entero dado.

Sean $a_1,...,a_n$ que denotan los *n* elementos diferentes o los *n* diferentes números primos mayores que 1. El número de *m*-combinaciones con repetición cuando a_i se restringe a que ocurra a los sumo f_i veces, puede encontrarse por el algoritmo anterior. Bernoulli (1713, p. 123) da un ejemplo numérico similar al dado por Montmort.

Sea el número dado $N=a_1^{f_1}...a_n^{f_n}$. Todos los divisores de *N* pueden escribirse en la misma forma que *N* con f_i sustituido por d_i, siendo $0 \le d_i \le f_i$ y

$\sum d_i = d$. El algoritmo entonces da el número de divisores de dimensión $d = s - n$ incluyendo el divisor 1 correspondiente a $d = 0$.

Bernoulli (1713, pp. 59-62) también deriva un algoritmo para encontrar el número de *m*-combinaciones con repeticiones restringidas.

Finalmente, Montmort (1713, pp. 59-62) considera el difícil problema de encontrar el número de posibilidades de conseguir la suma *s* extrayendo *n* cartas sin reemplazamiento de una baraja de *k* palos con *f* cartas numeradas de 1 a *f* en cada palo. Primero da un algoritmo para resolver este problema con un único palo, y entonces muestra con un ejemplo cómo usar esto para tres palos de 10 cartas cada uno. No da una fórmula para la solución análoga a (1). Bernoulli (1713, pp. 169-174) da un ejemplo similar.

Montmort otorga naturalmente una gran importancia a su investigación en general, y especialmente a todo lo que sea nuevo en la segunda edición. Dice, en su página 65, "*Este problema es, como vemos, toda la extensión y la posible universalidad, y parece que no deja nada que desear sobre este asunto, que todavía no ha sido tratado por persona, que yo sepa: Tengo la demostración en el Journal des Sçavans en el mes de marzo de 1711*".

Mostramos a continuación la demostración que presenta nuestro autor en consonancia con lo comentado anteriormente.

SOLUCIÓN.

44. SEA $p - d + 1 = q$, y sea designado por esta marca arbitraria $\boxed{q}$ el número figurado de orden *d*, que corresponde a *q*, es decir, el primer número de orden *d*, si $q = 1$; y el segundo de orden *d*, si $q = 2$

; y el tercero, si $q = 3$, & así, la fórmula $\boxed{q} - d \times \boxed{q-f} +$
$+ \frac{d \cdot d-1}{1 \cdot 2} \times \boxed{q-2f} - \frac{d \cdot d-1 \cdot d-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \boxed{q-3f} + \frac{d \cdot d-1 \cdot d-2 \cdot d-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times \boxed{q-4f} -$
& así, expresará el número buscado.

Para hacer entender mejor esta fórmula, voy a hacer la aplicación, dando en la Tabla siguiente el número de azares que hay para conseguir cada punto posible con 8 dados.

números a conseguir	8 o 48	1	maneras de conseguirlos
	9 o 47	8	
	10 o 46	36	
	11 o 45	120	
	12 o 44	330	
	13 o 43	792	
	14 o 42	1716	$-\ 8\times1$
	15 o 41	3432	$-\ 8\times8$
	16 o 40	6435	$-\ 8\times36$
	17 o 39	11440	$-\ 8\times120$
	18 o 38	19448	$-\ 8\times330$
	19 o 37	31824	$-\ 8\times792$
	20 o 36	50388	$-\ 8\times1716 \quad +28\times1$
	21 o 35	77520	$-\ 8\times3432 \quad +28\times8$
	22 o 34	116280	$-\ 8\times6435 \quad +28\times36$
	23 o 33	170544	$-\ 8\times11440 \quad +28\times120$
	24 o 32	245157	$-\ 8\times19448 \quad +28\times330$
	25 o 31	346104	$-\ 8\times31824 \quad +28\times792$
	26 o 30	480700	$-\ 8\times50388 \quad +28\times1716-56\times1$
	27 o 29	657800	$-\ 8\times77520 \quad +28\times3432-56\times8$
	28	888030	$-\ 8\times116280 \quad +28\times6435-56\times36$

Se ve por esta Tabla que hay, por ejemplo, 1708 maneras de conseguir 14 o 42 con 8 dados, y 133288 maneras de conseguir 27 o 29, & así.

DEMOSTRACIÓN.

CUANDO el número de caras de cada dado no es menor que $p-d+1$, los números figurados de orden *d*, Tabla primera, *art. 1*, dan siempre el número de azares diferentes para conseguir tal o tal punto.

Para asegurarse es necesario considerar la relación que se encuentra entre la manera en que se forman los diferentes puntos con uno, dos, tres dados, & así, y la manera en que se forman los números de primer, segundo, tercero, & así, rango horizontal, *art. 1*, se encontrará fácilmente esta relación en las Tablas siguientes.

Primera Tabla para conseguir con un dado,

o 1	o 2	o 3	o 4	o 5	o 6	
1	2	3	4	5	6	formación de los puntos
1	1	1	1	1	1	manera de conseguir estos puntos

Segunda Tabla para conseguir con dos dados,

o 2	o 3	o 4	o 5	o 6	o 7	o 8	o 9	o 10	o 11	o 12	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	1,10	1,11	
		22	23	24	25	26	27	28	29	2,10	
				33	34	35	36	37	38	39	
						44	45	46	47	48	
	Formación de los puntos							55	56	57	
										66	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Maneras de conseguir estos puntos

Tercera Tabla para conseguir con tres dados

o 3	o 4	o 5	o 6	o 7	o 8	o 9	o 10	o 11	o 12	o 13	o 14
111	112	113	114	115	116	117	118	119	11,10	11,11	11,12
		122	123	124	125	126	127	128	129	12,10	12,11
				133	134	135	136	137	138	139	13,10
						144	145	146	147	148	149
								155	156	157	158
										166	167
			222	223	224	225	226	227	228	229	22,10
					233	234	235	236	237	238	239
							244	245	246	247	248
									255	256	257
	Formación de los puntos.										266
						333	334	335	336	337	338
								344	345	346	347
										355	356
	Maneras de conseguir estos puntos.										
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78

Se ve, 1º, por la primera Tabla, que el rango de las unidades expresa todas las maneras de conseguir con un dado o un as, o un dos, o un tres, & así. 2º. Por la segunda Tabla, que los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, & así expresan todas las maneras de conseguir con dos dados o dos, o tres, o cuatro, o & así, puntos, donde la razón es que para formar estos puntos, juntando el as del segundo dado con todos los puntos que se pueden conseguir con el primero, y a continuación el dos del segundo dado, con todos los puntos que se pueden conseguir con los del primero, excepto el as; y a continuación el tres del segundo dado, con todos los puntos del primero, excepto el as y el dos, & así. 3º. Por la tercera Tabla, que los números triangulares 1, 3, 6, 10, 15, & así, expresan todas las maneras de conseguir con tres dados, o tres, o cuatro, o cinco, & así, por esta razón, que para formar estos puntos se une al as del tercer dado todos los puntos de la Tabla precedente para dos dados, y a continuación el dos del tercer dado con todos los puntos de la Tabla precedente donde el as no se encuentre, y a continuación el tres del tercer dado, con todos los puntos de la Tabla precedente donde no se encuentre ni el as, ni el dos, y así el resto.

De donde es evidente que esta formación de los diferentes puntos es la misma que la de los números figurados, *art. 1*, es decir, en una y otra, una suma reiterada, estos últimos números expresarán siempre todas las maneras de conseguir todos los puntos posibles, cuando las caras de los dados sean marcadas con cifras que pueden servir para marcar estos puntos; pues, en los dados ordinarios con seis caras, se ve que esta regla no ha lugar, y que no hay, por ejemplo, siete maneras de conseguir 8 con 2 dados; puesto que no habiendo caras marcadas con un 7, es necesario suprimir 17, y que no hay 8 maneras de conseguir 9, puesto que es necesario suprimir los puntos 18, 27, & así, es lo que se ha querido hacer observar por los trazos que se han situado en estas Tablas, para hacer entender los lanzamientos que son necesarios suprimir en los dados ordinarios, lo que se puede también aplicar a todos los demás supuestos del número de caras de cada dado, como se hará ver en los Corolarios que se darán a continuación.

Nos queda ahora, pues, para acabar de demostrar la fórmula, hacer ver en general lo que es necesario suprimir del número que responde al rango perpendicular de orden p, y al rango horizontal d: ese número es el primer término de nuestra fórmula.

Es necesario sustraer de ese número, el número de casos por los cuales puede llegar que por la formación del punto dado falla hacer entrar un número mayor que el número de caras de un dado. Ahora bien, hay d veces tantos casos para esto, como hay para conseguir un punto expresado por $p-f$ con el mismo número de dados; pues siendo expresados los dados por las letras *A, B, C, D, E & así*, y que uno de estos dados, por ejemplo *A*, sea determinado por llevar un punto más alto que el número de caras *f*, es evidente que este dado *A*, con los demás dados *B, C, D, & así*, debe hacer otro *f*, puntos que están ciertamente comprendidos en una de las caras del dado *A*, incluso $p-f$ puntos: pues es necesario tomar el número de casos que expresa de cuántas maneras se puede conseguir $p-f$ puntos, y multiplicarlo por el número de dados; puesto que éste puede ser o el dado *A*, o el dado *B*, o el dado *C*, 6 así, que sea determinado en llevar un punto más alto que el número de caras. Ahora bien, puede ocurrir que se haya suprimido demasiado, a saber, en el caso donde dos dados son determinados por llevar cada uno un punto mayor que el número de caras; y entonces será necesario sumar el número de casos para conseguir $p-2f$ puntos multiplicado por $\frac{d \cdot d-1}{1 \cdot 2}$, puesto que dos dados, por ejemplo, *A* & *B* siendo determinados por llevar puntos más altos que *f*, no les queda por hacer con los otros dados *C, D, E,* & así más que $p-2f$ puntos; y como se puede tomar *d* dados en $\frac{d \cdot d-1}{1 \cdot 2}$ maneras dos a dos, es necesario multiplicar el número de casos para conseguir $p-2f$ puntos por $\frac{d \cdot d-1}{1 \cdot 2}$. Por la misma razón, cuando pueda ocurrir que tres dados estén determinados por llevar cada uno puntos más altos que *f*, será necesario aún suprimir el número de casos para conseguir $p-3f$ puntos multiplicado por $\frac{d \cdot d-1 \cdot d-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, y aún añadir el número de casos para conseguir $p-4f$ puntos multiplicado por $\frac{d \cdot d-1 \cdot d-2 \cdot d-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, en el caso de que cuatro dados pudiesen, para formar el punto dado, llevar cada uno un punto más alto que el número de caras *f*; y continuando así, alternativamente, esta suma y esta sustracción, se tendrá por fin el verdadero número que exprese de cuántas maneras el punto dado puede ser conseguido. *C. Q. F. D.*

CAPITULO 3

PROBLÊMES
SUR
LES JEUX DE HAZARD.

SECONDE PARTIE.

PROBLEMAS SOBRE JUEGOS DE AZAR

3.1. SOBRE JUEGOS DE CARTAS

La segunda parte de Montmort se refiere a los juegos de azar que impliquen cartas. Para mostrar el método de demostración de Montmort vamos a trabajar con dos juegos de cartas, Pharaon y Lansquenet, y un juego de bolos, el problema de Robarte, en el que, para encontrar la esperanza de los jugadores, Montmort usa combinatoria, recurrencia, probabilidades condicionadas, y suma de números figurados.

El impacto que supuso el trabajo de Montmort en el momento de su aparición puede verse en la discusión inspirada por su derivación de la esperanza del banquero en el Pharaon, que lleva a las contribuciones de John y Nicholas Bernoulli, Struyck, De Moivre, Daniel Bernoulli y Euler.

Montmort comienza definiendo la esperanza de un jugador como $e = ps$, donde p es la probabilidad de ganar y s es el total apostado. En este aspecto sigue la línea de la época: Pascal, Huygens, Caramuel… Todos hacen "valoraciones" de juegos a través de sus esperanzas, y las mismas son calculadas como se ha dicho. Considerando un juego con dos jugadores, define el juego como justo si la ratio de las apuestas de los jugadores es igual a la ratio de sus esperanzas. Define la *ventaja* de un jugador como su esperanza menos su apuesta.

Asumiendo que la probabilidad de ganar es proporcional al número de posibilidades favorables al jugador, demuestra que la esperanza del jugador es igual a $e = (m \cdot s + n \cdot 0)/(m + n)$ si hay m casos de conseguir s y n casos de conseguir 0. Así encuentra la probabilidad de ganar como el número de casos favorables dividido por el total de casos posibles. No establece de manera explícita que todos los casos han de ser igual de verosímiles, pero está claro por el contexto que esto era lo que tenía en mente.

3.1.1. PHARAON


PROBLÊME
SUR LE PHARAON.
Déterminer generalement l'avantage du Banquier par rapport aux Pontes.

El Pharaon se juega con una baraja común de 52 cartas. Al comienzo del juego, el adversario del banquero, el jugador, apuesta la cantidad 1 en uno de los 13 valores de las caras. El banquero comienza extrayendo dos cartas sucesivas. Si la primera carta extraída tiene el mismo valor de cara que la del adversario, el banquero gana la apuesta del adversario. Si la segunda carta extraída tiene el mismo valor de cara que la del adversario, el banquero ha de pagar 1 al adversario. Si ambas cartas tiene el mismo valor de cara que la del adversario, el banquero gana la mitad de la apuesta del adversario. Si ambas cartas difieren de la del adversario, el juego continúa con las restantes 50 cartas, el adversario señalando un valor de cara, el banquero extrayendo dos cartas, y así. Esta regla general se modifica por una regla para la ventaja del banquero, a saber, que la *segunda* carta en la *última* extracción no cuenta.

Montmort analiza un caso en que el montón consta de p cartas, siendo p par, y el número de la carta del adversario está q veces en el mismo, $1 \le q \le p$. Designaremos las cartas por $a_1,\ldots,a_q;b_1,\ldots.b_{p-q}$. Montmort considera las $p!$ permutaciones igualmente probables y señala para cada una si el banquero consigue la cantidad 2, 0, o $\frac{3}{2}$, o equivalentemente, si gana $1,-1$, o $\frac{1}{2}$. La correspondiente media da la esperanza del banquero $e_p(q)$ y la ventaja del banquero $u_p(q)=e_p(q)-1$. La fórmula para u_p es más simple que la de e_p ya los casos con $+1$ y -1 se equilibran entre sí.

Montmort comienza con una detallada discusión de las permutaciones para $p=2$, 4 y 6, y calcula los correspondientes valores de $e_p(q)$. Señala que cuando una permutación comienza con dos *b*, e_p puede entonces expresarse por medio de e_{p-2}, por lo que el problema puede ser resuelto por recurrencia. Volviendo al caso general, deriva una fórmula de recurrencia como la que se indica en la siguiente tabla.

DERIVACIÓN DE LA FÓRMULA DE RECURRENCIA

Resultado	*ab*	*ba*	*aa*	*bb*
Nº de posibilidades	$q(p-q)$	$(p-q)q$	$q(q-1)$	$(p-q)(p-q-1)$
Premio	2	0	$\frac{3}{2}$	$e_{p-2}(q)$
Ganancia	1	–1	$\frac{1}{2}$	$u_{p-2}(q)$

Tabla 3.1

El número total de posibilidades es $p(p-1)$. Para $q>2$ tenemos que

$$e_p(q)=\frac{2q(p-q)+\frac{3}{2}q(q-1)+e_{p-2}(q)(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)}, \qquad (1)$$

$$u_p(q)=\frac{\frac{1}{2}q(p-q)+u_{p-2}(q)(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)}. \qquad (2)$$

Para $p=1$ Montmort considera las $p!$ permutaciones de $a_1,b_1,\ldots,b_{p-1}$. Si ocurre a_1 en un lugar impar, el banquero obtiene 2; si ocurre a_1 en un lugar par, el banquero obtiene 0, excepto para el caso donde a_1 ocurra en último lugar, que da 1. Por tanto,

$$e_p(1)=\left\{2\left(\frac{p}{2}\right)+1\right\}\frac{(p-1)!}{p!}=1+\frac{1}{p}, \tag{3}$$

por lo que $u_p(1)=\dfrac{1}{p}$.

Para $q=2$ la única contribución a u_p llega de los $p/2$ casos, donde el banquero extrae a_1 y a_2 juntas. Los $p/2-1$ casos dan al banquero $\dfrac{1}{2}$, y el último caso da 1. Por tanto,

$$u_p(2)=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)+1\right\}\frac{2!(p-2)!}{p!}=\frac{p+2}{2p(p-1)}. \tag{4}$$

Montmort no deriva $u_p(2)$ directamente como hemos hecho arriba, sino que él consigue el mismo resultado por una modificación de la fórmula de $u_p(q)$ para $q>2$, lo que vamos a probar.

Por sucesivas sustituciones en (2) Montmort encuentra que

$$u_p(q)=\frac{q^{(2)}}{2p^{(2)}}\sum_{i=0}^{h}\frac{(p-q)^{2i}}{(p-2)^{2i}},\quad h=\begin{cases}\dfrac{p-q}{2} & \text{para } q \text{ par,}\\[2mm] \dfrac{p-q-1}{2} & \text{para } q \text{ impar.}\end{cases} \tag{5}$$

Multiplicando el numerador y denominador por $(p-2-2i)^{(q-2-2i)}$, obtiene

$$u_p(q)=\frac{q^{(2)}}{2p^{(2)}}\sum_{i=0}^{h}\frac{(p-2-2i)^{(q-2)}}{(p-2)^{(q-2)}} \tag{6}$$

$$=\frac{q^{(2)}}{2p^{(2)}}\sum_{i=0}^{h}\binom{p-2-2i}{q-2}\Big/\binom{p-2}{q-2} \tag{7}$$

$$= \sum_{i=0}^{h} \binom{p-2-2i}{q-2} \Big/ 2\binom{p}{q}. \tag{8}$$

Señalando que $u_p(q)$ depende de la suma de números figurados alternativos de orden $q-1$, Montmort afirma que tales sumas se pueden encontrar por medio de sus fórmulas de suma (15.4.13) pero que usará un método más directo "basado en una curiosa propiedad de los números figurados".

Montmort define el *k*-ésimo número figurado de orden *m* por la recurrencia

$$f_k^m = \sum_{j=1}^{k} f_j^{m-1}, \quad f_k^1 = 1, \quad m = 2, 3, \ldots, \tag{9}$$

de modo que

$$f_k^m = \binom{m+k-2}{m-1}. \tag{10}$$

Denotando la suma de números figurados alternativos por F_k^m, tenemos

$$F_k^m = f_k^m + f_{k-2}^m + \ldots, \tag{11}$$

siendo el último término $f_2^m = m$ para k par y $f_1^m = 1$ para k impar. De las definiciones se sigue que

$$f_k^m - f_{k-1}^m = f_k^{m-1},$$

$$f_k^m + f_{k-1}^m + f_{k-2}^m + f_{k-3}^m + \ldots = f_k^{m+1},$$

$$f_k^m - f_{k-1}^m + f_{k-2}^m - f_{k-3}^m + \ldots = F_k^{m-1}.$$

Sumando las dos últimas ecuaciones y dividiendo por 2, Montmort encuentra la recurrencia

$$F_k^m = \frac{1}{2} f_k^{m+1} + \frac{1}{2} F_k^{m-1},$$

lo que lleva a

$$F_k^m = \frac{1}{2} f_k^{m+1} + \frac{1}{4} f_k^m + \frac{1}{8} f_k^{m-1} + \dots + \frac{1}{2^m}\left(f_k^2 + c_k \right) \qquad (12)$$

donde $c_k = 0$ para k par, y $c_k = 1$ para k impar. Para su posterior uso Montmort también demuestra que

$$F_k^m = \frac{1}{2} f_{k+1}^{m+1} - \frac{1}{2} F_{k+1}^{m-1},$$

lo que conduce a

$$F_k^m = \frac{1}{2} f_{k+1}^{m+1} - \frac{1}{4} f_{k+2}^m + \frac{1}{8} f_{k+3}^{m-1} - \dots - \frac{(-1)^m}{2^m}\left(f_{k+m}^2 + d_{k+m} \right) \qquad (13)$$

donde $d_{k+m} = 0$ para $k+m$ par, y $d_{k+m} = -1$ para $k+m$ impar.

Escribiendo (8) en la forma

$$u_p(q) = F_{p-q+1}^{q-1} \Big/ 2\binom{p}{q},$$

se obtiene de (12) que

$$u_p(q) = \left\{ \frac{1}{2}\binom{p-1}{q-1} + \frac{1}{4}\binom{p-2}{q-2} + \dots \right\} \Big/ 2\binom{p}{q}$$

$$= \sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{2^{i+1}} \frac{q^{(i)}}{p^{(i)}} + \frac{1}{2^q} \frac{q^{(q)}}{p^{(q)}} g_q, \qquad (14)$$

donde $g_q = 1$ para q par, y $g_q = 0$ para q impar. Por medio de esta fórmula Montmort tabula $u_p(q)$ para $q = 3, 4, \dots, 8$; los dos primeros resultados son

$$u_p(3)=\frac{3}{4(p-1)} \text{ y } u_p(4)=\frac{2p-5}{2\left(p^2-4p+3\right)}. \tag{15}$$

De los resultados dados anteriormente, en la primera edición (1708) aparecen los siguientes: la recurrencia (1) para $e_p(q)$; la solución general (8) en términos de números figurados sin demostración en la página 23; el lema sobre la suma de números figurados alternantes aparece sin demostración en las pp. 24-25 de su primera edición; y los valores de $u_p(q)$ para $q=1,...,8$ que se dan en las páginas 24-25.

Habiendo obtenido $u_p(q)$ en la forma (8) por una combinación de razonamientos combinatorios y recurrencia, es curioso que Montmort no derive estos resultados después con un argumento combinatorio directo. Éste fue dado, sin embargo, por John Bernoulli en su carta a Montmort (1713, pp. 284-287). Bernoulli señala que la demostración se hace más simple si uno considera sólo las $\binom{p}{q}$ permutaciones de q aes y $p-q$ bes, en lugar de las $p!$ permutaciones de p elementos diferentes. Demuestra esto para $p=4$ y 6 y entonces afirma sin demostración que

$$u_p(q)=\left\{1+\binom{q}{2}+\binom{q+2}{4}+...\binom{p-2}{p-q}\right\}\Big/2\binom{p}{q}$$

$$=\frac{(q-2)^{q-2}+q^{(q-2)}+...+(p-2)^{q-2}}{p^{(q-2)}}\frac{q^{(2)}}{2p^{(2)}} \tag{16}$$

para q par, y da una fórmula similar para q impar. Bernoulli escribe que Montmort encontrará que esta fórmula da el mismo resultado particular, esto es, $u_p(q)$ para $q=1,...,8$ como se establece en su libro; Bernoulli parece (como

Todhunter) pasar por alto el hecho de que Montmort ha dado la fórmula general (8) y que (17) sólo es ligeramente diferente en la forma.

La cuestión de interés es qué clase de razonamiento combinatorio usa John Bernoulli. Es tentador sugerir que John tuvo su resultado de James, quien usó combinatoria para resolver un problema muy similar en el juego de cartas Bassette.

En su réplica, Montmort (1713, pp. 303-304) señala que él tiene desde hace tiempo conocimiento de la fórmula (5), que sólo difiere ligeramente en su forma de la de Bernoulli.

ſont très belles. J'en ai une depuis long-temps peu diffe-rente des vôtres, ſoit que q ſoit pair ou impair. La voici :

$$\frac{1}{p \times p-1} + \frac{p-q \cdot p-q-1}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3} + \frac{p-q \cdot p-q-1 \cdot p-q-2 \cdot p-q-3}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4 \cdot p-5}$$
$$+ \frac{p-q \cdot p-q-1 \cdot p-q-2 \cdot p-q-3 \cdot p-q-4 \cdot p-q-5}{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4 \cdot p-5 \cdot p-6 \cdot p-7} + \&c.$$

Nicholas Bernoulli en una carta a Montmort (1713, p. 299) da la fórmula (16) sin demostración y Montmort la demuestra en p. 99 por medio de (13).

$$\frac{1}{4} \times \frac{q}{p-q+1} - \frac{1}{8}\,\frac{q \cdot q-1}{p-q+1 \cdot p-q+2} + \frac{1}{16} \times \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2}{p-q+1 \cdot p-q+2 \cdot p-q+3}$$
$$- \frac{1}{32} \times \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2 \cdot q-3}{p-q+1 \cdot p-q+2 \cdot p-q+3 \cdot p-q+4} + \&c.$$

Esta nota descubre el fundamento de la diferencia que se encuentra entre mi fórmula de arriba, y la que sigue, de la que el señor Nicolás Bernoulli me ha dado conocimiento en su carta del 26 de febrero de 1711, que se encontrará al final de este Libro.

$$\frac{1}{4}\times\frac{q}{p-q+1}-\frac{1}{8}\times\frac{q\cdot q-1}{p-q+1\cdot p-q+2}+\frac{1}{16}\times\frac{q\cdot q-1\cdot q-2}{p-q+1\cdot p-q+2\cdot p-q+3}$$
$$-\frac{1}{32}\times\frac{q\cdot q-1\cdot q-2\cdot q-3}{p-q+1\cdot p-q+2\cdot p-q+3\cdot p-q+4}+ \text{ \& así.}$$

Esta última parece preferible, en que no se emplea nada más que tantos términos como unidades hay en $q-1$, en lugar que en la mía, cuando q es un número par, es necesario tomar tantos términos de la serie como unidades hay en q; y en este caso multiplicar el último término por 2: esta excepción resta de alguna forma uniformidad a la fórmula. Pero esta ventaja es quizás compensada por los signos alternativos y los q que se encuentran en el denominador en la fórmula del señor Bernoulli, y principalmente porque se opera sobre números más grandes. Para hacer la comparación, sea propuesto encontrar la suma de estos números, por ejemplo, que son de cuarto orden, $120+56+20+4=$ 200. Se tiene por mi fórmula $\frac{1}{2}\times 330+\frac{1}{4}\times 120+\frac{1}{8}\times 36+\frac{1}{16}\times 8$. Y según la del señor Bernoulli $\frac{1}{2}\times 495-\frac{1}{4}\times 220+\frac{1}{8}\times 66-\frac{1}{16}\times 12$.

Presumiblemente, Nicholas entendió la indicación de Montmort de su demostración de (12) y entonces derivó (13) para uso de su propia demostración.

Con referencia al *Essay* de Montmort (1713), Struyck (1716, pp. 104-107) da una demostración puramente combinatoria. Señala que cualquier permutación que comience con *a* puede descomponerse en dos que comiencen con *ab* y *aa*, respectivamente, y que las correspondientes probabilidades son

$$\frac{q}{p}=\frac{q(p-q)+q(q-1)}{p(p-1)}.$$

La compara con permutaciones que comienzan con *ba*, que tienen una probabilidad de $(p-q)q/p(p-1)$, y demostrará que la ventaja del banquero puede expresarse en términos de la diferencia de estas probabilidades.

Ignorando la regla de que la última carta no cuenta, Struyck establece que el ganador del juego es el primero que extrae una *a* de una caja que contiene *q* aes y $p-q$ bes, extrayendo alternativamente el banquero y el que apuesta.

Este problema es, sin embargo, el mismo que el segundo problema de Huygens generalizado a la extracción sin reemplazamiento. Por tanto, la probabilidad del banquero de ganar es

$$P_1 = \frac{q}{p} + \frac{(p-q)^{(2)}}{p^{(2)}}\frac{q}{p-2} + \frac{(p-q)^{(4)}}{p^{(4)}}\frac{q}{p-4} + \ldots$$

$$= \left\{ \binom{p-1}{q-1} + \binom{p-3}{q-1} + \ldots \right\} \Big/ \binom{p}{q},$$

y la probabilidad del que apuesta es similarmente,

$$P_2 = \left\{ \binom{p-2}{q-1} + \binom{p-4}{q-1} + \ldots \right\} \Big/ \binom{p}{q}.$$

La ventaja del banquero, dependiendo de su prioridad, es así $\frac{1}{2}(P_1 - P_2)$. Dado que,

$$\binom{p-x}{q-1} - \binom{p-x-1}{q-1} = \binom{p-x-1}{q-2},$$

la ventaja del banquero se convierte en

$$\left\{\binom{p-2}{q-2}+\binom{p-4}{q-2}+\ldots\right\}\Big/2\binom{p}{q},$$

de acuerdo con (8).

De Moivre (1718, pp. 40-44, 55-58) obtiene $u_p(q)$ para $q=1,\ldots,4$ con un argumento combinatorio similar al usado por Struyck. En su prefacio (1718, p. XI), De Moivre escribe “Admito que algunos grandes matemáticos antes que yo se han tomado la molestia de calcular le ventaja del banquero… Pero aun así, la curiosidad de los investigadores permaneció insatisfecha; la cuestión principal, y con mucho la más difícil, relativa al *Pharaon* o *Bassette*, es la de qué tanto por ciento consigue el banquero del total del dinero aventurado.”

Entonces pasa a convertir q en una variable aleatoria. Imagina que m veces sucesivas el que apuesta pone su dinero en un valor cara elegido al azar, haciendo su primera elección antes de la primera extracción. La ventaja media del banquero se convierte en

$$\bar{u}=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{4}u_{p-2i}(q)\binom{p-2i}{q}\binom{2i}{4-q}\Big/\binom{p}{4}, \tag{18}$$

donde el factor por $u_{p-2i}(q)$ iguala la probabilidad de que q de las cuatro cartas permanezcan en stock.

De Moivre reduce esta expresión a un polinomio en p y m dividido por $p^{(4)}$. Para $p=52$ y $m=23$, encuentra $\bar{u}=0.0299$. Lo que significa que la ventaja media del banquero es sobre el 3% de la apuesta. En ese prefacio De Moivre está muy entusiasmado con esta solución.

Como señala Todhunter (p. 152), la idea de De Moivre es poco realista desde el punto de vista del jugador. Hoy la idea es interesante principalmente como un ejemplo temprano de un procedimiento aleatorio.

Respecto a este juego Montmort da dos tablas de resultados numéricos respeto del Pharaon. Una de estas tablas pretende ser una exposición exacta de la ventaja del banquero en cualquier etapa del juego, suponiendo que se jugó con una baraja de 52 naipes; la otra tabla es una exposición aproximada de la ventaja de la banca.

Puede hacerse una observación con respecto a la tabla anterior. La tabla consta de cuatro columnas; la primera y la tercera son correctas. La segunda columna debe calcularse a partir de la fórmula $\frac{n+2}{2n(n-1)}$, sustituyendo n en la serie 50, 48, 46, ... 4, como ya se ha dicho. Pero en la segunda edición del libro de Montmort, la columna se da de forma incorrecta; comienza con $\frac{3117}{350350}$ en lugar de $\frac{26}{2450}$, y algunas de las restantes entradas son correctas, pero no en sus formas más simples, y otras son incorrectas. La cuarta columna debería calcularse mediante la fórmula $\frac{2n-5}{2(n-1)(n-3)}$, al poner n en la serie 50, 48, 46, ... 4; pero hay también algunos errores.

A título de curiosidad, añadimos esas dos tablas de Montmort a continuación:

TABLA PARA EL FARAÓN

$\boxed{52}$	$1 =\ *\ *\ *$	$:2 =\ *\ *\ *$	$:3 =\ *\ *\ *$	$:4 = a + \frac{2295086253}{115890841950}a$
$\boxed{50}$	$1 =\ *\ *\ *$	$:2 = a + \frac{3117}{350350}a$	$:3 = a + \frac{3}{196}a$	$:4 = a + \frac{7208829}{349595300}a$
$\boxed{48}$	$1 = a + \frac{1}{48}a$	$:2 = a + \frac{1787}{161304}a$	$:3 = a + \frac{3}{188}a$	$:4 = a + \frac{276199}{12842280}a$
$\boxed{46}$	$1 = a + \frac{1}{46}a$	$:2 = a + \frac{3431}{296010}a$	$:3 = a + \frac{3}{180}a$	$:4 = a + \frac{11002}{489555}a$
$\boxed{44}$	$1 = a + \frac{1}{44}a$	$:2 = a + \frac{822}{67639}a$	$:3 = a + \frac{3}{172}a$	$:4 = a + \frac{913}{38786}a$
$\boxed{42}$	$1 = a + \frac{1}{42}a$	$:2 = a + \frac{3145}{246246}a$	$:3 = a + \frac{3}{164}a$	$:4 = a + \frac{79}{3198}a$
$\boxed{40}$	$1 = a + \frac{1}{40}a$	$:2 = a + \frac{1501}{111540}a$	$:3 = a + \frac{3}{156}a$	$:4 = a + \frac{25}{962}a$
$\boxed{38}$	$1 = a + \frac{1}{38}a$	$:2 = a + \frac{2849}{201068}a$	$:3 = a + \frac{3}{148}a$	$:4 = a + \frac{1349}{49210}a$
$\boxed{36}$	$1 = a + \frac{1}{36}a$	$:2 = a + \frac{679}{45045}a$	$:3 = a + \frac{3}{140}a$	$:4 = a + \frac{1139}{39270}a$
$\boxed{34}$	$1 = a + \frac{1}{34}a$	$:2 = a + \frac{2573}{160446}a$	$:3 = a + \frac{3}{132}a$	$:4 = a + \frac{357}{11594}a$
$\boxed{32}$	$1 = a + \frac{1}{32}a$	$:2 = a + \frac{1215}{70928}a$	$:3 = a + \frac{3}{124}a$	$:4 = a + \frac{177}{5394}a$
$\boxed{30}$	$1 = a + \frac{1}{30}a$	$:2 = a + \frac{2287}{124410}a$	$:3 = a + \frac{3}{116}a$	$:4 = a + \frac{55}{1566}a$
$\boxed{28}$	$1 = a + \frac{1}{28}a$	$:2 = a + \frac{536}{27027}a$	$:3 = a + \frac{3}{108}a$	$:4 = a + \frac{221}{5850}a$
$\boxed{26}$	$1 = a + \frac{1}{26}a$	$:2 = a + \frac{2001}{92950}a$	$:3 = a + \frac{3}{100}a$	$:4 = a + \frac{611}{14950}a$
$\boxed{24}$	$1 = a + \frac{1}{24}a$	$:2 = a + \frac{929}{39468}a$	$:3 = a + \frac{3}{92}a$	$:4 = a + \frac{473}{10626}a$
$\boxed{22}$	$1 = a + \frac{1}{22}a$	$:2 = a + \frac{1715}{66066}a$	$:3 = a + \frac{3}{84}a$	$:4 = a + \frac{143}{2026}a$

$\boxed{20}$	$1 = a + \frac{1}{20}a$	$:2 = a + \frac{1572}{54340}a$	$:3 = a + \frac{3}{76}a$	$:4 = a + \frac{35}{646}a$
$\boxed{18}$	$1 = a + \frac{1}{18}a$	$:2 = a + \frac{1429}{43758}a$	$:3 = a + \frac{3}{68}a$	$:4 = a + \frac{31}{510}a$
$\boxed{16}$	$1 = a + \frac{1}{16}a$	$:2 = a + \frac{429}{11440}a$	$:3 = a + \frac{3}{60}a$	$:4 = a + \frac{9}{130}a$
$\boxed{14}$	$1 = a + \frac{1}{14}a$	$:2 = a + \frac{44}{1001}a$	$:3 = a + \frac{3}{52}a$	$:4 = a + \frac{23}{286}a$
$\boxed{12}$	$1 = a + \frac{1}{12}a$	$:2 = a + \frac{7}{132}a$	$:3 = a + \frac{3}{44}a$	$:4 = a + \frac{19}{198}a$
$\boxed{10}$	$1 = a + \frac{1}{10}a$	$:2 = a + \frac{1}{15}a$	$:3 = a + \frac{3}{36}a$	$:4 = a + \frac{5}{42}a$
$\boxed{8}$	$1 = a + \frac{1}{8}a$	$:2 = a + \frac{5}{56}a$	$:3 = a + \frac{3}{28}a$	$:4 = a + \frac{11}{70}a$
$\boxed{6}$	$1 = a + \frac{1}{6}a$	$:2 = a + \frac{2}{15}a$	$:3 = a + \frac{3}{20}a$	$:4 = a + \frac{7}{30}a$
$\boxed{4}$	$1 = a + \frac{1}{4}a$	$:2 = a + \frac{1}{4}a$	$:3 = a + \frac{3}{12}a$	$:4 = a + \frac{1}{2}a$

TABLA II. PARA EL FARAÓN

$\boxed{52}$	$1 =$ * * *	$:2 =$ * * *	$:3 =$ * * *	$:4 = a+ > \frac{1}{51} < \frac{1}{50}$
$\boxed{50}$	$1 =$ * * *	$:2 = a+ > \frac{1}{95} < \frac{1}{94}$	$:3 = a+ > \frac{1}{66} < \frac{1}{65}$	$:4 = a+ > \frac{1}{49} < \frac{1}{48}$
$\boxed{48}$	$1 = a + \frac{1}{48}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{91} < \frac{1}{90}$	$:3 = a+ > \frac{1}{63} < \frac{1}{62}$	$:4 = a+ > \frac{1}{47} < \frac{1}{46}$
$\boxed{46}$	$1 = a + \frac{1}{46}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{87} < \frac{1}{86}$	$:3 = a + \frac{3}{60}$	$:4 = a+ > \frac{1}{45} < \frac{1}{44}$
$\boxed{44}$	$1 = a + \frac{1}{44}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{83} < \frac{1}{82}$	$:3 = a+ > \frac{1}{58} < \frac{1}{57}$	$:4 = a+ > \frac{1}{43} < \frac{1}{42}$
$\boxed{42}$	$1 = a + \frac{1}{42}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{79} < \frac{1}{78}$	$:3 = a+ > \frac{1}{55} < \frac{1}{54}$	$:4 = a+ > \frac{1}{41} < \frac{1}{40}$
$\boxed{40}$	$1 = a + \frac{1}{40}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{75} < \frac{1}{74}$	$:3 = a + \frac{1}{522}$	$:4 = a+ > \frac{1}{39} < \frac{1}{38}$

$\boxed{38}$	$1 = a + \frac{1}{38}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{71} < \frac{1}{70}$	$:3 = a+ > \frac{1}{50} < \frac{1}{49}$	$:4 = a+ > \frac{1}{37} < \frac{1}{36}$
$\boxed{36}$	$1 = a + \frac{1}{36}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{67} < \frac{1}{66}$	$:3 = a+ > \frac{1}{47} < \frac{1}{46}$	$:4 = a+ > \frac{1}{35} < \frac{1}{34}$
$\boxed{34}$	$1 = a + \frac{1}{34}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{63} < \frac{1}{62}$	$:3 = a + \frac{1}{44}$	$:4 = a+ > \frac{1}{33} < \frac{1}{32}$
$\boxed{32}$	$1 = a + \frac{1}{32}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{59} < \frac{1}{58}$	$:3 = a+ > \frac{1}{42} < \frac{1}{41}$	$:4 = a+ > \frac{1}{31} < \frac{1}{30}$
$\boxed{30}$	$1 = a + \frac{1}{30}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{55} < \frac{1}{54}$	$:3 = a+ > \frac{1}{39} < \frac{1}{38}$	$:4 = a+ > \frac{1}{29} < \frac{1}{28}$
$\boxed{28}$	$1 = a + \frac{1}{28}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{51} < \frac{1}{50}$	$:3 = a + \frac{1}{36}$	$:4 = a+ > \frac{1}{27} < \frac{1}{26}$
$\boxed{26}$	$1 = a + \frac{1}{26}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{47} < \frac{1}{46}$	$:3 = a+ > \frac{1}{34} < \frac{1}{33}$	$:4 = a+ > \frac{1}{25} < \frac{1}{24}$
$\boxed{24}$	$1 = a + \frac{1}{24}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{43} < \frac{1}{42}$	$:3 = a+ > \frac{1}{31} < \frac{1}{30}$	$:4 = a+ > \frac{1}{23} < \frac{1}{22}$
$\boxed{22}$	$1 = a + \frac{1}{22}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{39} < \frac{1}{38}$	$:3 = a + \frac{1}{28}$	$:4 = a+ > \frac{1}{21} < \frac{1}{20}$
$\boxed{20}$	$1 = a + \frac{1}{20}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{35} < \frac{1}{34}$	$:3 = a+ > \frac{1}{26} < \frac{1}{25}$	$:4 = a+ > \frac{1}{19} < \frac{1}{18}$
$\boxed{18}$	$1 = a + \frac{1}{18}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{31} < \frac{1}{30}$	$:3 = a+ > \frac{1}{23} < \frac{1}{22}$	$:4 = a+ > \frac{1}{17} < \frac{1}{16}$
$\boxed{16}$	$1 = a + \frac{1}{16}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{27} < \frac{1}{26}$	$:3 = a + \frac{1}{20}$	$:4 = a+ > \frac{1}{15} < \frac{1}{14}$
$\boxed{14}$	$1 = a + \frac{1}{14}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{23} < \frac{1}{22}$	$:3 = a+ > \frac{1}{18} < \frac{1}{17}$	$:4 = a+ > \frac{1}{13} < \frac{1}{12}$
$\boxed{12}$	$1 = a + \frac{1}{12}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{19} < \frac{1}{18}$	$:3 = a+ > \frac{1}{15} < \frac{1}{14}$	$:4 = a+ > \frac{1}{11} < \frac{1}{10}$
$\boxed{10}$	$1 = a + \frac{1}{10}a$	$:2 = a + \frac{1}{15}$	$:3 = a + \frac{1}{12}$	$:4 = a+ > \frac{1}{9} < \frac{1}{8}$
$\boxed{8}$	$1 = a + \frac{1}{8}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{12} < \frac{1}{11}$	$:3 = a+ > \frac{1}{10} < \frac{1}{9}$	$:4 = a+ > \frac{1}{7} < \frac{1}{6}$
$\boxed{6}$	$1 = a + \frac{1}{6}a$	$:2 = a+ > \frac{1}{8} < \frac{1}{7}$	$:3 = a+ > \frac{1}{7} < \frac{1}{6}$	$:4 = a+ > \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$
$\boxed{4}$	$1 = a + \frac{1}{4}a$	$:2 = a + \frac{1}{4}$	$:3 = a + \frac{1}{4}a$	$:4 = a + \frac{1}{2}a$

3.1.2. LA BASSETTE

PROBLÊME
SUR
LE JEU DE LA BASSETE.

El trabajo de Montmort sobre el juego de cartas *La Bassette* es similar al del Pharaon. En primer lugar presenta las reglas del juego:

> EN este Juego, como en el del Faraón, el Banquero tiene el juego entero compuesto de cincuenta y dos cartas. Después de que las ha mezclado, y de que cada Jugador o Ponte (apostador) ha puesto una cierta suma sobre una carta tomada a voluntad, el Banquero vuelve el juego, poniendo las de debajo encima; de manera que él ve la carta de debajo. Después, él saca todas sus cartas dos a dos hasta el final del juego, comenzando por la segunda. He aquí las otras reglas del juego.
>
> 1º. La primera carta es para el Banquero; pero él no toma más que los dos tercios de la apuesta del Apostador cuando él lleva su carta; y esto se llama *facer*. La segunda es enteramente para el Apostador, la tercera enteramente para el Banquero; y así, sucesivamente alternando. Es necesario señalar que cuando una carta ha ganado o perdido ya no pertenece más al juego, a menos que no se le añada de nuevo. Así, por ejemplo, siendo un Rey la carta del Apostador, si la primera carta del juego es una Dama, la segunda un Rey y la tercera también un Rey, el Banquero que dice extrayendo las cartas, *Rey ha ganado, Rey ha perdido* (esto se entiende desde los Apostadores) perderá la apuesta del Jugador, aunque naturalmente el segundo Rey le hubiese hecho ganar, si la primera carta del corte hubiese sido un Rey.

> 2º. Cuando los Apostadores quieren tomar una carta en el curso del juego, es necesario que el corte sea bajo, es decir, que el Banquero las extraiga, como he dicho, dos a dos, habiendo puesto su último corte o pareja de cartas sobre el tapete, de manera que la carta que queda descubierta sea perdedora para los Jugadores. Entonces, si un Apostador coge una carta, la primera carta que extraiga el Banquero será nula con respecto de este Apostador, aunque sea favorable a los otros Jugadores; si se trata de la segunda, será facée, es decir, que el Banquero tomará los $\frac{2}{3}$ de lo que este Apostador haya puesto sobre la carta: si viene en la continuación, será pura ganancia o pura pérdida para el Banquero, según que ella venga, o la primera, o la segunda de un corte.
>
> 3º. La última carta, que debería ser para el Apostador, es nula.

Por tanto, consideramos una baraja de 52 cartas. Supongamos que $2n = 52$, y en las que k cartas están marcadas con la letra *a*, y el resto, $2n - k$ con la letra *b*. Extrayendo dos cartas consecutivas y sin reemplazamiento, los cuatro posibles resultados son *ab*, *ba*, *aa*, y *bb*. En el primer caso, el banquero gana una del apostador (el ponte), en el segundo caso él pierde una, en el tercer caso gana una; y en el cuarto caso el juego continúa con el banquero extrayendo otro par de cartas del montón.

Para encontrar la esperanza del banquero, Montmort establece que podemos ignorar el resultado *ab* con una ganancia de 1 y *ba* con una pérdida de 1 dado que ambos tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Por tanto, sólo considera el número de posibilidades o suertes para *aa* en una serie de n extracciones.

Para $k = 1$, un doble es imposible, por lo que el número de chances para *aa* es cero.

Para $k > 1$, el número total de permutaciones de las $2n$ es $\binom{2n}{k}$. El banquero gana si la primera extracción de dos cartas da como resultado *aa*, o si la segunda extracción da *aa*, y así. Los correspondientes números de permutaciones son $\binom{2n-2}{k-2}$, $\binom{2n-4}{k-2}$, $\binom{2n-6}{k-2}$,… Entonces, Montmort encuentra que la esperanza del banquero es:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{2i-2}{k-2} \Big/ \binom{2n}{k}, \qquad k = 2,3,\ldots,2n.$$

Montmort da esta fórmula para los casos particulares de $k = 2,3,4$, razonando tal y como lo hemos hecho antes. Montmort termina el análisis de este juego con una nota y dos tablas, similares a las que hemos dado en el juego del Faraón. En la nota, Montmort plantea posibles modificaciones a las reglas del juego para hacerlos más atractivo:

NOTA V.

124. ESTE juego es en la actualidad mucho menos usado que el Faraón. Las cartas que no van, hacen perder al juego algo de su vivacidad. Además hay con frecuencia disputas por saber si la carta del Apostador va o no va. No se pueden remediar estos inconvenientes que están basados en la naturaleza del juego; pero se podría hacer este juego más igual conviniendo que las cartas facées no paguen más que la mitad de la apuesta del Apostador, cuando la ventaja del Banquero sería muy poco considerable, he encontrado que si el Banquero no se llevase más que un tercio por las faces, este juego le sería desventajoso. La mayor parte de las notas que se han hecho sobre el juego del Faraón, pueden tener lugar con relación a éste, y no será inútil consultarlas.

Añadimos la tabla aportada por Montmort al final de este juego.

TABLA PARA LA BASSETE

$\boxed{5}$	$1:=\frac{2}{15}$	$2:=\frac{3}{30}$	$3:=\frac{3}{30}$	$4:=\frac{24}{180}$
$\boxed{7}$	$1:=\frac{2}{21}$	$2:=\frac{4}{63}$	$3:=\frac{8}{105}$	$4:=\frac{66}{630}$
$\boxed{9}$	$1:=\frac{2}{27}$	$2:=\frac{5}{108}$	$3:=\frac{15}{252}$	$4:=\frac{124}{1512}$
$\boxed{11}$	$1:=\frac{2}{33}$	$2:=\frac{6}{165}$	$3:=\frac{24}{495}$	$4:=\frac{198}{2970}$
$\boxed{13}$	$1:=\frac{2}{39}$	$2:=\frac{7}{234}$	$3:=\frac{35}{858}$	$4:=\frac{288}{5148}$
$\boxed{15}$	$1:=\frac{2}{45}$	$2:=\frac{8}{315}$	$3:=\frac{48}{1365}$	$4:=\frac{394}{8190}$
$\boxed{17}$	$1:=\frac{2}{51}$	$2:=\frac{9}{408}$	$3:=\frac{63}{2040}$	$4:=\frac{516}{12240}$
$\boxed{19}$	$1:=\frac{2}{57}$	$2:=\frac{10}{513}$	$3:=\frac{80}{2907}$	$4:=\frac{654}{17442}$
$\boxed{21}$	$1:=\frac{2}{63}$	$2:=\frac{11}{630}$	$3:=\frac{99}{3990}$	$4:=\frac{808}{23940}$
$\boxed{23}$	$1:=\frac{2}{69}$	$2:=\frac{12}{759}$	$3:=\frac{120}{5313}$	$4:=\frac{978}{31878}$
$\boxed{25}$	$1:=\frac{2}{75}$	$2:=\frac{13}{900}$	$3:=\frac{143}{6900}$	$4:=\frac{1164}{41400}$
$\boxed{27}$	$1:=\frac{2}{81}$	$2:=\frac{14}{1053}$	$3:=\frac{168}{8775}$	$4:=\frac{1366}{52650}$
$\boxed{29}$	$1:=\frac{2}{87}$	$2:=\frac{15}{1218}$	$3:=\frac{195}{10962}$	$4:=\frac{1584}{65772}$
$\boxed{31}$	$1:=\frac{2}{93}$	$2:=\frac{16}{1395}$	$3:=\frac{224}{13485}$	$4:=\frac{1818}{80910}$
$\boxed{33}$	$1:=\frac{2}{99}$	$2:=\frac{17}{1584}$	$3:=\frac{255}{16368}$	$4:=\frac{2068}{98208}$
$\boxed{35}$	$1:=\frac{2}{105}$	$2:=\frac{18}{1785}$	$3:=\frac{288}{19635}$	$4:=\frac{2334}{117810}$
$\boxed{37}$	$1:=\frac{2}{111}$	$2:=\frac{19}{1998}$	$3:=\frac{323}{23310}$	$4:=\frac{2616}{139860}$
$\boxed{39}$	$1:=\frac{2}{117}$	$2:=\frac{20}{2223}$	$3:=\frac{360}{27417}$	$4:=\frac{2914}{164502}$
$\boxed{41}$	$1:=\frac{2}{123}$	$2:=\frac{21}{2460}$	$3:=\frac{399}{31980}$	$4:=\frac{3228}{191880}$
$\boxed{43}$	$1:=\frac{2}{129}$	$2:=\frac{22}{2709}$	$3:=\frac{440}{37023}$	$4:=\frac{3558}{222138}$
$\boxed{45}$	$1:=\frac{2}{135}$	$2:=\frac{23}{2970}$	$3:=\frac{483}{42570}$	$4:=\frac{3904}{255420}$
$\boxed{47}$	$1:=\frac{2}{141}$	$2:=\frac{24}{3243}$	$3:=\frac{528}{48645}$	$4:=\frac{4266}{391870}$
$\boxed{49}$	$1:=\frac{2}{147}$	$2:=\frac{25}{3528}$	$3:=\frac{575}{55272}$	$4:=\frac{4644}{331632}$

$\boxed{51}$ 1: * * 2: * * $3 := \frac{624}{62475}$ $4 := \frac{5038}{374850}$

$\boxed{52}$ 1: * * 2: * * 3: * * $4 := \frac{454}{32487}$

3.1.3. LANSQUENET

PROBLÊME

SUR

LE JEU DU LANSQUENET.

Lansquenet es un juego de cartas con n jugadores situados al azar en una mesa redonda. De una baraja común de cartas el banquero reparte una carta a cada uno de los $n-1$ jugadores y después a él mismo. Cada jugador apuesta la cantidad 1, excepto el banquero, que apuesta $n-1$. Volviendo las cartas que restan sucesivamente, el banquero gana si la carta tiene el mismo valor que la del jugador, y pierde su propia apuesta si la carta tiene el mismo valor que la suya propia. El juego se detiene cuando el banquero ha ganado todas las apuestas o pierde la suya. Todhunter (1865) al comentar este juego analizado por nuestro autor escribe (p. 91): "Montmort a continuación analiza el juego de Lansquenet; esta discusión ocupa páginas 105-129. No parece presentar ningún punto de interés, y sería inútil el trabajo para verificar los complejos cálculos aritméticos que implica." Recogemos a continuación un fragmento con las explicaciones de las reglas del juego

Determinar, en general, la ventaja de aquél que tiene la mano,
y la suerte de los demás cortadores respecto a los
diferentes lugares que ocupan.

SE llaman cortadores[4] a aquellos que toman cartas en la vuelta, antes de que el mano se dé la suya; y carabineros[5], a aquellos que toman carta después que la del mano haya sido extraída. Se llama el regocijo a la carta que viene inmediatamente después la carta de aquél que tiene la mano. Todo el mundo puede poner antes de que la carta de aquél que tiene la mano sea extraída; pero depende de él tener lo que quiere, con tal de que se explique antes de extraer su carta: pues si la extrae sin decir nada está obligado a cumplir con todo lo que se ha puesto.

Después de que se ha regulado el fondo del juego, aquél que tiene la mano da cartas a los cortadores comenzando por su derecha, y estas cartas se llaman cartas diestras, para distinguirlas de las cartas de reposición y de regocijo; se da una carta, y a continuación extrae el regocijo. Siendo hecho esto, él continúa extrayendo todas las cartas sucesivamente; gana lo que está sobre la carta de un cortador, cuando él lleva la carta de este cortador; y pierde todo lo que está en el juego, cuando lleva la suya. Por fin, si él lleva todas las cartas diestras de los cortadores antes de llevar la suya, vuelve a comenzar y continúa teniendo la mano, sea que haya ganado o perdido el regocijo. He aquí las reglas más generales: Y aquí algunas otras particulares que se refieren al problema propuesto.

1º. Cuando el que tiene la mano, al que llamaré siempre Pedro, da una carta doble a un cortador, es decir, una carta de la misma clase que otra que él ya ha dado a otro cortador que está más a la derecha, él gana el fondo del juego sobre la carta perdedora, y está obligado a tener el doble sobre la carta doble.

2º. Cuando Pedro da una carta triple a un cortador, gana lo que está sobre la carta perdedora, y está obligado a poner cuatro veces el fondo del juego sobre la carta triple.

3º. Cuando Pedro da una carta cuádruplo a un cortador, recoge lo que hay puesto sobre las cartas simples o dobles; si la tiene,

[4] Coupeurs, escribe el autor en francés. Nota de la Traductora.
[5] Carabineurs, en francés. Nota de la traductora.

pierde lo que está sobre la carta triple de la misma clase que la cuádruplo que él lleva, y deja la mano sobre el campo, sin dar otras cartas.

4º. Si se da a sí mismo una carta cuádruple, toma todo lo que hay sobre las cartas de los cortadores, y, sin dar otras cartas, vuelve a repetir la mano.

5º. Cuando la carta del regocijo es cuádruple, no va.

6º. Es también una ley del juego, que un cortador cuya carta es tomada, esté obligado a pagar el fondo del juego a cada cortador que tenga una carta delante de él, lo que se llama regar; pero hay esta distinción por hacer, que cuando es una carta diestra, el que pierde paga a las otras cartas diestras el fondo del juego, sin tener en cuenta que la suya o la carta diestra de los otros cortadores sea simple, doble o triple; mientras que cuando es una carta de reposición, no se paga y no se recibe más que según las reglas de la partida. Ahora bien, en este juego las partidas hacen poner tres contra dos, cuando se tiene una carta doble contra carta simple; dos contra uno, cuando se tiene una carta triple contra carta doble; y tres contra uno, cuando se tiene carta triple contra carta simple.

Estando bien concebidas estas reglas, si se quiere saber en qué consiste la dificultad de la primera parte de este Problema, que es determinar la ventaja de aquél que tiene la mano, es necesario observar:

1º. Que la ventaja de tener la mano encierra otra más considerable, que es la de conservar en Pedro el derecho de tener las cartas tantas veces como cartas diestras de los cortadores haya llevado antes de llevar la suya. Ahora bien, como esto puede ocurrir varias veces sucesivamente, cualquier número de cortadores que haya, es necesario, es necesario, examinando la ventaja de aquél que tiene las cartas, tener en consideración la esperanza que tiene de hacer la mano un número de veces cualquiera indeterminadamente. De donde se sigue que no se puede expresar la ventaja de Pedro más que por una serie compuesta de un número infinito de términos que irán sierre disminuyendo.

2º. Que Pedro tiene tanta menos esperanza de hacer mano, cuanto más cortadores haya y más cartas simples entre las cartas diestras.

3º. Que la obligación donde está Pedro de poner el doble del fondo del juego sobre las cartas dobles, y el cuádruplo sobre las cartas triples, disminuye la ventaja que él tendría ocasionando cartas dobles o triples antes que darse la suya; y que su ventaja es aumentada por esta otra condición del juego, que le permite retomar por entero lo que ha puesto sobre las cartas dobles y triples, cuando da a uno de los cortadores una carta cuádruplo.

Estas notas y algunas otras parecidas que omito, pueden hacer conocer que este Problema es más complejo que lo que parecía al principio.

Para resolverlo, he aquí el camino que tengo.

La regla inicial dada parece hacer que el juego sea justo, al tener todos los participantes esperanza cero, pero las reglas suplementarias que dependen de los números de ocupación, esto es, el número de valores únicos, dobletes, etc., hacen que el banquero tenga ventaja. Además, la regla de continuación, también dependiendo del número de ocupación, da al banquero una cierta probabilidad de continuar como banquero.

La ventaja total del banquero así depende de su ganancia esperada g digamos, en un solo juego, y de su probabilidad de continuar como banquero, digamos p, por lo que la ventaja total viene a ser

$$u = g + pg + p^2 g + p^3 g + \dots = \frac{g}{1-p}.$$

El problema es determinar g y p.

Montmort (1708, pp. 30-53; 1713, pp. 105-129) calcula estas cantidades para $n = 3, 4, ..., 7$. Volviendo al comentario de Todhunter, parece este autor no ha valorado el hecho de que Montmort después de haber derivado los resultados para $n = 3$ y 4 por simple enumeración, señala para $n = 5$ que la solución general se obtiene por medio de la distribución de ocupación, que luego se va a aplicar. Como ilustración del método de Montmort usaremos el caso $n = 4$. La distribución de ocupación de n cartas ya la conocemos, es

$$\binom{4}{0}^{r_0}\binom{4}{1}^{r_1}\binom{4}{2}^{r_2}\cdots\frac{13!}{r_0!r_1!r_2!\ldots}\Bigg/\binom{52}{n},$$

donde $\sum r_i = 13$, $\sum ir_i = n$, r_0 es el número de valores de caras perdidas entre las n cartas, r_1 el número de únicos, r_2 el número de dobletes, etc. Denotaremos el número de posibilidades del numerador por N_i correspondiente al vector número i en un orden dado de los vectores $(r_0, r_1, r_2, ...)$.

Para encontrar la ganancia esperada del banquero en un único juego, Montmort considera la distribución de ocupación de las $n-1$ cartas, y para cada resultado calcula la ganancia esperada según las reglas especiales del juego. Finalmente, obtiene g como la media de las ganancias condicionadas, como se muestra en la siguiente tabla.

CÁLCULO DE MONTMORT DE LA GANANCIA ESPERADA EN UN ÚNICO JUEGO CON CUATRO JUGADORES

I	EJEMPLO[a]	r_0	r_1	r_2	r_3	$N_i/52$	GANANCIA ESPERADA, g_i
1	*abc*	10	3	0	0	352	63/245
2	*aab*	11	1	1	0	72	197/245
3	*aaa*	12	0	0	1	1	275/245
Total:						425	

[a] *a*, *b* y *c* denotan los diferentes valores de las caras.

Tabla 3.2

El número total de posibilidades es igual $\binom{52}{3} = 22.100$; dividiendo por 52 conseguimos 425, como se muestra en la tabla. Tenemos que

$$g = \frac{\sum N_i g_i}{\sum N_i} = \frac{7.327}{20.825}.$$

Para encontrar la probabilidad de continuación, Montmort considera la distribución de ocupación de *n* cartas, y para cada resultado calcula la probabilidad de continuación según las reglas especiales del juego. Finalmente obtiene *p* como la media de las probabilidades condicionadas, como se muestra en la siguiente tabla.

CÁLCULO DE MONTMORT DE LA PROBABILIDAD DE CONTINUACIÓN EN UN JUEGO CON CUATRO JUGADORES

I	EJEMPLO[a]	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	$N_i/52$	*Probabilidad*, p_i
1	*abcd*	9	4	0	0	0	14.080	20/80
2	*aabc*	10	2	1	0	0	6.336	29/80
3	*aabb*	11	0	2	0	0	216	40/80
4	*aaab*	11	1	0	1	0	192	50/80
5	*aaaa*	12	0	0	0	1	1	80/80
Total:							20.825	

[a] *a*, *b*, *c* y *d* denotan los diferentes valores de las caras.

Tabla 3.3

Se tiene que

$$p = \frac{\sum N_i g_i}{\sum N_i} = \frac{30.229}{104.125}.$$

La ganancia esperada total del banquero resulta así

$$\frac{g}{1-p} = \frac{36.635}{73.896}.$$

Montmort acaba su análisis dando ejemplos del cálculo de la pérdida esperada de cada jugador usando el mismo método de arriba.

John Bernoulli en su carta a Montmort (1713, pp. 287-289) señala que un análisis más realista estaría basado en el supuesto de que los jugadores sucesivamente se vayan convirtiendo en banqueros, de modo que cuando el banquero pierde su apuesta, el jugador de su derecha se hace cargo de la banca. Bernoulli analiza este problema para dos jugadores.

Supongamos que el resultado es *aa* con probabilidad p y *ab* con probabilidad $q=1-p$. En el primer caso el banquero consigue la cantidad 2, y en el segundo no consigue nada. Por tanto, su ganancia esperada en un único juego es $g=2p-1=p-q$, por lo que su ganancia total esperada según el supuesto de Montmort se convierte en $g/(1-p)=(p-q)/q$. Denotemos por u la ganancia total esperada del banquero bajo el supuesto de Bernoulli. Bernoulli entonces resuelve el problema por medio de la ecuación

$$u=p(1+u)+q(-1-u),$$

que refleja el hecho de que los dos jugadores cambian los papeles con probabilidades p y q. La solución es $u=(p-q)/2q$, justo la mitad del resultado previo.

En una breve nota de Nicholas Bernoulli a Montmort (1713, pp. 299-301), éste hace una generalización a n jugadores y a un número finito de partidas; supongamos, m.

Partimos de que los jugadores $A_1,\ldots,A_n$ tienen de ganancias esperadas $g_1,\ldots,g_n$, $\sum g_i=0$, en una única partida en la que A_1 es el banquero, y sea p la probabilidad de continuar como banquero para cada jugador. El jugador A_2 se sienta a la izquierda de A_1, A_3 a la izquierda de A_2, y así, hasta A_n, quien se sienta a la derecha de A_1. Cuando A_1 pierde el juego, A_n se convierte en banquero, por lo que A_1 ahora tiene la misma posición respecto al banquero que A_2 la tenía antes, lo que significa que su ganancia esperada es ahora g_2. Ya que el juego es "circular", tenemos $g_i = g_{n+i} = g_{2n+i} = \ldots$ si están implicadas más de *n* partidas. Sin demostración, Nicholas Bernoulli da la ganancia esperada de A_1 como

$$u_1 = g_1 + (pg_1 + qg_2) + \left(p^2 g_1 + 2pqg_2 + q^2 g_3\right) + \ldots,$$

serie que contiene *m* términos. Para los otros jugadores se cumplen expresiones análogas, siendo la demostración sencilla. En la primera partida, la ganancia de A_1 es g_1. Si él gana continúa como banquero y consigue g_1; si pierde, A_n se convierte en banquero, y la ganancia de A_1 es g_2, y así. Sin demostración Bernoulli entonces da otra forma de esta expresión. Indicaremos una demostración; la otra fue dada por Todhunter (pp. 116-119). Tenemos

$$u_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} p^{k-i} q^i g_{1+i} = \sum_{i=0}^{m-1} g_{1+i} q^i \sum_{i=0}^{m-i-1} \binom{k+i}{k} p^k,$$

después de cambiar el orden de los sumandos. Observar que

$$\binom{k+i}{k} q^{i+1} p^k$$

es la probabilidad de conseguir el $(i+1)-$ésimo fallo en la última partida de un total de $k+1+i$ partidas, es decir, la distribución binomial del tiempo de espera. Para reducir la suma de tales términos a una suma de probabilidades binomiales tenemos en cuenta que

$$\sum_{x=0}^{c}\binom{n}{x}q^{x}p^{n-x}=\sum_{y=n+1}^{\infty}\binom{y-1}{c}q^{c+1}p^{y-c-1},$$

ya que el miembro de la izquierda da la probabilidad de al menos c fallos en n partidas, que es lo mismo que la probabilidad de que el fallo $(c+1)$ ocurra en la partida $(n+1)$ o posterior, como expresa el miembro de la derecha. Resulta que

$$1-B(c,n,q)=q^{c+1}\sum_{y=0}^{n-c-1}\binom{y+c}{y}p^{y}.$$

Por sustitución obtenemos

$$u_1=q^{-1}\sum_{i=0}^{m-1}g_{1+i}\left[1-B(i,m,q)\right],$$

que es el resultado de Bernoulli.

Finalmente Nicholas Bernoulli da la solución para $m\to\infty$ como

$$u_1=\frac{(n-1)g_1+(n-2)g_2+...+g_{n-1}}{nq}.$$

Nuestro autor termina el estudio de este juego con una nota en la que comenta la existencia de un juego parecido:

NOTA II.

97. HAY un juego bastante conocido que se llama la Duppe, que es una especie de Lansquenet al revés. La diferencia de este juego al Lansquenet consiste en lo que sigue; 1º, el que tiene la Duppe se da la primera carta; 2º, el que ha cortado las cartas está obligado a tomar la segunda; 3º, los otros jugadores pueden tomar o rechazar la carta que le es presentada; 4º, el que toma una carta doble está obligado a hacer la partida; 5º, el que tiene la Duppe no deja las cartas, y conserva siempre la mano. El parecido que hay del juego al del

Lansquenet, ha hecho imaginar a los jugadores que hay desventaja para el que tiene la mano, tanto más que en este Juego la mano no cambia, en lugar de lo que ocurre en el Lansquenet que cada uno la tiene en su turno. Sobre este fundamento ellos le han dado el nombre de la Duppe[6]: pero no le conviene en modo alguno; pues es fácil descubrir que la igualdad es perfecta en este Juego, y para los jugadores entre ellos, y para el que tiene la mano con relación a los Jugadores. Me basta con hacer esta nota, un poco de atención en convencer a aquellos que quieran hacer el esfuerzo de examinarlo.

3.1.4. JUEGO DEL HER

PROBLÊMES A RÉSOUDRE.

PREMIER PROBLÊME.

SUR LE JEU DU TREIZE.

Déterminer generalement quel est à ce jeu l'avantage de celui qui tient les cartes. On trouvera l'explication des regles de ce Jeu aux pages 130 & 131. Voyés les Lettres du 10 Avril & du 19 Novembre 1711.

SECOND PROBLÊME.

SUR LE JEU APPELLÉ LE HER.

3.1.4.1. INTRODUCCIÓN

Después de analizar los juegos Pharaon, Lansquenet, Treize, y Bassette, que son juegos de puro azar, Montmort se detiene en algunos otros juegos de carta que no son de puro azar sino que también dependen del conocimiento y decisiones de los jugadores. Afirma que es imposible análisis completo de tales juegos y procede a

[6] Podría traducirse como "el engañado", "el inocente" o "el primo". Nota de la traductora.

discutir algunas situaciones especiales que se pueden resolver por sencillos métodos combinatorios.

Abordaremos en profundidad el *Jeu du Treize* en el capítulo 6, deteniéndonos ahora en el llamado juego *Her*.

El juego del *Her* para dos jugadores *A* y *B* consiste en lo siguiente: El jugador *B* es el que reparte (previamente se ha sorteado quién lo hace) usando una baraja de 52 cartas, con 4 palos, 13 cartas por palo, siendo la más alta la del rey, que tiene el valor 13. El jugador *B* entrega una carta elegida al azar al jugador *A* y, después, otra para sí mismo. Si *A* no está contento con su carta puede obligar a *B* a intercambiarla con la suya, a menos que *B* tenga un rey (un 13). Si *B* no está contento con la suya, la extraída inicialmente o la que le ha obligado a coger *A*, entonces puede cambiarla por una de las restantes 50 cartas que quedan en la baraja, extraída al azar. Terminado este proceso ambos jugadores muestran sus cartas, ganando el juego el que tenga la carta más alta. En caso de empate, gana el jugador *B*. Se pide la probabilidad de cada jugador de ganar el juego. Montmort llama a los dos jugadores Pedro y Pablo, donde el primero es el que reparte y el segundo, Pablo, es el primero en tomar una decisión.

El juego se describe para cuatro jugadores y Montmort lo usa como problema para el lector (1708, pp. 185-187). La descripción se repite para tres jugadores (1713, pp. 278-279) y de nuevo Montmort lo plantea como un problema. Es discutido y resuelto para dos jugadores en la correspondencia con Nicholas Bernoulli. La correspondencia comienza en 1710, y la última carta publicada es de Montmort a Bernoulli, fechada el 15 de noviembre de 1713. Ver Montmort (1713, pp. 321, 334, 338-340, 348-349, 361-362, 376-378, 400, 403-406, 409-412, 413). En 1804, Jean Trembley publica su propia solución.

El objetivo de este apartado es analizar las propuestas de solución tempranas aportadas por estos tres autores. Nos resulta curioso el hecho, y por eso lo citamos, que uno de los grandes de la inferencia estadística del siglo XX, R. A. Fisher, sea también uno de los que en la etapa moderna estudia este juego de estrategia (Fisher, 1934).

3.1.4.2. P. R. MONTMORT, N. BERNOULLI Y EL JUEGO DEL HER

Vemos que el juego consta de tres pasos. El primero es la extracción de dos cartas al azar, y el resultado en este paso sólo depende del propio azar. El segundo paso depende de la decisión de *A* en cuanto a usar o no su derecho a intercambiar cartas con *B*. El tercero depende de la decisión de *B* sobre si usar o no su derecho a intercambiar su carta con una de la baraja.

Ya que la probabilidad de cada jugador de ganar depende no sólo de la suerte sino también de las decisiones tomadas por cada uno de ellos, el juego se conoce como un "juego de estrategia" en la terminología de hoy. En la primera carta en la que Montmort menciona este juego escribe que "Las dificultades de este problema son de una naturaleza singular.".

Parece claro e intuitivo que una buena estrategia consiste en cambiar cartas de bajo valor y retener cartas de alto valor y, además, que la línea de demarcación entre bajo y alto debe estar alrededor del 7. Sin que haya discusión en este aspecto, Montmort y Bernoulli coinciden en la opinión de que *A* siempre cambiará cartas de valores menores que 7 y retendrá cartas de valores mayores que 7; su decisión con respecto a 7 dependerá de la estrategia elegida por *B*. además, ellos coinciden en que se cumple una regla similar para *B* pero con 7 reemplazado por 8.

El efecto de estas reglas sobre la probabilidad de ganar de cada jugador se refleja en los cálculos de los que Montmort nos ofrece sólo los resultados de los mismos como un apéndice de su última carta “para evitar al lector la molestia de hacerlo por sí mismo”.

La correspondencia más antigua existente entre Montmort y un miembro de la familia Bernoulli es una carta del primero a Johann Bernoulli, de fecha 27 de febrero de 1703, en relación a un trabajo sobre cálculo que este último había presentado a la Academia Real de París. Ambos se correspondieron de manera esporádica durante los siguientes años. El 29 de abril de 1709 Montmort envía a Johann una copia de la primera edición de su libro, que acababa de publicarse. Bernoulli corresponde con un regalo, una copia de la tesis doctoral de su sobrino Nicolás (en el cual introduce aplicaciones de la probabilidad). Una vez que Johann ha estudiado el texto de Montmort le envía una carta de fecha 17 de marzo de 1710, con una detallada colección de comentarios sobre el propio texto. En la misma carta se incluye otro conjunto de comentarios sobre el libro de Montmort redactados por el sobrino Nicolás. (Montmort (1713), pp. 283-303):

MONSIEUR,

Votre très humble & très
obéiſſant Serviteur,
BERNOULLY.

P. S. mon Neveu qui vous fait ſes Complimens réciproques, vient de me donner ſes Remarques (que je vous envoye ici auſſi) ſur votre Livre que je lui avois prêté : je n'ai pas encore eu le temps de les examiner.

P.D. mi sobrino que hace elogios recíprocos, sólo me da las notas (que os envió aquí también) sobre vuestro Libro que yo le había dispuesto: Todavía no he tenido tiempo de examinarlas.

De esta forma comienza una correspondencia entre Montmort y Nicolás Bernoulli relacionada con los problemas de probabilidad abordados en el *Essay* de Montmort. Éste incluye gran parte de dicha correspondencia en la segunda edición (1713), como Parte V de la misma. Después de 1713 se mantuvo esa correspondencia entre ambos y además parece que fue abundante, pero, que se sepa, aún no se publicado el contenido completo de la misma.

Uno de los asuntos fundamentales tratados en la correspondencia publicada por Montmort (1713) es el de la resolución del juego del Her. Sólo consideran un juego con dos jugadores. Inicialmente, ambos coinciden en la solución. Sin embargo, dos de los amigos de Montmort sostuvieron que la misma era incorrecta. Estos eran un caballero inglés llamado Waldegrave y un abad cuya abadía estaba sólo a una legua y media (aproximadamente 5,8 kilómetros) a la de Chateau de Montmort (Montmort (1713), pp. 338). Montmort identificó Waldegrave como el hermano del Señor Waldegrave que se casó con una hija natural del rey Jacobo II de Inglaterra (todo esto y más detalles de tipo personal sobre el propio Waldegrave los incluye Montmort en su carta a Bernoulli).

A la hora de analizar este problema, a nivel real (y no de "libro de texto"), como lo intentaban los personajes implicados en la correspondencia (Montmort, Bernoulli, Waldegrave y el abad d'Orbais), surge la posibilidad de que queden factores fuera del análisis y, por tanto, de que no haya coincidencia en las soluciones aportadas por cada uno de ellos. Un factor sería la distribución de las cartas entre Pedro y Pablo, y sus probabilidades asociadas. Un segundo factor es el de considerar algún método de aleatorización para llegar a la estrategia mixta que prescriba cuando los jugadores deben mantenerse con su carta y cuando deben cambiar. El dispositivo de aleatorización comentado por Montmort en el *Essay* es el de extracción de fichas de una bolsa que contiene un determinado número de color blanco y otro, igual o no al anterior, de color negro. Y un tercero, se nos ocurre, es el de actitud personal de los jugadores: podría ocurrir que Pablo, por ejemplo, fuese un jugador tímido, miedoso, y no siguiera una estrategia matemáticamente óptima, o que por contra fuese un jugador experimentado que trata, mediante algún tipo de engaño, de empujar a Pedro a tomar una decisión no óptima, al estilo de lo que suele ocurrir en el póquer, por ejemplo. Hasta que los personajes se ponen de acuerdo en los factores a considerar, transcurren cruces de correspondencias que llevan implícitas desiguales soluciones, y por tanto, discusiones. También, el paso del tiempo en el discurrir de la propia correspondencia hace que cada uno de ellos interiorice y analice con más sosiego y aprendizaje. Sirvan de aviso estos comentarios para comprender mejor lo que contamos a continuación.

La primera carta de Nicolás Bernoulli a Montmort, de 26 de febrero de 1711, no hace referencia al juego en cuestión. Una nota en la respuesta de Montmort a Nicolás Bernoulli, de fecha 10 de abril de 1711 (Montmort (1713), páginas 315-323), es la que inicia la discusión sobre este problema:

J'ai entrepris depuis quelque temps d'achever la ſolution des Problêmes que je propoſe à la fin de mon Livre ; je trouve qu'au Her , lorſqu'il ne reſte plus que deux Joueurs Pierre & Paul , l'avantage de Paul eſt plus grand que $\frac{1}{85}$, & moindre que $\frac{1}{84}$. Ce Problême a des difficultés d'une nature ſinguliere J'ai commencé auſſi le Pro-

> Empecé hace algún tiempo a trabajar en la solución de los problemas que propongo al final de mi libro; he encontrado que en el Her, cuando sólo hay dos jugadores, Pedro y Pablo, la ventaja de Pablo es mayor que $\frac{1}{85}$, y menor que $\frac{1}{84}$.

En una posdata a esta carta Montmort informa que va a haber una segunda edición de su libro y, para la misma, les pedirá permiso tanto a Nicolás como a su tío, para incluir en la misma “vos belles Lettres”:

Monſieur, à rendre publique celle que aves trouvée. Comme il ne reſte preſque plus d'exemplaires de mon Livre, je crois que j'en pourrai donner bientôt une nouvelle édition. Lorſque j'y ſerai déterminé, je vous demanderai la permiſſion, & à M. votre Oncle, d'y inſerer vos belles Lettres qui en feront le principal ornement. On me con-

Señor, hay que hacer público lo que habéis descubierto. Como casi no hay copias de mi libro, creo que pronto voy a ser capaz de hacer una nueva edición. Cuando esté decidido pediré su permiso, y el de vuestro Tío, para insertar vuestras hermosas Cartas que serán el adorno principal.

Probablemente, esta petición motivó a Nicolás para seguir su correspondencia con Montmort y, así, enriquecerla con buen material. Éste responde a Montmort con una larga carta, fechada el 10 de noviembre 1711 (Montmort (1713), páginas 323-337). En ésta, él anuncia, entre otras muchas cosas, que también ha resuelto el problema del Her para el caso de dos jugadores (Montmort (1713), página 334):

También he resuelto el problema sobre el Her para el caso más simple; esto es lo que encontré. Si suponemos que cada jugador observa la conducta que le es más ventajosa, Pablo sólo debe mantener la carta si es más alta que un siete y Pedro a una que sea más alta que un ocho, y nos encontramos que en este supuesto la suerte de Pedro será a la de Pablo como 2697 es 2828. Si se supone que Pablo también se mantiene en el siete, entonces Pedro debe mantenerse en el ocho, y sus suertes seguirán siendo como 2697 a 2828. Sin embargo, es más ventajoso para él no mantenerse en el siete que mantenerse, lo cual es un enigma que os dejo para desarrollar.

Montmort, en su respuesta de 1 de marzo de 1712 (Montmort (1713), páginas 337-347), alaba la carta anterior de Bernoulli. Él se queja de que, al haber estado en París, no había tenido tiempo y sosiego para pensar por su cuenta y, como consecuencia, el objeto principal de su carta era informarle sobre el progreso realizado por sus dos amigos, el abad d'Orbais y Waldegrave, sobre un problema propuesto por Bernoulli, y sobre el problema del Her. Sobre este último, Montmort informa que "osan sin embargo, y no se someten a sus decisiones" (Montmort (1713), página 338). Sin embargo, como dice en un pasaje que es clave para entender la próxima controversia, el abad d'Orbais también previamente estaba en desacuerdo con Montmort:

Cuando trabajé en el Her hace unos años, le mostré al Sr. Abad de Monsoury lo que había encontrado, pero ni mis cálculos ni mis argumentos pudieron convencerlo. Él siempre ha sostenido que era imposible determinar las suertes de Pedro y Pablo, porque no hemos podido determinar en qué carta Pedro debe mantenerse, y viceversa, lo que resulta en un círculo, y hace en su opinión que la solución sea imposible. Añadió una cantidad de razonamientos sutiles que me hicieron dudar un poco sobre si yo había alcanzado la verdad. Ahí es donde yo me encontraba cuando le propuse que examine este problema; mi objetivo era asegurarme la bondad de mi solución, sin tener la molestia de recordar mis ideas sobre este que estaban completamente borradas.

Montmort, entonces, reclama que la solución de Nicolás confirma lo que él había encontrado, y le pide respuesta a Waldegrave, quien había hecho objeciones a la solución del mismo (todo esto se explica en las páginas 339-340 del *Essay*).

Según Waldegrave y el abad d'Orbais, no es cierto que Pablo deba mantenerse sólo en el ocho y Pedro en el nueve. Más bien, que Pablo debería ser indiferente sobre si mantenerse en el siete o cambiar, y que Pedro debería ser indiferente sobre si mantenerse en el ocho o cambiar. Waldegrave escribió lo siguiente a Montmort (Montmort (1713), página 339):

Sostenemos que es indiferente a Pablo cambiar o mantenerse con un siete, y a Pedro cambiar o mantenerse con un ocho. Para probar esto, primero debo explicar su suerte en todos los casos. La de Pablo teniendo un siete, es $\frac{780}{50\times 51}$ *cuando cambia, y cuando él se aferra a que es su suerte es* $\frac{720}{50\times 51}$ *si Pedro se mantiene en el ocho, y* $\frac{816}{50\times 51}$ *si Pierre cambia en el ocho. La suerte de Pedro teniendo un ocho es* $\frac{150}{23\times 50}$ *si se mantiene en él, y* $\frac{210}{23\times 50}$ *si cambia en el caso de que Pablo no se mantenga en el siete; y* $\frac{350}{27\times 50}$ *si se mantiene en él, y* $\frac{314}{27\times 50}$ *al cambiarlo en el caso de que Pablo se mantenga en el siete, así sucesivamente. Las suertes de Pablo* $\frac{780 \text{ o } 720 \text{ o } 816}{50\times 51}$*, las de Pedro* $\frac{150 \text{ o } 210}{23\times 50}$ *o* $\frac{350\text{o } 314}{27\times 50}$.

En base a los números que obtiene, Waldegrave observa que “720 al estar más por debajo de 780 que lo que 816 está por encima, parece que Pablo debe tener una razón para cambiar con 7" (Montmort (1713), página 339). Las diferencias, 780 a 720 y 816 a 780, están en la relación de 60:36, o de 5:3, una relación que posteriormente entra en la discusión.

En el resto de su argumento, habla Waldegrave de un “peso” en lugar de una razón. Llama A al peso que lleva a Pablo a cambiar, y B al peso que lleva a Pedro también a cambiar. Y argumenta que los mismos pesos llevan a Pablo y Pedro a ambas estrategias. A lleva a Pablo a cambiar con 7 y, como consecuencia, también lleva a Pedro para cambiar su 8; pero lo que lleva a Pedro a cambiar su 8 debe llevar a Pablo a quedarse con 7. Por lo tanto, A lleva a Pablo tanto a cambiar con un 7 como a quedarse con él. Lo mismo ocurre con Pedro. Por lo tanto, “es falso que Pablo no deba quedarse más que en el ocho 8, y Pedro en el 9”, que era la solución reclamada por Bernoulli. La palabra “probabilidad” aparece sólo una vez en esta discusión, en la conclusión del extracto de la carta de Waldegrave a Montmort, donde el primero escribe (Montmort (1713), página 340):

> *Al parecer, el señor Bernoulli se contentó con observar las fracciones que expresan las diferentes suertes de Pedro y Pablo, sin prestar atención a la probabilidad de lo que el otro va a hacer.*

Montmort deja aquí la discusión, sin más comentario.

Al recibir la carta de Montmort, Bernoulli se muestra de acuerdo con estas cantidades, diciendo que "las suertes que encontraron para Pedro y Pablo están muy bien" (Montmort (1713), página 348). Y, sin embargo, cuando Bernoulli propone su solución, y cuando finalmente Montmort publica una tabla de probabilidades, como ya se ha dicho, como un apéndice del *Essay* (Montmort (1713), página 413), los números son diferentes. Ninguno de los componentes de este debate explica sus cálculos. La diferencia en las probabilidades es que las de Waldegrave son condicionadas a que Pablo tiene un siete en la mano y las probabilidades Bernoulli-Montmort son las probabilidades marginales de todas las cartas que Pablo pueda tener.

En una carta de fecha 2 de junio de 1712, Bernoulli responde al argumento de Waldegrave acusándolo de cometer una falacia. Argumenta que si suponemos que A lleva a Pablo a cambiar con un siete, y así lleva a Pedro a cambiar con un ocho (si Pedro sabe que Pablo cambia con un siete), entonces también lleva a Pablo a quedarse en el siete. Por lo tanto, A tanto lleva a Pablo a cambiar con un siete como a quedarse con él. Su conclusión es que (Montmort (1713), página 348):

…estamos suponiendo dos cosas contradictorias al mismo tiempo; es decir, que Pablo sabe y hace caso omiso a la vez lo que Pedro va a hacer, y Pedro lo hará respecto de Pablo.

En su carta respuesta de 2 de junio de 1712 (Montmort (1713), pág349), Bernoulli explica que si nos mantenemos aquí respecto a lo que Pablo y Pedro saben acerca de la intención del otro, eso nos lleva a razonar en círculo, lo que demuestra que el argumento de Waldegrave no puede demostrar nada. Este argumento es peculiar, y parece sugerir que Bernoulli no entiende el punto de vista de Waldegrave. O bien podría ser simplemente una mala interpretación de su argumento, por expresarse en términos de peso en lugar de en términos de probabilidad. La palabra "peso" o "poids" en francés se presta en este caso a una mala interpretación. Por otra parte, Bernoulli admite haber escrito su carta a toda prisa, cuando se preparaba para un largo viaje a los Países Bajos e Inglaterra. Como resultado de este viaje, algunas cartas posteriores se retrasan, y los argumentos que contienen no siguen el orden cronológico de cuando se escribieron las mismas.

Una carta de Montmort a Bernoulli, de fecha 5 de septiembre de 1712 (Montmort (1713), páginas 361-370), anuncia que Waldegrave y el abad d'Orbais han leído la respuesta de Bernoulli en la que los acusa de haber caído en una falacia. Montmort incluye una nota del abad d'Orbais en el que afirma que Waldegrave ha escrito una respuesta hermosa y precisa a la objeción de Bernoulli; la refutación, sin embargo, no está incluida. En esta nota, el abad d'Orbais también pide a Montmort que tome partido en esta disputa entre ellos. Esto sugiere que, incluso aunque Montmort agradeció a Bernoulli su solución, que, según él, estaba de acuerdo con la suya, aún no ha tenía claro si realmente Bernoulli había resuelto el problema.

La siguiente carta sobre el Her es de Bernoulli a Montmort, de fecha 30 de diciembre 1712 (Montmort (1713), páginas 375-394). La misma contiene una discusión de tres páginas sobre el Her (Bernoulli menciona que acaba de recibir la carta del 2 de junio, ya que fue enviada desde Suiza a Holanda, y luego a Inglaterra, y finalmente de vuelta a Suiza). Bernoulli insiste en que, a pesar de los argumentos de Waldegrave, Pablo no hace sino seguir la máxima de quedarse con el siete, como la de cambiarlo. Bernoulli luego dice (Montmort (1713), página 376):

> *Si fuera imposible decidir este problema, Pablo tiene un siete y no sabría qué hacer; y para librarse de esa decisión, se sometería a la casualidad, por ejemplo, pondría en una bolsa un número igual de fichas blancas y fichas negras, con la intención de mantenerse en siete si se extrae una blanca, y cambiar con un siete si se extrae una negra; porque si pone un número desigual que se lleve más de una de las partes que de la otra, estaría en contra de la hipótesis. Pedro con un ocho haría lo mismo para ver si debe cambiar o no.*

En este comentario se presenta con claridad la idea de suerte por "la vía de las fichas", expresión que usarán con frecuencia los escritores sobre probabilidad del siglo XVIII. Lo que aquí dice Bernoulli parece confirmar que, al principio, cuando acusó Waldegrave de cometer una falacia, no interpretó los pesos de Waldegrave como probabilidades. Sin embargo, sugiere que la única asignación de probabilidad compatible con el supuesto estado de la ignorancia de los jugadores es que cada jugador elige una estrategia con una probabilidad de $\frac{1}{2}$. Bajo esta elección, se calcula la suerte de Pablo (que es entonces $\frac{774}{50 \cdot 51}$) y llega a la conclusión de que sería malo para Pablo aleatorizar de esta manera, ya que él podía garantizarse a sí mismo una suerte mayor, $\frac{780}{50 \cdot 51}$. Por lo tanto, Bernoulli concluye que Pablo siempre debe cambiar con un siete. A continuación, explica el razonamiento que había dejado fuera de su carta al escribirla a toda prisa el 2 de junio En términos contemporáneos, se calcula la probabilidad no condicionada de ganar bajo cada perfil de estrategia pura (sin asumir que cualquier carta ha sido tratada aún). Muestra una versión refinada del razonamiento que antes le había llevado a considerar el de Waldegrave como una falacia, y sin embargo, no lo reconoce.

En el siguiente apartado presentamos los últimos comentarios sobre la correspondencia.

3.1.4.3. RESOLUCIÓN DESDE UN PUNTO DE VISTA ACTUAL

En cada partida hay al menos tres cartas implicadas, supongamos ellas de valores *i*, *j*, y *k*, tal que Pablo consigue *i*, Pedro consigue *j*, y si la partida concluye con Pedro extrayendo una carta de la baraja, él consigue *k*. La probabilidad de Pablo de ganar se puede escribir como

$$p(i,j;S)=\frac{p(i,j)c(i,j;S)}{50},$$

donde $p(i,j)$ es la probabilidad de conseguir los valores (i,j) para las dos cartas extraídas, y $c(i,j;S)$ es el número de cartas entre las 50 restantes que hacen que Pablo gane, dado que los jugadores usan la estrategia *S*. Asumiendo que la apuesta es la unidad, la esperanza de Pablo es igual a su probabilidad de ganar.

Obviamente, $p(i,j)$ es igual a $(4/52)(4/51)$ para $i\neq j$ y $(4/52)(3/51)$ para $i=j$. Para ilustrar el cálculo de $c(i,j;S)$, hemos considerado en que Pablo mantiene cartas de valores 7 y superior y cambia cartas de valores inferiores. Los resultados se muestran en la tabla que acompaña.

Tabla de $c(i, j; S)$

	Pedro cambia								Pedro retiene					
$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$c(i;S)$
Pablo cambia														
1	0	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	0	297
2	0	0	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	0	290
3	0	0	0	15	19	23	27	31	35	39	43	47	0	279
4	0	0	0	0	19	23	27	31	35	39	43	47	0	264
5	0	0	0	0	0	23	27	31	35	39	43	47	0	245
6	0	0	0	0	0	0	27	31	35	39	43	47	0	222
Pablo retiene														
7	27	27	27	27	27	27	24	24	0	0	0	0	0	204
8	31	31	31	31	31	31	31	28	0	0	0	0	0	238
9	35	35	35	35	35	35	35	35	0	0	0	0	0	280
10	39	39	39	39	39	39	39	39	50	0	0	0	0	362
11	43	43	43	43	43	43	43	43	50	50	0	0	0	444
12	47	47	47	47	47	47	47	47	50	50	50	0	0	526
13	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	0	600
Total														4251

Las combinaciones de i y j para que Pablo pierda, $c = 0$, y Pablo gane, $c = 50$, se siguen inmediatamente de las reglas del juego. Consideramos a continuación una de las combinaciones que tienen $1 \leq i \leq 6$ y $i < j < 13$. Para $i \leq 6$, Pablo obliga a Pedro a intercambiar cartas, el cual Pedro tiene una carta de valor *i*, y sabe que Pablo tiene una carta de valor *j* mayor que *i*. Entonces, Pedro extrae una carta de la baraja y consigue una de valor *k*. Pablo gana si $k < j$ o $k = 13$, y el número de cartas que satisfacen esta condición es

$$c(i, j; S) = 3 + 4(j-1) = 4j - 1.$$

Para $7 \leq i \leq 12$ y $1 \leq j \leq 6$, un argumento similar da $c(i, j; S) = 4i - 1$.

Para un valor dado de *i* la probabilidad de Pablo de ganar se convierte en

$$p(i;S) = \sum_j p(i,j;S) = \frac{2c(i;S)}{13\times 51\times 25},$$

donde

$$c(i;S) = \sum_{i\neq j} c(i,j;S) + \frac{3}{4}c(i,i;S).$$

La probabilidad total de ganar para Pablo se convierte en

$$p(S) = \sum_i p(i;S) = \frac{2}{13\times 51\times 25}\sum_i c(i;S).$$

Para la estrategia definida en la tabla anterior,

$$p(S) = \frac{2\times 4251}{13\times 51\times 25} = \frac{2834}{5525} = 0'5129.$$

Montmort no explica estos cálculos relativamente simples; solo ofrece una tabla con los valores de $2c(i;S)$ para las cuatro estrategias en cuestión.

Tabla de Montmort de $2c(i;S)$ *y probabilidad de Pablo de ganar*

Valor de la carta de Pablo	Pablo cambia 7 y menos		Pablo retiene 7 y más	
	Pedro cambia 8 y menos	Pedro retiene 8 y más	Pedro retiene 8 y más	Pedro cambia 8 y menos
1	594	594	594	594
2	580	580	580	580
3	558	558	558	558
4	528	528	528	528
5	490	490	490	490
6	444	444	444	444
7	390	390	360	408
8	476	434	434	476
9	560	590	590	560
10	724	746	746	724
11	888	902	902	888
12	1052	1058	1058	1052
13	1200	1200	1200	1200
$p(S)$	2828/5525 =0’5119	2838/5525 =0’5137	2828/5525 =0’5119	2834/5525 =0’5129
Estrategia	CC	CR	RR	RC

Fuente: Montmort (1713), p. 413. (C) cambia; (R) retiene.

Hemos añadido las fracciones decimales para $p(S)$ y hemos etiquetado con CC el caso en que ambos jugadores cambian, CR, cuando Pablo cambia y Pedro retiene, RR, cuando ambos jugadores retienen (ninguno de los dos cambia de carta) y RC, cuando Pablo no cambia de carta y Pedro sí.

Se verá que los números de la última columna de la tabla de Montmort se obtienen como $2c(i;S)$ de la tabla previa.

Volviendo a la correspondencia, la primera carta de Montmort sobre Her contiene la nota de que la ventaja de A se encuentra entre $1/85$ y $1/84$. Ya que

$$\frac{2828}{5525}-\frac{1}{2}=\frac{131}{11.050}=\frac{1}{84'4},$$

esto indica que Montmort ha encontrado que la probabilidad de A de ganar es (como mínimo) $2828/5525$.

En su réplica, Bernoulli dice que si uno supone que cada jugador elige la estrategia que le es más ventajosa, entonces Pablo elige C, Pedro también elige C, y cuando Pablo elige R, Pedro también elige R, y en ambos casos la probabilidad de Pablo de ganar es $2828/5525$. Sin embargo, añade, es más ventajoso para Pablo usar la estrategia C antes que R, y "esto es un enigma que le dejo para que usted puede exponer". Obviamente, la nota de Bernoulli se refiere al hecho de que la estrategia C da ya sea $2828/5525$ o $2838/5525$, mientras que la estrategia R solamente da $2828/5525$ o $2834/5525$.

Montmort replica que la solución de Bernoulli coincide con la suya propia. Sin embargo, antes de pedir la opinión de Bernoulli él discutió durante algún tiempo el problema con dos de sus amigos: el Sr. Abad de Orbais (también Montmort lo nombra como Monsoury) y el Sr. Waldegrave, y ellos son de otra opinión; el Sr. Abad de Orbais mantiene que es imposible determinar las suertes de Pablo ni de Pedro, pues uno no puede encontrar la estrategia óptima de Pablo sin conocer la estrategia de Pedro y viceversa, y esto lleva a un argumento circular. Hemos ilustrado esto en la siguiente tabla, asumiendo que Pablo comienza eligiendo la estrategia C.

Tabla de suertes de Pablo según las cuatro estrategias

	Estrategia de Pedro		
Estrategia de Pablo	C		R
C	2828/5525	←	2838/5525
	↓		↑
R	2834/5525	→	2828/5525

Como hemos comentado en el apartado anterior, Montmort muestra la carta de Bernoulli a sus amigos, y en respuesta Waldegrave escribe una carta a Montmort indicando sus objeciones. Aunque usando un razonamiento más sofisticado que el mostrado antes, llegan al argumento circular y sostienen que si los jugadores usan la estrategia C o R no hacen ninguna diferencia. Concluye que la solución de Bernoulli es falsa porque se "al parecer el Sr. Bernoulli se contentó…." (cita ya presentada en el apartado anterior).

No es de extrañar que Bernoulli no entienda la implicación de esta nota, ya que los mismos escritores no han comprendido las implicaciones de su punto de vista. Bernoulli no está convencido; ahora da los argumentos para su solución previa. Si Pablo ha elegido una estrategia, C o R, entonces Pedro elige la misma estrategia, porque esta elección minimiza la suerte de Pablo y así maximiza la suya propia; para estas dos combinaciones de estrategias la suerte de Pablo es $2828/5525$.

Sin embargo, Bernoulli dice que si es imposible para los jugadores decidir qué estrategia usar, pueden dejar la decisión al azar y cada uno elegir una estrategia con probabilidad de $\frac{1}{2}$, lo que hace la suerte de Pablo igual a $2832/5525$. También dice que este procedimiento no lleva a una única solución porque la suerte de Pablo es $2833/5525$ si él siempre usa la estrategia C y Pedro deja la decisión al azar. (Bernoulli usa números ligeramente diferentes en su razonamiento.)

En la última carta sobre Her, la de 15 de noviembre de 1713, Montmort escribe que ahora está convencido de que las consideraciones de él mismo y de Bernoulli no representan una solución porque ellas presuponen que Pablo conoce la estrategia de Pedro. Adopta la idea de elegir una estrategia al azar y da la suerte de Pablo como

$$\overline{p} = \frac{2828ac + 2834bc + 2838ad + 2828bd}{5525(a+b)(c+d)},$$

donde $a/(a+b)$ y $c/(c+d)$ son las probabilidades de Pedro y Pablo de elegir la estrategia C, respectivamente. Montmort es incapaz de encontrar el valor óptimo de estas probabilidades y concluye que es imposible resolver el problema. Sin embargo, antes de que concluyese su carta recibe una de Waldegrave con la solución, que él incluye en la carta a Bernoulli.

Poniendo $a=3$ y $b=5$, Waldegrave encuentra que $\overline{p} = 2831'75/5525 = 0'5125$ cualquiera que sea la estrategia que elija Pablo y así, también, cualquier valor de c y d que él elija. Da una clara discusión de esta solución, mostrando que si Pedro elige cualquier otra estrategia, existe una estrategia para Pablo que hace que la suerte o suerte de Pedro sea menor. Por tanto, $a=3$ y $b=5$ es la estrategia óptima para Pedro. Además, Waldegrave observa que Pablo es capaz de limitar la suerte de Pedro a $2831'75/5525$

eligiendo $c=5$ y $d=3$, y ésta es la estrategia óptima para Pablo. La introducción de un dispositivo de suerte resuelve así el problema del argumento circular y da un determinado valor único de la suerte de Pedro.

La teoría matemática sobre juegos de estrategia no fue desarrollada hasta los años veinte del pasado siglo con los trabajos de Borel y von Neumann y el texto fundamental de von Neumann y Morgenstern (1944).

Comentaremos brevemente sobre la relación entre la solución de Waldegrave y la teoría moderna. Supongamos que a_{ij}, $i=1,2$ y $j=1,2$ representa los valores de la suerte de Pablo en la tabla anterior 2×2, i y j denotando las estrategias de Pablo y Pedro, respectivamente. Bajo los supuestos hechos por Montmort y Bernoulli, Pablo consigue al menos

$$\max_i \min_j a_{ij} = \frac{2828}{5525},$$

y como máximo

$$\min_i \max_j a_{ij} = \frac{2834}{5525}.$$

Ya que

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_i \max_j a_{ij},$$

no hay solución única por medio de estrategias puras.

Introduciendo estrategias mixtas y tomando $x = a/(a+b)$ e $y = c/(c+d)$, la fórmula de Montmort para la suerte de Pablo se convierte en

$$\overline{p}(x,y) = a_{22} + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y - (a_{21} - a_{22} + a_{12} - a_{11})xy.$$

Al igual que en el ejemplo, asumiremos que los coeficientes de x e y son positivos y el coeficiente de xy negativo.

Waldegrave determina el valor óptimo de *x*, digamos x_0, por la condición de que $\overline{p}(x_0, y)$ ha de ser independiente de *y*. Poniendo el coeficiente de *y* igual a cero, obtenemos

$$x_0 = \frac{a_{21} - a_{22}}{a_{21} - a_{22} + a_{12} - a_{11}} = \frac{3}{8},$$

$$\overline{p}(x_0, y) = \frac{a_{22} + (a_{12} - a_{22})(a_{21} - a_{22})}{a_{21} - a_{22} + a_{12} - a_{11}} = \frac{2831'75}{5525}.$$

Además, Waldegrave dice que si Pablo elige una estrategia diferente de x_0, entonces existe una estrategia *y* para Pedro tal que $\overline{p}(x, y) < \overline{p}(x_0, y)$ para $x \neq x_0$. Para probar esto, considerar la diferencia

$$\overline{p}(x_0, y) - \overline{p}(x, y) = (x - x_0)\{-(a_{12} - a_{22}) + (a_{21} - a_{22} + a_{12} - a_{11})y\}.$$

Si $x > x_0$, entonces Pedro elige $y = 1$ para hacer la diferencia tan grande como sea posible y positiva. Si $x < x_0$, entonces Pedro elige $y = 0$, que de nuevo hace la diferencia tan grande como es posible y positiva. Por tanto,

$$\overline{p}(x_0, y) = \max_x \min_y \overline{p}(x, y).$$

Análogamente, se encuentra que el valor óptimo de *y* es igual a

$$y_0 = \frac{a_{12} - a_{22}}{a_{21} - a_{22} + a_{12} - a_{11}} = \frac{5}{8},$$

y que $\overline{p}(x, y_0) = \overline{p}(x_0, y)$, lo que significa que

$$\max_x \min_y \overline{p}(x, y) = \min_y \max_x \overline{p}(x, y).$$

Este es el teorema fundamental minimax, que demuestra que el uso de estrategias mixtas conduce unívocamente a un valor determinado del juego.

Concluimos este apartado con una última consideración de Montmort (en su última carta dentro del *Essay*) en la que se muestra consciente de la importancia de este tipo de juego. Escribe que “Estas cuestiones son bastante simples, pero creo imposible resolver; si esto es así es una lástima porque esta dificultad se presenta en muchos caso de la vida civil: por ejemplo, cuando dos personas hacen negocios cada una de ellas ajustará su comportamiento después de la otra; también tiene lugar en diversos juegos” (1713, p. 406).

Mostramos a continuación el anexo a esa última carta de Montmort, que el propio autor incluyó con los resultados de los cálculos asociados al problema del Her para dos jugadores.

Comme dans ces dernieres Lettres on a parlé du Her, j’ai jugé qu’il étoit à propos d’en mettre ici les calculs, pour épargner au Lecteur la peine de les faire.

	Sort de Paul quand il a la maxime de changer au ſept, & Pierre celle de changer au huit.	Pierre a la maxime de ſe tenir au huit.	Sort de Paul quand il a la maxime de ſe tenir au ſept, & Pierre celle de ſe tenir au huit.	Pierre celle de changer au huit.
Roy,	1200	1200	1200 . . .	1200 . . .
Dame,	1052	1058	1058 . . .	1052 . . .
Valet,	888	902	902 . . .	888 . . .
Dix,	724	746	746 . . .	724 . . .
Neuf,	560	590	590 . . .	560 . . .
Huit,	476	434	434 . . .	476 . . .
Sept,	390	390	360 . . .	408 . . .
Six,	444	444	444 . . .	444 . . .
Cinq,	490	490	490 . . .	490 . . .
Quatre,	528	528	528 . . .	528 . . .
Trois,	558	558	558 . . .	558 . . .
Deux,	580	580	580 . . .	580 . . .
As,	594	594	594 . . .	594 . . .
	$\frac{8484}{13.51.25} = \frac{2828}{5525}$	$\frac{8514}{13.51.25} = \frac{2838}{5525}$	$\frac{8484}{13.51.25} = \frac{2828}{5528}$	$\frac{8502}{13.51.25} = \frac{2834}{5525}$

3.1.4.4. LA APORTACIÓN DE TREMBLEY (1804)

Jean Trembley nació en Ginebra en 1749 y murió 18 de septiembre de 1811. Escribió sobre una amplia gama de temas, incluyendo sobre cálculo, ecuaciones diferenciales, diferencias finitas, probabilidad y diversos problemas aplicados. Sus trabajos fueron publicados en las Memorias de las Academias de Gotinga, Berlín, Turín y San Petersburgo. Aunque era un autor prolífico, no fue relevante en los campos donde trabajó y, además, estaba tan eclipsado por sus contemporáneos como Laplace y Lagrange que podemos decir que hoy día apenas si es citado en los análisis históricos.

Con respecto a las cuestiones de probabilidad y afines, Trembley aportó ocho trabajos. Los dos primeros fueron publicados en volúmenes XII y XIII del *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis* en los años 1796 y 1799. Los otros seis aparecieron en las *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres* entre los años 1799 y 1804. Todos ellos tienen algo en común: tratan de "simplificar" o "explicar" el trabajo realizado por los matemáticos más capaces.

Todhunter (1865), uno de los pocos historiadores de la materia que estudia a Trembley, no habla bien de él. Sin embargo, le dedica un capítulo entero a explicar estos trabajos. El último de los de los ocho publicados por Trembley sobre probabilidad y afines fue "Observations sur le calcul d'un Jeu de hasard." en *Mémoires de l'Académie ciencias et des belles-lettres ... Berlín* , 1802, pp. 86-102. La fecha de publicación es de 1804. En este documento se refiere al problema ya comentado sobre el juego de Her. Que sepamos nosotros, entre 1713, fecha de publicación de la segunda edición del *Essay* y 1804, fecha de publicación de estas memorias donde se incluye el trabajo de Trembley, no se publicó nada sobre la resolución del problema del Her. Seguramente, dicha resolución siguió abordándose en la correspondencia entre Montmort y Nicolás Bernoulli posterior a 1713 y que aún no ha sido publicada.

Una de las características de Trembley en sus escritos sobre estos asuntos es la pormenorización que practica, presentando los máximos detalles de sus cálculos, al contrario de lo que hasta ahora había ocurrido para el caso del Her, lo que se ha visto en los apartados anteriores. Como ilustración de lo que comentamos presentamos en el recuadro un fragmento de los cálculos que Trembley presenta para el caso de dos jugadores (estamos a principios del XIX cuando ya el término "esperanza" se va universalizando).

§.5. Si Pablo tiene un rey, él no va a cambiar; luego de las 51 cartas restantes, sólo existen los tres reyes que le hacen perder, por lo tanto su esperanza es

$$y = \frac{3 \cdot 0 + 48 \cdot 1}{51} = \frac{48}{51},$$

y esta esperanza tiene lugar, tanto si Pedro desea cambiar como si no.

§.6. Si Pablo tiene una reina, no la cambiará; en este caso si Pedro se mantiene en el ocho, su esperanza es la que sigue

$$y = \frac{7 \cdot 0 + 16 \cdot 1 + 28z}{51}.$$

Ahora $z = \frac{3 \cdot 0 + 47 \cdot 1}{50}$. Por tanto,

$$y = \frac{16 \cdot 1 + \frac{28 \cdot 47}{50}}{51} = \frac{2116}{51 \cdot 50}.$$

Si Pedro cambia en el ocho, Pablo tiene $y = \frac{7 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 32z}{51}$,

$z = \frac{3 \cdot 0 + 47 \cdot 1}{50}$, por lo que

$$y=\frac{12\cdot 1+\dfrac{32\cdot 47}{50}}{51}=\frac{2104}{51\cdot 50}.$$

§.7. Si Pablo tiene una sota, él no cambiará; en este caso, si Pedro se mantiene en el ocho, se tiene $y=\dfrac{11\cdot 0+12\cdot 1+28z}{51}$, $z=\dfrac{7\cdot 0+43\cdot 1}{50}$, por lo que

$$y=\frac{12\cdot 1+\dfrac{28\cdot 43}{50}}{51}=\frac{1804}{51\cdot 50}.$$

Si Pedro cambia en el ocho, Pablo tiene $y=\dfrac{11\cdot 0+8\cdot 1+32z}{51}$, $z=\dfrac{7\cdot 0+43\cdot 1}{50}$, por lo que

$$y=\frac{8\cdot 1+\dfrac{32\cdot 43}{50}}{51}=\frac{1776}{51\cdot 50}.$$

§.8. Si Pablo tiene un diez, él no cambiará; en este caso, si Pedro se mantiene en el ocho, se tiene $y=\dfrac{15\cdot 0+8\cdot 1+28z}{51}$, $z=\dfrac{11\cdot 0+39\cdot 1}{50}$, por lo que

$$y=\frac{8\cdot 1+\dfrac{28\cdot 39}{50}}{51}=\frac{1492}{51\cdot 50}.$$

Si Pedro cambia en el ocho, Pablo tiene $y=\dfrac{15\cdot 0+4\cdot 1+32z}{51}$, $z=\dfrac{11\cdot 0+39\cdot 1}{50}$, por lo que

$$y=\frac{4\cdot 1+\dfrac{32\cdot 39}{50}}{51}=\frac{1428}{51\cdot 50}.$$

Después de completar y presentar todos sus cálculos presenta la siguiente tabla que nos recuerda a la que Montmort incorporó en el anexo de su última carta en el *Essay*.

Parte de Pablo

Cartas de Pablo	Pablo se mantiene en el 7. Pedro se mantiene en el 8	Pablo se mantiene en el 7. Pedro cambia en el 8	Pablo cambia en el 7. Pedro se mantiene en el 8	Pablo cambia en el 7. Pedro cambia en el 8
Rey	1200	1200	1200	1200
Reina	1058	1052	1058	1052
Sota	902	888	902	888
Diez	746	724	746	724
Nueve	590	560	590	560
Ocho	434	476	434	476
Siete	360	408	390	390
Seis	444	444	444	444
Cinco	490	490	490	490
Cuatro	528	528	528	528
Tres	558	558	558	558
Dos	580	580	580	580
As	594	594	594	594
Media	$\frac{8484}{13\cdot 25\cdot 51}$	$\frac{8502}{13\cdot 25\cdot 51}$	$\frac{8514}{13\cdot 25\cdot 51}$	$\frac{8484}{13\cdot 25\cdot 51}$

Parte de Pedro

Media	$\frac{8091}{13\cdot 25\cdot 51}$	$\frac{8073}{13\cdot 25\cdot 51}$	$\frac{8061}{13\cdot 25\cdot 51}$	$\frac{8091}{13\cdot 25\cdot 51}$

En la investigación de Trembley de la suerte de Pedro, que considera esta suerte en el momento en que Pablo ha hecho su elección si va a cambiar o no. Pero esto es de poco valor para el mismo Pedro; Pedro querría saber cómo actuar en determinadas circunstancias, y antes de que actúe saber si Pablo retuvo la carta que obtuvo en primera o le obligó a un intercambio. Por lo tanto la investigación de Trembley de la suerte de Pedro difiere del método antes

Los cálculos para dos jugadores se detienen aquí. Como vemos, presenta probabilidades condicionadas. No concluye con una solución global. No entiende el razonamiento de Waldegrave que conduce a la solución minimax antes desarrollada.

Concluye esta parte para dos jugadores con el siguiente párrafo:

El Sr. de Montmort y sus amigos concluyen entonces contra Nicolás Bernoulli, que este caso era insoluble, porque dijeron que, si Pablo sabe que Pedro se queda en el ocho, él va a cambiar en el siete, pero si Pedro llega a conocer que Pablo cambia en el siete, él va a cambiar en el ocho, llegando a un círculo vicioso. Pero sólo se deduce entonces que cada uno estará perpetuamente en la incertidumbre sobre la forma de juego de su adversario; en consecuencia, Pablo hará un cambio en siete en una jugada dada, pero él no seguirá constantemente este sistema en una secuencia de muchas jugadas. Asimismo Pedro puede cambiar en el ocho en una jugada dada, sin ser capaz de hacer varias jugadas iguales en una secuencia, lo que está de acuerdo con las conclusiones del Sr. Nicolás Bernoulli y en contra de las del Sr. de Montmort.

Todhunter (1865) opina que no es correcto decir que la conclusión aquí obtenida coincide con la de Nicolás Bernoulli y en contra de la de Montmort: “Los adversarios de Nicolás Bernoulli sólo parecen haber afirmado que era imposible decir en qué regla Pablo debe actuar de manera uniforme, y esto lo permite Trembley”.

Después, en el mismo documento, Trembley hace un intento de resolución del problema del Her para tres jugadores; pero su solución igual que antes, resulta insatisfactoria. Supongamos que hay tres jugadores, Pablo, Santiago y Pedro. Trembley considera que las posibilidades de Pablo y Santiago están en la proporción de las posibilidades del primer y segundo jugador cuando sólo hay dos jugadores; y denota estas suertes por x e y. Toma la proporción de x a y como 8496 a 8079.

A continuación supone que las suertes de Santiago y Pedro están también en la misma proporción. Esto no sería del todo exacto, ya que cuando Santiago está estimando su suerte con respecto a Pedro ya tendría algún conocimiento de la carta de Pablo; mientras que en el caso de Pablo y Santiago, el primero no tiene conocimiento de cualquier otra carta que no sea la suya para orientarle sobre mantenerse en su carta o cambiar.

Entonces, la insatisfacción de los cálculos de Trembley está en el siguiente paso. Considera que $\frac{x}{x+y}$ es la probabilidad de que Pablo le ganará a Santiago, y que $\frac{y}{x+y}$ es la de que Pedro le ganará a Pablo; infiere que $\frac{xy}{(x+y)^2}$ es la de que ambos, Pablo y Pedro ganen a Santiago, por lo que Santiago será eliminado en la primera jugada. Esto no es correcto: el juego está construido de manera que los jugadores están casi en el mismo plano; por lo que $\frac{1}{3}$ está muy próximo a la suerte de que un jugador dado sea excluido en la primera prueba. La solución de Trembley dará $\frac{1}{4}$ como la suerte de que Santiago será excluido sí $x = y$.

El error surge del hecho de que $\frac{x}{x+y}$ e $\frac{y}{x+y}$ no representan aquí suertes independientes; por supuesto si Pablo tiene una carta más alta que Santiago, esto por sí solo produce la presunción de que Santiago tendrá más bien una carta inferior a la de Pedro que superior. Este error en el inicio vicia la solución de Trembley.

Como parte complementaria de su solución Trembley muestra igual que para dos jugadores, sus cálculos pormenorizados con una larga extensión, que puede resultar tediosa.

Fisher (1934) analiza el problema basándose en la exposición de Todhunter; deriva la tabla de $c(i, j; S)$ dada arriba y, por aleatorización, encuentra la solución de Waldegrave. Parece que no ha leído el libro de Montmort y, engañado por Todhunter, considera su solución como novedosa; su exposición del principio de aleatorización es desde luego más claro que el dado por Waldegrave.

3.1.5. SOBRE EL JUEGO DEL *TAS*

El siguiente problema que Montmort en este caso propone para ser resuelto es *sur le Jeu des Tas*. El juego se describe así en la página 281,

> Para comprender de qué se trata, hay que saber que después de las recuperaciones de hombre, uno de los Jugadores que a menudo se divierte tiene compartir el juego en diez montones cada uno consiste en cuatro cartas cubiertas, y luego devolviendo la primera de cada montón, pone y quita todas que se encuentran semejantes, por ejemplo, dos Reyes, dos sotas, dos seis, etc., luego devuelve las cartas que siguen inmediatamente aquellos que llegan a dar dobletes y continúa quitando los que vienen por doblete hasta que llega a la última de cada montón, después de retirarlos todos de dos en dos, en cuyo caso solamente se gana.

El juego no es del todo un juego de puro azar, porque el jugador con frecuencia puede hacer una selección de los distintos métodos de emparejamiento y la eliminación de las cartas. En la descripción del juego se supone que se utilizan cuarenta cartas, pero Montmort propone el problema para solución general sin limitar las cartas a cuarenta. Se requiere la probabilidad de que el jugador tenga ganancia y también el método más ventajoso de proceder. Él dice que el juego fue rara vez jugado por dinero, pero da a entender que estaba en uso entre las damas.

En su página 321 Montmort da, sin demostración, el resultado en un caso particular de este problema, a saber, cuando las cartas se componen de n pares, las dos cartas en cada par están numerados igual; las cartas se supone colocados al azar en n lotes, cada uno de dos cartas. Él dice que la probabilidad de que el jugador gane es $\frac{n-1}{2n-1}$. En la página 334 Nicolás Bernoulli dice que esta fórmula es correcta, pero él desea saber cómo se encontró, porque él mismo no puede encontrarlo por inducción, poniendo para n en la serie 2, 3, 4, 5, … Podemos suponer que esto significa que Nicolás Bernoulli verificó por prueba que la fórmula era correcta en algunos casos, pero no pudo dar una demostración general. Montmort parece haber pasado por alto la investigación de Nicolás Bernoulli, ya que el problema nunca se menciona otra vez en el curso de la correspondencia. Como el resultado es notable por su simplicidad y, como Nicolás Bernoulli encontró el problema difícil, puede ser interesante dar una solución. Se observará que en este caso el juego es uno de pura casualidad, ya que el jugador nunca tiene ninguna opción de cursos abiertos a él.

La solución del problema depende de nuestra observación del estado de las cartas en el momento en el que el jugador pierde, es decir en el momento en el que puede que no haya más pares entre las cartas expuestas para ver; el jugador puede ser así arrestado en el comienzo del juego, o después de que ya ha dado algunos pasos: en este momento el jugador *se queda con algún número de lotes, que están todos intactos, y las cartas expuestas a la vista no presentan pares*. Esto será evidente en la reflexión.

Ahora debemos determinar (1) el número total de casos posibles, y (2) el número total de casos en los que el jugador está detenido desde el principio.

(1) Podemos suponer que las *2n* cartas se van a colocar en *2n* lugares, y por lo tanto $(2n)!$ será el número total de casos posibles.

(2) Aquí podemos encontrar el número de casos suponiendo que los *n* lugares superiores se rellenaron primero y después los *n* lugares inferiores. Podemos colocar en primer lugar cualquier carta de las *2n*, a continuación, en segundo lugar cualquier carta de las *2n - 2* que permanecen al rechazar la carta acompañante que ponemos en primer lugar, a continuación, en el tercer lugar cualquier carta de las *2n - 4* que quedan por el rechazo de las dos cartas compañeras, y así sucesivamente. Por lo tanto los *n* lugares superiores se pueden rellenar de $2^n \cdot n!$ maneras. Luego los *n* lugares más bajos se pueden llenar de $n!$ maneras. De ahí obtenemos los $2^n \cdot n! \cdot n!$ casos en los que el jugador está detenido desde el principio.

Podemos dividir cada una de estas expresiones por $n!$ si nos apetece hacer caso omiso del orden diferente en el suponemos que los *n* lotes se pueden fijar. Por lo tanto los resultados son $\frac{(2n)!}{n!}$ y $2^n \cdot n!$, respectivamente; vamos a utilizar estas formas.

Denotemos por u_n el número total de casos desfavorables, y sea f_r que denota el número total de casos favorables cuando las cartas consisten en T pares. Entonces

$$u_x = 2^n \cdot n! + \Sigma \frac{n!}{r!(n-r)!} f_r (n-r)!\, 2^{n-r} \,,$$

la suma se extiende desde $r = 2$ a $r = n - 1$, ambos inclusive.

Porque, como hemos dicho, el jugador pierde por quedarse con algún número de lotes, sin continuidad, en el que las cartas expuestas no contienen pares. Supongamos que se queda con $n-r$ lotes, por lo que se ha librado de r lotes de los n lotes originales. El factor de $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ da el número de formas en las que los r pares pueden seleccionarse a partir de n pares; el factor f_r da el número de maneras en que estas parejas pueden ser dispuestas de modo que permitan al jugador deshacerse de ellos; el factor $(n-r)!\,2^{n-r}$ proporciona el número de maneras en que los restantes pares n-r restantes pueden ser distribuidos en los n-r lotes sin que haya un solo par entre las cartas expuestas.

Es preciso señalar que el caso en que $r=1$ no ocurre, dada la naturaleza del juego; el jugador, si no es detenido en el principio, sin duda va a ser capaz de eliminar dos pares. Podemos sin embargo si nos complace considerar que la suma se extiende desde $r=1$ hasta $r=n-1$, ya que $f_r=0$ cuando $r=1$.

Tenemos entonces

$$u_n = 2^n \cdot n! \left\{ 1 + \Sigma \frac{f_r}{2^r \cdot r!} \right\}.$$

La suma para u_n se extiende a un término menos; así hallaremos que

$$u_n = 2n\,u_{n-1} + 2n\,f_{n-1}.$$

Pero $$u_{n-1} + f_{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!};$$

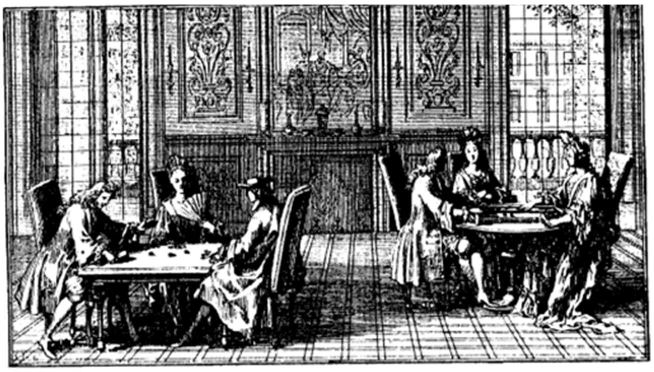
Por lo que $$u_n = \frac{2n \cdot (2n-2)!}{(n-1)!}.$$

De aquí $$f_n = \frac{(2n)!}{n!} - u_n = \frac{2(2n-2)!}{(n-2)!};\ \text{y}\ f_n \div \frac{(2n)!}{n!} = \frac{n-1}{2n-1}.$$

Este es el resultado de Montmort.

3.2. SOBRE JUEGOS DE DADOS

3.2.1. QUINQUENOVE



PROBLÊME
SUR
LE QUINQUENOVE.

Cinco y nueve es un juego de dados que puede implicar varios lanzamientos dependiendo de los resultados de los lanzamientos previos. El jugador A lanza dos dados; B gana si se obtiene un 5 o un 9 en el lanzamiento; A gana si se lanza 3 u 11 puntos, o un doble; para el resto de resultados A continua lanzando hasta que, o bien gana B consiguiendo 5 o 9 puntos, o gana A al obtener el mismo número de puntos que le hizo continuar.

Considerando el primer lanzamiento, es fácil ver que B gana en 8 casos, A gana en 10 casos, y A continúa jugando en 18 casos de un total de 36 casos igualmente probables.

Para encontrar la esperanza de A Bernoulli usa un argumento condicional combinado con el siguiente Lema: Sea *e* la esperanza de A al comienzo de una partida: Supongamos que hay tres premios, *a*, *b* y *e* y que los correspondientes números de posibilidades son *p*, *q* y *r*. Entonces, $e=(pa+qb)/(p+q)$. La demostración es sencilla.

Bernoulli analiza los casos siguientes. Supongamos que A consigue cuatro puntos en su primer lanzamiento sin conseguir el doblete (2,2). El juego continua entones hasta que A lanza o bien 5 puntos, o bien 9, lo que implica una probabilidad $8/36$, o A lanza 4 puntos, con una probabilidad $3/36$. Para todos los demás resultados A vuelve a la misma situación en la que se encontraba antes de su último lanzamiento. Se sigue del lema que la esperanza de A es $(3\times1+8\times0)/11=3/11$. De esta forma, Bernoulli encuentra los siguientes resultados:

Nº de puntos en el primer lanzamiento	4	6	7	8	10
Probabilidad de continuación	$2/36$	$4/36$	$6/36$	$4/36$	$2/36$
Esperanza condicionada	$3/11$	$5/13$	$3/7$	$5/13$	$3/11$

Finalmente, Bernoulli calcula la esperanza de A como

$$\left[10\times1\times8\times0+4\times3/11+8\times5/13+6\times3/7\right]/36=4189/9009.$$

Montmort (1708, pp. 109-113; 1713, pp. 173-177) analiza una versión un poco más general de este juego (*Quinquenove*) y, esencialmente, usa el mismo método para su solución.

Una explicación prolija de las reglas del juego junto con el primer problema planteado es la que aquí mostramos:

EXPLICACIÓN DE ESTE JUEGO.

137. SE sortea en primer lugar entre los jugadores quién tendrá el cubilete. Supongamos que cae en Pedro; y para hacer entender el Juego con más facilidad, supongamos que no hay más que dos Jugadores, Pedro y Pablo. Éste pondrá en primer lugar en el juego una cierta suma; entonces Pedro, lanzando los dados, he aquí lo que ocurre. Si Pedro saca cinco o nueve, pierde, y da el cubilete a Pablo. Si Pedro saca o tres, u once, o un doblete, consigue la apuesta de Pablo. Éste vuelve a poner en el juego, y Pedro continúa jugando. Si Pedro no consigue alguno de los lanzamientos precedentes, no habrá perdido ni ganado. Para explicar lo que ocurre en este caso, supongamos, por ejemplo, que Pedro ha conseguido siete en el primer lanzamiento. Se señalará, 1º, que volviendo a lanzar Pedro, no podrá ganar esta apuesta de Pablo nada más que consiguiendo siete. 2º. Que Pablo está en libertad de arriesgar una nueva apuesta, y que Pedro, paralelamente, en libertad de tenerla o de no tenerla. 3º. Que Pablo, para distinguir esta apuesta de la precedente, la pone debajo, y a ella se le llama montón. 4º. Que si este montón es igual a la apuesta, se le llama montón en el juego; y que cuando no es la misma, se le llama montón en los dados. 5º. Que Pedro, habiendo aceptado este nuevo montón, ganará consiguiendo en el lanzamiento siguiente, o tres, u once, o doblete, o bien consiguiendo en la siguiente esta chance antes que conseguir cinco o nueve; pero no puede ganar la primera apuesta que se ha dicho entrada en el juego, nada más que consiguiendo siete; y por fin, que perderá las dos consiguiendo o cinco o nueve.

Supongamos ahora para una más amplia explicación, que habiendo dicho Pedro, *Taupe à la masse*[7], consigue de su segundo lanzamiento ocho de otro modo que un doblete, es decir, con seis y

[7] Con traducción literal "Topo en el montón".

dos, o con cinco y tres, y que Pablo pone en el juego un nuevo montón que Pedro acepta. Se señalará, 1º, que Pedro ganará este montón consiguiendo o tres, u once, o doblete. 2º. Que ganará la primera apuesta de Pablo consiguiendo siete, y la segunda consiguiendo ocho. 3º. Que pierde las dos apuestas y el montón consiguiendo o cinco o nueve, y que entonces cede el cubilete a Pablo.

Lo que acabo de explicar para un pequeño número de lanzamientos, y sólo con respecto a dos Jugadores, debe extenderse a cualquier otro número de lanzamientos y Jugadores.

PROBLEMA.

PROPOSICIÓN XVIII.

Pedro y Pablo juegan al Quinquenove, y Pedro tiene el cubilete. Supongo que la apuesta de Pablo es siempre la misma y está expresada por A. Supongo también que Pedro no aceptará montón, pero que estará obligado a tener el juego hasta que haya perdido; después de los cuál supongo el juego concluido. Se pide cuál es en este juego la ventaja o desventaja de aquél que tiene el dado, o lo que viene a ser lo mismo, cuánto debería pedir o dar Pedro a un tercero para cederle el cubilete, y darle a jugar en su lugar.

Nuestro autor después describe otro juego, que él dice que no tiene nombre y duda si llamarle el Juego de la Esperanza, y da algunos cálculos sobre este también. No se molesta con las reglas (que deben haber sido establecidos en su totalidad por esta vez) y calcula varias suertes simples pero señala que en la mayoría de las situaciones la solución no se puede encontrar. Recordando las complejidades del juego, uno se inclina a estar de acuerdo con él. Además de los aún más complicados cálculos en juegos que implican 2, 3, 4, 5, 6, 7,… dados, en los que los principios de cálculo sobre probabilidades condicionales han sido ya establecidos, parece no conseguir algo nuevo.

3.3. OTROS JUEGOS Y PROBLEMAS

En las páginas 248-257 y p. 366 de la segunda edición, sigue un análisis del problema de los puntos en un juego de tejos y bolos. Según De Moivre (Prefacio, 1712 y 1718), este problema le fue planteado a él por Francis Robartes, y De Moivre da la solución de un caso especial en *De Mensura Sortis* (1712, Problemas 16 y 17). *El problema de Robartes* fue generalizado por Montmort como sigue:

PROBLÊME I.

SUR LE JEU DU PETIT PALET

OU DE LA BOULE.

Los jugadores A y B juegan en un juego de tejos o bolos. A con *m* bolos y B con *n*. La destreza de A es a la de B como *r* a *s*. En cada partida el ganador consigue un número de puntos igual al número de sus bolos que están más cerca de la toma (bolín) que cualquiera de los del perdedor. Si el juego se interrumpe cuando A necesita *a* puntos y B *b* puntos para ganar, ¿cómo se divide la apuesta equitativamente entre ellos?

Montmort explícitamente define "destreza" refiriéndose a un juego con un bolo para cada jugador. La destreza del jugador A, $r/(r+s)$, es entonces la probabilidad de A de conseguir acercarse más a la toma que B. También señala que para $m = n = 1$ tenemos el clásico problema de los puntos.

Montmort asume que la apuesta total es 1 por lo que la esperanza de A, digamos $e(a,b)$, es igual a su probabilidad de ganar la apuesta.

Para resolver el problema Montmort introduce una urna con *mr* fichas blancas y *ns* fichas negras, representando las posibilidades de ganar de A y de B. El número total de fichas es $t = mr + ns$.

Sea P_i la probabilidad de A de conseguir al menos *i* puntos, esto es, la probabilidad de conseguir una racha de *i* fichas blancas extrayendo sin reemplazamiento de la urna. Se deduce que

$$P_i = \frac{mr}{t}\frac{mr-r}{t-r}\cdots\frac{mr-(i-1)r}{t-(i-1)r},\ i=1,2,...,m.$$

Sea p_i la probabilidad de A de conseguir exactamente *i* puntos, esto es, la probabilidad de conseguir una racha de *i* fichas blancas y a continuación una negra. Por tanto,

$$p_i = \frac{mr}{t}\frac{mr-r}{t-r}\cdots\frac{mr-(i-1)r}{t-(i-1)r}\frac{ns}{t-ir},\ i=1,2,...,m.$$

P_i y p_i están definidas como cero en otro caso. Las correspondientes probabilidades para B se denotarán con Q_i y q_i, $i=1,2,...,n$ y son obtenidas de P_i y p_i intercambiando (m,r) y (n,s).

Note que $p_i = P_i - P_{i+1}$ y que

$$\sum_1^m p_i + \sum_1^n q_i = P_1 + Q_1 = 1.$$

Montmort da la solución con la recurrencia

$$e(a,b) = P_a + \sum_{i=1}^{a-1} p_{a-i} e(i,b) + \sum_{i=1}^{b-1} q_i e(a,b-i),\ \begin{cases} a=1,2,\ldots \\ b=1,2,\ldots \end{cases}$$

y $e(a,0)=e(0,b)=1$. La demostración se obtiene directamente de los teoremas de adición y multiplicación.

Si los jugadores tiene sólo un bolo cada uno, entonces $P_1 = p_1 = r/(r+s)$, $Q_1 = q_1 = s/(r+s)$, y $e(a,b) = p_1 e(a-1,b) + q_1 e(a,b-1)$, que es la recurrencia para el problema clásico de los puntos.

Montmort afirma que se cumplen resultados similares para cualquier número de jugadores y da un ejemplo numérico para tres jugadores.

En su formulación y discusión del problema de Robarte, De Moivre (1712) asume que los jugadores son de igual destreza y tienen el mismo número de bolos. Entonces deriva la fórmula para $e(2,1)$ y $e(3,1)$ y afirma que se puede encontrar la fórmula general por el mismo método. En la *Doctrine of Chances* (1718, Problemas 27 y 28), De Moivre reconoce la solución general de Montmort y deriva $e(a,b)$ para $m = n$.

En terminología moderna, el problema de Robarte puede describirse como un paseo aleatorio en dos dimensiones, siendo los pasos horizontales de longitud 1 o 2,…, o *m*, y los pasos verticales de longitud 1 o 2,…, o *n*. Usando el mismo gráfico que en la Fig. 5.3.1, A gana si el paseo aleatorio cruza la línea vertical a través de $(a,0)$ antes de cruzar la línea horizontal a través de $(0,b)$.

En 1711 Montmort publicó un artículo en *Journal des Sçavans* conteniendo un problema sobre la *Loterie de Loraine*, dando su propia solución en forma de un anagrama. Argumentó que éste era otro ejemplo de utilidad de las matemáticas en asuntos civiles e instó a los magistrados a consultar las matemáticas antes de tomar decisiones sobre tales materias. Esta carta es reimpresa junto con una discusión de la solución en el *Essay* (1713, pp. 257-260, 313, 326, 346). En otro ejemplo, Montmort considera el problema de elegir entre dos candidatos para un cargo por mayoría de votos (1713, pp. 260-261).

Un juego curioso que incorpora nuestro autor se llama Le Je*u des Noyaux*, que Montmort dice que el barón de la Hontan había descubierto que era habitual entre los salvajes de Canadá; véanse las páginas de Montmort XII y 213. El juego se describe así,

Se juega con ocho huesos negros de un lado y blancos del otro: se lanzan los huesos al aire: entonces, si los negros son impares, el que ha lanzado los huesos le gana al otro Jugador que ha apostado en el juego: si salen o todos negros o todos blancos, gana el doble; y fuera de estos dos casos, pierde su apuesta.

PROPOSICIÓN XXXI.

Se pide cuál de los dos Jugadores tiene ventaja, suponiendo que ellos ponen por igual en el juego.

168. ESTÁ claro que el Problema de los Huesos se reduce a éste. Determinar cuánto hay que apostar, lanzando al azar ocho dados, que sólo tenga cada uno dos caras, un as y un dos, a que se consiga o un as y siete dos, o tres ases y cinco dos, o cinco ases y tres dos, o siete ases y un dos, o dos ases y seis dos, o cuatro ases y cuatro dos, o seis ases y doble dos.

Se encontrará, *art. 27*, que hay, 1º, ocho lanzamientos sobre 256 para conseguir un negro y siete blancos; 2º, 56 lanzamientos para tener tres negros y cinco blancos; 3º, 28 lanzamientos para dos negros y seis blancos; 4º, 70 lanzamientos para tener cuatro negros y cuatro blancos. Es evidente que no se puede conseguirlas o todas negras o todas blancas más que de una forma. Se sigue de todo esto que si el dinero del juego es llamado *A*, la suerte del que tiene que lanzar los huesos será $\dfrac{128\times A + 2\times \overline{A+\frac{1}{2}A}}{256}$, y la suerte del otro Jugador será $\dfrac{126A + 2\times \overline{0-\frac{1}{2}A}}{256}$. Así, la ventaja de aquél que lanza los huesos es $\dfrac{1}{256}$, y para que el juego sea igual, es necesario que aquél que lance los huesos ponga en el juego 22 contra 21 del otro.

Supongamos entonces ocho dados que tienen cada uno dos caras, una cara negra y una blanca; que son arrojados al azar. Hay, pues, 2^8, es decir 256, casos igualmente posibles. Se encontró que hay 8 casos de una negra y siete blancas, 56 casos de tres negras y cinco blancas, 28 casos de dos negras y seis blancas, y 70 casos para cuatro negras y cuatro blancas; y sólo hay un caso para todo negro. Así, si todo el juego se denota por A, la probabilidad del jugador que lanza los dados es

$$\frac{1}{156}\left\{(8+8+56)A+2\left(A+\frac{1}{2}A\right)\right\},$$

y la probabilidad del otro jugador es

$$\frac{1}{156}\left\{(28+28+70)A+2\left(0+'\frac{1}{2}A\right)\right\}.$$

La primera es igual a $\frac{131}{256}A$, y la última a $\frac{125}{256}A$.

Montmort dice que el problema se propuso a él por una señora que le dio casi al instante una solución correcta de la misma; pero él procede muy groseramente despreciando la solución de la dama mediante la insinuación que sólo era correcta por accidente, para ella el método se limitó al caso en el que sólo había dos caras en cada uno de los dados: Montmort propone entonces un problema similar en el que cada uno de los dados tiene *cuatro caras*.

Pensamos que Montmort debería haber registrado el nombre de la primera mujer que hasta entonces había contribuido a la Teoría de la Probabilidad.

> Se puede observar que la desigualdad de este juego no supone perjuicio alguno a estos Jugadores del otro mundo, que no jugando entre ellos más que cosas cuya propiedad le es común, deben ser bastante indiferentes para la ganancia y para la pérdida. El desprecio que estos pueblos tienen para los que nosotros estimamos más, es una especie de paradoja que no se debe adelantar sin demostración en un Libro como éste. He aquí lo extraído del Barón de la Hontan: *En el resto*, dice este agradable viajero, *estos juegos no se hacen más que para unos festines y para algunas otras bagatelas: pues es necesario señalar que como ellos odian el dinero, no lo ponen nunca en sus partidas. También puede asegurarse que el interés no está nunca causado por la división entre ellos.*
>
> **Creo el deber de añadir que este problema me ha sido propuesto por una Dama**, que me ha dado casi sobre la marcha una solución muy justa, sirviéndose de la Tabla, *art. 1*, pero esta Tabla no sirve aquí más que por azar, pues si los huesos, en lugar de tener dos caras, tuviesen más, por ejemplo cuatro, esta Tabla no sería suficiente, y el problema sería mucho menos fácil que el precedente, así que se podría hacer notar en la proposición siguiente.

Otro juego analizado “de pasada” por Montmort es el **Pasa-diez**, del cual no da apenas descripción de las reglas. Debería ser tan común en la época que no creyó necesario su incorporación. Este juego parece de procedencia española o italiana. Juan Caramuel, en su Kybeia ya lo había analizado en 1670 y estudiado con más profundidad que Montmort. Los profesores Camúñez, Basulto y García del Hoyo en su trabajo de investigación publicado sobre Caramuel en 2007 hacen el análisis de este juego y del mismo extraemos el siguiente fragmento:

Sobre el juego del Passa-Diez

En el Artículo IV el autor (Caramuel) trata los problemas relacionados con un juego que era conocido tanto en España como en Italia como el Passa-Diez. El artículo está dividido en cuatro números y una nota de la que hablaremos más adelante. El primero de esos cuatro números, el LXXIV, lo dedica a describir el juego. Supongamos, por ejemplo, que participan 4 jugadores: Aufrido, Clucio, Dafnio y Balacurio. El mismo dado decide cómo han de sentarse los cuatro jugadores (el orden) y quién es el que lanza los dados (el que saca una puntuación mayor al lanzar el dado). Supongamos que, en este caso, es Balacurio el que lanza. Los otros tres han de apostar (*"envidar, en español"* escribe Caramuel).

Clucio: apuesto un doblón.

Aufrido: apuesto cuatro.

Dafnio: apuesto cinco.

La respuesta de Balacurio a cada uno y por orden debe ser: acepto. Si Balacurio gana, cobra todo ese dinero. Si pierde, pagará a cada uno lo que hayan depositado en la mesa y, sobre esto, Caramuel añade: *"Y digo lo de "lo ha depositado" adrede: porque la memoria es traidora y puede originarse un altercado si quien ha envidado cuatro después asegura haber envidado ocho. Por esa razón, la apuesta se hace con el dinero en la mesa, que así no hay lugar a equivocaciones ni fraudes."*

Si Balacurio acepta todas las apuestas, entonces lanzará los dados. Si hay alguna que no acepta, entonces no lanza, paga las apuestas que ha aceptado previamente aunque no se juegue y le pasa los dados al siguiente. Hasta aquí este número LXXIV.

En el número LXXV se sigue explicando el Passa-Diez. Nos dice que son tres los dados que se lanzan. Si al lanzarlos muestran tres puntuaciones distintas, entonces el lanzamiento es nulo, no tiene validez ni para uno ni para los otros y el jugador vuelve a lanzar. Si al menos dos dados muestran igual puntuación entonces el lanzamiento si es válido y se aplica esta regla: si la suma de las puntuaciones de los tres dados es mayor que 10, gana el que los ha lanzado (Balacurio), si es menor o igual que diez ganan los que han envidado. Entonces se plantea la pregunta: *"¿Es éste un juego justo, o –tal como está planteado hoy– favorece al que tira los dados y con los demás es injusto?"*

Para dar respuesta presenta una tabla de doble entrada en la que, en la primera columna están las parejas coincidentes y en la primera fila los posibles resultados del tercer dado. Dentro de la tabla, las sumas de las tres caras, expresándolas con números romanos cuando dicha suma es menor o igual que 10 (cuando pierde el que lanza) y con números arábigos cuando es mayor que esa cantidad.

Al observar la tabla Caramuel dice que hay 36 lanzamientos válidos de los que 18 favorecen a una parte y 18 a la otra, con lo que el juego es "absolutamente justo". El autor acierta en la conclusión, pero el razonamiento está incompleto. Por ejemplo, hay tres posibilidades de lanzar las caras 2, 2, 1: $(2,2,1)$, $(2,1,2)$ y $(1,2,2)$, mientras que sólo hay una posibilidad de lanzar el triple 2: $(2,2,2)$, y eso debería haber sido considerado a la hora de concluir. Ahora bien, si eso se hace, observamos que salen 48 ternas cuya suma es menor o igual que 10 y otras 48 que suman más que 10, por lo que, a la postre, su conclusión es correcta.

En los números LXXVI y LXXVII se aborda la variante belga de este juego en la que, el que lanza, gana también si los tres dados son iguales aunque no sumen 10 por lo que *"están convirtiendo lo que de justo tiene el* *juego en injusticia"* pues en lugar de 18 a 18, los lanzamientos $(1,1,1)$, $(2,2,2)$ y $(3,3,3)$ que perjudicaban al que lanzaban pasan a favorecerle por lo que *"quien tire los dados tendrá 21 formas de ganar y 15 de perder"*. Si nos atenemos a lo comentado antes, Caramuel tendría que haber dicho "quien tire los dados tendrá 51 formas de ganar y 45 de perder".

El Artículo IV se completa con una Nota correspondiente al número LXXVIII donde el autor comenta que cuando enseñó este tratado a aquél a quien estaba dedicado (*"Nuestro Ilustrísimo Señor y Doctísimo Varón"*), éste le enseñó una lúcida diatriba, de temática idéntica, redactada por Cristian Severino Longomontano. Y añade:

Como era interesante y breve, mereció la pena incluirla en este estudio, más que nada, porque se adentra en los laberintos del Álgebra para dirimir, con gran aparato, una problemática que nosotros hemos acertado a resolver de una forma más breve, clara y sencilla.

Como vemos, Caramuel se muestra crítico y reservado ante esta diatriba. Más adelante añade: *¿Qué diría, si cayese en sus manos esta diatriba en la que a las puntuaciones de los talos –tan simplificadas que hasta un analfabeto diría que las entiende– se las hace comparecer ante el tribunal del Álgebra y se les manda que rindan cuentas de los lances del juego ante la mismísima Aritmética, ciencia sutil donde las haya?*

Aunque al final acepta la intervención del Álgebra ante la posibilidad de que se le pueda causar perjuicio al prójimo en el juego: Y ya que la Teología no se basta para dirimir esta problemática en sus detalles particulares, son de alabar los matemáticos que la asisten con su tesón y su talento; y, entre ellos, el que con pluma aguda y acertada, agregó a los cánones metarítmicos del Álgebra los postulados siguientes.

Sigue entonces la diatriba que no es más que la versión latina del tratado de Huygens al completo, con los cinco problemas del final.

Queremos terminar este capítulo con la traducción del fragmento que Montmort dedica al juego del Tric-Trac:

PROBLEMAS

SOBRE EL TRICTRAC.

148. ES muy útil, para jugar al Trictrac agradablemente y con ventaja, saber en cada lanzamiento del dado, la esperanza que se tiene o de batir, o de llenar, o de cubrir alguna de sus damas por el lanzamiento que se va a jugar. Esto es también lo que conocen bastante los buenos Jugadores; pero no es más que por una gran aplicación y mucho ejercicio que se pueda adquirir la costumbre para el caso en que son un poco compuestos. Por ejemplo, hay pocas personas que puedan ver de un vistazo que estando dispuesto su pequeño Jan, así que en el lado *A* del Trictrac, ellos tienen un lanzamiento para ganar doce puntos, diez lanzamientos para ganar ocho, tres lanzamientos para ganar seis, dieciséis lanzamientos para ganar cuatro y, por fin, seis lanzamientos para no llenar. Pero lo que pasa extremadamente los conocimientos ordinarios de los Jugadores, y lo que sin embargo les sería muy importante para jugar bien las damas, y hacer modales a propósito, es poder conocer con exactitud la esperanza que se dispone de tener un cierto número de lanzamientos sin romper, o de arreglar su juego de tal o tal manera, en dos o varios lanzamientos. Se pueden descubrir todas estas cosas por los métodos precedentes: He aquí dos ejemplos muy simples donde el último puede tener alguna utilidad.

PROBLEMA.

PROPOSICIÓN XXII.

Pedro apuesta que cogerá su gran esquina en dos lanzamientos. Se pide lo que debe apostar para que la partida le sea igual.

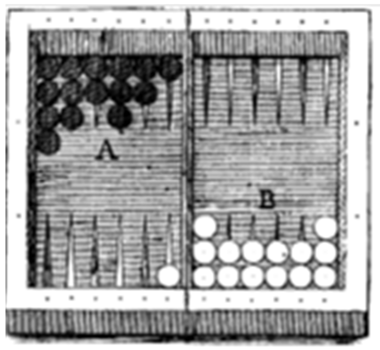
149. ES necesario señalar, 1º, que Pedro no puede ganar nada más que consiguiendo de primer lanzamiento del dado uno de estos cuatro lanzamientos, seis cinco, quine o sonnés.

2º. Que habiendo conseguido uno de estos cuatro lanzamientos, no ha ganado aún; pero que habiendo conseguido seis cinco del primer lanzamiento, para ganar debe aún conseguir seis cinco en el segundo lanzamiento; y que habiendo conseguido de primer lanzamiento quine, debe para ganar conseguir en el segundo lanzamiento sonnés; y que habiendo conseguido en el primer lanzamiento sonnés, debe para ganar conseguir en el segundo lanzamiento o quine o sonnés. Se sigue de todo esto que la suerte de Pedro será $\frac{2}{36}\times\frac{2}{36}+\frac{1}{36}\times\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\times\frac{2}{36}=\frac{7}{1296}$; así que, para apostar sin desventaja Pedro, debe poner en el juego 7 contra 1289; y tendría ventaja al apostar 1 contra 186 de conseguir su gran esquina en dos lanzamientos.

PROBLEMA.

PROPOSICIÓN XXIII.

Estando dispuestas mis damas así como parece en el lado B del Trictrac, quiero saber cuánto podría apostar por tener dos lanzamientos sin romper.



150. Los azares de los dos lanzamientos son aquí mezclados juntos, y no se deben considerar independientemente el uno del otro. Tan ventajoso que pueda ser mi primer lanzamiento, es claro que mi segundo puede hacerme perder; y al contrario tan desventajoso como sea, no me quita la esperanza de tener en el segundo lanzamiento. La mayor parte de los lanzamientos de dados que pueda conseguir en el primer lanzamiento, diversifican mi expectativa para el acontecimiento del segundo; pero hay quien me deja una igual esperanza. Por ejemplo, pone indiferente conseguir en el primer lanzamiento sonnés o cinco y as, o cuatro y dos, seis tres o cinco y cuatro, y así. Para desenredar todo esto, es necesario buscar cuál es mi esperanza

de tener en el segundo lanzamiento en todos los diferentes supuestos de los diferentes lanzamientos del dado que yo pueda conseguir en el primer lanzamiento. La suma de todos estos azares expresará mi suerte, se encontrará que tengo, 1º, dos lanzamientos que me dan $\frac{1}{36}$ a saber, seis y cinco.

2º. Tres lanzamientos que me dan $\frac{3}{36}$, a saber, seis cuatro y quine, puesto que habiendo conseguido seis cuatro o quine de primer lanzamiento, tengo para conseguir sonnés y seis y as.

3º. Cuatro lanzamientos que me dan $\frac{6}{36}$, a saber, seis tres, y cinco y cuatro, pues tendría para tener sonnés, seis y as, seis dos y bezet.

4º. Cuatro lanzamientos que me dan $\frac{10}{36}$, a saber, seis dos, y cinco y tres; pues tengo para tener sonnés, seis y as, seis, dos, seis tres, dos y as, tres y as y bezet.

5º. Dos lanzamientos que me dan $\frac{12}{36}$, a saber cuatro y tres, pues tendría para tener en el segundo lanzamiento sonnés, seis y as, seis dos, seis tres, dos y as, tres y as, y bezet.

6º. Cuatro lanzamientos que me dan $\frac{15}{36}$, a saber, seis y as, y cinco y dos; pues tendría para tener seis y as, sonnés, seis dos, bezet, seis tres, dos y as, seis cuatro, tres y as, y doble dos.

7º. Seis lanzamientos que me dan $\frac{21}{36}$, a saber, sonnés, cinco y as, cuatro y dos y terne[8]; pues tendría para tener sonnés, seis y as, seis dos, bezet, seis tres, dos y as, seis cuatro, tres y as, doble dos, seis cinco, cuatro y as, tres y dos.

8º. Cuatro lanzamientos que me dan $\frac{23}{36}$, a saber, cuatro y as, y tres y dos; pues tengo para tener los mismos lanzamientos que si hubiese

[8] La traducción literal de terne es "apagado", "soso".

conseguido de primer lanzamiento cinco y as, y además esta esperanza de conseguir en el segundo lanzamiento cinco y as.

9º. Un lanzamiento que me da $\frac{8}{36}$, a saber, carme[9]; pues tendría para tener en el segundo lanzamiento dos y as, bezet, seis y as, seis dos y sonnés.

10º. Tres lanzamientos que me dan $\frac{27}{36}$, a saber, tres y as, y doble dos; pues tengo todo para tener en el segundo lanzamiento, excepto cinco y cuatro, cinco y tres, cuatro y tres, quine, carme y terne.

11º. Dos lanzamientos que me dan $\frac{32}{36}$, a saber, dos y as, pues tendría todos los lanzamientos favorables para tener, excepto quine, carme, y cinco y cuatro.

12º. Un lanzamiento que me da $\frac{35}{36}$, esto es bezet, pues sólo tendría en el segundo lanzamiento nada más que quine contra mí.

La suerte buscada será, por tanto, $\frac{565}{1296}$, y el justo reparto de la apuesta sería 565 contra 731. Se tendría ventaja al apostar 3 contra 4, y desventaja al apostar 4 contra 5.

A D V E R T E N C I A.

151. ES imposible en la mayor parte de las situaciones donde dos Jugadores pueden encontrarse en el Trictrac, determinar cuál es su suerte, y estimar con precisión de qué lado está la ventaja; pues además, la variedad prodigiosa de las diferentes disposiciones posibles de las treinta damas, la manera con frecuencia arbitraria en que los Jugadores conducen su juego, es lo que decide casi siempre la ganancia de la partida. Ahora bien, todo lo que depende de la fantasía de los hombres no

[9] La traducción literal actual de la palabra carme es “carmelita”.

teniendo ninguna regla fija y certera, está claro que no se puede resolver cuestión alguna sobre el Trictrac, a menos que la manera de jugar no sea determinada. El único problema que se puede resolver de una manera general sobre el juego del Trictrac es este: *Encontrar la suerte de dos Jugadores que están en el jan de retorno, cualquier número de damas que tengan aún por pasar, en cualquier lugar en que se encuentren situados.* Doy aquí un ejemplo, que bastará para hacer conocer de qué manera se podría encontrar los demás casos más compuestos.

PROBLEMA.

PROPOSICIÓN XXIV.

Pedro tiene las tres damas A, B, C por levantar, y Pablo las tres damas D, E, F; aquél que en primer lugar habrá levantado pasando todas sus damas, ganará. Se supone que está Pedro por jugar, se pide cuál es su ventaja.

152. CUANDO Pedro va a jugar, tiene veinticinco lanzamientos para pasar las dos más atrasadas B y C, ocho para pasar las damas A y C, a saber, seis y as, cinco y as, cuatro y as, tres y as; dos lanzamientos para pasar las damas A y B, y un lanzamiento solamente para pasar B, a saber, bezet.

Sea llamado *S* la suerte de Pedro cuando él va a jugar, *x* su suerte cuando lleva dos y as, e *y* su suerte cuando él lleva de primer lanzamiento bezet. Se tendrá $S = \frac{33A + 2x + y}{36}$. El dinero del juego es llamado *A*.

Se trata ahora de determinar las incógnitas *x* e *y*; para llevarlo a cabo, es necesario señalar que Pedro, no teniendo más por levantar que la Dama *C*, no puede ni perder ni ganar por el lanzamiento que jugará Pablo; pero que su suerte será diferente según todos los diferentes lanzamientos que Pablo conseguirá. Pues, por ejemplo, Pablo pasando de su primer lanzamiento las dos damas *E* y *F*, si Pedro no pasa de su segundo lanzamiento la dama *C*, ciertamente habrá perdido, en lugar de lo que él podría ganar aún si Pablo no hubiese pasado de su primer lanzamiento más que las Damas *E* y *D*, o solamente la Dama *E*.

Sea entonces llamada u la suerte de Pedro cuando, habiendo conseguido de primer lanzamiento dos y as, Pablo ha pasado de su segundo lanzamiento las damas *E* y *F*; h su suerte, cuando Pablo ha pasado las damas *D* y *E*; y t su suerte, cuando Pablo ha pasado la dama *E*. Se tendrá $x = \frac{33u + 2h + t}{36}$.

Para conocer el valor de u, se señalará que Pedro, no teniendo más que la Dama *C* por pasar, jugando su segundo lanzamiento, treinta y cinco lanzamientos para ganar.

Para conocer el valor de h, se observará que Pedro no teniendo más que la dama *C* por pasar, y Pablo no teniendo más que la dama *F*, Pedro al jugar de nuevo tiene treinta y cinco lanzamientos para ganar, y un lanzamiento para tener $\frac{1}{36}A$: pues supuesto que Pedro jugando por segunda vez, consigue bezet que es el único lanzamiento que puede impedirle ganar, Pablo no ha ganado por esto; podría también conseguir bezet, en cuyo caso Pedro habría ganado.

Para conocer el valor de t, se tiene cuidado de que Pedro no tenga más que la Dama *C*, y Pablo las dos damas *D* y *F* por levantar, Pedro jugando por segunda vez, treinta y cinco lanzamientos para ganar, y un lanzamiento para tener $\frac{4}{36}A$: pues Pedro, no ganando de su segundo lanzamiento, Pablo tiene paralelamente cuatro lanzamientos para no levantar todas sus damas, a saber, bezet, doble dos, dos y as. Se tendrá entonces $t = \frac{35}{36}A + \frac{4}{36 \times 36}A$. Teniendo así determinadas las incógnitas u, h, t, si se sustituyen los valores encontrados en la ecuación $x = \frac{33u + 2h + t}{36}$, se tendrá $x = \frac{45366}{46656}A$.

Ahora es necesario determinar el valor de y.

Sea llamada q la suerte de Pedro cuando va a jugar su segundo lanzamiento, y le quedan las damas A y C por levantar, y a Pablo la única dama D; p su suerte cuando le queda por levantar las damas A y C, y a Pablo la dama F; n su suerte cuando le queda por levantar las damas A y C, y a Pablo las damas D y F. Se tendrá $y=\dfrac{33q+2p+n}{36}$.

Se encontrará, por razonamientos parecidos a los que se han hecho para encontrar el valor de x, $q=\dfrac{32}{36}A$, $p=\dfrac{32}{36}A+\dfrac{4}{36\times 36}A$, $n=\dfrac{32}{36}A+\dfrac{4\times 4}{36\times 36}A$; y por consiguiente, $y=\dfrac{41496}{46656}A$. Habiendo así determinado los valores de x y de y, se encontrará $S=\dfrac{46641}{46656}A$.

CAPITULO 4

EL PROBLEMA DE LOS PUNTOS PARA JUGADORES CON DESIGUAL DESTREZA

Una de las secciones del texto de Montmort está dedicada al ya clásico Problema de los Puntos. Lo hace en primer lugar para jugadores con igual destreza (la probabilidad de cada jugador de ganar cada partida es la misma) y luego, y esta es la importante novedad de Montmort, lo extiende al caso de jugadores con desigual probabilidad de ganar en cada partida (con desigual destreza). Nos proponemos como objetivo de este trabajo, analizar los párrafos que este autor dedica a este asunto en su completo libro sobre juegos de azar.

4.1. SOLUCIÓN PARA JUGADORES CON IGUAL DESTREZA

En la edición de 1708, el autor aborda esta solución. En primer lugar, se dedica a comentar las soluciones de sus antecesores, Pascal y Fermat. Llama método analítico al empleado por Pascal, y considera que dicho método es “el más natural y el más fácil”, aunque “tiene el defecto de ser excesivamente largo”, dado que para resolver un caso algo complejo hay que recorrer previamente todos los casos más simples. En cambio, el método de Fermat lo considera “más sabio” y “exige mayor destreza”. Afirma que este método resuelve el problema de una forma muy general. Para entender las dificultades de compresión de este último método, Montmort incorpora la carta completa que Pascal envió a Fermat el 24 de agosto de 1654, carta que él encontró en las obras póstumas de Fermat publicadas en Toulouse. En esta carta, Pascal reconoce la valía del método de Fermat para dos jugadores y, tras varias consideraciones o dudas, acaba aplicando el método de forma correcta para el caso de tres jugadores.

Tras la carta, Montmort escribe: *El respeto que tenemos por la reputación y por la memoria del Sr. Pascal, no nos permite hacer notar aquí con detalle todos los fallos de razonamiento que hay en esta carta; nos bastará advertir que la causa de su error está en no tener en consideración las diversas ordenaciones de las letras.*

Estas palabras de Montmort parecen insinuar que la carta de Pascal contenía una larga lista de errores cuando, realmente, la única inexactitud que hemos encontrado es la que él mismo cita en el párrafo de arriba, inexactitud que después fue corregida por el mismo Pascal tras la carta respuesta de Fermat.

A continuación, Montmort comienza una sección bajo el epígrafe de Problemas, y en el punto 188 (como Nota I) resuelve a la manera de Fermat el Problema de los Puntos para tres jugadores en la situación (1,2,3), estableciendo la regla general del número máximo de partidas en las que el juego concluiría, $(1+2+3)-(3-1)=4$, e incorpora una tabla similar a la que proporciona Pascal, en la mencionada carta, de los posibles resultados en el caso de que se jugasen todas esas partidas. Esta tabla le sirve para contar los casos que son favorables a cada jugador y, así, resolver el problema. La misma nos recuerda una Distribución Multinomial en la que $n = 4$ y hay tres categorías con igual probabilidad, aunque la identificación exacta con este modelo podría resultar un poco forzada.

Es curioso el hecho de que Pascal, en la carta del 24 de agosto de 1654, hace uso de un hipotético dado de dos caras para justificar el método de Fermat para dos jugadores mientras que Montmort, en este texto, usa un dado de tres caras para justificar la solución de Fermat para tres jugadores.

Este punto termina con un intento satisfactorio de reducción del método. En lugar de analizar los resultados de las 4 partidas, propone hacer lo mismo, pero sólo con las 3 primeras de esas 4, dado que la cuarta, o sea, la última partida, ha de ser para el jugador que gane el juego. La idea de la distribución Binomial Negativa subyace en esta forma de resolución.

En una segunda Nota, Montmort comenta el problema para el caso de más de dos jugadores pero sin entrar en un análisis exhaustivo. De alguna forma, se contradice al criticar el método de Fermat en esta situación: *Cuando hay varios jugadores a los que les faltan varios puntos, el método que procede por las combinaciones y los cambios de orden es bastante largo, y cae también en tanto detalle como aquél que procede por el análisis, pues al poder ser favorable a diferentes jugadores un mismo lanzamiento de dados, parece que no se puede dejar de considerar lo que proporciona cada lanzamiento diferente de dados en particular, y este examen no puede ser nada más que muy largo y muy molesto;…*Ahora bien, esta nota termina reforzando su opinión inicial para el caso de dos jugadores: *Pero el método del Sr. Fermat, además de las diversas ventajas que tiene sobre el del Sr. Pascal, tiene la de resolver de una manera rápida y simple el problema en cuestión, cuando sólo se trata de dos jugadores.* Y, entonces, presenta una solución general del problema para jugadores con igual destreza: *Sea* p *el número de puntos que le faltan a Pedro,* q *el número de puntos que le faltan a Pablo. Se pide una fórmula que exprese la suerte de los jugadores.* SOLUCIÓN: *Sea* $p+q-1=m$, *la suerte de Pedro estará expresada por una fracción donde el denominador será 2 elevado al exponente m, y cuyo numerador estará compuesto por tantos términos de esta serie*

$$1+m+\frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}+\frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{m\cdot m-1\cdot m-2\cdot m-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ \ \textit{\& así,}$$

como q exprese de unidades. La suerte de Pablo será el complemento de la unidad.

En el Tratado del Triángulo Aritmético de Pascal encontramos dos métodos equivalentes aportados por este último para la resolución del problema. Pues bien, el segundo de ellos, explicado bajo el epígrafe *Método para hacer el reparto entre dos jugadores que juegan a varias partidas por medio del Triángulo Aritmético,* ofrece la solución que a continuación exponemos usando un lenguaje más actualizado que el que Pascal presentó en su tratado:

Si el juego es (p,q), con $p>0$ y $q>0$, es decir, al primer jugador le faltan *p* partidas y al otro *q* partidas, la solución es:

1. Se toma la base $r=p+q-1$ del Triángulo Aritmético.
2. Se suman los valores de las *q* primeras celdas situadas en la base *r*.

   Es decir, calculamos $\sum_{i=0}^{q-1} f(i,r-i+1)$,

   siendo $f(\cdot,\cdot)$ el valor de la correspondiente celda del Triángulo Aritmético.
3. La probabilidad de que el juego lo gane el primer jugador es

$$\frac{\sum_{i=0}^{q-1} f(i,r-i+1)}{2^r},$$

donde el denominador, 2^r, es, como demuestra Pascal, el valor de la suma de todas las celdas situadas en esa base *r*.

Comparando ambas soluciones, la de Montmort y Pascal, teniendo en cuenta lo que representa el valor de cada celda en el Triángulo Aritmético, observamos que son idénticas, razón por la cual Todhunter (1865) escribe: *En la primera edición de Montmort, él se limita al caso de igual destreza y sólo da la primera fórmula*[10] *por lo que, realmente, no ha avanzado más que Pascal, aunque la fórmula sea más adecuada que el uso del Triángulo Aritmético.*

Añadimos nosotros y lo detallaremos en el siguiente apartado que, en el proceso de resolución está latente una modelización de la situación mediante la distribución Binomial con parámetros: $r =$ "número de partidas que se jugarían como máximo" y con probabilidad de éxito en cada partida igual a $\frac{1}{2}$.

Con esto termina lo que Montmort incluyó en la primera edición de su tratado, sobre el asunto del Problema de los Puntos.

4.2. PRIMERA SOLUCIÓN PARA JUGADORES CON DESIGUAL DESTREZA.

Una copia de esta primera edición fue enviada a Jean Bernoulli quien, en marzo de 1710, le remite una extensa carta donde, además de alabar las "diversas cosas bellísimas" que contenía el tratado, le aporta reflexiones propias y juicios críticos. En particular, Bernoulli le envía, sin demostración, la solución del

[10] Para la solución general del problema, Montmort aporta dos fórmulas equivalentes y aquí, Todhunter, hace referencia a la primera de ellas.

Problema de los Puntos para jugadores con **desigual destreza**. Lo enuncia y da la solución de la siguiente forma:

Pedro y Pablo juegan a varias partidas a un juego desigual donde el número de casos favorables a Pedro es al de casos favorables a Pablo: a.b; y después de haber jugado algún tiempo el número de partidas que aún le faltan a Pedro es p, y el número de partidas que le faltan a Pablo es q. Se pide la razón de sus suertes. Elevad el binomio $\overline{a+b}$ *a la potencia* $p+q-1=r$. *El número de términos será* $p+q$. *Yo digo que la suma de los primeros términos cuyo número sea q, es a la suma del resto de términos cuyo número será p, como la suerte de Pedro es a la de Pablo; ahora bien, estas dos sumas son como sigue:*

$a^p+\frac{p}{1}a^{p-1}b^1+\frac{p\cdot p-1}{1\cdot 2}a^{p-2}b^2+\frac{p\cdot p-1\cdot p-2}{1\cdot 2\cdot 3}a^{p-3}b^3+$ & así, *continuando hasta el número de términos expresado por q.*

Y $b^r+\frac{r}{1}b^{r-1}a^1+\frac{r\cdot r-1}{1\cdot 2}b^{r-2}a^2+\frac{r\cdot r-1\cdot r-2}{1\cdot 2\cdot 3}b^{r-3}a^3+$ & así, *continuando hasta el número de términos expresado por p.*

Observamos que, si *b* fuese la probabilidad del segundo jugador de ganar una partida (en la notación de Bernoulli dicha probabilidad sería $\frac{b}{a+b}$), faltándole a dicho jugador *q* partidas para ganar el juego, y *r* es el número total de partidas que se jugarían, la variable aleatoria *X*: "número de partidas ganadas por ese jugador de un total de *r*", sigue una distribución Binomial de parámetros *r* y *b*, cuya función de cuantía es $\binom{r}{x}b^x a^{r-x}$. Este jugador ganará el juego si consigue ganar, como mínimo, las *q* partidas que le faltan. Por tanto, la probabilidad de conseguirlo será

$$P\left[X\geq q\right]=P\left[X=q\right]+P\left[X=q+1\right]+...+P\left[X=r\right]=$$

$$=\binom{r}{q}b^{q}a^{r-q}+\binom{r}{q+1}b^{q+1}a^{r-q-1}+\ldots+\binom{r}{r}b^{r},$$

resultado equivalente al expuesto por Bernoulli en la segunda igualdad. Por tanto, este autor identifica la situación con lo que hoy conocemos como la distribución Binomial de parámetro cualquiera y ofrece como solución la función de distribución de la misma. Respecto a la primera expresión que escribe Bernoulli, sobre la suerte del primer jugador, pensamos que hay una errata en los sucesivos exponentes de a que se escriben a partir de p y sus valores decrecientes, cuando lo correcto es a partir de r como ocurre con la segunda expresión para la suerte del segundo jugador. Probablemente, fue una errata del mismo Jean Bernoulli al transcribir sus propias notas a la carta que envió a Montmort.

En la segunda edición del tratado, la de 1713, Montmort incorpora esta solución con una formulación similar y con su demostración. La demostración, con notación actualizada, sigue los siguientes pasos:

1. El juego ha de concluir necesariamente en $r=p+q-1$ partidas.
2. Disponemos de r dados con dos caras cada uno: una cara blanca, que favorece al primer jugador y otra cara negra que favorece al segundo, y con probabilidades a y b de aparecer una y otra. En este punto, el autor nos remite a la primera parte del tratado donde, en el Art. 27, se demuestra que los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio coinciden con los números de la correspondiente columna del Triángulo Aritmético y con los que expresan “las diversas combinaciones de un número cualquiera de fichas o dados que tienen dos caras diferentes”. Esto le lleva a escribir que los sucesivos sumandos que intervienen en el cálculo de la probabilidad de que el primer jugador gane el juego son:

   $$a^{r}=\binom{r}{r}a^{r}=\text{"que salgan } r \text{ caras blancas"},$$

$r \cdot a^{r-1}b = \binom{r}{r-1} a^{r-1}b$: "que salgan r -1 caras blancas y 1 negra",

$\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} a^{r-2}b^2 = \binom{r}{r-2} a^{r-2}b^2$: "que salgan $r-2$ caras blancas y 2 negras"

,

y así hasta reunir q sumandos, por lo que el último de ellos será $\binom{r}{p} a^p b^{r-p}$, dado que $r - q - 1 = p$.

3. Son equivalentes los sucesos "conseguir p éxitos en r pruebas" y "conseguir p caras blancas al lanzar r dados de las características anteriores". Por tanto, la probabilidad de que gane el juego el primer jugador (que le faltan p partidas) es: $\sum_{i=p}^{r} \binom{r}{i} a^i b^{r-i}$.

Podemos escribir:

$$P[\text{de que gane el primer jugador}] = \sum_{i=p}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{i} a^i b^{p+q-i-i} \qquad (1)$$

4.3. SEGUNDA SOLUCIÓN PARA JUGADORES CON DESIGUAL DESTREZA.

Bajo el título de *Otra Fórmula*, Montmort añade una segunda solución a este problema. La justificación de la misma es como sigue:

- En el Tratado del Triángulo Aritmético de Pascal hay un anexo titulado "Uso del Triángulo Aritmético para las combinaciones". En dicho anexo encontramos, bajo el epígrafe de Lema IV, la siguiente igualdad: $\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}$, que Pascal demuestra considerando que los

$k+1$ elementos son k elementos primeros más uno último y considerando que el número combinatorio del primer miembro es el resultado de sumar dos números: el número de combinaciones de k que no contienen al último y el número de aquellas que sí lo contienen. Montmort conocía perfectamente esta igualdad como lo demuestra la primera parte de su segunda edición del Tratado dedicada a las "combinaciones".

- Multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por $a^i b^{k+1-i}$ y despejando el primer sumando del segundo miembro nos queda: $\binom{k+1}{i} a^i b^{k+1-i} - b\binom{k}{i} a^i b^{k-i} = \binom{k}{i-1} a^i b^{k+1-i}$, donde los dos términos del primer miembro se pueden interpretar como

$$P\{\text{de conseguir } i \text{ éxitos en } k+1 \text{ pruebas}\} -$$

$$-P\{\text{de conseguir } i \text{ éxitos en } k \text{ pruebas}\} \cdot P\{\text{de no conseguir éxito en la última prueba}\}.$$

Por tanto, esa diferencia de probabilidades nos lleva a la probabilidad de que el *i*-ésimo éxito (el último éxito) se produzca en la $(k+1)$-ésima prueba (en la última prueba). Si hacemos $k+1-i=j$, la expresión del segundo miembro se transforma en $\binom{i-1+j}{i-1} a^i b^j$, que se interpreta como la "probabilidad de que el primer jugador consiga j fracasos antes de conseguir su *i*-ésimo éxito. Pues bien, esto es lo que usa Montmort para construir su segunda solución, pues la probabilidad de que el primer jugador gane el juego (al que le faltan p partidas), se puede escribir a partir de la variable aleatoria X: "número de fracasos del primer jugador antes de su p-ésimo éxito", variable que sigue una distribución Binomial Negativa de parámetros p y a, como:

$$P[\text{que gane el primer jugador}] = P[X=0] + P[X=1] + \ldots + P[X=q-1] =$$

$$\binom{p-1}{p-1}a^p + \binom{p}{p-1}a^p b + \ldots + \binom{p+q-2}{p-1}a^p b^{q-1} = a^p \sum_{i=0}^{q-1}\binom{p-1+i}{p-1}\cdot b^i .$$

Esta suma, bajo, su propia formulación, es la que este autor propone como solución en su *Otra Fórmula*. Podemos escribir, pues, que la segunda solución de Montmort es:

$$P[\text{de que gane el primer jugador}] = a^p \sum_{i=0}^{q-1}\binom{p-1+i}{p-1} b^i \qquad (2)$$

Le falta por demostrar la igualdad entre ambas soluciones, la igualdad entre (1) y (2). Lo hace sólo para el caso particular donde $p=5$ y $q=3$ mediante una simple reducción a común denominador de las fracciones que aparecen en los sumandos de la expresión (2), fracciones producidas por las probabilidades que intervienen con sus respectivas potencias. Esa reducción a común denominador le lleva a la expresión (1).

Este fragmento termina con dos notas. En la primera de ellas Montmort nos advierte que, aunque pueda imaginarse que las “suertes” de los dos jugadores son las mismas en el caso en el que necesiten conseguir p y q partidas, respectivamente, y en el caso en que necesiten $n \cdot p$ y $n \cdot q$, esto no es cierto, ni incluso en el caso en que ambos jugadores tengan igual probabilidad de éxito en cada partida.

Sabemos por el teorema de Bernoulli que si el número de pruebas independientes se hace suficientemente grande hay una alta probabilidad de que el número de éxitos conseguidos por uno y otro jugador esté en una razón similar a la de sus propias probabilidades. Por tanto, si la razón entre p y q fuese menor que la de sus correspondientes probabilidades, incrementando el valor de n

podemos conseguir una probabilidad tan grande como queramos de que el primer jugador consiga ganar $n \cdot p$ partidas antes de que el segundo consiga las $n \cdot q$ que necesita. Esto es lo que parece insinuar Montmort cuando dice que *"la suerte de Pedro será siempre tanto mejor, en cuanto que c & d designen a los números más grandes, en comparación con p & q; de manera que si un jugador puede dar ocho puntos de dieciséis al villar a otro jugador: no se puede concluir que él pueda, sin desventaja, darle cuatro de ocho"*.

En la segunda nota final el autor manifiesta su deseo de encontrar fórmulas similares para la resolución del problema de los puntos en el caso en el que el número de jugadores fuese tres, cuatro,… pero *"hay razones para creer que esta investigación es extremadamente difícil, y hay la apariencia de que no se puede añadir nada a la que hemos dado antes"*.

PROBLEME I.

UR LE JEU DU PETIT PALET

OU DE LA BOULE.

PROPOSITION XLII.

ierre joue avec un certain nombre de palets ou de boules m, *Paul avec un certain nombre de palets ou de boules* n, *la force de Pierre eſt à celle de Paul comme* a *eſt à* b, *ce qui ſignifie que Pierre & Paul jouant chacun avec une boule ou un Palet, il y auroit* a *contre* b *à parier que Pierre approcheroit plus du but que Paul. L'on ſuppoſe qu'il manque à Pierre pour gagner un certain nombre de points* p, *& à Paul un certain nombre de points* q. *On demande le ſort des deux Joueurs.*

Montmort dedica sus páginas 248-257 a la discusión de un juego de Bolas, lo que conduce a un problema parecido al Problema de los Puntos. El problema se inició por De Moivre en su De Mensura Sortis; ver Montmort, página 366. De Moivre había supuesto que los jugadores tenían la misma habilidad, y cada uno tenía el mismo número de bolas; Montmort generalizó el problema suponiendo jugadores de habilidad desigual y con un número desigual de bolas. Por lo tanto el problema no estaba en la primera edición de Montmort.

En su página 256 da un ejemplo simple de una solución de un problema que parece muy plausible, pero que es incorrecta. Supongamos que *A* juega con un solo recipiente y *B* con dos cuencos; requiere sus respectivas probabilidades en un ensayo, asumiendo la misma habilidad. Considerando que uno cualquiera de los tres tazones es tan probable como los otros a ser primero, la probabilidad de que *B* es $\frac{2}{3}$ y la de *A* es $\frac{1}{3}$. Pero por la solución incorrecta Montmort llega a un resultado diferente. Supongamos que *A* ha entregado su cuenco. Entonces *B* tiene la oportunidad $\frac{1}{2}$ con su primer bol de vencer a *A*; y la probabilidad de $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ de fracasar con su primer tazón y tener éxito con su segundo. Por lo tanto la probabilidad de *B* parece ser $\frac{3}{4}$. Montmort considera el error de esta solución se encuentra en el supuesto de que cuando *B* no ha logrado vencer a *A* con su primer tazón todavía hay una posibilidad incluso de que le ganará a *A* con su segundo tazón: por el hecho de que *B* fracasó con su primer cuenco sugiere que el cuenco de *A* tiene una posición mejor que la media por lo que la probabilidad de éxito de *B* con su segundo cuenco llega a ser incluso menor de una oportunidad.

4.4. CONCLUSIÓN.

Nos encontramos con un autor, Pierre Rémond de Montmort que, sin ser de los más renombrados en la Historia de la Probabilidad, aporta la solución definitiva al Problema de los Puntos para dos jugadores en cualquier circunstancia (con igual y desigual destreza) mediante dos fórmulas alternativas y equivalentes (demostrando la equivalencia entre ambas en un ejemplo concreto) que hoy identificamos perfectamente con las modelizaciones Binomial y Binomial Negativa.

CAPITULO 5

QUATRIÈME PARTIE.

Où l'on donne la ſolution de divers Problêmes ſur le hazard, & en particulier des cinq Problêmes propoſés en l'année 1657 par Monſieur Huygens.

LA RESOLUCIÓN DE MONTMORT (1708, 1713) DE LOS CINCO PROBLEMAS PROPUESTOS POR HUYGENS EN SU TRATADO (1657). LA DURACIÓN DEL JUEGO O LA RUINA DEL JUGADOR

5.1. INTRODUCCIÓN

Al final del tratado de Huygens, *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, cuya versión en latín fue publicada por primera vez en 1657, encontramos cinco ejercicios propuestos por el autor y no resueltos, aunque en tres de ellos se da la solución.

Los cinco problemas se convirtieron en un desafío para los investigadores de aquella época. Autores como Hudde, Spinoza, Montmort, De Moivre, Jacques Bernoulli y Struyck se ocuparon de ellos de una manera u otra: resolviendo algunos de ellos o resolviéndolos todos. Sus soluciones, interpretaciones (con o sin reemplazamiento) y generalizaciones ejercieron una influencia incontestable en el desarrollo de la nueva disciplina a finales del siglo XVII y principios del XVIII. Ahora bien, este honor lo debe compartir Huygens con Fermat, que fue quién propuso el primero y el tercero, a través de Carcavy, en la carta que éste envió a Huygens el 22 de junio de 1656, y con Pascal, autor del quinto ejercicio propuesto por éste a Fermat, y que Huygens también conoció a través de la carta que Carcavy le envió el 28 de septiembre de ese mismo año (una traducción al español de la correspondencia indirecta entre Pascal y Fermat, con intermediación de Carcavy y con la participación de Huygens, durante los años 1655 y 1656, la encontramos en Basulto Santos, J., Camúñez Ruiz, J. A., 2007).

El propio Huygens, en años posteriores a la publicación de su tratado, fue resolviendo casi todos estos problemas (no se ha encontrado su resolución del tercero, aunque la solución del mismo la conocía el autor como se demuestra en la carta que éste envió a Carcavy el 6 de julio de 1656), aunque sus resoluciones no vieron la luz hasta que no fueron recogidas en las Obras Completas del autor que la Sociedad Holandesa de las Ciencias publicó entre finales del siglo XIX y principios del XX.

Como se ha dicho, uno de los autores que abordaron la resolución de estos problemas fue Montmort en su importante tratado *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* (ediciones de 1708 y 1713). Según lo comentado más arriba, Montmort no conocía las resoluciones de Huygens de estos problemas, por lo que sus propias resoluciones pueden considerarse originales y, al disponer en la actualidad de lo escrito por ambos autores, tenemos la posibilidad de analizarlas y compararlas. Ese es el objetivo de este capítulo en el que, problema a problema, presentamos los enunciados bajo los que fueron presentados (curiosamente, hay algunos matices que diferencian los enunciados dados por ambos autores) y las reflexiones y cálculos que cada uno realizó para encontrar sus respectivas soluciones. Todo ello, bajo un lenguaje y notación más actual que la que nuestros autores usaron a mediados del XVII y principios del XVIII.

5.2. PRIMER PROBLEMA

El primero de estos ejercicios es una generalización de la Proposición última del tratado de Huygens (Proposición XIV), la cual sí estaba resuelta en el propio tratado. El enunciado bajo el que aparece en dicho tratado es:

> *A y B juegan juntos con dos dados con la condición siguiente: A habrá ganado si lanza 6 puntos, B si lanza 7. A hará en primer lugar un solo lanzamiento; a continuación B 2 lanzamientos sucesivos; después de nuevo A 2 lanzamientos; y así sucesivamente, hasta que uno u otro haya ganado. Se pide la relación de la suerte de A a la de B. Respuesta: como 10355 es a 12276.*

El enunciado de Montmort aparece de esta forma:

PROBLEMA I.

PROPOSICIÓN XXXII.

Pedro y Pablo juegan juntos con dos dados: He aquí las condiciones del juego. Pedro ganará consiguiendo seis, y Pablo consiguiendo siete. Cada uno de ellos jugará dos lanzamientos sucesivos cuando tenga los dos dados: no obstante, Pedro, que comenzará, jugará con uno por primera vez. Se trata de determinar la suerte de cada uno de estos dos Jugadores, o la esperanza que cada uno tendrá de ganar la partida.

La resolución aportada por Huygens aparece en la carta que envió a Carcavy el 6 de julio de 1656 y es muy parecida a la que da en la Proposición 14. Plantea la periodicidad del juego respecto de los jugadores que participan. Escribe que la misma seguirá la sucesión: ABBA ABBA… Esa periodicidad (y la independencia de los lanzamientos) le lleva a presentar una recurrencia bastante simple.

Tras enumerar los casos favorables a la obtención del "seis" al lanzar dos dados, y los favorables a la obtención del "siete", 5 y 6, respectivamente, llama x al valor del juego para A, o sea la esperanza de este jugador, al inicio del mismo y afirma que, en la situación de haberse realizado ya varios lanzamientos y en el momento en que A ha lanzado sin éxito la primera de sus dos veces de su turno, entonces, antes de lanzar la segunda *"tendrá la misma apariencia de ganar que al inicio de juego"*, o sea, x.

Aquí es donde constatamos que Huygens se da cuenta de la periodicidad de este juego (ya había ocurrido en su resolución de la Proposición 14 del tratado). Eso le permite resolver el problema usando solamente las cuatro esperanzas e_1, e_2, e_3 y e_4, que son las valoraciones del juego para el primer jugador, respectivamente, al inicio del mismo, cuando se ha realizado la primera partida (cuando A ha lanzado sin éxito y es el turno de B), cuando se ha realizado la segunda partida (cuando B ha lanzado la primera de sus dos veces sin éxito), y cuando se ha realizado la tercera partida (cuando B ha realizado su segundo lanzamiento sin éxito y es ahora el turno de A). Llamando a al total apostado, esas cuatro esperanzas son:

- $e_1 = \frac{5}{36}a + \frac{31}{36}e_2$ (antes de lanzar, el jugador A tiene 5 posibilidades de ganar y 31 de que pase a ser el primer lanzamiento de B).

- $e_2 = \frac{6}{30}\cdot 0 + \frac{30}{36}\cdot e_3 = \frac{30}{36}e_3$ (en el primer lanzamiento de B, el jugador A tiene 6 posibilidades de perder, y 30 de que el jugador B disponga de su segundo lanzamiento).

- $e_3 = \frac{6}{36}\cdot 0 + \frac{30}{36}\cdot e_4 = \frac{30}{36}e_4$ (en el segundo lanzamiento de B, el jugador A tiene 6 posibilidades de perder y 30 de que se encuentre en el primero de sus dos lanzamientos).

- $e_4 = \frac{5}{36}a + \frac{31}{36}e_1$ (en el primero de los dos lanzamientos de A, este jugador tiene 5 posibilidades de ganar y 31 de disponer de un segundo lanzamiento y, por tanto, encontrarse como en el inicio del juego).

Resolviendo para e_1, que es realmente lo que nos interesa (esperanza del jugador A antes de iniciarse el juego), obtenemos $e_1 = \frac{10355}{22631}a$, por lo que la esperanza del segundo jugador en ese instante es la complementaria, o sea,

$\frac{12276}{22631}a$. Por tanto, las posibilidades de ambos jugadores están en la relación 10355:12276, siendo la solución dada por Huygens.

Para este problema, Montmort ofrece una resolución casi idéntica. Está claro, en este caso, que aunque Montmort no conocía la de Huygens del mismo, si conocía la de su Proposición 14. Usa la expresión "método analítico" a esta forma de resolución, expresión que había sido acuñada ya por Huygens en su tratado. La novedad de Montmort en este problema es la nota que añade al final del mismo, en donde presenta la siguiente generalización, de la que da la solución sin explicación alguna:

El método analítico que se ha empleado aquí es siempre el mejor y el más corto, cuando ocurre que al cabo de un cierto número de lanzamientos los Jugadores se encuentran en el mismo estado en el que ellos estaban anteriormente; pero cuando esto no ocurre, se cae en series infinitas; y para encontrarlas, toda la habilidad consiste en observar bien las condiciones del juego, y en sacar la Ley de la progresión. Por ejemplo, si se supone que Pedro juega en primer lugar un lanzamiento, y Pablo dos lanzamientos, a continuación Pedro dos lanzamientos, y Pablo tres lanzamientos; a continuación Pedro tres lanzamientos, y Pablo cuatro lanzamientos, y así sucesivamente, Pablo jugando siempre un lanzamiento más que Pablo, la suerte de Pedro sería expresada por una serie en la que sería muy difícil obtener la suma, esta serie sería

$$=\frac{b}{f}A+\frac{d\times c^2\times b}{f^4}A+\frac{d^2\times c^2\times b}{f^5}A+\frac{d^3\times c^3\times b}{f^9}A+\frac{d^4\times c^3\times b}{f^{10}}A+$$

$$\frac{d^3\times c^5\times b}{f^{12}}A+\frac{d^8\times c^9\times b}{f^{16}}A+\frac{d^7\times c^9\times b}{f^{17}}A+\frac{d^8\times c^9\times b}{f^{18}}A+\frac{d^9\times c^9\times b}{f^{19}}A+\frac{d^{10}\times c^{14}\times b}{f^{25}}A+$$

&así, suponiendo $b=5$, $c=30$, $d=31$, $f=36$.

Es fácil señalar el orden de la serie, y de continuar hasta el infinito, la expresión de la suerte de Pablo sería la cantidad que le falta a la serie que expresa la suerte de Pedro para valer A.

Si Pedro y Pablo juegan con un dado, según el orden que se acaba de señalar, a que el primero consiga un seis, se tendrá para la expresión de la suerte de Pedro una serie más simple, a saber $1-p+p^3-p^5+p^8-p^{11}+p^{15}-p^{19}+p^{24}-p^{29}+$ *& así, suponiendo que sea* $p=\frac{1}{6}$.

5.3. SEGUNDO PROBLEMA

Este problema de Huygens tiene la originalidad de introducir por primera vez en la historia de esta disciplina, la distinción entre muestreo con y sin reemplazamiento. Eso ocurre en la discusión que surge entre este autor y su amigo Hudde sobre la resolución de este problema. El problema tuvo el siguiente enunciado para Huygens:

Tres jugadores A, B y C toman 12 fichas de las que 4 son blancas y 8 negras; juegan con esta condición de que ganará el que primero haya, escogiendo a ciegas, sacado una ficha blanca, y que A elegirá el primero, B a continuación, después C, después de nuevo A, y así sucesivamente, por turnos. Se pide la relación entre sus posibilidades.

Para Montmort, que lo presentó en su libro como Problema II, o Proposición XXXIII, el mismo mereció el siguiente enunciado:

> *Tres Jugadores, Pedro, Pablo y Jacobo juegan juntos y acuerdan que, sacando uno detrás del otro una ficha al azar entre doce, de las que ocho serán negras y cuatro blancas, el que primero extraiga una ficha blanca ganará. He aquí el orden según el cual ellos juegan: Pedro saca el primero, Pablo saca el segundo, y Jacobo el tercero; a continuación, Pedro vuelve a comenzar, y los otros le siguen según su orden, hasta que uno de los Jugadores haya ganado. Se trata de encontrar lo que cada Jugador debe poner en el juego, con el fin de que la partida sea igual.*

No es conocido de dónde derivó Huygens este segundo problema. Es probable que fuese inventado por él mismo. Jacques Bernoulli señala en la edición comentada del Tratado de Huygens (en la *Pars Prima* de su *Ars Conjectandi*) que hay tres posibles interpretaciones del problema: (i) cada bola o ficha negra es reemplazada después de la extracción, (ii) las bolas o fichas no son reemplazadas y hay una caja común que incluye inicialmente las doce y (iii) cada jugador tiene su propia caja con las doce bolas o fichas y van extrayendo, cada uno de su caja, por turno y sin reposición.

Resulta que Huygens tenía la primera interpretación en mente, como se puede comprobar por la resolución que aparece en el Apéndice II del tratado. La Academia Holandesa de las Ciencias añadió al tratado de Huygens nueve apéndices en su edición del siglo XIX. En ellos se recogen las notas en cuadernos y hojas sueltas, que Huygens fue escribiendo a lo largo de su vida en relación al cálculo en juegos de azar. Esos cálculos y reflexiones sólo vieron la luz cuando fueron publicados en el siglo XIX, formando parte del Tomo XIV de las Obras Completas, por lo que Montmort los desconocía en el momento en que publica las dos ediciones de su tratado.

En su resolución, Huygens supone que las extracciones son con reemplazamiento, dado que a cada uno de ellos asigna cuatro posibilidades en una dirección y ocho en la contraria, o sea, la composición de la caja no se altera tras cada extracción. El orden de las extracciones es ABC ABC... Llama *x*, *y*, *z* a las esperanzas o posibilidades de los jugadores antes de iniciarse el juego (son los valores que se quieren conocer), y llama *a* a la apuesta. En la primera extracción, si se extrae blanca, el jugador A ganará el juego y si no, el jugador A se convierte en el tercero de la siguiente serie de extracciones, por lo que su suerte se convierte en *z* (esperanza del tercero en el turno de extracciones). Por tanto, A tiene 4 posibilidades de conseguir la apuesta *a* y 8 posibilidades de conseguir *z*, por lo que, según la Proposición 3 de su Tratado (proposición clave en el desarrollo de todo el tratado), el valor del juego para A, al inicio del mismo, es $x = \dfrac{4a+8z}{12}$.

Consideramos ahora la situación del jugador B también en el momento en que el juego se inicia. Este jugador tiene 4 posibilidades de conseguir 0 (si el jugador A acierta en la primera extracción) y 8 posibilidades de convertirse en el primer jugador de la nueva serie y, por tanto, tener de suerte *x*. Entonces, $y = \dfrac{0+8x}{12}$. Por último, la valoración del juego, al inicio del mismo, para el tercer jugador es: 4 posibilidades de conseguir 0 y 8 posibilidades de convertirse en el segundo jugador de la serie de extracciones y, por tanto, tener derecho a y. Entonces, $z = \dfrac{0+8y}{12}$. Resolviendo: $x = \dfrac{9}{19}a,\quad y = \dfrac{6}{19}a,\quad z = \dfrac{4}{19}a$, o sea, las ratios de sus posibilidades son 9:6:4.

En general, si *p* es la probabilidad de éxito en una extracción (probabilidad que no varía por ser con reemplazamiento) y si $q = 1 - p$, se obtiene:

$$x = \frac{p}{1-q^3}a, \quad y = \frac{pq}{1-q^3}a, \quad z = \frac{pq^2}{1-q^3}a,$$

y las ratios de las posibilidades son $1 : q : q^2$ (Hald, 1990).

Montmort, como primera resolución, interpreta el problema en el mismo sentido que Huygens y resuelve de forma parecida, pero no igual. Se fija en el tercer jugador, estableciendo y construyendo la suerte del mismo en estas tres circunstancias: Cuando le toca al primero extraer, *S*, cuando le toca al segundo extraer, *y*, y su suerte cuando a él mismo le toca extraer, *z*. Entre estas suertes hay las siguientes relaciones (llama *A* al total del dinero que hay en juego):

- $S = \frac{4}{12} \cdot 0 + \frac{8}{12} \cdot y = \frac{2}{3} y$ (si gana el primer jugador, la suerte del tercero será cero, y si no gana, la suerte del tercero se convierte en la que le corresponde cuando el segundo va a extraer.

- $y = \frac{4}{12} \cdot 0 + \frac{8}{12} \cdot z = \frac{2}{3} z$ (si gana el segundo jugador en su extracción, la suerte del tercero se hace cero, y si no gana, la suerte del tercero se convierte en la que le corresponde cuando a él le toca extraer).

- $z = \frac{4}{12} \cdot A + \frac{8}{12} \cdot S = \frac{1}{3} A + \frac{2}{3} S$, o sea, cuando es el turno de extraer del tercero tiene 4 posibilidades de ganar y, por tanto llevarse el dinero que está en juego, y 8 posibilidades de no ganar y, por tanto, pasar de nuevo a la situación en que le toca extraer al primero, en la que la suerte del tercero era *S*.

Resolviendo en las tres igualdades encuentra $S = \frac{4}{19} A$, lo que expresa la suerte del tercer jugador al inicio del juego, o sea, cuando va a extraer el primero.

A continuación procede de igual forma con el segundo jugador, llamando, *u* a la suerte de este jugador cuando al primero le toca extraer, obteniendo

$u = \frac{9}{19} A$. Por último, obtiene la suerte del primer jugador restando a la cantidad total en juego, la suerte de los otros dos jugadores, o sea, realizando $A - \frac{4}{19} A - \frac{9}{19} A = \frac{6}{19} A$. Y concluye: *Por consiguiente, si se quiere que el juego sea de diecinueve escudos, será necesario que Pedro ponga nueve, Pablo seis, y Jacobo cuatro.*

Entonces, este autor añade una nota en la que da la solución bajo la segunda interpretación de Bernoulli. En este caso no se detiene a explicar su procedimiento de resolución, aunque si se procede como en el caso anterior, construyendo la esperanza de cada jugador en cada una de las sucesivas extracciones, y teniendo en cuenta que en este caso, al ser sin reemplazamiento, el proceso tiene fin, se obtiene los resultados dados por el autor. Así es como escribe:

> *Si el sentido del problema es que cada Jugador después de haber sacado una ficha no la vuelve a poner más, se encontrará de la misma manera la suerte de los tres Jugadores, como estos tres números, 77, 53, 35.*

5.4. TERCER PROBLEMA

Como ya se ha dicho, este problema fue otro de los propuestos por Fermat a través de Carcavy. Su enunciado es:

> *A apuesta contra B, que de 40 cartas, donde hay diez de cada color, extraerá 4 de manera que tenga una de cada color. Se encuentra en este caso que la suerte de A es a la de B como 1000 es a 8139.*

La solución de Huygens, sin explicación alguna, aparece en la carta que éste envió a Carcavy el 6 de julio de 1656. En los apéndices y cartas publicados en sus obras completas, no se ha encontrado la solución de Huygens de este problema.

Montmort intercambió el orden de los problemas 3 y 4 de Huygens. Decidió mantener seguidos los problemas 2 y 4 por tratarse de una temática parecida. El enunciado con el que Montmort presenta el problema bajo el título de Problema IV o Proposición XXXV es el siguiente:

> *Pedro apuesta contra Pablo que sacando, con los ojos cerrados, cuatro cartas entre cuarenta, a saber, diez rombos, diez corazones, diez picas y diez tréboles, sacará una de cada clase. Se pide cuál es la suerte de estos dos Jugadores, o lo que ellos deben poner en el juego para apostar con igualdad.*

En este problema, Montmort rompe su línea de resolución que, en los anteriores, había sido similar a la de Huygens (lo que este último llamó método analítico). En este caso, Montmort hace uso de un método que encontraba más eficaz y rápido: usando la combinatoria. Comienza por recordar una proposición que había demostrado al principio de su tratado (Proposición VII) cuyo enunciado es el siguiente:

> PROPOSICIÓN VII.
>
> *Pedro, teniendo entre sus manos un número cualquiera de fichas de todos los colores, blancas, negras, rojas, verdes, & así, apuesta contra Pablo, que sacando al azar un número cualquiera determinado de fichas, él sacará tantas blancas, tantas negras, tantas rojas, tantas verdes, & así. Se pide cuántas posibilidades tiene Pedro para hacer lo que se propone.*
>
> SOLUCIÓN.

Es necesario multiplicar el número que expresa de cuántas maneras las fichas blancas que Pedro debe tomar al azar, pueden ser tomadas de forma diferente en el número de fichas blancas propuestas, por el número que expresa de cuántas maneras las fichas negras que Pedro debe tomar al azar, pueden ser tomadas de forma diferente en el número entero de fichas negras propuestas; multiplicar a continuación este producto por el número que expresa de cuántas maneras diferentes las fichas rojas que Pedro se propone extraer, pueden ser tomadas en las fichas rojas propuestas, multiplicar de nuevo ese producto por el número que expresa de cuántas maneras diferentes las fichas verdes que se piden pueden ser tomadas entre todas las verdes, & así, sucesivamente, se tendrá el número buscado.

Esta solución lleva consigo la demostración, y no tiene dificultad alguna; así este Teorema será un resultado de un gran uso.

Entonces, Montmort comenta que este problema *no es más que un caso particular de la Proposición* y, por lo tanto, la suerte de Pedro es $\dfrac{\binom{10}{1}.\binom{10}{1}.\binom{10}{1}.\binom{10}{1}}{\binom{40}{4}} = \dfrac{10^4}{\binom{40}{4}} = \dfrac{10000}{91390}$, o sea las suertes de ambos jugadores están en la relación de 10000 a 81390, con lo que propone una solución muy actual, tal y como hoy día se suele resolver este problema. Entonces añade dos ejemplos más con sus soluciones:

Si se pidiese cuánto hay que apostar que Pablo extrayendo trece cartas al azar en cincuenta y dos, no sacase todas de un color, se encontraría que hay que apostar 158753389899 contra 1.

Si se quiere saber cuánto hay que apostar que Pedro, extrayendo diez cartas al azar entre cuarenta, a saber, un as, un dos, un tres, un *cuatro, un cinco, un seis, un siete, un ocho, un nueve y un diez de rombos, tantas de corazones, de picas y de tréboles, él sacará una decena completa, se encontrará que hay que apostar 1048576 contra 846611952, más o menos, como 1 contra 808.*

5.5. CUARTO PROBLEMA

Como ya se ha dicho, este problema tiene un contexto similar al segundo y también admite una doble interpretación, entendiendo nuestro autor las extracciones sin reemplazamiento. Su enunciado es:

Se toma, como más arriba, 12 fichas de las que 4 son blancas y 8 negras. A apuesta contra B que entre 7 fichas que él sacará a ciegas, se encontrarán 3. Se pide la relación entre la suerte de A y la de B.

La solución de Huygens aparece también en el Apéndice II antes citado. En el mismo, Huygens considera también la modificación propuesta por Hudde en la que el resultado puede ser tres o más fichas blancas. En el segundo apartado de este apéndice Huygens lo enuncia de la siguiente forma:

A apuesta contra B que entre 12 fichas, de las cuales 4 son blancas y 8 negras, él tomará a ciegas 7 fichas, de las cuales 3 serán blancas, y no más. Se pide la relación de la suerte de A a la de B. Respuesta: como 35 es a 64.

Vemos que el enunciado es idéntico al cuarto problema. Solamente, a consecuencia de un malentendido que había tenido lugar entre él y Hudde, sobre la interpretación del enunciado, Huygens añadió al mismo las palabras "en niet meer”, que indican que para ganar A debe tener 3 fichas blancas “y no más”, dado que Hudde entendía el enunciado como “extraer al menos 3 blancas”. Huygens supone que las fichas son extraídas una tras otra y comienza por calcular la esperanza o suerte de A, después de la sexta extracción, en los dos únicos casos donde éste puede ganar en la séptima. A continuación considera la situación del juego después de la quinta extracción, y así sucesivamente, para remontarse por fin al inicio del juego.

La resolución puede contemplarse de la siguiente forma: En la situación inicial hay 4 blancas y 8 negras. Supongamos el instante en el que se han extraído b blancas y n negras, quedando entonces en la caja $4-b$ blancas y $8-n$ negras (en total quedan $12-b-n$ fichas). Sea $e(b,n)$ el valor de la suerte o esperanza del primer jugador en ese instante. En la siguiente extracción puede salir una ficha blanca (hay $4-b$ posibilidades de que eso ocurra) y pasar así a un juego cuya valoración para el jugador A es $e(b+1,n)$, o puede salir negra (hay $8-n$ posibilidades para ello) y encontrarse entonces en un juego cuya valoración para el primer jugador es $e(b,n+1)$. Aplicando la Proposición 3 del tratado de Huygens:

$$e(b,n) = \frac{(4-b)\cdot e(b+1,n) + (8-n)\cdot e(b,n+1)}{12-b-n}, \text{ donde } 0 \le b \le 4 \text{ y } 0 \le b+n \le 7.$$

Desde luego, si el jugador A consigue su objetivo (3 blancas y 4 negras) gana la apuesta, o sea, $e(3,4)=a$. Ahora bien, $e(b,7-b)=0$, en cualquier otro caso, pues culminadas las 7 extracciones, el primer jugador sólo gana cuando consigue la extracción (3,4). En la situación “3 blancas y 3 negras” (ha extraído 6 fichas y le falta una por sacar que si es blanca gana), Huygens obtiene para el jugador A: $e(3,3)=\frac{5}{6}a$. Pues bien, partiendo de esta igualdad y analizando todas las posibilidades favorables a ese jugador, hacia atrás y tras 19 igualdades, Huygens llega a la situación (0,0), o sea, el punto de partida, para el que encuentra $e(0,0)=\frac{35}{99}a$, por lo que concluye que la suerte de A es a la de B como 35 es a 64. Es claro, en este caso, que el método analítico Huygens se hace largo y tedioso.

Por último, en el mismo apéndice, Huygens aborda este problema otra vez pero introduciendo en el enunciado la modificación propuesta por Hudde. O sea, el jugador A debe conseguir 3 o más fichas blancas en las 7 extracciones. Por tanto, los resultados que le hacen ganar el juego son (3,4) y (4,3).

Teniendo el precedente del apartado anterior, Huygens simplifica el cálculo reemplazando el problema en cuestión por el "problema complementario". Según éste, el jugador A debe tomar 5 fichas de las que cuatro al menos deben ser negras. Señalemos que no es necesario discutir el caso de 4 fichas de las que 0 son blancas y 4 negras, porque entonces la quinta extracción siempre hará ganar al jugador A. En este caso, tras ocho igualdades, llega a la solución 42 a 57, o 14 a 9.

Montmort presenta este problema en su texto como Problema III o Proposición XXXIV. El enunciado y resolución son como sigue:

Pedro apuesta contra Pablo que cogiendo, con los ojos cerrados, siete fichas entre doce, de las que ocho son negras y cuatro blancas, él cogerá tres blancas y cuatro negras. Se pide cuánto deben apostar Pedro y Pablo para que la apuesta de cada uno esté en la misma proporción que su suerte.

En este caso, Montmort hace uso de nuevo de su Proposición VII, o sea de la combinatoria, y resuelve el problema de una forma sencilla y actual. La suerte del primer jugador se calcula mediante $\dfrac{\binom{4}{3}\binom{8}{4}}{\binom{12}{7}} = \dfrac{35}{99}$, por lo que la del segundo jugador es $\dfrac{64}{99}$.

Y el autor añade la solución para el caso de tres o más fichas blancas:

> *Si se quiere que Pedro haya ganado también cuando coja cuatro blancas y tres negras, se tendrá de igual forma, por el Art. 20,* $\dfrac{70 \times 4 + 1 \times 56}{792} = \dfrac{14}{33}$ *para la suerte de Pedro, y en este caso sería necesario que Pablo ponga en el juego 19 contra 14 de Pedro.* O sea, en este caso calcula $\dfrac{\binom{4}{3}\binom{8}{4}}{\binom{12}{7}} + \dfrac{\binom{4}{4}\binom{8}{3}}{\binom{12}{7}}$.

5.6. QUINTO PROBLEMA

Éste es el problema propuesto por Pascal (“que juzga más difícil que todos los demás”) a Fermat y, a través de Carcavy, a Huygens, en una carta de 28 de septiembre de 1656. Esta carta contenía la solución sin explicación de los dos sabios franceses. La solución de Huygens aparece en su respuesta a Carcavy de 12 de octubre de 1656. El problema es conocido como el de la “Ruina del Jugador” y ha sido incluido en la literatura, también, como uno de los problemas sobre la “Duración del juego”. El enunciado que aparece al final del Tratado de Huygens es el siguiente:

Habiendo tomado cada uno 12 fichas, A y B juegan con 3 dados con esta condición de que a cada tirada de 11 puntos, A debe dar una ficha a B, y que B debe dar una ficha a A en cada tirada de 14 puntos, y que ganará aquel que sea el primero en poseer todas las fichas. Se encuentra en este caso que la suerte de A es a la de B como 244140625 es 282429536481.

La resolución detallada del problema aparece en unas hojas sueltas escritas por Huygens en 1676 y que en la edición de sus obras la incluye como Apéndice VI. Queremos señalar que estas hojas sueltas se presentan como las primeras en la historia que incluyen árboles de probabilidad para la comprensión y demostración de los resultados.

El enunciado tal y como fue presentado inicialmente sería*:*

Sean dos hombres que juegan con tres dados, donde el primer jugador consigue un punto si se lanza 11 y el segundo lo consigue si se lanza 14. Pero en lugar de que los puntos se acumulen en la vía ordinaria, dejamos que un punto sea añadido al tanteo de un jugador sólo si el tanteo de su oponente es cero y, en otro caso, dejamos en su lugar que el punto sea sustraído del tanteo de su oponente. Es como si los puntos opuestos formasen "pareja" y se aniquilasen unos a otros, por lo que el jugador que va detrás siempre tiene cero puntos. El ganador es el primero que alcance 12 puntos. ¿Cuál es la suerte de cada jugador?

Esta es una versión libre de la descripción dada por Carcavy y no hay razón para suponerla muy diferente de la que Pascal había propuesto. Cuando Huygens la lee, inmediatamente la piensa en términos de que los puntos de los jugadores se acumulan en la vía ordinaria, y así el ganador será el primero que lleve doce puntos de ventaja (en 1656), y cuando él lo plantea en su *De* *ratiociniis in aleae ludo* (en 1657) lo da en términos de que cada jugador parte con doce puntos, y una ganancia de un jugador supone la transferencia de un punto de su oponente a él mismo, y el ganador final es el que arruina al otro de todos sus puntos. Las tres formas de este problema de Pascal son, desde luego, equivalentes, pero es en la última forma como este problema se conoce como el de la “Ruina del Jugador”, y volvemos a citar, forma parte de una colección de problemas conocidos como “Duración del juego”.

El problema general de la duración del juego se estudió por De Moivre con gran agudeza y éxito; de hecho su investigación constituye una de sus principales contribuciones a la materia.

Se refiere con estas palabras a Nicolás Bernoulli y Montmort:

> El Señor de Montmort, en la Segunda Edición de este Libro de Probabilidades, después de haber dado una solución muy atractiva del Problema relativo a la duración del Juego, (que la solución es coincidente con el de Monsieur *Nicolás Bernoulli*, que él vio en ese libro) y la demostración de que se deduce naturalmente de nuestra primera Solución del Problema anterior, pensé que el lector estaría muy complacido de verlo trasladado a este lugar.
>
> *Doctrine of Chances;* primera edición, página 211.

> ... la solución del Sr. *Nicolás Bernoulli* estando mucho más llena de símbolos, y la explicación verbal de ellos demasiado escasa, soy dueño de no entenderla a fondo, lo que me obligó a considerar la solución del Sr. *de Monmort* con gran atención: He encontrado de hecho que era muy simple, pero para mi gran sorpresa la encontré muy errónea; todavía en mi Doctrina de Chances Imprimí esa solución, pero rectifiqué y atribuí al Sr. de

Monmort, sin el menor indicio de cualquier modificación hecha por mí; pero como no tuve agradecimiento por hacerlo, retomo mi derecho, y ahora imprimo como mía....

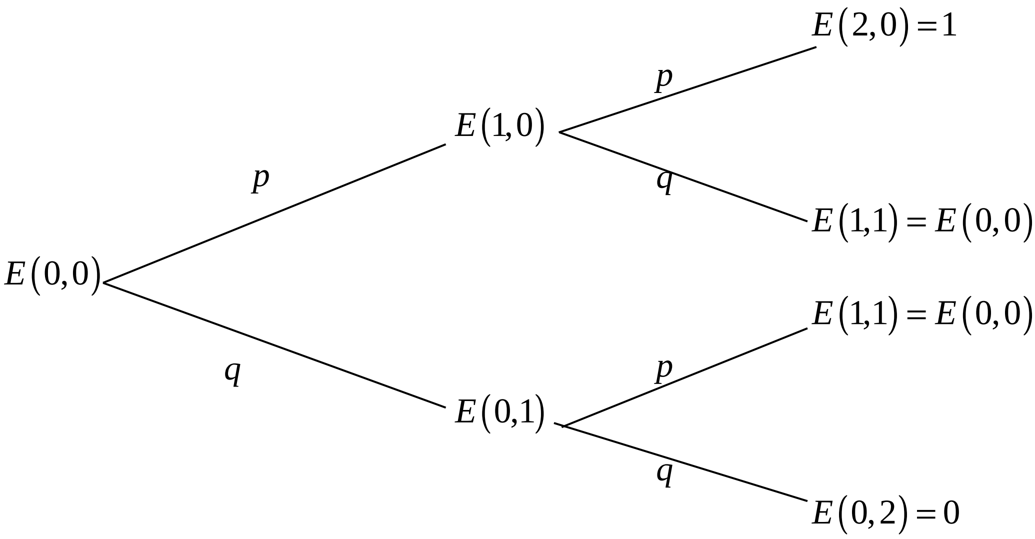
Doctrine of Chances; segunda edición, página 181, tercera edición, página 211.

El lenguaje de De Moivre en sus ediciones segunda y tercera parecería implicar que las soluciones de Nicolás Bernoulli y Montmort son diferentes; pero en realidad son coincidentes, como De Moivre mismo había declarado en su primera edición. La afirmación de que la solución de Montmort es muy errónea, es injustamente severa; Montmort ha dado su fórmula sin la debida precaución, pero su ejemplo que sigue inmediatamente hace ver que él tenía razón y que servirá para guiar a sus lectores. La segunda edición de la Doctrina de Chances apareció casi veinte años después de la muerte de Montmort; y el cambio en el lenguaje de De Moivre le respecto a él parece, por tanto, especialmente poco generoso.

Para resolver el problema, usando la formulación de Pascal, los jugadores arrancan con el tanteo (0,0), y el ganador es aquel que primero consigue 12 puntos (teniendo el otro 0 puntos). Pues bien, ésta es también la forma que Huygens usa en su resolución de 1676.

El número de posibilidades para ganar un punto es 15 para A y 27 para B; tomaremos $p = 15/42 = 5/14$ y $q = 27/42 = 9/14$. Supongamos que $E(a,b)$ es la suerte que tiene A de ganar cuando este jugador tiene a puntos y B tiene b puntos. El problema es encontrar $E(0,0)$.

Huygens comienza analizando el caso simple en el que el juego se acaba cuando uno de los jugadores llega a 2 puntos. Da una lista de todos los posibles resultados y sus probabilidades en un diagrama de tipo árbol. El diagrama que presenta, con un lenguaje actual, es el siguiente:



Aquí, el total apostado se toma igual 1. Del esquema podemos deducir las igualdades:

$$E(0,0)=p\cdot E(1,0)+q\cdot E(0,1)=p\big(p\cdot E(2,0)+q\cdot E(1,1)\big)+q\big(p\cdot E(1,1)+q\cdot E(0,2)\big)=$$
$$=p\big(p+q\cdot E(0,0)\big)+q\big(p\cdot E(0,0)+q\cdot 0\big)=p^2+2pq\cdot E(0,0).$$

Teniendo en cuenta que $p+q=1$, podemos despejar $E(0,0)$, obteniendo: $E(0,0)=\dfrac{p^2}{p^2+q^2}$. Por tanto, la esperanza del primero es a la del segundo como p^2 es a q^2.

Después, Huygens estudia el caso en el que el ganador ha de conseguir cuatro puntos de ventaja. Ingeniosamente resuelve considerando sólo uno de cada dos posibles estados del juego, a saber los puntos (4,0), (2,0), (0,0), (0,2) y (0,4), y señala que el árbol de sucesos será similar al primero, salvo que todas las posibilidades son cuadradas. La justificación para omitir los puntos intermedios es, evidentemente, que para pasar de (0,0) a (0,4), por ejemplo, es necesario pasar por (0,2). Huygens no ofrece explicación, más allá de un diagrama, aunque el planteamiento origina tres ecuaciones con la solución $E(0,0)=\dfrac{p^4}{p^4+q^4}$. Entonces, las posibilidades de los dos jugadores están en la relación $p^4:q^4$.

Finalmente, señala que si fuese necesaria una ventaja de 8 puntos, se aplicaría nuevamente el argumento anterior, $E(0,0)=\dfrac{p^8}{p^8+q^8}$, y así.

Si se requiere una ventaja de 3 puntos para ganar, él hace el paso de (0,0) a (1,0) con probabilidad p y después a (3,0) con probabilidad p^2, y de manera similar para las demás ramas del diagrama, lo que le lleva a las ecuaciones

$$E(1,0)=\frac{p^2E(3,0)+q^2E(1,2)}{p^2+q^2}=\frac{p^2+q^2E(0,1)}{p^2+q^2},$$
$$E(0,1)=\frac{p^2E(2,1)+q^2E(0,3)}{p^2+q^2}=\frac{p^2E(1,0)}{p^2+q^2},$$
$$E(0,0)=p\cdot E(1,0)+q\cdot E(0,1),$$

con la solución $E(0,0)=\dfrac{p^3}{p^3+q^3}$. De aquí, él generaliza para $\dfrac{p^6}{p^6+q^6}$.

Hasta aquí, los casos considerados requieren la solución de tres ecuaciones. Si fuese necesaria una ventaja de 5 puntos para ganar, el número de ecuaciones llega a ser considerablemente mayor, y Huygens señala que una solución se puede obtener como la obtenida para $n=3$ pero que tomaría un tiempo mucho mayor. Finalmente, afirma que, en general, la ratio de las esperanzas de A a B es $p^n:q^n$, aunque *“no vemos como concluir en general que* *las esperanzas de A y B están en la razón de las potencias".* La respuesta dada al final del problema 5 será entonces $5^{12}:9^{12}$.

El enunciado y resolución de Montmort es el siguiente (Proposición XLIV):

Pedro y Pablo cogen cada uno doce fichas y juegan con tres dados con las condiciones que siguen. Si los dados llevan once, Pablo dará una ficha a Pedro. Si los dados llevan catorce, Pedro dará una ficha a Pablo. Aquél de los dos que primero tenga todas las fichas, ganará. Se pide cuál es la suerte de los dos Jugadores.

Para resolver, en primer lugar Montmort calcula la suerte de cada jugador en cualquier lanzamiento de los tres dados. El número de posibles resultados es $6^3 = 216$. Los favorables al primer jugador, que debe sumar once puntos entre los tres dados, son 27, y los que favorecen al segundo, que deben sumar catorce, son 15. El resto hasta 216, o sea, 174, no favorecen ni a uno ni a otro. Por tanto, Montmort maneja las fracciones $\frac{27}{216}$, $\frac{15}{216}$ y $\frac{174}{216}$ en la resolución de este problema.

A continuación, el autor define las "suertes" del primer jugador cuando él conserva las 12 fichas y le ha ganado al contrario 1, ó 2, ó 3, …, ó las 12 al segundo jugador, y al contrario, cuando el contrario mantiene las 12 fichas y él va perdiendo 1, ó 2, ó 3,…, ó las 12. Así, por ejemplo, si

x: suerte del primer jugador cuando él tiene 12 fichas y el segundo también 12,
y: suerte del primer jugador cuando él tiene 12 fichas y el segundo tiene 11,
k: suerte del primer jugador cuando él tiene 11 fichas y el segundo 12,

se verifica: $x = \frac{27}{216} y + \frac{15}{216} k + \frac{174}{216} x$, o sea, $14x = 9y + 5k$.

De esta forma llega a plantear otras 19 igualdades que tras un proceso de sustitución hacia atrás le lleva a (siendo A el dinero total en juego): *Y como consecuencia se encontrará* $x = \frac{9y+5k}{14} = \frac{282429536481A + 352487604195x}{987648885496}$, *sustituyendo para y & k sus valores en x, y por fin reduciendo se tendrá* $x = \frac{282429536481}{282673677106} A$, *lo que expresa la suerte de Pedro, y* $A - x = \frac{244140625}{282673677106}$, *lo que expresa la suerte de Pablo.*

Montmort termina este problema añadiendo esta nota en la segunda edición de su texto:

> *Es a propósito observar que la vía analítica no es aquí, quizás, la mejor, puesto que se puede descubrir de otra forma que las suertes de Pedro y de Pablo son como las doceavas potencias de los números 9 y 5, así como ha sido observado por los señores Bernoulli que me han avisado en sus cartas del 17 de marzo de 1710 y 26 de febrero de 1711, y después por el señor De Moivre en su Tratado De Mensura Sortis, que apareció el año pasado.*

En la Proposición XLVII, que nuestro autor la titula “Sobre la duración de las partidas que se juega rebajando” aparece el asunto de la duración del juego.

El enunciado de la proposición es:

Pedro y Pablo juegan a un cierto número de partidas rebajando; es decir, de manera que teniendo Pedro tres fichas delante de él, por ejemplo, y Pablo tres fichas; si Pedro acaba de ganar una partida, Pablo le da una de sus fichas quedando así con dos contra cuatro de Pedro, así por lo demás. Se pregunta cuánto hay que apostar a que la partida, que puede durar hasta el infinito, será concluida en un cierto número determinado de lanzamientos como máximo.

Montmort (1708, p. 178) cuenta una experiencia con dos jugadores que teniendo cada uno seis monedas al inicio del juego, ninguno de ellos se arruina en el curso de 30 partidas que es cuando deciden parar. Montmort, entonces, propone dividir el total de la apuesta entre ellos en la ratio del número de monedas que tienen, asumiendo que los jugadores son de igual destreza; sin embargo, él sólo discute ejemplos numéricos.

En su carta a Montmort (1713, pp. 295-296), John Bernoulli afirma que la ratio de las probabilidades de ganar es como $n+x:n-x$ cuando A tiene $n+x$ monedas y B tiene $n-x$, $x=0,1,...,n-1$; Nicholas Bernoulli da una demostración en una carta a Montmort (1713, p. 311). Como vemos, el problema en parte coincide con el quinto de Huygens con la modificación de que las probabilidades de ganar una única partida es de 1:1 en lugar de 9:5.

Respecto al problema planteado en la Proposición XLVII afirma que la probabilidad de una duración de al menos $2n+1$ partidas es igual a

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{3^{i-1}}{4^{i}},\ n=1,2,... \qquad (1)$$

No da demostración. Presumiblemente ha seguido su usual procedimiento de considerar algunos ejemplos y después derivar la fórmula por inducción incompleta. Precipitadamente, añade que “Sin mucha dificultad uno puede encontrar fórmulas similares para otros casos que permitirá una más interesante investigación”. Como veremos ahora, continuó su investigación y, contrariamente a sus expectativas, la investigación demostró ser bastante difícil.

5.7. FÓRMULA DE NICHOLAS BERNOULLI PARA LA PROBABILIDAD DE LA RUINA DEL JUGADOR

Sobre el 15 de noviembre de 1710, Montmort (1713, pp. 306-307) respondió a la carta de John Bernoulli y volvió al problema de la duración del juego, señalando que ahora tiene la solución para jugadores de igual destreza y con el mismo número de monedas. Vuelve al ejemplo de dos jugadores, cada uno teniendo seis monedas y afirma que la probabilidad de duración de por lo menos 26 partidas es 16.607.955/33.554.432, que es algo menor que $\frac{1}{2}$, mientras que la probabilidad de duración de por lo menos 28 partidas es 70.970.250/134.217.728 que es algo mayor que $\frac{1}{2}$. Hemos dado el denominador correcto de la segunda probabilidad; como se ha señalado por Nicholas Bernoulli hay un error en el resultado tal como fue establecido por Montmort. Éste escribe que ha encontrado estos resultados casi sin cálculo, pero no revela su fórmula.

De sus resultados numéricos y notas posteriores parece razonable asumir que ha encontrado la probabilidad de duración de al menos n partidas de la forma

$$D_n(b,b) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[2\sum_{i=0}^{m-2kb-1}\binom{n}{i}+\binom{n}{m-2kb}\right]\Big/2^{n-1} -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\left[2\sum_{i=0}^{m-2kb-b-1}\binom{n}{i}+\binom{n}{m-2kb-b}\right]\Big/2^{n-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=m-2kb-b+1}^{m-2kb}\binom{n+1}{i}\Big/2^{n-1}, \qquad n=b+2m, \qquad p=\frac{1}{2}. \tag{1}$$

La reducción de la primera a la segunda expresión se obtiene por medio de la fórmula

$$2\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{i}+\binom{n}{m}=\sum_{i=0}^{m}\binom{n+1}{i}.$$

Las dos probabilidades mencionadas arriba son

$$\sum_{i=5}^{10}\binom{27}{i}\Big/2^{25} \quad \text{y} \quad \sum_{i=6}^{11}\binom{29}{i}\Big/2^{27},$$

respectivamente.

Vamos a desviarnos un poco del curso de los acontecimientos históricos y resumimos los resultados numéricos de Montmort. En la correspondencia con los Bernoulli da diversos ejemplos de determinar la *duración mediana* del juego, esto es, resolver la ecuación $D_n(b,b)=\frac{1}{2}$ para *n*,

$$D_{26}(6,6)=0'495<\frac{1}{2}<D_{28}(6,6)=0'529,$$

$$D_{35}(7,7)=0'485<\frac{1}{2}<D_{37}(7,7)=0'511,$$

$$D_{61}(9,9)=0'505.$$

También menciona que él cree que $D_{122}(12,12)<\frac{1}{2}<D_{124}(12,12)$, pero como señaló Nicholas Bernoulli la solución correcta es

$$D_{108}(12,12)=0'499<\frac{1}{2}<D_{110}(12,12)=0'507.$$

Hemos dado las probabilidades como fracciones decimales, mientras Montmort naturalmente uso la ratio de dos enteros. Finalmente, Montmort (1713, p. 276) afirma que la ecuación $D_n(b,b) \geq \frac{1}{2}$ para b impar tiene la solución aproximada

$$n \geq \frac{3}{4}b^2 + \frac{1}{4}. \tag{2}$$

No indica cómo ha obtenido este resultado y añade que no ha sido capaz de encontrar una fórmula similar para b par. Usando (2) para encontrar n para los cuatro ejemplos de arriba, encontramos 27’25, 37’00, 61’00, y 108’25. Montmort no da estos resultados pero menciona como un ejemplo que la duración mediana para $b = 19$ será $n = 271$. De Moivre demostró una fórmula similar a (2) en 1738.

Volviendo a la carta a John Bernoulli, Montmort escribe que le enviaría su fórmula si Bernoulli estuviese interesado. En ese momento, John Bernoulli tenía 43 años cumplidos y, excepto Leibniz, era el más famoso matemático del continente. Estaba ocupado con su propia investigación en Basilea, y Montmort no podía esperar que Bernoulli dedicase más tiempo a sus problemas. Montmort entonces indicó que vería de buen grado si John pasase el problema a su sobrino Nicholas, “que me parece que será capaz de resolver los problemas más difíciles y, siendo joven, tal vez tenga más tiempo libre para buscar la solución que sin duda es digna de él”. Nicholas tenía 23 años, acababa de recibir su grado en 1709, y se estaba preparando para su Gran Tour por Inglaterra, Holanda y Francia. Estuvo a la altura de las expectativas de Montmort. El 26 de febrero de 1711 envió la solución completa a Montmort (1713, pp. 309-311). Fue realmente un logro extraordinario por parte de Nicholas resolver este complicado problema que hasta entonces había demostrado ser demasiado difícil para los más experimentados probabilistas Montmort y De Moivre. No da demostración de su fórmula.

En su réplica Montmort expresa su admiración por la solución de Bernoulli pero admite que no es suficientemente capaz de entenderla y le pide un ejemplo numérico. Bernoulli responde que las dificultades de Montmort son comprensibles a la vista del hecho de haber usado una notación ambigua que ahora corrige. Entonces deriva la fórmula (1) como un caso especial de su fórmula y da dos ejemplos numéricos. Montmort responde que ahora si entiende la fórmula de Bernoulli y que el caso especial coincide con su propio resultado previo. La correspondencia relacionada con el problema de la ruina puede ser encontrada en Montmort (1713, pp. 315-316, 324-326, 344-345, 368-369, 375, 380).

En la fórmula, Bernoulli asume que $n-b$ es par porque B sólo puede arruinarse en las partidas número $b, b+2, b+4, \ldots$; se sigue que

$$R_{b+2m+1}(a,b) = R_{b+2m}(a,b), \quad m = 0,1,\ldots$$

Poniendo $c = a+b$, tenemos

$$R_n(a,b) = p^b \sum_{k=0}^{\infty} (qp)^{kc} \sum_i \binom{n}{i} \left(p^{n-b-2kc-i} q^i + q^{n-b-2kc-2a-i} p^i \right)$$

$$-p^b \sum_{k=0}^{\infty} (qp)^{a+kc} \sum_i \binom{n}{i} \left(p^{n-b-2kc-2a-i} q^i + q^{n-b-2kc-2a-i} p^i \right), \qquad (3)$$

donde $0 \le 2i \le n-b-2kc$ en la primera suma; $0 \le 2i \le n-b-2kc-2a$ en la segunda suma; y donde sólo uno de los dos miembros idénticos del último término de la suma sobre *i* será incluido cuando el límite superior para $2i$ es par.

Como un corolario Bernoulli da la solución completa del quinto problema de Huygens, que se obtiene para $n \to \infty$. Poniendo $\lim R_n = R$, su solución se convierte en

$$R(a,b) = \frac{p^c - p^b q^a}{p^c - q^c}, \quad a \neq b, \quad p \neq q,$$

$$R(a,a) = \frac{p^a}{p^a + q^a},$$

$$R(a,b) = \frac{a}{a+b}, \quad p = \frac{1}{2}, \tag{3}$$

5.8. UNA DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA DE BERNOULLI

Takács (1969) ha sugerido que Bernoulli derivó su fórmula usando el método de inclusión y exclusión y el método de reflexión. Creemos que Takács tiene razón, y en lo que sigue mostramos de demostración de Takács con algún comentario en relación con la fórmula de Bernoulli.

Dado que la suma de los exponentes de *p* y *q* en (3) es igual a *n*, y el coeficiente es igual a $\binom{n}{i}$, está claro que Bernoulli, como Pascal y Fermat en su solución combinatoria del problema de los puntos, ha analizado una serie de *n* partidas donde las últimas pueden ser ficticias debido a que uno de los jugadores se ha arruinado antes de que la serie se complete. Por tanto, consideramos series de *n* partidas en las que a gana *i* de ellas y B gana $n-i$, $i = 0,1,\ldots,n$; la probabilidad de cualquiera de tales series es $p^i q^{n-i}$. Consecuentemente, reescribimos la fórmula de Bernoulli en la forma

$$R_n(a,b) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{2i-n \geq b} \binom{n}{i+kc} p^i q^{n-i} + \sum_{2i-n<b} \binom{n}{i-b-kc} p^i q^{n-i} \right]$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{2i-n\geq b}\binom{n}{i+kc+a}p^{i}q^{n-i}+\sum_{2i-n<b}\binom{n}{i-c-kc}p^{i}q^{n-i}\right], \qquad (4)$$

que se obtiene introduciendo la potencia de *p* en cada una de las sumas de (3) como una nueva variable.

La fórmula es una serie alternante, indicando que Bernoulli ha usado el método de inclusión y exclusión, que es también afirmado por Montmort y De Moivre quienes explícitamente usan este método en sus comentarios sobre los resultados de Bernoulli. La serie es finita debido a que los coeficientes binomiales se hacen cero para *k* suficientemente grande.

Ahora consideramos varios subconjuntos del conjunto de series de partidas en las que A gana *i* partidas y B gana $n-i$ partidas para encontrar el conjunto, llamémosle R, en el que A arruina a B. El conjunto R está definido por la propiedad de que la ganancia de A llega a *b* antes de que la ganancia de B llegue a *a*. Para encontrar R consideramos el conjunto C_1 en el que A gana *b* cuentas de B al menos una vez en *n* partidas. Comparado con R, el conjunto C_1 es obviamente demasiado grande ya que incluye el conjunto en el que la ganancia de A llega a $-a$ antes de que llegue a *b*.

Entonces deducimos el conjunto de series de partidas, llamémosle C_2, en los que la ganancia de A, al menos una vez, pasa de $-a$ a *b*. Éste es el comienzo de una serie alternante en la que los términos están definidos como sigue: $C_{2k},\quad k=1,2,...,$ es el conjunto de series de partidas en los que la ganancia de A, al menos *k* veces, pasa de $-a$ a *b*, y $C_{2k+1},\quad k=1,2,...,$ es el conjunto de series de partidas en los que la ganancia de A al menos una vez alcanza *b* y después al menos *k* veces pasa de $-a$ a *b*; claramente, C_{2k+1} es un subconjunto de C_{2k}.

La definición de este conjunto está indicada en la forma de (3), ya que el factor p^b significa que la ganancia de A al menos una vez alcanza *b*, y el factor $(qp)^{kc}$ indica que la ganancia de A al menos *k* veces va de $-a$ a *b*.

Usando el método de inclusión y exclusión, el conjunto de serie de partidas que llevan a la ruina de B se encuentra como

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} C_k. \tag{5}$$

Este resultado puede verse también escribiendo *R* en la forma

$$R = C_1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{2k} - C_{2k+1} \right),$$

ya que C_1 es el conjunto de series de partidas en el que la ganancia de A al menos una vez alcanza *b*, y $\left\{ C_{2k} - C_{2k+1}; \quad k = 1, 2, ... \right\}$ es el conjunto de series no pertenecientes a R debido a que la ganancia de A antes llega a $-a$ antes de llegar a *b*.

Para encontrar $\Pr\{R\}$, de este modo tenemos que encontrar

$$\Pr\{C_k\} = N_k(i)\, p^i q^{n-i} \ ,$$

donde $N_k(i)$ denota el número de series de partidas de longitud *n* pertenecientes a C_k. La fórmula (4) indica que tenemos que distinguir entre series en que la ganancia de A, $g_n = 2i - n$, es mayor y menor que *b*, respectivamente.

El número total de series diferentes de partidas en las que A gana i partidas y B gana $n-i$ es igual a $\binom{n}{i}$. Consideramos ahora $N_i(i)$. Todas las series en las que $2i-n\geq b$ son miembros de C_1 ya que la ganancia de A necesariamente alcanza b al menos una vez, y así tenemos

$$N_1(i)=\binom{n}{i} \text{ para } 2i-n\geq b.$$

Todas las series en las que $2i-n<2b-n$ no son miembros de C_1, ya que $i<b$, por lo que

$$N_1(i)=0 \text{ para } 2i-n<2b-n.$$

En el caso intermedio, donde $2b-n\leq 2i-n<b$, tenemos que encontrar el número de series de partidas en las que la ganancia de A al menos una vez alcanza b y acaba por ser menor que b. Consideramos el paseo aleatorio (t,g_t), $t=0,1,\ldots,n$ y reflejamos la sección del camino después de que ha alcanzado b por primera vez en la línea horizontal a través de b. Ya que $g_n=2i-n$ el camino reflejado lleva a una ganancia de $b+(b-g_n)=2b-(2i-n)=(n+b-i)-(i-b)\geq b$, por lo que el camino reflejado representa una serie de n partidas en las que A gana $n+b-i$ partidas y B gana $i-b$. Un gráfico del camino aleatorio muestra que hay una correspondencia uno a uno entre el original y el camino reflejado. Por tanto,

$$N_1(i)=\binom{n}{i-b} \text{ para } 2b-n\leq 2i-n<b,$$

ya que éste es el número total de series en las que A gana $n+b-i$ partidas y B gana $i-b$, y la ganancia de A alcanza b por lo menos una vez.

La reflexión corresponde a cambiar el resultado de una partida de $+1$ a -1 y viceversa, como se indica por el intercambio de *p* y *q* en las sumas interiores de (3).

Sumando sobre *i* conseguimos la probabilidad de que la ganancia de A alcance *b* al menos una vez como

$$\sum_{2i-n\geq b}\binom{n}{i}p^i q^{n-i}+\sum_{2i-n<b}\binom{n}{i-b}p^i q^{n-i}, \qquad (6)$$

que es el primer término de (4). Ya que hemos pasado por alto la posibilidad de que A se arruine, esta probabilidad obviamente es igual a $R_n(b)$.

Puede extenderse la demostración para encontrar los cuatro coeficientes binomiales de (4) reflejando el camino cada vez que la ganancia de A alcanza $-a$ o *b*. La demostración completa fue dada por Takács (1969).

No creemos que Bernoulli llevase a cabo una demostración formal como la de arriba; presumiblemente, simplemente trabajó a través de algunos ejemplos, y de la estructura de la solución construyó su fórmula por inducción incompleta. No obstante, la solución de este complejo problema requiere una visión combinatoria grande y da testimonio de su ingenio.

Además de imprimir la correspondencia con Bernoulli sobre este problema; Montmort (1713, pp. 268-277) escribe una sección en la parte principal de su libro dando la fórmula de Bernoulli con un primer intento de demostración y algunos ejemplos numéricos.

5.9. CONCLUSIÓN

Este autor, P. R. de Montmort, en su excelente tratado sobre el cálculo en juegos de azar, incorpora como parte del mismo los cinco problemas propuestos por Huygens casi cincuenta años antes, los resuelve y, como corresponde al proceso natural del crecimiento matemático, introduce generalizaciones de los mismos. En dos de estos problemas utiliza el método más natural y sencillo de resolución, la combinatoria, método actual por otra parte, y en los otros tres usa el de su predecesor, el "método analítico", reconociendo lo farragoso que llega a resultar, sobre todo, en la resolución del último problema.

CAPITULO 6

PROBLÊMES DIVERS
SUR LE JEU
DU TREIZE.

LE JEU DU TREIZE: LAS SOLUCIONES TEMPRANAS DE MONTMORT Y NICOLÁS BERNOULLI AL PROBLEMA DE LAS COINCIDENCIAS

6.1. INTRODUCCIÓN

Entre los muchos juegos de azar estudiados por Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) en su obra *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, publicada en 1708 (segunda edición aumentada en 1713) nos encontramos con el Juego del Trece (Jeu du Treize) que se practica con una baraja de 52 naipes, con trece de cada palo. El juego, en el que participa "la banca" (elegida al azar) y el resto de jugadores (cualquier número) le dio pie al autor para proponer y resolver un problema que, con el tiempo, se convirtió en un clásico de la literatura probabilística: el problema de las coincidencias.

Por primera vez en la historia aparece este problema y el mismo surge asociado al nombre de Montmort. Básicamente, se trata de calcular la probabilidad que tiene la banca de ganar este juego. En la primera, edición de su obra, la de 1708, encontramos el planteamiento (no la resolución) del problema básico y algunos asociados que, prácticamente, son pequeñas variantes del primero. En la segunda edición, la de 1713, aparece el problema mucho más enriquecido y matizado.

Como ya venimos comentando, en el periodo intermedio entre ambas ediciones, Montmort había mantenido correspondencia con dos miembros de la familia Bernoulli, con Johann (1667-1748) y con Nicolás (1687-1759), y en dicha interesante y amplia correspondencia (no en cuanto al número de cartas, sino en cuanto a la extensión de cada una) fue abordado, entre otros muchos problemas, el de las coincidencias. Por tanto, en la segunda edición encontramos ya la resolución de Montmort y, al añadirse toda esa correspondencia, también la solución de Nicolás Bernoulli.

Casi inmediatamente después, De Moivre (1718) aborda el problema desde la perspectiva de un teorema general sobre la probabilidad de sucesos compuestos, obteniendo dicho teorema por el método de inclusión y exclusión, método usado ya por los dos anteriores para derivar el valor de una expresión con la que calcular la probabilidad del banquero de ganar el juego. Montmort usará ese método de demostración en otras partes de su obra.

Tras estas aportaciones tempranas, el problema de las coincidencias aparecerá a lo largo de la historia en muy diferentes contextos y, por tanto, resuelto por diferentes autores, muchos de ellos inconscientes de las contribuciones fundamentales de Montmort, Nicholas Bernoulli y De Moivre. Así, por citar a algunos, Laplace (1812), Euler (1753), Lambert (1713), Young (1819), Oettinger (1837), nos dan una idea de la importancia de este problema en el desarrollo del cálculo que empezó a tener vida propia a partir del siglo XVII. En la actualidad siguen apareciendo nuevas variantes y formas de resolución del mismo.

Nuestro objetivo ahora es describir cómo fue presentado y resuelto este problema por los dos autores pioneros, Montmort y Nicholas Bernoulli, cosa que hacemos en los dos apartados que siguen. Intentamos hacerlo usando notación actual pero siendo fieles al máximo a las palabras y cálculos de ambos.

6.2. LA SOLUCIÓN DE MONTMORT

Como se ha dicho, en el juego participa cualquier número de jugadores y se desarrolla con una baraja francesa de 52 cartas, con 13 cartas por cada palo, habiendo en cada uno un as (nº 1), nueve números (números del 2 al 10), la sota (nº 11), la reina (nº 12) y el rey (nº 13).

Por sorteo, los jugadores eligen al que hace de banca (el que tiene la mano). Cada uno de los otros jugadores hace la apuesta que crea oportuna de forma que, si la banca gana, todo lo apostado por los demás es para la banca y, si pierde, la banca paga a cada jugador lo apostado por el mismo. Y comienza el juego. Dejemos que el propio Montmort nos lo describa (la descripción del juego y el planteamiento y resolución de los problemas asociados los encontramos en las páginas 130-143 de la 2ª edición):

> *En primer lugar los jugadores extraen para decidir quién tendrá la mano. Supongamos que éste es Pedro, y que el número de jugadores sea el que se quiera. Pedro tendrá un juego completo compuesto de cincuenta y dos cartas mezcladas a discreción, las saca una tras otra, nombrando y diciendo uno al extraer la primera carta, dos al extraer la segunda, tres al extraer la tercera, y así sucesivamente hasta la decimotercera que es un rey. Entonces, si en toda esta sucesión de cartas no hay ninguna extracción según el rango con el que ha sido nombrado, paga aquello que los jugadores pusieron en juego, y cede la mano a aquél que le sigue a su derecha.*
>
> *Pero si consigue en la sucesión de trece cartas, extraer la carta que él nombra, por ejemplo, extrae un as al tiempo que dice uno, o un dos al tiempo que dice dos, o un tres en el tiempo que dice tres, y así, toma todo lo que está en juego, y vuelve a empezar como al principio, dice uno, después dos, y así.*
>
> *Puede ocurrir que Pedro haya ganado varias veces, y volviendo a empezar por uno, no tenga cartas suficientes en la mano para llegar hasta trece, entonces debe, cuando el juego le falte, mezclar las cartas, cortar, y a continuación extraer del juego completo el número de cartas que le son necesarias para continuar el juego, comenzando por aquella donde se quedó en la mano anterior. Por ejemplo, si extrayendo la última carta dijo siete, debe al extraer*

la primera carta en el juego completo, después de que haya cortado, decir ocho, seguido de nueve, y así hasta trece, a menos que gane antes, en cuyo caso vuelve a empezar, nombrando en primer lugar uno, después dos, y el resto como se acaba de explicar. Por lo que Pedro puede hacer varias manos seguidas, igual que puede continuar el juego hasta el infinito.

La descripción del juego da pie al planteamiento de problemas asociados. En la primera edición, la de 1708, sólo aparecen planteados. En particular propone cuatro para resolver por el lector al final del texto. En la segunda, la de 1713, planteados y resueltos. Durante el intervalo transcurrido entre ambas ediciones, Montmort mantuvo correspondencia con los Bernoulli. En particular con Johann (1667-1748) y con Nicolás (1687-1759), sobrino del primero. Dicha correspondencia es conocida gracias a que la misma fue incorporada a la segunda edición del texto que nos ocupa.

Destacamos la carta que Johann Bernoulli remitió a Montmort el 17 de marzo de 1710, en la que se añaden unas notas de su sobrino Nicolás (págs. 299-303 de la 2ª edición) donde, entre otros, aporta su demostración sobre el juego del Trece, precisamente; la que el mismo Montmort envió a Johann Bernoulli, fechada el 15 de noviembre de 1710 (págs. 303-307) donde el remitente da la solución (no la resolución) del problema que planteó en la edición de 1708, añadiendo que *Os haría partícipe de mi método, si no creyese que es demasiado largo. Me vanaglorio que sería de vuestro gusto.*

También interesa la carta de fecha 26 de febrero de 1711 que Nicolás Bernoulli remite a Montmort (páginas 308-314 de la 2ª edición) donde el remitente en primer lugar corrige la solución dada por Montmort en la carta anterior (bajo el supuesto de que sólo fueron errores de cálculo) y describe su método de resolución.

Nuestro objetivo en este apartado es describir el procedimiento de cálculo usado por Montmort en la resolución del problema que, como vemos en el enunciado que él mismo escribe, es simplificado con respecto al juego real:

PROBLEMA

PROPOSICIÓN V.

Pedro tiene un cierto número de cartas diferentes que no son puntos repetidos, que están mezcladas a discreción: apuesta contra Pablo que si las extrae seguidas, las nombra según el orden de las cartas, comenzando o por la más alta, o por la más baja, él conseguirá al menos una vez sacar aquella que nombra. Por ejemplo, Pedro teniendo en mano cuatro cartas, a saber un as, un dos, un tres y un cuatro mezcladas a discreción, apuesta que extrayéndolas seguidas, nombrando uno cuando saque la primera, dos cuando saque la segunda, tres cuando saque la tercera, le pasará que saca un as cuando diga uno, o saca un dos cuando diga dos, o saca un tres cuando diga tres, o saca un cuatro cuando diga cuatro. Sea imaginado del mismo modo para cualquier otro número de cartas. Se pregunta cuál es la suerte o la esperanza de Pedro para cualquier número de cartas que se pueda tener desde dos hasta trece.

Observamos que Montmort reduce el problema al caso de un solo palo de la baraja (y no cuatro como inicialmente aparece) y plantea calcular la probabilidad que tiene el banquero de ganar en esa circunstancia. Generalizando esta propuesta podíamos enunciar así: Supongamos que el banquero tiene n cartas diferentes en orden aleatorio. ¿Cuál es la probabilidad de al menos una coincidencia cuando el banquero extrae las n cartas sucesivamente?

Hace una introducción didáctica a la resolución:

Sean las cartas con las que Pedro hace la partida, representadas por las letras a, b, c, d, etc. Si llamamos m al número de cartas que tiene, n el número que expresa todas las ordenaciones posibles de estas cartas, la fracción n/m expresará de cuántas maneras distintas cada letra ocupará cada uno de los lugares. Ahora bien, hay que notar que estas letras no se encontrarán siempre en su lugar útilmente para el banquero; por ejemplo, a, b, c, no da más que una oportunidad de ganar al que tiene la mano, aunque cada una de estas tres letras esté en su lugar; Y de igual forma b, a, c, d no da más que una oportunidad a Pedro para ganar, aunque cada una de las letras c y d esté en su lugar. La dificultad de este problema consiste en desenmarañar cuantas veces cada letra está en su lugar útil para Pedro, y cuantas veces está en lugar no útil.

A continuación Montmort procede a dar la solución para $n = 2,...,5$, en cada caso siguiendo el mismo principio que, obviamente, es la base de su demostración. Para $n = 5$ su argumento es como sigue: El número de permutaciones de 5 cartas $5! = 120$. Entre estas hay 24 en las que el 1 está en primer lugar, 18 en las que el 2 está en segundo lugar sin que el 1 esté en el primero, 14 en las que el 3 está en tercer lugar sin el 1 en el primero ni el 2 en el segundo, 11 en las que el 4 está en cuarto lugar sin el 1 en el primero, el 2 en el segundo ni el 3 en el tercero, 9 en las que el 5 está en quinto lugar, sin estar las otras cuatro en sus lugares respectivos. La probabilidad de al menos una coincidencia es por tanto

$$\frac{24+18+14+11+9}{120} = \frac{76}{120} = \frac{19}{30}.$$

Entonces indica la solución general de dos formas: como una fórmula recurrente y como una solución explícita en la forma de una serie.

La secuencia de soluciones para $n = 2,...,5$ le permite construir la fórmula recurrente que queda descrita como sigue, usando una formulación actual: Si P_n es la probabilidad de al menos una coincidencia cuando se tiene *n* cartas de un solo palo, entonces

$$P_n = \frac{(n-1)P_{n-1} + P_{n-2}}{n}, \quad n \geq 2, \quad P_0 = 0, \text{ y } P_1 = 1. \tag{1}$$

Montmort lo escribe de esta forma:

> *Si llamamos S a la suerte que se busca, el número de cartas que Pedro tiene se expresa por p; g la suerte de Pedro, siendo el número de cartas p - 1; d su suerte, el número de cartas que él tiene siendo p - 2, se tendrá* $S = \frac{g \times \overline{p-1} + d}{p}$. *Esta fórmula dará todos los casos, y los vemos resueltos en la Tabla adjunta.*

La tabla que muestra da las soluciones desde $n = 1$ hasta $n = 13$. Para este último caso escribe $S = \frac{109339663}{172972800}A = \frac{1}{2}A + \frac{22853263}{172972800}A$. O sea, la probabilidad que tiene el banquero de ganar (de conseguir al menos una coincidencia) cuando se juega con una baraja de 13 cartas y un solo palo es $P_{13} = \frac{109.339.663}{172.972.800} = 0'632120558$.

Al principio del texto de Montmort encontramos un “Tratado sobre las combinaciones” donde se describe el Triángulo Aritmético de Pascal. Pues bien, llegado este momento de exposición, el autor invoca ese tratado sobre las combinaciones indicando que, a partir de él, ha obtenido otra expresión que viene dada como un desarrollo en serie cuyos términos van alternando en signo y, cada uno de ellos se calcula como cociente entre el número combinatorio que aparece en la citada tabla y el producto descendente iniciado en el término que corresponda: Así, para el término *p* de la serie (en el caso de una baraja de *n* cartas y un solo palo), Montmort dice que se calcula mediante este cociente: $\frac{\binom{n}{p}}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)} = \frac{1}{p!}$. Por tanto, para el cálculo de la probabilidad del banquero de ganar proporciona la serie:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} \cdots$$

En general, podemos escribir $P_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}, \quad n \geq 1$, o abreviadamente,

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{n!} \tag{2}$$

En ningún momento relaciona ambas soluciones: Seguramente se da cuenta, que de la primera formulación se deduce que $P_n - P_{n-1} = -\frac{P_{n-1} - P_{n-2}}{n}$ y de la segunda podemos escribir $P_n - P_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$. Si igualamos los segundos miembros de ambas igualdades obtenemos $P_{n-1} - P_{n-2} = \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!}$, lo que muestra que podemos pasar de una formulación a la otra fácilmente.

A continuación cita a Leibniz y a su trabajo publicado en las Actas de Leipzig de 1693 en el que resolvía el problema de "dado un logaritmo, encontrar el número que le corresponde" y donde da como solución "para *x* del caso en el que las ordenadas disminuyen" $=1-\frac{x}{1}+\frac{xx}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-$, o sea, el desarrollo de e^{-x} , que para el caso de $x=1$ nos proporciona la serie $1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-$, la cual aparece en el cálculo de la probabilidad de ganar que tiene el banquero. Montmort nos está queriendo decir, aunque así no lo manifiesta, que $\lim_{n\to\infty} P_n = 1-e^{-1} = 0'632120558$, aunque nuestro autor en ningún momento da fracción decimal, ni habla de convergencia de la serie. Recordamos las dos fracciones citadas más arriba: $P_5 = \frac{19}{30} = 0'6333...$ y $P_{13} = 0'632120558$.

A continuación, Montmort se plantea lo siguiente:

> *Las dos fórmulas nos enseñan cuánto tiene de azar el que tiene las cartas para ganar para cualquier carta que sea; pero no nos hacen conocer cuánto hay de azar por cada carta que extrae desde la primera hasta la última. Se ve claro que este número de azares disminuye siempre, y que hay, por ejemplo, más azares para ganar para el as que para el dos, y para el tres que para el cuatro, & así. Pero no se saca fácilmente de lo que procede la ley de esta disminución, se la encontrará en esta Tabla.*

Los 5 ejemplos previos que usó Montmort a título ilustrativo nos orienta sobre lo que está manifestando en el párrafo. Divide el conjunto de permutaciones con al menos una coincidencia en dos conjuntos disjuntos definidos por el lugar donde la primera coincidencia ocurre.

En lenguaje actual, si $a_n(i)$ es el número de permutaciones de n elementos en las que la primera coincidencia se produce en el lugar *i*. Se verifica que $a_n(1)=(n-1)!$, ya que 1 tiene que estar en primer lugar y el resto de los $n-1$ números pueden ser permutados de todas las maneras posibles. Para $a_n(2)$, fijamos primero 2 en segundo lugar, y de las resultantes $(n-1)!$ permutaciones tenemos que deducir el número de permutaciones con el 1 en primer lugar, cuyo número es igual $(n-2)!$, por lo que

$$a_n(2)=(n-1)!-(n-2)!=a_n(1)-a_{n-1}(1).$$

En general, tenemos

$$a_n(i+1)=a_n(i)-a_{n-1}(i), \quad n\geq 2, \quad i=1,...,n-1. \tag{3}$$

Montmort conocía esta fórmula recurrente como veremos más abajo en el texto explicativo que introduce, y la usó para calcular $a_n(i)$ para $i=2,...,5$ en sus ejemplos iniciales. En la edición de 1713 (p. 137), la usa para calcular $a_n(i)$ hasta $n=8$. Por otra parte, si a_n es el número de permutaciones con al menos una coincidencia, podemos escribir:

$$a_n=a_n(1)+a_n(2)+...+a_n(n).$$

Tanto los $a_n(i)$ como los a_n son presentados por Montmort en una tabla parecida a la que aquí se muestra.

	I								
N	1	2	3	4	5	6	7	8	a_n
1	1								**1**
2	1	0							**1**
3	2	1	1						**4**
4	6	4	3	2					**15**
5	24	18	14	11	9				**76**
6	120	96	78	64	53	44			**455**
7	720	600	504	426	362	309	265		**3186**
8	5040	4320	3720	3216	2790	2428	2119	1854	**25487**

Montmort explica lo siguiente:

Esta Tabla hace ver que con cinco cartas, por ejemplo, un as, un dos, un tres, un cuatro y un cinco, Pedro tiene veinticuatro maneras de ganar para el as; dieciocho de ganar para el dos no habiendo ganado para el as; catorce de ganar para el tres no habiendo ganado ni para el as ni para el dos; once de ganar para el cuatro, no habiendo ganado ni para el as, ni para el dos, ni para el tres; y por fin, que no tiene más que nueve maneras de ganar para el cinco, no habiendo ganado ni para el as, ni para el dos, ni para el tres, ni para el cuatro.

Cada rango de esta Tabla se forma sobre el precedente de una manera muy fácil. Para hacerlo entender, supongamos aún que hay cinco cartas. Se ve en primer lugar que hay veinticuatro maneras de ganar para el as. Esto es evidente, puesto que al estar determinado que el as esté en primer lugar, las otras cuatro cartas pueden ser ordenadas de todas las maneras posibles; y en general está claro que *si el número de cartas es p, el número de azares para ganar para el as está expresado por tantos productos de números naturales 1, 2, 3, 4, 5, & así, como unidades hay en* $p-1$. *Planteado esto,* $24-6=18$ *me da los azares para ganar para el dos,* $18-4=14$ *me da los azares para ganar para el tres,* $14-3=11$ *me da los azares para ganar para el cuatro; y por fin,* $11-2=9$ *me da los azares para ganar para el cinco.*

Y de esta forma nos muestra su conocimiento de la fórmula recurrente:

…y en general cada número de la Tabla es igual a la diferencia de aquél con él se encuentra a la derecha y que ya ha sido encontrado, con el que está inmediatamente encima.

La fórmula recurrente (3) es demostrada usando el método de inclusión y exclusión. Para hacerlo indiquemos previamente que $a_n(i)$ se puede interpretar como el número de permutaciones con una coincidencia en el lugar *i*, y ninguna en los $i-1$ lugares anteriores. Si hacemos un desplazamiento de lugares hacia delante una unidad, o sea, si consideramos los lugares $2,\ldots,(i+1)$, $a_n(i)$ nos da el número de permutaciones con una coincidencia en el lugar $(i+1)$, ninguna en los lugares $2,\ldots,i$, y ninguna restricción en el lugar 1.

Así, para calcular $a_n(i+1)$ hemos de quitar a las permutaciones anteriores aquellas que tienen una coincidencia en el lugar 1, o sea, hemos de restar aquellas permutaciones con un 1 en el lugar 1, ninguna coincidencia en los lugares $2,\ldots,i$, y una coincidencia en el lugar $(i+1)$. Dicho número de permutaciones es $a_{n-1}(i)$.

Está claro que $P_n = \frac{a_n}{n!}$, por lo que dicha probabilidad es calculable para cada *n* a partir de la columna del margen derecho de la tabla anterior. Además, para los valores de esa columna encuentra un "orden" que se visualiza a partir de la tabla que da:

$\overline{0\times 1}+1=1$

$\overline{1\times 2}-1=1$

$\overline{1\times 3}+1=4$

$\overline{4\times 4}-1=15$

$\overline{15\times 5}+1=76$

$\overline{76\times 6}-1=455$

$\overline{455\times 7}+1=3186$

$\overline{3186\times 8}-1=25487$

O sea, nuestro autor obtiene esta fórmula recurrente, $a_n = na_{n-1} + (-1)^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 0$.

Para seguir exponiendo resultados de Montmort introducimos una nueva forma de contar las permutaciones. Sea $b_n(i)$ el número de permutaciones de *n* elementos con exactamente *i* coincidencias. Lógicamente, $b_n(0)+b_n(1)+...+b_n(n)=n!$. También, $a_n + b_0(n) = n!$ Entonces, la probabilidad de que se produzcan exactamente *i* coincidencias es $p_n(i) = \frac{b_n(i)}{n!}$. Y la probabilidad de que se produzcan al menos *i* coincidencias $P_n(i) = p_n(i) + p_n(i+1) + ... + p_n(n)$ y $P_n(0)=1$. Bajo esta nueva formulación, la probabilidad de que el banquero gane con un haz de n cartas de un solo palo, lo que antes llamábamos P_n, ahora sería $P_n(1)$.

En su segundo corolario de la página 138 (2ª edición del tratado), Montmort afirma que los valores de la diagonal de la tabla anterior, 0, 1, 9, 44, 165, o sea, los que corresponde con los $a_n(n)$, son los que proporcionan el número de permutaciones ("el número de azares" dice nuestro autor) en las que no se producen ninguna coincidencia para el *n* correspondiente a la fila inmediatamente anterior, o sea, $a_{n+1}(n+1) = b_n(0) = n! - a_n$.

En la página siguiente de su tratado, la 139, Montmort presenta, mediante una serie, la manera de calcular el número de permutaciones con *n* coincidencias, con $n-1$, con $n-2$, con $n-3$,… Establece que el número de permutaciones con exactamente *i* coincidencias verifica la siguiente igualdad, $b_n(i) = \binom{n}{i} b_{n-i}(0)$, ya que los lugares donde caerían las *i* coincidencias pueden ser elegidos de $\binom{n}{i}$ maneras distintas y, además, no pueden producirse coincidencias en el resto de los $n-i$ lugares.

De la igualdad $b_n(0) = n! - a_n = n! - n!\,P_n = n!(1-P_n)$, y teniendo en cuenta que $P_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$, nos queda

$$b_n(0) = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right) =$$

$$(-1)^n\left[1 - n + n(n-1) - n(n-1)(n-2) + \ldots + (-1)^{n-2} n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\right] =$$

$(-1)^n\left[1 - n + n^{(2)} - n^{(3)} + \ldots + (-1)^{n-2} n^{(n-2)}\right]$. Por tanto, como $b_n(i) = \binom{n}{i} b_{n-i}(0)$, podemos escribir

$$b_n(i) = (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \left[1 - (n-i) + (n-i)^{(2)} - (n-i)^{(3)} + \ldots + (-1)^{n-i-2} (n-i)^{(n-i-2)} \right].$$

Si nos atenemos a la forma de presentación que hace el autor, la serie que describe por sus sumandos, el número de permutaciones con n coincidencias, con $n-1$, con $n-2$, con $n-3, \ldots$ sería:

$$\sum_{i=0}^{n} b_n(i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \left[1 - (n-i) + (n-i)^{(2)} - (n-i)^{(3)} + \ldots + (-1)^{n-i-2} (n-i)^{(n-i-2)} \right]$$

Así Montmort escribe que, para el caso de *p* cartas (lo que nosotros hemos llamado *n*) el número de azares de una coincidencia, de dos, de tres,… se encuentra en los correspondientes sumandos de la serie que sigue

$$1 \times 1 + p \times 0 + \frac{p \cdot p-1}{1 \cdot 2} \times \overline{0+1} + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \overline{0-1+3} + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times$$

$$\overline{0+1-4+4 \cdot 3} + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \times \overline{0-1+5-5 \cdot 4+5 \cdot 4 \cdot 3} +$$

$$\frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4 \cdot p-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \times \overline{0+1-6+6 \cdot 5-6 \cdot 5 \cdot 4+6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} + \ldots$$

A continuación, Montmort explica la serie y nos ofrece una distribución del número de coincidencias para el caso de trece cartas de un solo palo:

> *El primer término expresa cuántos azares hay para que cada carta se encuentre en su lugar. La suma de los dos primeros expresa cuántos azares hay para que se encuentren al menos* $p-1$ *en su orden; la suma de las tres primeras expresan cuántos azares hay para que se encuentren al menos* $p-2$ *en su orden.*

Aplicando esta fórmula al caso de trece cartas, encuentro que sobre las 6227020800 $(13! = 6227020800)$ *maneras diferentes en las que trece cosas pueden ser ordenadas,*

hay para que todas se encuentren en sus lugares,		*1*
Para que haya doce,		*0*
Para que haya once,		*78*
Para que haya diez,		*572*
Para que haya nueve,	*precisamente;*	*6435*
Para que haya ocho,		*56628*
Para que haya siete,		*454740*
Para que haya seis,		*3181464*
Para que haya cinco,		*19090071*
Para que haya cuatro,	*precisamente,*	*95449640*
Para que haya tres		*381798846*
Para que haya dos,		*1145396460*
Para que haya uno,		*2290792933*
Para que haya uno al menos		***3936227868***

Con dicha tabla se puede calcular probabilidades del tipo $p_n(i)$ para el caso de $n = 13$. Por ejemplo, $p_{13}(2) = \frac{1145396460}{13!} = 0'1839$, que es la probabilidad de que se produzcan exactamente 2 coincidencias. Y también, $P_{13}(0) = P_{13} = \frac{3936227868}{13!} = 0'63212055...$, o sea, la probabilidad de que se produzca al menos una coincidencia o probabilidad de que gane el banquero con una baraja de 13 cartas y un solo palo.

6.3. LA APORTACIÓN DE NICOLÁS BERNOULLI

El 17 de marzo de 1710, N. Bernoulli envía a Montmort la siguiente demostración de $P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{n!}$, o sea, de la probabilidad de que el banquero gane jugando con una baraja de n cartas de un solo palo. La presentamos con enfoque y notación actual.

En primer lugar establece que $a_n(1) = (n-1)!$. Y de manera sucesiva va construyendo las igualdades:

$a_n(2) = (n-1)! - (n-2)!$,

$a_n(3) = (n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)!$,

$a_n(4) = (n-1)! - 3(n-2)! + 3(n-3)! - (n-4)!$. Y así generaliza:

$a_n(i) = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i-1}{j} (n-1-j)!$.

Como $P_n = \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n} a_n(i)$, podemos escribir

$$P_n = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j}(n-1-j)! = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\,\frac{(n-1-j)!}{n!}\sum_{i=j+1}^{n}\binom{i-1}{j} =$$

$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j+1}\frac{(n-1-j)!}{n!}$ que, si se simplifica, nos lleva a $P_n = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j}{(j+1)!}$ que coincide con la fórmula (2) de Montmort.

Para obtener la fórmula (1) de Montmort, Bernoulli utiliza lo que hoy se conoce como Teorema de la Probabilidad Total, o sea, a partir de probabilidades condicionadas obtiene la probabilidad de conseguir al menos una coincidencia. Si

A representa el suceso “conseguir al menos una coincidencia en *n* extracciones” y *B* que “la carta numerada con el 1 aparezca en primer lugar”, podemos escribir $P(A) = P(A/B) \cdot P(B) + P(A/B^c) \cdot P(B^c)$.

Es obvio que, $P(A) = P_n$, $P(B) = \frac{1}{n}$, $P(B^c) = \frac{n-1}{n}$, $P(A/B) = 1$, y para el cálculo de $P(A/B^c)$, o sea, la probabilidad de conseguir al menos una coincidencia bajo la condición de que ésta no se produce en primer lugar la obtiene Bernoulli con una reflexión del estilo siguiente: las permutaciones que corresponden a este suceso son de la forma $(j, i_1, ..., i_{n-1})$ con $j \neq 1$, con al menos una coincidencia en los últimos $n-1$ lugares.

Pues bien, entre las $(n-1)!$ permutaciones de las *i*-es habrá a_{n-1} permutaciones con al menos una coincidencia en $n-1$ lugares a las que hay que quitar el efecto de hacer la transferencia de *j* al lugar 1 que será el de cambiar permutaciones con una coincidencia en el lugar *j* por permutaciones sin coincidencia, siendo un total de $(n-2)! - a_{n-2}$. Por tanto, el número de permutaciones con al menos una coincidencia nos queda $a_{n-1} - (n-2)! + a_{n-2}$.

Entonces, $P(A/B^c) = \frac{a_{n-1} - (n-2)! + a_{n-2}}{(n-1)!} = \frac{(n-1)P_{n-1} - 1 + P_{n-2}}{n-1}$.

Usando el Teorema de la Probabilidad Total,

$P_n = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \frac{(n-1)P_{n-1} - 1 + P_{n-2}}{n-1} = \frac{(n-1)P_{n-1} + P_{n-2}}{n}$, el resultado (2) recurrente de Montmort.

Todo lo calculado hasta aquí se ha hecho bajo el supuesto de una baraja de un solo palo. Para el caso más general, extraer 13 cartas de una baraja de 4 palos y donde el banquero gana si consigue al menos una coincidencia, cuya probabilidad podemos presentar de la forma $P_{13,4}$ y, en general, $P_{n,s}$ (n extracciones de una baraja de s palos) sólo se presenta la solución y la fórmula que la genera, tras algunas rectificaciones entre ambos autores. En la carta de Bernoulli a Montmort del 26 de febrero de 1711 (págs. 308-314 de la 2ª edición) el remitente da el resultado numérico. Dicho resultado contenía un error que Montmort corrigió en su respuesta del 10 de abril de 1711 (págs. 315-323 de la 2ª edición).

Después, Nicolás Bernoulli en su carta de 10 de noviembre de 1711 (págs. 323-337 de la 2ª edición) escribe la fórmula correcta que permite conseguir el resultado exacto:

$$P_{n,s} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \frac{s^i}{ns(ns-1)\ldots(ns-i+1)},$$

Lo que lleva al caso particular de la baraja de 52 cartas y 4 palos, ($n = 13$ y $s = 4$) al siguiente resultado: $P_{13,4} = 0'6430649493$.

Ninguno de los dos autores facilitan demostración, pero Bernoulli comenta que el método es el mismo que para P_n. Encontramos la primera demostración de la misma en un trabajo de Struyck publicado en 1716 y recogido en las Obras Completas cuya edición es de 1912.

6.4. CONCLUSIONES

El problema de las coincidencias es original de Montmort, siendo planteado por primera vez en la edición de su libro de 1708. Dicho problema ha sido un tópico en la historia del cálculo de probabilidades dado que, muchos autores importantes han entrado en valoraciones y resoluciones olvidando en la mayoría de los casos la fuente original, o sea, olvidando a Montmort. Este autor tenía dos fórmulas para resolver: una de ellas recurrente y la otra mediante una suma finita que se podía generalizar a una serie. Nicolás Bernoulli aporta en la correspondencia posterior a la primera edición demostraciones rigurosas de ambas fórmulas. Ambos autores demuestran un alto conocimiento de la combinatoria y la idea de probabilidad en el sentido en que la entendemos hoy estaba muy cercana a la idea de ellos.

CAPITULO 7

CINQUIÉME PARTIE,

CONTENANT PLUSIEURS LETTRES
écrites à l'occasion de cet Ouvrage.

CORRESPONDENCIA CON LA FAMILIA BERNOULLI

En este capítulo analizamos lo que Montmort llama la quinta parte de su obra, que ocupa las páginas 283-414. Se trata de la correspondencia entre Montmort y Nicolás Bernoulli, junto con una carta de John Bernoulli para Montmort y una respuesta de Montmort. El conjunto de esta parte es nueva en la segunda edición. Desde luego, a lo largo de los capítulos anteriores de este trabajo han ido apareciendo bastante fragmentos de esta correspondencia, en su relación con los problemas analizados. Por tanto, nuestro recorrido ahora va a estar limitado por todo lo ya comentado, intentando evitar caer en la reiteración de contenidos.

John Bernoulli, el amigo de Leibnitz y el maestro de Euler, fue el tercer hermano de una familia en la que James Bernoulli era el mayor. John nació en 1667 y murió en 1748. El segundo hermano de la familia se llamaba Nicolás; su hijo del mismo nombre, el amigo y protagonista principal de esta correspondencia con Montmort, nació en 1687 y murió en 1759.

Montmort envía una copia de la primera edición de su *Essay* a John Bernoulli quien responde con una carta el 17 de marzo de 1710. Bernoulli escribe que el *Essay* contiene muy bellos, interesantes y útiles resultados y continúa con muchas observaciones detalladas sobre los juegos Pharaon, Lansquenet, y Treize; sobre los problemas de Huygens; sobre los coeficientes multinomiales; el problema de los puntos; y la duración del juego. Excepto lo que escribe sobre la solución del problema de los puntos, no hay contribuciones esenciales en la carta; lo que hemos hablado son más bien notas en conexión con los tópicos en cuestión.

Bernoulli concluye alabando la visión profunda de Montmort y la paciencia infatigable desarrollando largos y laboriosos cálculos. Expresa su esperanza de que Montmort continúe su trabajo y produzca un libro más amplio y rico, y señala que hay muchos más problemas por investigar, en particular, en materias moral y política, que su hermano James había comenzado a discutir en un libro que, aparentemente, nunca será publicado.

Debió haber sido muy alentador para Montmort, quien era más bien desconocido, recibir una tal carta de un famoso matemático. En su réplica Montmort agradece a Bernoulli por el honor mostrado leyendo su libro y por sus declaraciones eruditas y juiciosas. Replica a las diversas notas y añade dos nuevos resultados sobre la probabilidad de conseguir una suma dada de puntos lanzando n dados y sobre la duración del juego respectivamente.

John Bernoulli señala un error curioso cometido por Montmort dos veces en su primera edición (aparece en las páginas 288 y 296 de la segunda edición). Montmort había considerado prácticamente imposible encontrar el valor numérico de un cierto número de términos de una progresión geométrica; parecería que se había olvidado o nunca hubiese conocido la fórmula algebraica común que da la suma. Después de señalar el error, John Bernoulli avanza así en su carta:

> ..pero para el resto, hacéis bien de emplear logaritmos, he utilizado con eficacia en ocasiones parecidas hace ya doce años, donde era una cuestión de determinar cuánto resto de vino y de agua, mezclados en un barril, que estaba lleno de vino al principio, y se retiró cada día una cierta medida durante un año, hasta cierto punto, completando el contenido después de cada extracción con agua pura. Usted encontrará la solución de este problema, que es bastante curiosa, en mi disertación *De Nutritione*, que el Sr. Varignon podrá comunicarle. Consideré esta cuestión para entender cómo se puede determinar la cantidad de antiguo material que permanece en nuestro cuerpo mezclado con lo nuevo que viene a nosotros todos los días a través de los alimentos, para reparar la pérdida de nuestros cuerpos que es imperceptible por la sudoración continua.

La disertación *De Nutritione* se encontrará en la edición recopilada de las obras de John Bernoulli (en Vol. I. pág. 275).

John Bernoulli pasa después a una observación sobre la discusión de Montmort del juego de Treize. El comentario enuncia el siguiente teorema. Sea

$$\Phi(n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!},$$

y sea

$$\Psi(n) = \Phi(n) + \frac{1}{1}\Phi(n-1) + \frac{1}{2}\Phi(n-2) + \cdots + \frac{1}{n-1}\Phi(1);$$

entonces tendremos $\Psi(n)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$

Podemos probar esto por inducción. Podemos escribir $\Psi(n)$ de la siguiente forma,

$$
\begin{aligned}
&1+\left\{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right\}\\
&-\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{(n-2)!}\right\}\\
&+\frac{1}{3}\left\{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{(n-3)!}\right\}\\
&\quad-\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Por lo tanto podemos demostrar que

$$\Psi(n+1)=\Psi(n)+\frac{1}{(n-1)!}.$$

John Bernoulli se refiere a continuación a las soluciones que Montmort había dado de los cinco problemas propuestos por Huygens. De acuerdo con su opinión, Montmort no había entendido el segundo y tercer problemas en el sentido que Huygens había previsto; en el quinto problema Montmort había cambiado el enunciado en otro muy diferente, y sin embargo, realmente se había resuelto el problema de acuerdo con el enunciado de Huygens. Por las correcciones que hizo en su segunda edición, Montmort mostró que él admitió la justicia de las objeciones. A continuación, Bernoulli presenta la solución del problema de los puntos, y le da una fórmula general.

John Bernoulli presta su copia del *Essay* a su sobrino Nicholás, quien escribe algunas notas importantes que enviará a Montmort junto con la carta de John. Siguió una correspondencia de la que el *Essay* contiene siete cartas de Nicholas y seis de Montmort. En una de las cartas, Montmort (1713, p.322) pide permiso a los Bernoulli para incluir sus cartas en la nueva edición del *Essay* que está planeando.

La correspondencia entre Montmort y Nicolás Bernoulli es un modelo de correspondencia científica amistosa, mostrando la creatividad e ingenio de cada uno y como ellos se inspiran el uno al otro para formular y resolver problemas aún más difíciles y así desarrollar la teoría de la probabilidad desde un nivel elemental a la par que crecen otras ramas de las matemáticas.

La primera carta a Montmort de Nicolás Bernoulli ocupa las páginas 299-303. Esta carta contiene correcciones de dos errores que se produjeron en la primera edición de Montmort. Da sin demostración una fórmula para la ventaja del banquero en el Pharaon, y también una fórmula para la ventaja del banquero en la Bassette; Montmort citó a la primera en el texto de su segunda edición. Nicolás Bernoulli ofrece un buen estudio de las fórmulas que se dan en el análisis del juego de Treize. También se analiza brevemente un juego de azar que ahora explicaremos.

Supongamos que un conjunto de jugadores *A, B, C, D,...* se comprometen a jugar una serie de l juegos con cartas. *A* es el primer repartidor, hay m posibilidades de un total $m+n$, de que conserve el reparto en el próximo juego, y n posibilidades de $m+n$, de que lo pierda; si pierde el reparto el jugador en su mano derecha lo toma; y así sucesivamente en orden. *B* está a la izquierda de *A*, *C* está a la izquierda de *B*, y así sucesivamente. Sean las ventajas de las jugadores cuando *A* reparte *a, b, c, d,...*, respectivamente; estas ventajas se supone que dependen totalmente de la situación de los jugadores, el juego es uno de los conocidos como de “pura oportunidad”.

Denotemos las probabilidades de *A, B, C, D,...* por *z, y, x, u, ...*; y sea $s=m+n$. Entonces Nicolás Bernoulli da los siguientes valores

$$
\begin{aligned}
z &= a+\frac{ma+nb}{s}+\frac{m^2a+2mnb+n^2c}{s^2}+\frac{m^3a+3m^2nb+3mn^2c+n^3d}{s^3}+\cdots,\\
y &= b+\frac{mb+nc}{s}+\frac{m^2b+2mnc+n^2d}{s^2}+\frac{m^3b+3m^2nc+3mn^2d+n^2e}{s^3}+\cdots,\\
x &= c+\frac{mc+nd}{s}+\frac{m^2c+2mnd+n^2e}{s^2}+\frac{m^3c+3m^2nd+3mn^2e+n^2f}{s^3}+\cdots,\\
u &= d+\frac{md+ne}{s}+\frac{m^2d+2mne+n^2f}{s^2}+\frac{m^3d+3m^2ne+3mn^2f+n^2g}{s^3}+\cdots,
\end{aligned}
$$

y así.

Cada una de estas series se continúa para *l* términos. Si no hay tantos como *l* jugadores, las letras en el conjunto *a, b, c, d, e, f, g, ...* se repetirán. Por ejemplo, si sólo hay cuatro jugadores, entonces *e* = *a*, *f* = *b*, *g* = *c*, ...

Es fácil ver el significado de los términos independientes. Tomemos, por ejemplo, el valor de *z*. Reparte *A*; la ventaja que se deriva directamente de esto es *a*. Luego están *m* jugadas de *s* en las que *A* tendrá la segunda, y *n* posibilidades entre *s* que el reparto pasará al siguiente jugador, y así colocar *A* en la posición inicialmente en poder de *B*. Entonces hay *m* posibilidades entre *s* que *A* tendrá el segundo reparto, y *n* posibilidades entre *s* que el reparto pasará al siguiente jugador, y así coloca a *A* en la posición mantenida inicialmente por *B*. Por tanto tenemos el término $\frac{ma+nb}{s}$. Una vez más, para el tercer reparto; hay $(m+n)^2$, es decir, s^2 posibles casos; fuera de estos hay m^2 casos en los que A tendrá el tercer reparto, $2mn$ de casos en el que el jugador a la derecha de A lo tendrá, y n^2 casos en los que el jugador siguiente a la derecha lo tendrá. Por tanto tenemos el término $\frac{m^2a+2mnb+n^2c}{s^2}$. Y así.

La siguiente carta es de Montmort a John Bernoulli; ocupa las páginas 303-307. Montmort hace breves observaciones sobre los puntos a los que John Bernoulli había prestado su atención; sugiere un problema de la Duración del Juego para la consideración de Nicolás Bernoulli.

La siguiente carta es de Nicolás Bernoulli a Montmort; ocupa las páginas 308-314. Nicolás Bernoulli habla en primer lugar del juego del *Treize*, y da una fórmula general para el mismo; pero por un fallo en la escritura dio la fórmula incorrectamente, y después la corrigió cuando Montmort le llamó la atención sobre ella; se lee en las páginas de Montmort, 315-323.

Analizamos la fórmula a la manera propuesta por Nicholas Bernoulli para el caso sencillo. Supongamos que hay *n* cartas divididas en *p* grupos. Denotemos las cartas de un conjunto por *a, b, c,…* en orden.

El número total de casos es $n!$.

El número de maneras en las que a puede estar la primera es $p(n-1)!$.

El número de maneras en que *b* puede estar segunda sin que *a* permanezca primera es $p\cdot(n-1)! - p^2\cdot(n-2)!$

El número de maneras en que *c* puede ser tercera sin que a sea primera o que *b* sea segunda es $p\cdot(n-1)! - 2p^2\cdot(n-2)! + p^3\cdot(n-3)!$ Y así.

De ahí la probabilidad de ganar en la primera carta es $\frac{p}{n}$; la probabilidad de ganar en la segunda carta es $\frac{p}{n}-\frac{p^2}{n(n-1)}$; la probabilidad de ganar en la tercera carta es $\frac{p}{n}-\frac{2p^2}{n(n-1)}+\frac{p^3}{n(n-1)(n-2)}$; y así.

De ahí la probabilidad de ganar por una u otra de las primeras *m* cartas es

$$\frac{mp}{n}-\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{p^2}{n(n-1)}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{p^3}{n(n-1)(n-2)}-\cdots$$

Y la probabilidad total de ganar se encuentra poniendo $m=\frac{n}{p}$, de manera que resulta

$$1-\frac{n-p}{1.2(n-1)}+\frac{(n-p)(n-2p)}{1.2.3(n-1)(n-2)}-\frac{(n-p)(n-2p)(n-3p)}{1.2.3.4(n-1)(n-2)(n-3)}+\cdots$$

Nicolás Bernoulli entonces considera el problema de la Duración del Juego que había sido sugerido para él por Montmort. Nicholas Bernoulli aquí da sus fórmulas; pero el significado de las mismas resultaba oscuro, como Montmort declaró en su respuesta. Nicolás Bernoulli da el resultado que expresa las posibilidades de cada jugador cuando el número de juegos es ilimitado; él dice que esto puede deducirse de la fórmula general, que también obtuvo previamente por otro método. Luego hace algunas observaciones sobre la suma de la serie. Él ejemplifica el método que ahora es común en las obras elementales de Álgebra. Supongamos que requerimos la suma de los cuadrados de los primeros *n* números triangulares, es decir, la suma de *n* términos de la serie de la que el r-ésimo es $\left\{\frac{r(r+1)}{1.2}\right\}^2$.

Supone que la suma es igual a

$$an^5+bn^4+cn^3+dn^2+en+f;$$

y entonces determina a,b,c,d,e,f cambiando *n* por *n+1* en la identidad asumida, restando e igualando coeficientes. Este método es atribuido por Nicolás Bernoulli a su tío John. Nicolás Bernoulli también indica otro método; resuelve $\left\{\frac{r(r+1)}{1.2}\right\}^2$ en

$$6\frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3.4}-6\frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3}+6\frac{r(r+1)}{1.2};$$

y así encuentra que la suma requerida es

$$6\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}-6\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}+6\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2}.$$

Parece probable que una carta de Montmort a Nicolás Bernoulli, que no se ha conservado, precedió esta carta de Nicolás. Éste se refiere al problema sobre una lotería, como si Montmort hubiese llamado la atención sobre ello; y él insinúa que Montmort se había ofrecido para llevar a cabo la impresión del *Ars Conjectandi* no publicado de James Bernoulli. Ninguno de estos puntos habían sido mencionados en las cartas anteriores de Montmort que fueron publicadas en el *Essay*.

La siguiente carta es de Montmort a Nicolás Bernoulli y ocupa las páginas 315-323. La cuestión más interesante en esta carta es la introducción por primera vez de un problema que ya se ha comentado antes. Es el problema del Her, del que hay referencias varias veces en la correspondencia entre ambos (páginas 328, 345, 350, 366, 375, 380, 400).

Montmort se refiere en la página 320 a un libro titulado *Traité du Jeu,* que según él había recibido últimamente de París. Dice que es *un Livre de morale*. Elogia al autor, pero considera que él se equivoca a veces en su cálculo de probabilidades, y da un ejemplo. Nicolás Bernoulli en respuesta dice que el autor del libro es el Sr. Barbeyrac. El propio Bernoulli está de acuerdo con Montmort en su opinión general con respecto al libro, pero en el ejemplo en cuestión piensa que Barbeyrac tiene razón y Montmort se equivoca. La diferencia en el resultado proviene de una diferencia en la manera de entender las reglas del juego. Respondió Montmort brevemente; aparece en las páginas 332 y 346.

La siguiente carta es de Nicolás Bernoulli a Montmort. Está en las páginas 323-337 del *Essay*. Principalmente trata asuntos que hemos analizado ya suficientemente, a saber, los juegos de Treize, Her, y Tas, y el problema de Waldegrave. Al final de su carta da un ejemplo de suma de una serie. Propone sumar los p términos de la serie 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Él considera la serie

$$1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+\cdots$$

Que descompone en un conjunto de series, de esta forma:

$$\begin{array}{r} 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots \\ +\quad x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots \\ +\quad x^2+2x^3+3x^4+\cdots \\ +\quad x^3+2x^4+\cdots \\ +\cdots \end{array}$$

La serie en cada fila horizontal es fácil ser sumada en los p primeros términos; la expresión obtenida toma la forma $\frac{0}{0}$ cuando $x=1$, y Nicolás Bernoulli evalúa la forma indeterminada, como él dice, ... sirviéndome de la "regla del difunto Señor Marqués I'Hôpital para entrar en su análisis de lo infinitamente pequeño, ..."

La siguiente carta es de Montmort a Nicolás Bernoulli. Ocupa las páginas 337-347. Además de los comentarios sobre el juego Her y sobre el Problema de Waldegrave, contiene algunos intentos de los problemas que Nicolás Bernoulli había propuesto en la carta su tío sobre el juego del *Tas*. Pero Montmort encontró los problemas difíciles de entender, e hizo varias preguntas en cuanto a su significado. Montmort da en su página 342 la siguiente ecuación como el resultado de uno de los problemas, $4m^3-8m^2+14m+6=3^{m+1}$, y dice que esto se satisface aproximadamente para $m = 5\frac{57}{320}$; pero hay algún término en la ecuación que hace que no tenga raíz entre 5 y 6. La ecuación correcta debe ser aparentemente $8m^3 - 12m^2 + 16m + 6 = 3^{m+1}$, que tiene una raíz entre 5'1 y 5'2.

Uno de los problemas propuesto en esta carta es el siguiente. La habilidad de *A*, que es su oportunidad de éxito en un único ensayo, es *p*, la habilidad del *B* es *q*. *A* y *B* deben jugar por la victoria en dos partidas de cada tres, siendo cada juego de dos puntos. En el primer juego *B* debe conseguir un punto que se le da, en el segundo los jugadores deben estar en igualdad, y en el tercero también *B* debe conseguir un punto que se le da. Se requiere de la habilidad de cada jugador de manera que en general las posibilidades puedan ser iguales. La probabilidad de éxito de *A* en el primer juego o en el tercer juego es p^2, y la de B es $q^2 + 2qp$. La probabilidad de éxito de *A* en el segundo juego es $p^3 + 3p^2q$ y la probabilidad de *B* es $q^3 + 3q^2p$. Por lo que la probabilidad de éxito para *A* en dos juegos de tres es

$$p^2\left(p^3 + 3p^2q\right) + p^2\left(q^2 + 2pq\right)\left(p^3 + 3p^2q\right) + p^4\left(q^3 + 3q^2p\right)$$

y esto por supuesto debe ser igual a $\frac{1}{2}$.

Esto está de acuerdo con el resultado de Montmort sustituyendo $\frac{a}{a+b}$ por p y $\frac{b}{a+b}$ por *q*, lo que permitió un error que fue posteriormente corregido; se puede ver en las páginas de Montmort 343, 350, 352.

La carta concluye con este interesante fragmento:

No sé si conoce que se ha reimpreso la Recherche de la verité. El R, P. Malbranche me dijo que este trabajo podría aparecer a principios de abril. Habrá un gran número de añadidos en temas muy importantes. Usted allí verá entre otras cosas novedosas una Disertación sobre la causa de la gravedad, que aparentemente fijará las dudas de tantos hombres Sabios que no saben a qué atenerse sobre esta materia. Él prueba de una manera invencible la necesidad de sus pequeños remolinos para justificar la causa de la gravedad, de la dureza y la fluidez de los cuerpos y de los principales fenómenos concernientes a la luz y a los colores. Su teoría concuerda lo mejor del mundo con las bellas experiencias que el Sr. Newton describió en el bello *Traité De Natura Lucis et Colorum*. Puedo vanagloriarme ante el Público que mis reiteradas y ardientes oraciones desde hace varios años, contribuyen a determinar lo que este Filósofo incomparable tuvo a escribir sobre esta materia que cierra toda la Física general. Veréis con admiración que este gran hombre llevó a esta materia oscura esta nitidez de ideas, esa sutileza de genio y de invención que brilla con tanto resplandor en sus Tratados de Metafísica.

La siguiente carta es de Montmort a Nicolás Bernoulli, ocupando las páginas 352-360. Podemos ver que Montmort aquí se afirma como la primera persona que llamó la atención sobre el teorema que ahora se da en los tratados elementales de Álgebra bajo el siguiente enunciado: Para encontrar el número de términos en desarrollo de cualquier multinomial, siendo el exponente un entero positivo. Montmort da en esta carta algunos ejemplos de estudios de curvas funcionales; los encontramos en las páginas 356, 357, 359, 360. En particular, se da cuenta de una que él mismo había discutido en los primeros días del Cálculo Integral, cuando, como él dice, “el asunto era conocido solamente por cinco o seis matemáticos”. Este ejemplo está relacionado con la curva llamada por el nombre de su inventor De Beaune; aparece en las obras de John Bernoulli, Vol. I. páginas 62, 63. Lo que Montmort da en esta carta no es inteligible por sí mismo, pero puede entenderse con la ayuda de la memoria original, que está en el *Journal des Sçavans*, Vol. XXXI.

La siguiente carta es también de Montmort a Nicolás Bernoulli; que ocupa las páginas 361-370. Montmort dice que acaba de recibir el libro de De Moivre, lo cual quiere decir el libro de memorias *De Mensura Sortis*, publicado por De Moivre en las *Philosophical Transactions*; y procede a analizar estas memorias. Montmort ciertamente no le hace justicia a De Moivre. De hecho, considera que la primera edición de su obra contenía implícitamente todo lo que se había dado en *De Mensura Sortis*; y cree casi imaginar que la circunstancia de que un problema se había discutido en la correspondencia entre él y los Bernoulli era motivo suficiente para privar a De Moivre del crédito de originalidad. La opinión de Nicolás Bernoulli era mucho más favorable a De Moivre; se ve en las páginas de Montmort 362, 375, 378, 386. De Moivre en su *Miscellanea Analytica* respondió a Montmort.

En su página 365 Montmort da algunas observaciones sobre el segundo de los cinco problemas que Huygens había propuesto para su resolución. Supongamos que hay tres jugadores; sea a el número de bolas blancas, y b el de bolas negras; Sea $c = a + b$, se supone que las bolas no son reemplazadas después de ser extraídas; entonces la probabilidad del primer jugador es

$$\frac{a}{b} + \frac{b(b-1)(b-2)a}{c(c-1)(c-2)(c-3)} + \frac{b(b-1)(b-2)\cdots(b-5)a}{c(c-1)\cdots(c-6)} + \cdots$$

Montmort se atribuye a sí mismo el mérito de la suma de esta serie, con el fin de encontrar su valor cuando a y b son números elevados; pero, sin decirlo, él asume que $a = 4$. Así, la serie se convierte en

$$\frac{4\cdot b!}{c!}\left\{\frac{(c-1)!}{b!}+\frac{(c-4)!}{(b-3)!}+\frac{(c-7)!}{(b-6)!}+\cdots\right\}.$$

Sea $p=b+3$, entonces $c=p+1$; así la serie entre llaves se convierte en

$$p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)$$
$$+(p-6)(p-7)(p-8)+\cdots$$

Supongamos que se quiere la suma de *n* términos de la serie. El término *r*-ésimo es

$$(p-3r+3)(p-3r+2)(p-3r+1);$$

se asume que esto es igual a

$$A+B(r-1)+\frac{C(r-1)(r-2)}{1.2}+\frac{D(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3},$$

donde A,B,C,D son independientes de *r*.

Nos encontramos que

$$A=p(p-1)(p-2),$$
$$B=-\left(9p^2-45p+60\right),$$
$$C=54p-216,$$
$$D=-162.$$

Por lo tanto la suma requerida de n términos es

$$np(p-1)(p-2)-\frac{n(n-1)}{1.2}\left(9p^2-45p+60\right)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}54p-216-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}162.$$

Este resultado correcto está lo suficientemente cerca del que Montmort presentó como para pensarse que él debió haber adoptado casi el mismo método; cometió algún error, porque da una expresión diferente para los términos independientes de *p*.

La siguiente carta es de Nicolás Bernoulli a Montmort, ocupando las páginas 371-375. Nicolás Bernoulli demuestra una propiedad de la curva de De Beaune; también da una rectificación geométrica de la curva logarítmica. Luego comenta sobre un tema que según él había llegado a su conocimiento en Holanda, y sobre el que se había insertado en una memoria en las *Philosophical Transactions*. El tema es el argumento a favor de la Divina Providencia tomado de la regularidad constante observada en los nacimientos de ambos sexos. El libro de memorias al que se refiere Bernoulli es del Dr. John Arbuthnot; está en el Vol. XXVII. de *Philosophical Transactions*, y fue publicado en 1710. Parece ser que Nicolás Bernoulli había discutido el asunto en Holanda con Gravesande.

Nicolás Bernoulli dice que se vio obligado a refutar el argumento. Lo que supuso refutable es lo que sigue; él examinó los registros de nacimientos en Londres para los años desde 1629 hasta 1710 inclusive; encontró que en promedio nacieron 18 hombres por cada 17 mujeres. Las mayores variaciones de esta relación fueron en 1661, cuando nacieron 4748 hombres y 4100 mujeres, y en 1703, cuando nacieron 7765 hombres y 7683 mujeres. Dice entonces que podemos apostar 300 a 1 que de 14.000 bebés la relación de los hombres a las mujeres caerán dentro de estos límites.

La siguiente carta es también de Nicolás Bernoulli a Montmort; y ocupa las páginas 375-387. Contiene algunas observaciones sobre el juego *Her*, y algunos comentario en respuesta a los realizados por Montmort sobre la memoria de De Moivre, *De Mensura Sortis*. La parte más importante de la carta es una elaborada discusión del problema de Waldegrave; ya hemos comentado sobre este problema, y por lo tanto sólo necesitamos añadir que Nicolás Bernoulli habla de esta discusión como la que él prefería a todo lo demás que había elaborado sobre el tema. La aprobación que así otorga a su obra parece bien merecida.

La siguiente carta es también de Nicolás Bernoulli a Montmort, y ocupa las páginas 388-393. Está completamente dedicada a la cuestión de la relación entre los niños varones de mujeres lactantes. Ya hemos señalado que Nicolás Bernoulli se negó a ver cualquier argumento a favor de la Divina Providencia en el hecho de la relación casi constante. *El asume que la probabilidad del nacimiento de un varón es a la probabilidad del nacimiento de una hembra como 18 a 17*; luego apuesta que de 14.000 bebés los varones se encontrarán entre 7037 y 7363. Su investigación implica una demostración general del teorema de su tío James llamado Teorema de Bernoulli. La investigación requiere la suma de términos de una serie binomial; esto se efectúa aproximadamente en un proceso que se inició con estas palabras: *Ahora, ya que estos términos son furiosamente grandes, se necesita un artificio singular para encontrar este informe: Así es como hice yo*.

Toda la investigación tiene cierta semejanza con la de James Bernoulli y puede haber sido sugerido por ella, pues Nicolás Bernoulli dice al final de la misma, *Me acuerdo que mi difunto Tío demostró una cosa semejante en su Traite De Arte Conjectandi, que se imprime ahora en Basilea...*

La siguiente carta es de Montmort a Nicolás Bernoulli; ocupa las páginas 395-400. Montmort informa sobre la muerte de la duquesa d'Angoulême, lo que le causó tanto dolor y angustia; él dice que no puede discutir asuntos geométricos, sino que se limitará a la inteligencia literaria. Menciona una obra titulada *Prémotión Physique, ou Actión de Dieu sur les Creaturas démontrée par raisonnement*. El anónimo autor pretendió seguir el método de los matemáticos, y en todas las páginas se encontrarán palabras tan grandes como definición, axioma, teorema, corolario, & c.

Montmort pide la opinión de Nicolás Bernoulli y de su tío respecto al famoso *Commercium Epistolicum* diciendo que los Señores de la Societé Royale van a imprimir para asegurarle a Sr. Newton la gloria de haber inventado como primero y único los nuevos métodos.

Montmort expresa su fuerte admiración de dos investigaciones que había recibido de Nicolás Bernoulli; una de ellas fue la solución del problema de Waldegrave, y el otro al parecer la demostración del teorema de Bernoulli James. Montmort dice (página 400),

> Todo esto fue en verdad muy difícil y un gran trabajo. Usted es un gran hombre; yo creía que el haber tomado la iniciativa en la parte anterior me pondría pronto al día, pero veo que me equivoco: estoy bastante detrás de usted; y me fuerza a poner toda mi ambición en seguirle de lejos.

Esta carta de Montmort es interesante, ya que registra la perplejidad en la que el escritor se encontró entre las pretensiones de los sistemas rivales de la filosofía natural, el Cartesiano y la Newtoniana. Dice en la página 397,

> Perturbado como estoy por la autoridad del Sr. Newton, y un gran número de obras de Geómetras Ingleses, estoy casi tentado de abandonar para siempre el estudio de la Física, y volver a tenerlo todo en el Cielo; pero no, la autoridad de los mayores espíritus no deben hacernos rehusar de cosas donde la razón tiene que decidir.

Montmort da en esta carta su punto de vista respecto a la Historia de las Matemáticas; dice, página 399,

> Sería de esperar que alguien desee tomar la molestia de enseñarnos cómo y en qué orden los descubrimientos en Matemáticas han conseguido unos a los otros, y que tenemos una obligación. Hicimos la Historia de la Pintura, de la Música, de la Medicina, & otras. Una buena Historia de Matemáticas, y en particular de la Geometría, sería una Obra mucho más curiosa y más útil: Qué placer hacer no tendríamos de ver el enlace, los métodos de conexión, la secuencia de las diferentes teorías, a partir de los tiempos más remotos hasta nosotros, o de que en la ciencia se alcance con un alto grado de perfección. Me parece que ese trabajo bien hecho podría de alguna manera considerarse como la historia del espíritu humano; ya que es en esta ciencia, más que nada, donde el hombre dio a conocer, con la excelencia de este don, la comprensión de que Dios lo hizo elevarse por encima de las demás Criaturas.

Montmort mismo había hecho algunos progresos en la obra que él recomienda aquí. Sin embargo, parece que sus manuscritos fueron destruidos o totalmente dispersos.

La siguiente carta es de Nicolás Bernoulli de Montmort; ocupa las páginas 401 y 402. Nicolás Bernoulli anuncia que el *Ars Conjectandi* acaba de ser publicado, y dice: habrá apenas nada nuevo para usted. Propone cinco problemas de Montmort a cambio de los que Montmort le había propuesto. Él dice que él ya había propuesto el primer problema en su última carta; pero como el mismo no aparece antes en la correspondencia, una carta debe haber sido suprimida, o una parte de ella omitida.

El tercer problema es el siguiente. *A* y *B* juegan con un dado común, *A* deposita una corona, y *B* comienza a jugar; si *B* lanza un número par se lleva la corona, si lanza un número impar deposita una corona. Entonces *A* lanza y se lleva una corona si lanza un número par, pero no deposita una corona si lanza un número impar. Entonces *B* lanza de nuevo, y así sucesivamente. Así, cada uno lleva una corona si lanza un número par, pero *B* deposita sólo una corona si lanza un número impar. El juego es seguir siempre que haya alguna suma depositada. Determinar la ventaja de *A* o *B*.

El cuarto problema es el siguiente. *A* promete dar a *B* una corona si *B* con un dado común lanza seis en la primera tirada, dos coronas si *B* lanza seis en la segunda tirada, tres coronas si *B* lanza seis en la tercera tirada; etcétera.

El quinto problema generaliza el cuarto, *A* promete dar coronas a *B* en la progresión 1, 2, 4, 8, 16, ... ó 1, 3, 9, 27, ... ó 1, 4, 9, 16, 25, ... ó 1, 8, 27, 64, ... en lugar de en la progresión 1, 2, 3, 4, 5, como en el cuarto problema.

La siguiente carta es la última; es de Montmort para Nicolás Bernoulli, y ocupa las páginas 403-412. Dedica gran parte de ella al juego del Her. Con respecto a los cinco problemas propuestos a él, Montmort dice que él no ha resuelto ni el primero ni el segundo, que el cuarto y quinto no presentan ninguna dificultad, pero que el tercero es mucho más difícil. Él dice que le llevó mucho tiempo para convencerse de que no habría ni ventaja ni desventaja para B, pero que él había llegado a esta conclusión, y así también lo hizo Waldegrave, que había trabajado con él en el problema. Parece sin embargo, que este resultado es obvio, para B que tiene en cada tirada la misma probabilidad de ganar o perder una corona.

Montmort propone por último, en su página 408, un problema para Nicolás Bernoulli, pero el juego al que se refiere no se describe.

CAPITULO 8

CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Con un conocimiento profundo del cálculo combinatorio, usando como "calculadora" el Triángulo Aritmético, ya conocido por los matemáticos del siglo anterior, y con conocimientos incipientes sobre suma de series y el nuevo cálculo diferencial, Montmort se enfrenta con tesón y valentía a un conjunto tan enorme de problemas reales asociados a los juego de azar, que en la época se practicaban, que no deja de sorprendernos. Todos los resuelve o intenta resolver con más o menos éxito y, en muchos de ellos, el esfuerzo de cálculo es tan elevado que cualquiera se sentiría empujado por la pereza para dejar sin concluir la solución definitiva.

Pensamos que el trabajo de Montmort en su conjunto debe ser considerado altamente meritorio por su agudeza, perseverancia y energía. Es digno de elogio el coraje que le llevó a trabajar en un campo hasta ahora tan poco cultivado, y su ejemplo sirvió para estimular a su más distinguido sucesor. De Moivre fue sin duda muy superior en capacidad matemática a Montmort, y disfrutó de la gran ventaja de una larga vida, que se extiende a más del doble de la duración que la de su predecesor; por el contrario, las circunstancias afortunadas de la posición de Montmort le dieron ese abundante tiempo libre, que a De Moivre en el exilio y la pobreza le debe haber resultado imposible asegurar.

Gracias a Montmort aparecen nuevos problemas que, pronto, se convertirán en tópicos de la historia del cálculo de probabilidades, como el Her (como problema de estrategia) o el Rencontré (como problema de puro azar con una resolución de finura exquisita) y otros que ya habían sido planteados por los antecesores reciben nuevas soluciones, más atrevidas y con generalizaciones.

Añadimos además, que la correspondencia con los Bernoulli, incluida como quinta parte de la segunda edición, se nos muestra como un magnífico ejemplo de colaboración científica entre investigadores situados a distancia, superando las dificultades de comunicación de la época. La forma elegante de discutir sobre soluciones no coincidentes, la persuasión con demostraciones para convencer al interlocutor, los retos que mutuamente se planteaban... , todo ello es digno de ser leído y estudiado.

Queremos añadir, por último, que esta tesis, también, es el resultado de un largo trabajo de investigación desarrollado durante los últimos años, sobre la aportación de este autor al cálculo de probabilidades. Dicho trabajo se ha reflejado en la publicación de tres capítulos de libros en tres tomos distintos de la serie que cada dos años publica AHEPE (Asociación de Historia de la Estadística y la Probabilidad de España), y un cuarto capítulo está pendiente de publicación en el siguiente tomo que aparecerá a principios de 2016.

Como futuras líneas de investigación nos planteamos varios retos. A saber:

1. Terminar la resolución de algunos juegos que el propio Montmort plantea pero no resuelve.
2. Analizar la trayectoria seguida a lo largo de la historia por algunos de los problemas propuestos por primera vez en los textos de Montmort.
3. Estudiar la conexión con De Moivre. Ya se ha dicho. De Moivre era más brillante y tuvo la suerte de vivir más. El nombre de De Moivre sí está

escrito con letras de oro en la historia del cálculo de probabilidades. Pues bien, nos interesa saber qué grado de aprendizaje mutuo existen entre ambos autores, cuya relación, como se ha dicho a lo largo de estas páginas, comenzó con un desencuentro, aunque el tiempo fue normalizando la comunicación.

BIBLIOGRAFIA

Arbuthnott, J. (1712). An argument for Divine Providence, taken from the constant regularity observ'd in the births of both sexes. *Phil. Trans*, 27,186-190. Reimpreso en Rendall and Plackett (1977).

Basulto Santos, J., Camúñez Ruiz, J. A. (2002) *La geometría del azar La correspondencia entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal.* Nivola, Madrid.

Basulto Santos, J., Camúñez Ruiz, J. A., Domínguez Quintero, A. M. (2002) El Método Universal de Pascal como un Equivalente Cierto: el Problema de los Puntos. *Historia de la Probabilidad y de la Estadística*, Editorial AC, Madrid, 19-34.

Basulto Santos, J., Camúñez Ruiz, J. A., Ortega Irizo, F. J., Pérez Hidalgo, M. D. (2003) La correspondencia entre los hermanos Huygens en 1669: vida media frente a vida mediana. *Historia de la Probabilidad y de la Estadística (II)*, Delta Publicaciones, Madrid, 3, 57-69.

Basulto Santos, J., Camúñez Ruiz, J. A., Ortega Irizo, F. J., Pérez Hidalgo, M. D. (2006) El problema de los puntos para jugadores con desigual destreza: La solución de Montmort (1713). *Historia de la Probabilidad y de la Estadística (III)*, Delta Publicaciones, Madrid, 2, 13-22.

Basulto Santos, J., Pérez Hidalgo, M. D. (2009) La resolución de Montmort (1708, 1713) de los cinco problemas propuestos por Huygens en su tratado (1657). *Historia de la Probabilidad y de la Estadística (IV)*, Publicaciones Universidad de Huelva, Huelva, 26, 407-420.

Basulto Santos, J., Camúñez Ruiz, J. A., Pérez Hidalgo, M. D. (2014) *Le Jeu du Treize:* Las soluciones tempranas de Montmort y Nicolás Bernoulli al problema de las coincidencias. *Historia de la Probabilidad y de la Estadística (VII)*, Delta Publicaciones, Madrid, 12, 173-186.

Bellhouse, D. R., Franklin, J. (1997) The Language of Chance. *International Statistical Review*, 65, 73-85.

Bellhouse, D. R. (1998) Probability in the sixteenth and seventeenth centuries: An analysis of Puritan Casuistry. *International Statistical Review*, 56, 63-74.

Bernoulli, J. (1713) *Ars Conjectandi.* Thurnisius, Basilea. Reimpreso por Editions Culture et Civilisation, Bruxeles, 1968, Vol. 3.

Bellhouse, D. R. (2000) De Vetula: a Medieval Manuscript Containing Probability Calculations. *International Statistical Review*, 68, 2, 123-126.

Bernstein, P.L. (1996) *Against the Gods. The Remarkable Story of Risk.* John Wiley & Sons, New York.

Biggs, N. L. (1979) The roots of combinatorics. *History of Mathematics*, 6, 109-136.

Bonner, A (1985) *Selected Works of Ramon Llull (1232-1316)* Princenton University Press. Princenton, New Jersey.

Boyer, C. B. (1994) *Historia de la Matemática.* Alianza Universidad Textos. Madrid.

Burton, D. M. (1999) *The History of Mathematics: An Introduction. Fourth Edition*. McGraw-Hill, New York.

Bussey, W. H. (1917) The Origin of Mathematical Induction.*American Mathematical Monthly*, Vol. 24, Iss. 5, 199-207.

Cajori, F. (1918) Origin of the Name "Mathematical Induction". *American Mathematical Monthly*, Vol. 25, Iss. 5, 197-201.

Camúñez Ruiz, J. A., Basulto Santos, J., García del Hoyo, J. J. (2007) *Juan Caramuel. Su aportación al cálculo de probabilidades.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva, Huelva.

Camúñez Ruiz, J. A., Basulto Santos, J. (2011) *Christiaan Huygens (1629-1695: La consolidación del Cálculo de Probabilidades.* Septem Ediciones, Oviedo.

Caramuel, J. (1670) *Kybeia, quae Combinatoriae Genus est, de Alea et Ludis Fortunae serio Disputans* en *Methesis bíceps (vetus et nova).* Campania.

Caramuel, J. (1670) *Meditatio Prooemialis*. Fragmento de Mathesis Bíceps. Estudio preliminar y traducción de Velarde Lombraña, J. (1989). Editorial Altafulla, Barcelona.

Catalan, E. (1837) Solution d'un problème de probabilité, relatif au jeu de rencontré. *J. Math. Pure et Appl*, 2, 469-482.

Coumet, E. (1970) La thèorie du hasard es-elle neè par hasard? *Annales: Economies, Societes, Civilisation. Vol 25*, 574-598.

Daston, L. (1980) Probabilistic Expectation and Rationality in Classical Probability Theory. *Historian Mathematica*, 7, 234-260.

Daston, L. (1988) Classical Probability in the Enlightenment. Princenton University Press, Princenton.

David, F. N. (1962) Games, Gods and Gambling. *Charles Griffin & Co. Ltd., London.*

David, H. A.; Edwards, A. W. F. (2001) The Introduction of the Concept of Expectation. Comments on Pascal (1654). *Annotated Readings in the History of statistics.* Springer-Verlag, New York.

Degroot, M.H. (1970) *Optimal Statistical Decisions.* McGraw-Hill, New York.

Dresher, M. (1961) Games of strategy. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.*

Edwards, A.W.F. (1987) *Pascal's arithmetical triangle*. Griffin, London.

Euler, L. (1753) Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontré. *Mèm. Acad. Sci. Berlin*, 7, 255-270. Reimpreso en *Opera Omnia,* Vol 7, 11-25.

Fienberg, S.E. (1992) A Brief History of Statistics in three and One-Half Chapters: A Review Essay. *Statistical Sciencie,* Vol. 7, No. 2, 208-225.

Fisher, R. A. (1934) Randomisation and an old enigma of card play. The Mathematical Gazette, 18, 294-297.

Fontenelle, B. de (1721) Éloge de M. De Montmort. *Hist. Acad. Roy. Sci.*, 1719, 83-93.

Franklin, J. (2001) *The Science of Conjecture. Evidence and Probability before Pascal.* The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

Freudenthal, H. (1980) Huygens' Foundations of Probability.*Historian Mathemática*, 7, 113-117.

González Urbaneja, P.M. (1992) *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII.* Alianza Universidad, Madrid.

Hacking, I (1975) *The emergence of probability.* Cambridge University Press.

Hald, A. (1984) Commentary on "De Mensura Sortis". *Intern. Statist. Rev.*, 1984, 52, 229-236.

Hald, A. (1990) *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.* John Wiley & Sons. New York.

Hall, A. R. (1983) *The revolution in science* 1500-1750. Longman. London.

Herstein, I.N; Milnor, J. (1953) An axiomatic approach to measurable utility. *Econometrica. Vol 21*, 291-297.

Hits, V.L. (1978) *Aliis exterendum*, or, the Origins of the Statistical Society of London. *Isis*, 69, Nº 246, 21-43.

Holgate, P. (1984) The Influence of Huygens' Work in Dynamics on his Contribution to Probability. *International Statistical Review*, 52, 2, 137-140.

Huygens, C. *Oeuvres Complètes*. 22 volúmenes. Société Hollandaise des Sciences. Nijhoff, La Haye. 1888-1950. Los volúmenes usados aquí son: Vol. I, II, IV, V, VI, XVI y XXII.

Isaac, R. (1995) *The Pleasures of Probability.* Springer-Verlag, New York.

Kantola, I. (1994) *Probability and Moral Uncertainty in Late Medieval and Early Modern Times.* Luther-Agricola-Society, Helsinki.

Kendall, M.G. (1956) The beginnings of a probability calculus. *Biometrika*, 43, 1-14.

Kendall, M.G., PLACKETT, R. L. (1977) *Studies in the History of Statistics and Probability. Vol II.* Griffin, London.

Kotz, S., Johnson, N. L. (1985) *Encyclopedia of Statistical Sciencies.* John Wiley & Sons, New York.

Lambert, J. H. (1773) Examen d'une espèce de superstition ramenée au calcul des probabilitiés. *Nouveau Mém. Acad. Roy. Et Belle-Lettres de Berlin*, 1771, 411-420.

Laplace, P. S. (1812) *Thèorie Analythique des Probabilités.* Paris. 3ª Ed. 1820. Reimpreso en *Oeuvres*, Vol 7, 1886.

Laubenbacher, R., Pengelley, D. (1999) *Mathematical Expeditions. Chronicles by the Explorers.* Springer, New York.

Lindley, D. V. (1977) *Principios de la Teoría de la Decisión.* Vicens-Vives, Barcelona.

López-Ocón Cabrera, L. (2003) *Breve historia de la ciencia española.* Alianza Editorial, Madrid.

Maistrov, L. E. (1974) *Probability Theory. A Historical Sketch.* Academic Press, New York.

Mclean, I. (1995) Classics of Social Choice. *The University Michigan Press.*

Moivre, A. De (1712) *De Mensura Sortis, seu, de Probabilitate Eventuun in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus.* Traducido al inglés por B. McClintock en *Intern. Statist. Rev.,* 1984, 52, 237-262.

Moivre, A. De (1718) *The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play.* Pearson, London.

Montmort, P. R. de (1708) *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard.* Quillau, Paris. Publicado anónimamente.

Montmort, P. R. de (1713) *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard.* Seconde Edition. Revûe et augmentée de plusieurs Lettre. Quillau Paris. Publicado anónimamente. Reimpreso por Chelsea, New York, 1980.

Mora Charles, M. S. De (1981) *La teoría de la probabilidad: los primeros cálculos. Una propuesta de traducción y comentario de Cardano.* Llull, Vol. 4, 123-141.

Mora Charles, M. S. De (1989) Los inicios de la Teoría de la Probabilidad: siglos XVI y XVII. *Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, Bilbao.*

Mora Charles, M. S. DE (1995) Del sorprendente origen de los cálculos de *alea* a las últimas derivaciones de la Teoría de la Probabilidad. *Arbor* CLII, 600 (Diciembre 1995) 135-164.

Muliere, P.; Parmigiani, G. (1993). Utility and Means in the 1930s. *Statistical Science*, Vol. 8, No. 4, 421-432.

Neumann, J. Von, and Morgenstern, O. (1944). Theory of games and economic behaviour. 2ª ed (1947). Princenton Univ. Press, New Jersey

Ore, O. (1960). Pascal and the invention of probability theory. *Amer. Math. Monthly*, 67, 409-419.

Pascal, B. (1963). *Oeuvres Complètes.* Edición de Lafuma, París.

Pascal, B. (1965). *Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur le meme matière.* Despez, Paris. Reimpreso en *Ouvres completes.*

Pearson, K. (1928) On a Method of Ascertaining Limits to the Actual Number of Marked Members in a Population of given size from a Sample. *Biometrika*, Vol. 20A, nº1/2, 166-174.

Pearson, E. S. y M. Kendall (1970). *Studies in the history of statistics and probability*, Vol. 1. Griffin, London.

Pearson, K. (1978). *The History of Statistics in the 17th and 18th centuries.* Charles Griffin & Company Limited, Sussex.

Porter, T. M. (1986). *The rise of Statistical Thinking.* Princenton Iniversity Press, Pricenton.

Reiersol, O. (1968). Notes on some propositions of Huygens in the Calculus of Probability. *Nordisk Matematsk Tidskrift*, 16, 88-91.

Santos Del Cerro, J. (1999). *Historia de la Probabilidad: Aportaciones Españolas a su Proceso de Conceptualización.* Tesis doctoral leída en la Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales de Toledo.

Santos Del Cerro, J. (2000). Una teoría sobre la creación del concepto moderno de probabilidad: Aportaciones españolas. *Llull*, vol. 23, 431-450.

Saurin, J. (1706). Eloge de M. Bernoulli, cy-devant Professeur de Mathématique à Bâle. *J. des Sçavans*, 1706, 81-89. Reimpreso en parte en Kohli (1975a).

Savage, L. J. (1954). *The Foundations of Statistics.* John Wiley & Sons. New York.

Schneider, I. (1980) Christiaan Huygens's Contribution to the Development of a Calculus of Probabilities. *Janus* LXVII, 269-279.

Shafer, G. (1996) *The Art of Causal Conjecture*. The MIT Press, Massachusetts.

Sheynin, O. B. (1971). Newton and the classical theory of probability. *Arch. Hist. Exact Sci.* 7, 217-243.

Sheynin, O. B. (1977). Early history of the theory of probability. *Arch. Hist. Exact Sci.* 17, 201-259.

Sheynin, O. (1998). The Theory of Probability: Its Definition and Its Relation to Statistics. *Arch. Hist. Exact Sci.* 52, 99-108.

Shoesmith, E. (1983). Expectation and the Early Probabilists. *Historia Mathematica*, 10, 78-80.

Stigler, S. M. (1986). *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900.* The Belknap Press of Harvard University Press. London.

Stigler, S. M. (1999). Statistics on the Table. The History of Statistical Concepts and Methods. *Harvard University Press,* London.

Takács, L (1967). On the method of inclusion and exclusion. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 62, 102-113.

Takács, L (1969). On the classical ruin problems. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 64, 889-906.

Takács, L (1980). The problem of coincidences. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 21, 229-244.

Takács, L (1981). On the “Problem des Ménages”. *Discrete Math*., 36, 289-297.

Thatcher, A. R. (1957). A note on the early solutions of the problem of the duration of play. *Biometrika*, 44, 515-518.

Todhunter, I. (1865). *A History of the of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.* Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949.

Trembley, J. (1804). Observations sur le calcul d’un jeu de hasard. *Mém. Acad. Roy. Berlin*, 86-102. Comm. 1802.

Willcox, W. F. (1937). The founder of statistics. *Intern. Statist. Rev.*, 5, 321-328.