

The elastic view of the structural continuum versus the strength of material analysis

López-Rey, Javier¹; Ripoll, Salomé

ABSTRACT

The appearance of the graphic computing has allowed to deal with analysis of two and three-dimensional structural continuum by means of mechanic models that have the capacity to understand the simplest and more complex behaviors between local geometries that classic methodologies are not able to describe.

This fact involves the re-adoption of the Elasticity Theory and the prominence of the stresses against the comfortable view to simplify them along one of the geometry dimensions (e.g. one of the beam edges) to convert them into strains. The Strength of Materials concepts and the vectorial calculus might become outdated nowadays.

Moreover, the Finite Element Method used in this study allows facing structural geometries with geometric and functional complexity. This would not be possible with classic methods without introducing important simplifications.

Keywords: linear model, stress analysis, geometry, formal complexity

1. LA VISIÓN ELÁSTICA DE LOS CONTINUOS ESTRUCTURALES FRENTE A LOS ANÁLISIS POR ESFUERZOS DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES.

Pasar desde la visión de los comportamientos estructurales, mediante el análisis por elementos lineales o interpretaciones vectoriales a la imagen tensional en morfologías bi y tridimensionales, exige un esfuerzo de adaptación. La casuística que se va a presentar a continuación, pertenece al ámbito de la arquitectura y se centra, exclusivamente, en consideraciones geométricas. No entran en el escrito las sutilezas sobre la modelización intrínseca del comportamiento de los materiales, (campo en el que se ha avanzado mucho en los últimos años). Se exceptúa una aproximación a la introducción de fisuras en el último ejemplo. Se muestran ocho casos de ambición morfológica creciente. Las geometrías en el mundo de la arquitectura suelen ser más complejas (aunque mucho más pequeñas) que las de la obra civil.

La comunicación avanza en sentido creciente desde modelos de barras muy sencillos hasta la visión del comportamiento conjunto de alguna conurbación de cúpulas. Como ya se ha dicho, habrá un último apartado donde se introducirá la posibilidad geométrica de la modelización discontinua mediante la introducción de fisuras virtuales.

¹ ETS Arquitectura Barcelona. UPC (ESPAÑA). javier.lopez-rey@upc.edu (Javier López-Rey)

Este trabajo es el compendio de muchos estudios parciales desarrollados a lo largo de los años por el primer firmante como apoyo a sus clases de comportamientos estructurales.

Dada la muy distinta distribución cronológica y el empleo de varias aplicaciones informáticas diferentes, surge el problema de la visualización cromática centrada, básicamente, entre tracciones, compresiones y valores nulos. La primera intención era unificar el criterio de colorido. Sin embargo, los problemas logísticos que ello comportaba, han aconsejado respetar las cromáticas propias de cada caso y complementar cada una de ellas con una explicación adecuada.

A. La viga de un tramo

A.1. Viga sobre apoyos elásticos en la Línea Neutra.

Comenzando por el principio, se presenta en la primera **Fig. 1** el comportamiento de una viga elásticamente biapoyada sobre una rótula indesplazable y desplazable respectivamente para evitar tensiones parásitas. En el primer apartado **Fig.1(a)** se muestran los comportamientos canónicos de la **Resistencia de Materiales**: diagrama de momentos flectores, diagrama de esfuerzos cortantes y, complementariamente, una interpretación manual de las **isostáticas**. En esta figura se grafían en azul las “catenarias” de tracción y en rojo los “arcos” de compresión. Como es sabido, hay un punto singular en el centro. La modelización exige afinar la colocación de los apoyos en los extremos de la Línea Neutra. En la subfigura **Fig. 1(b)** se aborda la misma visión desde el punto de vista elástico/tensional. La primera de las tres imágenes corresponde a las tensiones horizontales en fibras superiores e inferiores debidas a los momentos flectores. En la segunda, se representa la distribución de las tensiones cortantes. Finalmente, en la tercera, se expone la somera distribución de las tensiones verticales que por su pequeño valor son sistemáticamente ignoradas por la Resistencia de Materiales, pero no por la **Elasticidad del Estado Plano**.

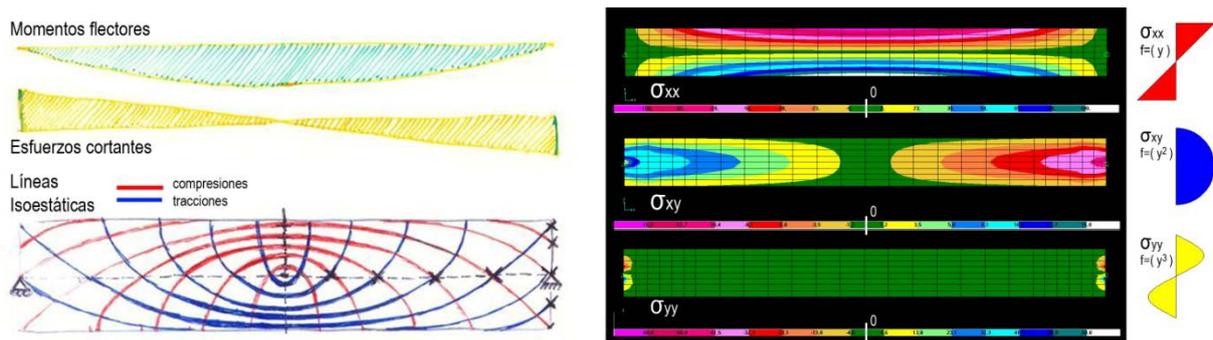


Figura 1. (a) Esfuerzos de viga e isostáticas, (b) Alzados de tensiones, (c) Distribución en el canto

El color verde oscuro representa el cero. Los azules (rematados por el blanco como valor máximo) corresponden a **tracciones** o valores positivos. Los colores naranjas, rojos y rosas se adoptan aquí como **compresiones** o valores negativos.

Frente a los dos diagramas de esfuerzos al uso que propone la Resistencia de Materiales, la interpretación elástica presenta tres diagramas de tensiones como indica la visión canónica del problema. A título de corolario, se exponen en la última columna **Fig.1(c)** las tres distribuciones

tensionales del apartado anterior, pero ahora con su visualización característica a lo largo del **canto** de la viga. Suele olvidarse que la tercera distribución corresponde, precisamente, a las tensiones verticales y que es una **curva de tercer grado**. La coherencia del modelo obliga a poner las cargas en la misma Fibra Neutra, y la curva de tercer grado tiene tres puntos nulos y una morfología antimétrica. Las pequeñas manchas de color en los extremos de la viga **Fig.1(b)** indican, precisamente, este comportamiento que se acusa por su proximidad a los apoyos.

A.2. Viga sobre apoyos elásticos en la parte inferior

La modelización elástica por **Elementos Finitos** de la viga interpretada como continuo bidimensional permite abordar **matices** a los que no llega la simple Resistencia de Materiales. En este caso se propone colocar los apoyos (del mismo carácter que el apartado anterior) en el **infradós** del continuo (que es lo habitual en una viga biapoyada). Se observará que la simetría cromática del caso anterior, respecto a la Línea Neutra, se empieza a perder.

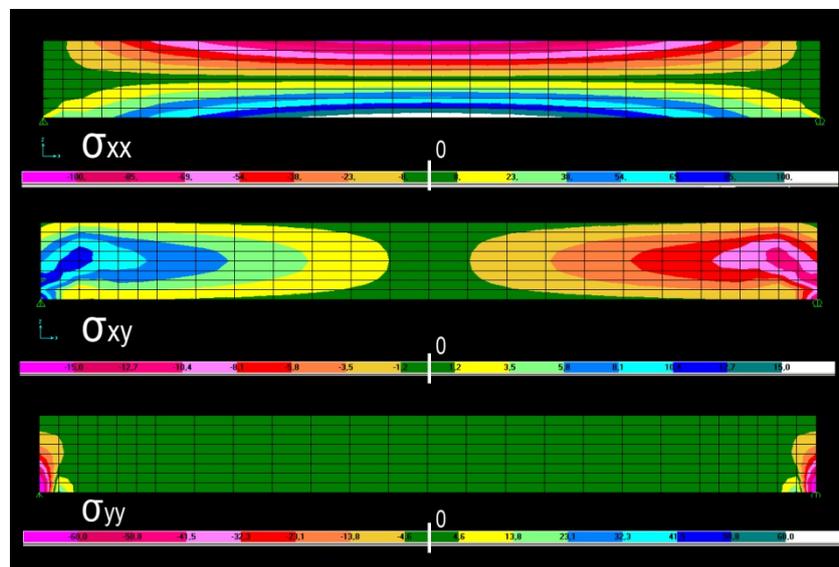


Figura 2. (a) Tensiones σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{yy} en la viga con apoyos en el infradós.

En σ_{xx} la mancha verde oscuro se repliega sobre si misma en los extremos de la parte superior pero se extiende en sus homólogos inferiores revelando la presencia del **apoyo**. Esta observación es mucho más evidente en las tensiones cortantes σ_{xy} , donde las manchas extremas azules y rojas se curvan hacia los apoyos. Finalmente, la antisimetría vertical de σ_{yy} en los extremos también se pierde por la presencia de los apoyos, complicándose las manchas. Podríamos avanzar en la complicación del apoyo, por ejemplo metiendo más puntos de contacto en su modelización. No se va a seguir por este camino en el presente escrito.

A.3. Viga biempotrada

La simetría de la viga (similar a la biapoyada) provoca un diagrama de cortantes idéntico a los casos anteriores, pero el diagrama de momentos presenta los típicos **cuernos negativos** de los empotramientos y el de isostáticas los puntos de inflexión en las dos familias **Fig.3 (a)**. La traducción cromático/elástica **Fig.3 (b)** presenta su más espectacular concreción en los puntos de momento nulo de la primera figura. Corresponden a las crucetas curvilíneas verde oscuro (valor nulo) de las σ_{xx} .

El diagrama de las tensiones cortantes σ_{xy} debería ser idéntico al de la **Fig.1 (b)**. Si no es así, es por forzar la escala cromática. En cuanto a las tensiones σ_{yy} , se mantiene la antimetría de la **Fig.1 (b)** pero repartida a lo largo del apoyo empotrado (que corresponde a todo el canto). En consecuencia, el cero (verde oscuro) aparece, ahora, en la Línea Neutra. Por lo demás, en este caso, la correspondencia esfuerzos/tensiones, en ambas figuras, es inmediata.

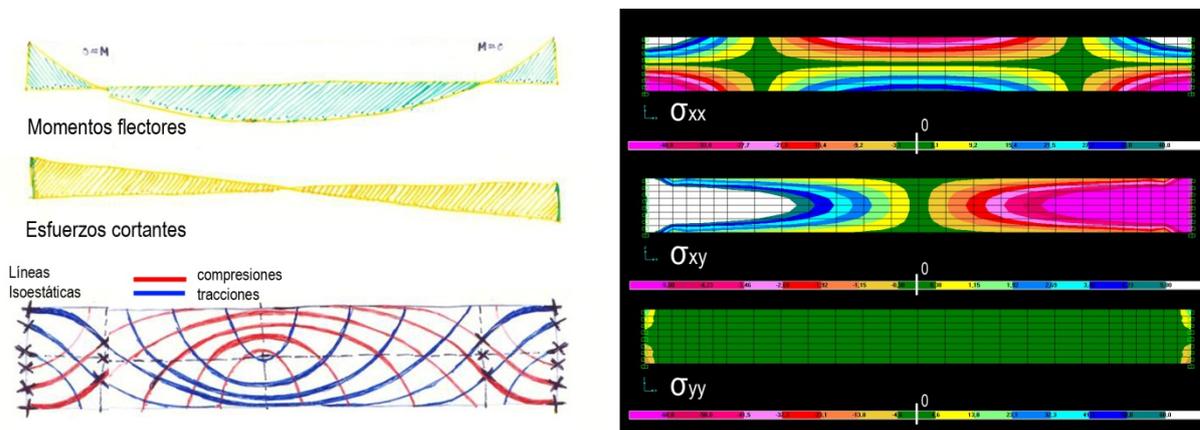


Figura 3. Viga doblemente empotrada (a) Esfuerzos de viga e isostáticas, (b) Alzado de tensiones

B. Semipórtico de un vano

Como en el caso anterior la **Fig.4 (a)** representa los tres diagramas de esfuerzos entre las dos barras: **momentos, cortantes y axiles**. La figura **Fig.4 (b)** muestra las isostáticas al uso y el plano de tensiones mínimas (entiéndase de compresión) que, por una vez, coincide bastante bien con la geometría de las isostáticas rojas. Ello es debido a la relativa poca variación cuantitativa de las tensiones a lo largo de las mismas, lo que las aproxima, en este caso, a las **isotensas** que es lo que representan los límites entre colores del esquema cromático.

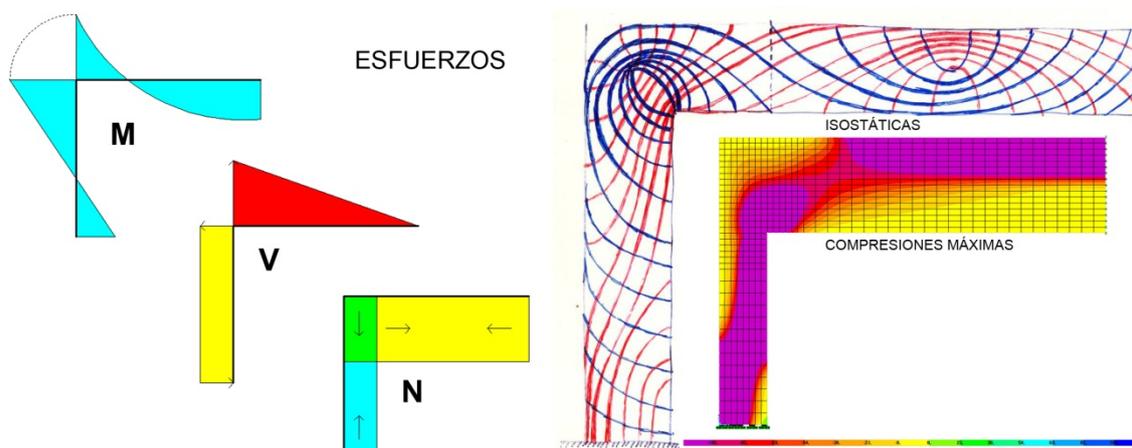


Figura 4. Semipórtico (a) Esfuerzos, (b) Isostáticas y compresiones máximas.

Las tres imágenes en falso color de la **Fig.5 (a) (b) y (c)** exigen una explicación en su aparente falta de correlación con los diagramas de esfuerzos.

En la **Fig.5 (a)** : σ_{xx} , los colores rojos y azules en los labios de la zona superior e inferior, respectivamente, en la parte central de la viga, reproducen el **momento positivo** de la visión lineal.

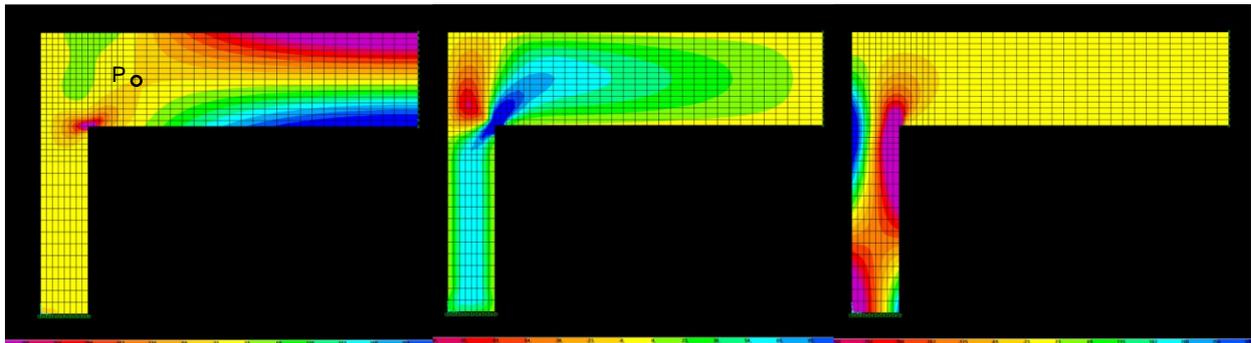


Figura 5. Semipórtico: Alzados de tensiones (a) σ_{xx} , (b) σ_{xy} , (c) σ_{yy}

El punto de inflexión en la Línea Neutra también se percibe (Punto “P”). En este caso el valor nulo es el amarillo. Sin embargo, los valores pésimos del momento negativo se diluyen en la parte superior (verde claro). No así, en la parte inferior, donde aparece una concentración de compresiones en el ángulo interior (rojo). Este hecho era de sobra conocido, sin necesidad de llegar a las modelizaciones informáticas. En cualquier tratado de hormigón, no demasiado moderno, era característica la aparición de una cartela, en esta zona, debida a esta concentración. El mismo carácter total de tensiones horizontales en esta figura, provoca que el rectángulo del pilar sea totalmente amarillo.

Para esta zona lo que priva son las tensiones verticales σ_{yy} , que aparecen en la **Fig. 5 (c)**. La combinación de las tensiones verticales de la visión bitriangular de **esfuerzos de flexión** en el pilar con las debidas a la simple **compresión** por transmisión de cargas al apoyo, provoca una típica **“distribución en diagonal”**. Ello consiste, en que el borde superior izquierdo del pilar trabaja a tracción, mientras que el interior lo hace a compresión. Al llegar a la base el comportamiento se invierte, como lo hace el diagrama de momentos. En consecuencia, la cromática va al revés. La preponderancia de las compresiones implica una mayor continuidad del color rojo en forma de **mancha diagonal** dentro del rectángulo del pilar. Ello revela el comportamiento en flexión compuesta del mismo. A título de corolario: la **“S” deformacional** del pilar sigue la contraforma de esta diagonal.

El diagrama de tensiones cortantes, presenta la típica distribución parabólica en la semijácena y la uniforme (debida a la constancia del esfuerzo cortante) en el pilar. Más difícil de explicar es el radical cambio de signo en los alrededores de la entrega jácena-pilar. La concentración azul en el diedro interno está directamente relacionada con las compresiones isostáticas en el mismo. La mancha roja de la izquierda tiene que ver con un efecto compensatorio que suele aparecer en el extradós del anterior.

Se ha omitido deliberadamente, en la **Fig.5 (c)** la constatación de que las manchas rojas y azules de la flexo/compresión en la parte superior del pilar, **invaden** descaradamente la zona de la jácena. Se hace ahora esta observación, así como la ya citada suave mancha verde de las tracciones de momento negativo, para incidir en la idea de que el concepto de **“nudo”** en la entrega **barra/pilar** que propone la Resistencia de Materiales, es un **tópico** que no se mantiene cuando se aborda el análisis bidimensional. Ni existe el nudo ni pasa en él nada extraordinario. Lo importante está a su alrededor.

C. Muro de transmisión de cargas con huecos desordenados

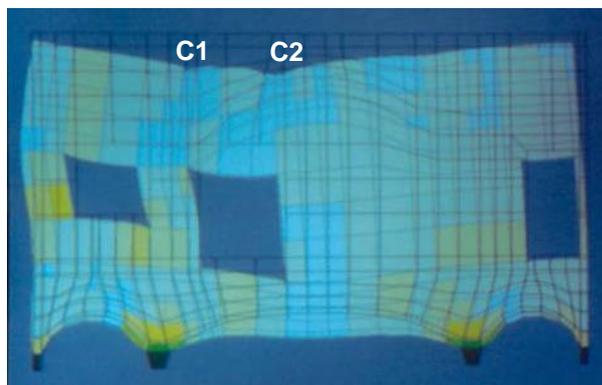


Figura 6. Deformada de muro sobre cuatro apoyos (a) Sin apeo intermedio, (b) con apeo intermedio

El tercer tema que se somete a consideración va a presentar dos **variantes**. En la primera, se trata de un caso real de muro sobre **cuatro apoyos** con tres huecos de geometría muy independiente y **dos muros transversales** (C1 C2) que transmiten importantes cargas verticales al resto del continuo. El modelado corresponde a una aplicación muy antigua y “casera” de representación de tensiones principales mediante las típicas crucetas rojo/azul. Esta figura se parece al trazado de isostáticas. El problema consistía en la colocación de un arriostramiento provisional bajo el central de los tres arcos del **infradós**. Las Fig. 6 (a) (b) representan las deformadas del muro antes y después del apeo.

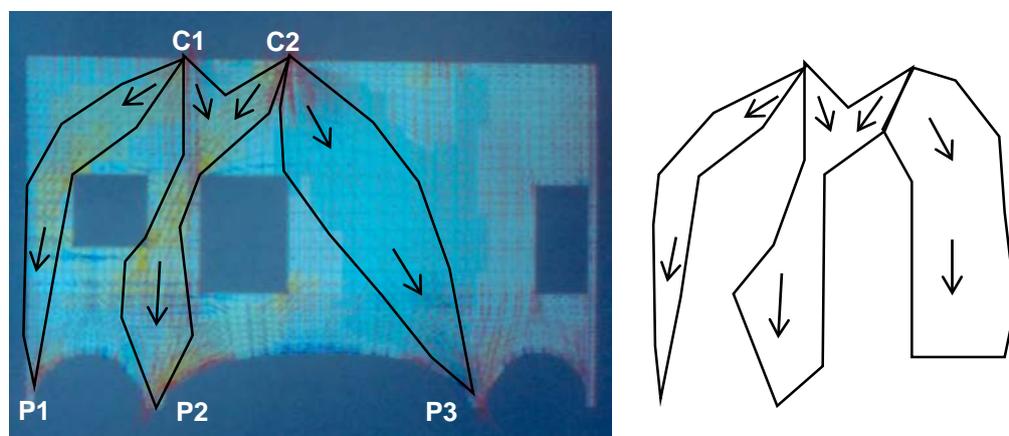


Figura 7. Distribución de tensiones de compresión (a) sin apeo, (b) con apeo

Se observará en la Fig. 7 (a) que las tensiones provocadas por C1 C2 rodean los dos huecos de la izquierda para llegar a los apoyos P1, P2 y P3. En la Fig. 7 (b) la introducción de los dos puntos de apoyo A1 y A2 bajo el arco central, desvía, radicalmente, las líneas de máxima tensión hacia esos puntos. Dejando, prácticamente **inoperante**, el apoyo P3.

En la **segunda variante** de muro transmisor de cargas, éste aparece cómodamente apoyado en el suelo, a diferencia del anterior. Se analizan las tres distribuciones cromáticas de las tensiones σ_{yy} , σ_{xx} y σ_{xy} . La geometría presentada corresponde a uno de los siete planos verticales que definían el contenedor correspondiente a una propuesta de **museo para Van Gogh** en Ámsterdam. Esta idea pertenecía al Proyecto Final de Carrera de la, entonces alumna y hoy profesional de la arquitectura: **Gloria Sabaté**.

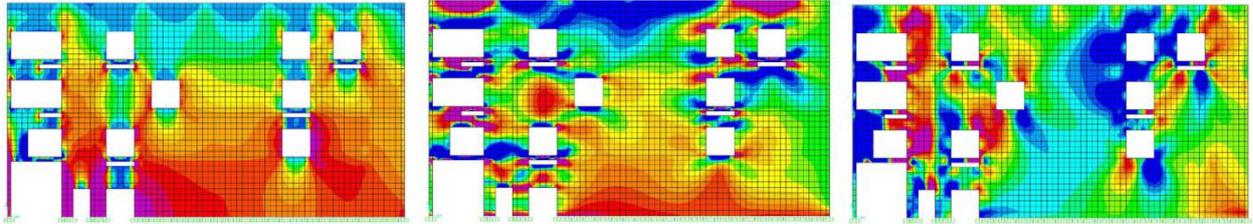


Figura 8. Muro apoyado en el suelo (a) σ_{yy} , (b) σ_{xx} , (c) σ_{xy}

La información más interesante en este tipo de geometrías es la transmisión de las cargas verticales. Por ello, el primer esquema que se muestra **Fig. 8 (a)** es la σ_{yy} . En la escala cromática que se utiliza, los azules de la parte superior del muro representan valores mínimos de compresión y los rojos de la parte baja los valores máximos próximos a la cimentación. Es interesante observar como debajo de alguno de los huecos se forman unos **bulbos de descarga** que se van cerrando a medida que nos alejamos hacia abajo. En la **Fig. 8 (b)** se resaltan los cambios de color en los **dinteles** sobre los huecos. Se visualizan **jácenas implícitas** con fibras comprimidas en la parte superior y traccionadas en la zona del dintel. Respecto a σ_{xy} , en los mismos dinteles la variación positivo/negativo o lo que es lo mismo azul/rojo es de **izquierda a derecha** y no de arriba abajo.

D. Plano de carga complejo. Media sección de la Catedral de Sevilla.

La geometría básica sigue siendo la de un “muro” pero con tal cantidad de **huecos** que invalidan esta definición. Se trata de la mitad de la sección transversal de la **Catedral de Sevilla** propuesta como ejercicio de curso en una de las asignaturas del abajo firmante, y desarrollada por alguno de los alumnos. El modelo hace una simplificación, puramente didáctica, que es la de asimilar toda esta geometría a una superficie vertical coincidente con el **plano xy**. La intención es conseguir una forma de perímetro muy complejo y, en el fondo, no tan alejada de la realidad.

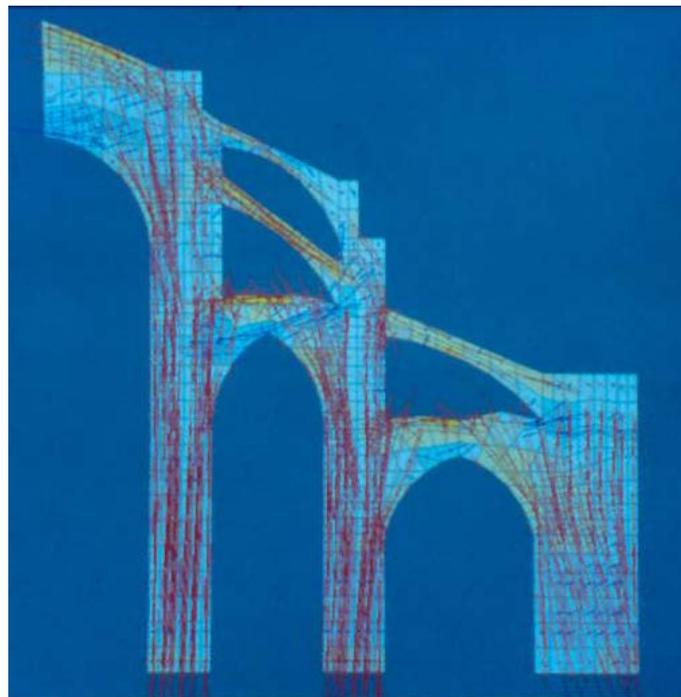


Figura 9. Crucetas de tensiones principales en un perfil gótico

En la **Fig. 9** se puede observar como las **compresiones principales** bajan con gran verticalidad por los **pilares** que separan la nave central de la primera lateral y ésta de la segunda anexa a fachada. Las reacciones en la cimentación son sensiblemente verticales. En cambio, en el **machón exterior** de gran canto, las crucetas isostáticas se desvían mucho hacia la derecha. Ello justifica su carácter de **contrafuerte**.



Figura 10. Perfil gótico (a) Deformada, (b) Tensiones σ_{yy}

Pese a lo que presupondría la intuición del arquitecto: de los dos **arbotantes** situados sobre la nave lateral más próxima a la central, el más elevado de los dos, **no tiene casi responsabilidad**. En cambio el más próximo al arco de la nave, transmite un **alto porcentaje de compresiones**. Igualmente, el arbotante sobre la nave lateral más exterior tiene muy poca responsabilidad respecto al contrafuerte.

La **Fig. 10 (a)** muestra la **deformada**. Se observará que mientras los dos pilares interiores flectan hacia dentro el machón lo hace hacia fuera, lo que intuitivamente no es tan evidente. Finalmente, la **Fig. 10 (b)** muestra la ya conocida “**distribución en diagonal**” de las **σ_{yy}** en los dos pilares centrales debida a la flexocompresión. Aquí, la ya expuesta relación con la “**S**” **deformacional** es evidente. También es llamativa la concentración de compresiones en el estribo correspondiente al arco más alejado del central y, localizado, ya, sobre el machón exterior.

La representación de esta geometría mediante un pórtico convencional, hubiera **perdido muchos matices** de esta distribución tensional.

E. Esfuerzos en láminas

En este camino de **complejidad** geométrica y funcional **creciente**, se entra, ahora, en el terreno de las modelizaciones **laminares**. Se recuerda, como introducción a esta familia, que aparece un concepto intermedio entre el de tensión, utilizado hasta ahora (cargas por unidad de superficie), al, muy útil, de esfuerzo de lámina (**esfuerzo por unidad de longitud**). También se le llama “**tensión extendida**”.

Esta nueva magnitud está equidistante entre el concepto de tensión y el de esfuerzo, propiamente dicho, utilizado hasta ahora. Permite visualizar, con mucha claridad el comportamiento en el sólido total, independientemente de lo que suceda en la cara superior o inferior de la lámina, sometidas a tensiones auténticas.

Figura 11. Lámina plana (placa) (a) Visión por “cuadernas”, (b) M11, (c) M22

Figura 12. (a) Torsor M12, (b) Esfuerzo cortante V13, (c) Esfuerzo cortante V23

La representación clásica al uso de este tipo de esfuerzos es la indicada en la **Fig.11 (a)**. Se trata de visualizar estos esfuerzos en una **axonometría** (visión por “**cuadernas**”). De la misma forma, que en el caso de barras se hacía sobre el plano. Sin embargo, la aparición de la informática gráfica permite pasar a una nueva imagería totalmente **topográfica**. No debe olvidarse que las líneas entre colores diferentes se pueden interpretar directamente como las **curvas de nivel** de una topografía ficticia. Que es, geoméricamente, mucho más acorde con la superficie de esfuerzos que representaría las cuadernas repetidas hasta el infinito. Se aplica esta idea al comportamiento de una placa rectangular **empotrada en sus cuatro lados**.

Con esta nueva visión, se muestran en las **Fig. 11 (b) y (c)** y **Fig. 12 (a)** las topografías de esfuerzos de lámina **M11, M22 y M12**. En **M11** son evidentes los empotramientos en el lado vertical izquierdo y derecho de la visión a vista de pájaro de la lámina. En **M22** sucede lo propio con los otros dos lados. La cromática en este ejemplo implica el blanco como máximo valor positivo y el violeta como máximo valor negativo. Los momentos de empotramiento perfecto no son **constantes** a lo largo del lado sino que siguen una distribución en labios. Resulta más espectacular la visión topográfica del **momento torsor** con los dos **montículos** diagonalmente opuestos de momento positivo y sus dos hermanos, en los dos cuadrantes restantes, en forma de **valles**. Como la teoría indica los valores a lo largo de los lados y de los dos ejes de simetría son nulos.

Las tres figuras comentadas se han modelizado con una versión algo antigua del conocidísimo **programa SAP**. En cambio, los esfuerzos cortantes se han visualizado en una versión más moderna. En este caso, el cero está en la zona verde/amarilla. Aparecen en la **Fig. 12 (b)** unos pequeños **esfuerzos parásitos** de cortante en las caras horizontales que el autor de este escrito no sabe interpretar.

F. Plegaduras

Como en el **caso C**, esta tipología también va a presentar dos variantes: la **cantonera** y una **plegadura** de geometría más compleja formada por dos forjados unidos por sus correspondientes paredes.

Dentro, ya, del mundo de las **láminas**, el paso siguiente (antes de entrar en la curvatura) es la unión de placas en el espacio. La interrelación entre ellas implicará la transmisión de esfuerzos axiales de membrana de unos componentes sobre otros. Esto quiere decir que a los **Esfuerzos de Placa** por unidad de longitud (tensiones extendidas), tratados en el apartado anterior, hay que sumar los de **membrana** debidos a esta interrelación. En consecuencia, estas nuevas “placas” tienen el **comportamiento completo de láminas** con sus **diez** esfuerzos. De lo único que carecen, todavía, es de **curvatura**. A este nuevo modelo funcional le llamamos **Plegadura**.

La otra característica de esta tipología es la unión entre placas: la **Arista**. Este nuevo elemento es un **rigidizador** importante y distorsiona, fuertemente, los esfuerzos de lámina en sus proximidades.



Figura 13. *Cantonera (a) perspectiva axonometrica (b) id. cónica (c) fuerzas F22 (tracciones en la esquina)*

Queda una importante cuestión de fondo que aparece por primera vez en esta geometría. “**Nunca llueve a gusto de todos**”. Aunque pueda resultar obvio, los esfuerzos se refieren a los sistemas de **Ejes Locales** en cada elemento de Plegadura (no así las deformaciones que van referidas a ejes globales). Este hecho, unido a que por una larga tradición, totalmente admitida, el **eje local 3** corresponde siempre con la **normal** a la superficie, imposibilita que los diversos sistemas locales de las varias placas que componen la plegadura, tengan la misma orientación. Este problema aparece por primera vez en este momento. En consecuencia, hay que decidir que correspondencias parciales y posibles se pueden montar entre los **ejes locales 1 y 2**. El abajo firmante, por tradición, **paraleliza los ejes locales 2** en los paramentos verticales. Con esta apuesta, la transmisión de cargas hacia los apoyos resulta más evidente.

Con todo lo dicho se pasa a analizar una Plegadura. La denominamos “**cantonera**”. Se trata de una geometría formada por tres planos paralelos a los coordenados (según los ejes globales). La más evidente es un **búnker** de cuatro caras y un techo cuadrado. El modelo se constriñe a la cuarta parte al partirlo por los dos planos verticales de simetría. Se supone que las tres superficies son del mismo material y espesor. A “grosso modo”: el peso del techo como placa, transmite el mismo a las paredes. Sin embargo, esta transferencia dista mucho de ser uniforme debido a la presencia de la **arista común**.

En la **Fig. 13 (a)** se muestra una **perspectiva axonometrica** de la **deformada** de la cantonera. Se observará que las verticales distantes de la arista común de las dos paredes se deforman muchísimo en “s”. Como si fueran pilares de sendos semipórticos correspondientes a los dos planos de simetría del conjunto. La intuición presupondría que las **directrices horizontales** de estas dos caras tendrían que ser sensiblemente paralelas a las dos aristas horizontales. Pero no es así. Ello es debido a la ya anunciada rigidez extra de la arista vertical común (que no se deforma en “s”, ni mucho menos). La **Fig. 13 (b)** muestra la misma **deformada** con más realismo en una acusada **perspectiva cónica**, pero la convergencia hacia los puntos de fuga de las líneas paralelas falsea la falta de paralelismo de las rectas horizontales, mucho más evidente en la perspectiva axonometrica.

De los **diez esfuerzos de lámina** solo se muestran en este trabajo el de las fuerzas de membrana verticales **F22** y los de los tres momentos **M11**, **M22** y **M12**. La **Fig. 13 (c)** muestra la más espectacular de las distribuciones de estos esfuerzos. Se observará que en lo tocante a **F22**, las compresiones más o menos variables que transmite la placa del techo a las paredes sufre una importantísima distorsión en la parte alta de la arista común, hasta el extremo que se convierten en **tracciones** (huso perimetrado). La explicación de este “**efecto esquina**” es el “**levantamiento de puntas**” de una placa apoyada en sus cuatro lados. Se argumentará que la placa del techo no parece articulada sobre las paredes, sino más bien empotrada. Pero lo cierto es que no se trata de un empotramiento perfecto, sino elástico. La realidad es, por tanto, un **estado intermedio** entre ambos modelos (apoyado/empotrado). Y algo de la memoria de la placa apoyada permanece en el conjunto de la **Plegadura**. La idea no tiene nada de novedosa y explica muchas de las **fisuras horizontales** que aparecen en estas zonas en construcciones más o menos viejas. En cuanto a las **compresiones** no uniformemente transmitidas por el techo a las paredes, se observará, que el color rojo, indicador de las mismas, se va **extendiendo hacia la esquina** en la que parte baja de las paredes.

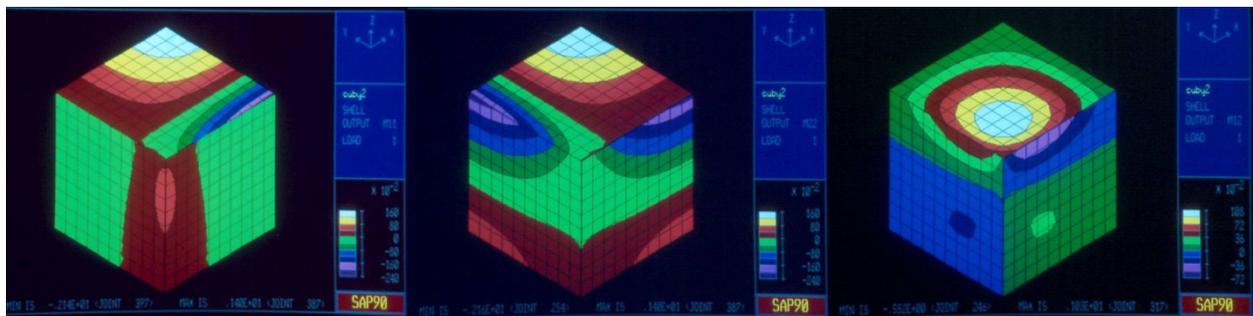


Figura 14. *Cantonera (a) Fletores M11 (b) Fletores M22 (c) Torsores M12*

La **Fig. 14 (a)** muestra el diagrama de momentos **M11** en ejes locales. Solo son evidentes en la placa de techo. Si se compara estas manchas con las de la **Fig. 11 (b)**, se observará que la cromática es la misma y corresponde a la cuarta parte de la imagen ahora citada. Puede no llamar la atención que los labios del momento negativo no tengan ninguna correspondencia con los **M11** de las paredes. Pero si pasamos a la **Fig. 14 (b)** observaremos que los labios negativos de **M22** en la placa de techo tienen esa correspondencia exacta con los de la pared izquierda. Forzando un poco las dotes de **visualización**, se observará que los labios superiores de la pared derecha coinciden con los correspondientes a **M11** negativos de la placa de techo en la figura anterior. Por lo dicho antes, no se pueden hacer corresponder a la vez todos estos esfuerzos si no es recurriendo a la modelización de **esfuerzos principales**, que no se han utilizado en esta opción.

Finalmente en la **Fig. 14 (c)** el diagrama de **torsores**, parecidísimo a la cuarta parte del de la **Fig. 12(a)**, solo difiere de él en que el **montículo** de colores cálidos acabados con valor máximo en el blanco, no se cierra sobre si mismo sin llegar a tocar los bordes (**Fig. 12(a)**) sino que “**muerde**” las líneas de unión con las paredes verticales. Ello corrobora la ambigüedad del carácter de la arista común placa de techo / paredes, que como ya se ha dicho, no es ni empotramiento ni articulación.

La **segunda variante** de esta tipología es un edificio de dos plantas con suficientes **planos verticales y horizontales y aristas**. Su interrelación se hace más compleja. Básicamente son dos forjados empotrados en sendas paredes laterales. La complejidad de la idea es que el forjado primero presenta una **forma en “L”** acabada en un importante **voladizo** en su parte izquierda. La presencia de esta anomalía geométrica, acusa la disimetría general de funcionamiento del conjunto.

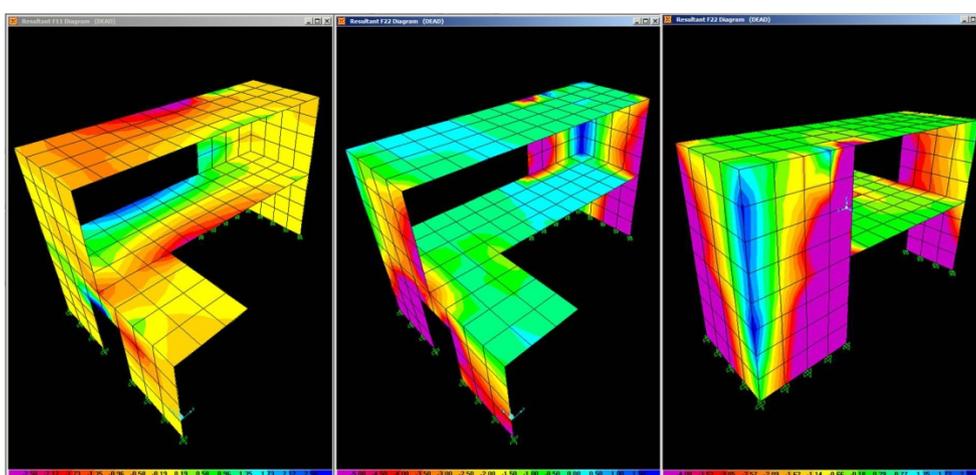


Figura 15. Plegadura (a) Efs. De membrana F11 (b) Id. F22 (verticales visión frontal) (c) Id. Visión posterior

De los diez esfuerzos de lámina, se seleccionan (como en el caso anterior) los más evidentes. En la **Fig. 15(a)** se muestran los esfuerzos de **membrana F11** inscritos en los planos estructurales. Resulta especialmente evidente que el forjado más próximo al suelo, en su zona rectangular (donde no está el voladizo), presenta un comportamiento (entre otras cosas) de **viga horizontal**. Se observan **tracciones** (azul) en la línea de la fachada posterior y **compresiones** (rojo) en la de la delantera. Este comportamiento es mucho más ambiguo en el forjado superior.

En la **Fig. 15(b)** se visualizan los esfuerzos de membrana **F22**. Ya se ha dicho que en los paramentos verticales se unifica la orientación de los ejes locales para que este esfuerzo formalice las cargas gravitatorias. Ello es independiente de la orientación de las paredes, respecto al sistema de ejes globales. Se muestra de forma muy clara que en los **límites exteriores** de las paredes se concentran las **cargas verticales**, al igual que en los alrededores de la puerta del muro más cercano.

En cambio, en la visualización del mismo comportamiento, visto desde atrás **Fig. 15(c)**, se manifiesta la **tracción en la arista común** a las dos paredes de la zona. Si se compara esta figura con la **Fig. 13 (c)**, se observará, que a comportamientos estructurales iguales, les corresponde aspectos cromáticos similares. La única diferencia es que en aquel caso se trataba de un solo piso y ahora de dos.

También resulta evidente, como los esfuerzos verticales de compresión (rojo), van **invadiendo** la zona de la esquina desde los bordes libres de los muros, a medida que nos aproximamos a la base.

Los esfuerzos que quedan por analizar, se restringen a los **dos momentos flectores** y sus **correspondientes cortantes**.

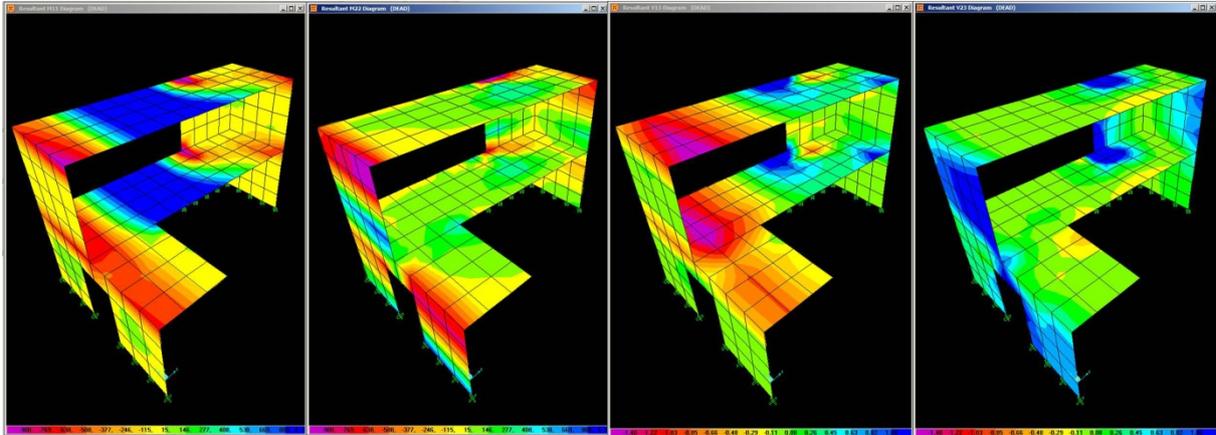


Figura 16. Plegadura (a) M11 (b) M22 (c) V13 (d) V23

En la **Fig. 16(a)** se manifiestan los momentos flectores **M11**. Ambos forjados evidencian el comportamiento como **jácenas planas**. Las manchas azules de **momento positivo** (azul) se extienden en el centro de los mismos, mientras que las de **momento negativo** (rojo) lo hacen en sus bordes.

Es especialmente claro el momento negativo en el extremo próximo del forjado superior. Su similar en el forjado inferior **suma** al efecto de la viga plana, el del **supervoladizo** de la parte delantera. Por ello la mancha roja cubre toda la longitud transversal. La ya comentada **elección de los ejes locales** ha hecho imposible la correspondencia de momentos en el mismo plano de las paredes.

Hay que hacer un pequeño esfuerzo de observación para entender que la **cromática** de la pared próxima al observador, respecto a los momentos equilibrantes de los comentados, corresponde a la de la **Fig. 16(b)**.

Los esfuerzos cortantes **V13** de la **Fig. 16(c)** corresponden a los momentos de la **Fig. 16(a)**. Resulta especialmente interesante observar como en el apoyo derecho de ambos forjados, la parte correspondiente a la fachada posterior es **mucho más corta** que la anterior. La consecuencia es que la mancha azul del cortante aparece **mucho más cerca** de la mancha roja en la zona posterior que en la delantera.

G. Cúpulas de intersección múltiple

Hace unos años se convocó un concurso restringido de ideas para construir un **Palacio de Congresos** a orillas del “lado malo” del **Guadalquivir** en la ciudad de **Córdoba**. Entre los profesionales invitados estaba **Rafael Moneo** con la propuesta cuya geometría se muestra en la **Fig. 18 (a) y (b)**. Esta idea no se llegó a construir. Se trataba de un atractivo proyecto que, en cierta forma, retomaba y continuaba la propuesta para el **aeropuerto de Sevilla**. Se intentaba recuperar la esencia **cupular** de ciertas geometrías árabes y reinterpretarla con un lenguaje mucho más moderno. El resultado es una serie de cúpulas de trazado **semiesférico** y **diámetros muy diferentes**, como se observa en planta, en la **Fig. 17(a)**.

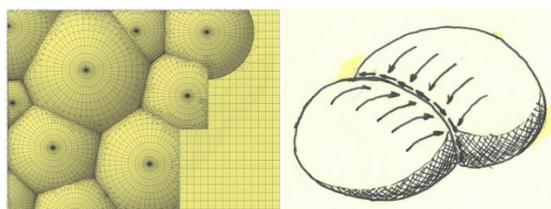


Figura 17. Cúpulas Concurso Moneo (a) planta general (b) transmisión de esfuerzos al arco común

Existía una astuta idea complementaria: Todos los **centros** de las esferas están en un **mismo plano**. La consecuencia es que las intersecciones entre ellas corresponden siempre a arcos de circunferencia **inscritos en planos verticales**. La concreción geométrica es que la modelización del conjunto se hace mucho más sencilla (**Fig. 17(a)**).

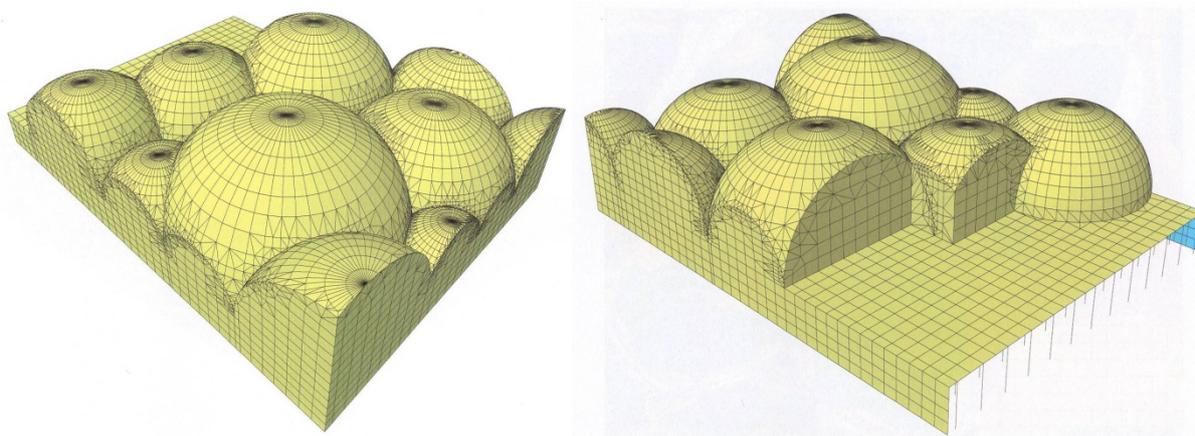


Figura 18. Visión general de la intersección de las cúpulas (a) visión delantera (b) visión posterior

La visión por dos esquinas opuestas del conjunto, muestra otra sutileza, y es que los arcos de circunferencia verticales de intersección con las paredes exteriores, dan un perímetro de cubiertas muy sugestivo (**Fig. 18(a) y (b)**). En este caso los únicos esfuerzos que se van a considerar son los de **membrana: F11 y F22**, que aquí se traducen en **Esfuerzos de Paralelo y de Meridiano**. No se ignora que en las zonas de los encuentros entre cúpulas, puedan surgir otros esfuerzos de lámina de cierta entidad, como **momentos flectores** y, tal vez, **torsores**. Pero lo cierto es que resulta **básico** el **comportamiento de membrana** de una cúpula. A ello es debida su frecuencia en las construcciones históricas (por la facilidad de su cálculo o predimensionado).

Se puede observar en la **Fig. 17(b)** la supuesta **transmisión** de esfuerzos entre dos **cúpulas intersectadas**. La intuición hacía suponer que las **compresiones de meridano** que van creciendo hacia la base (según la teoría) en una de las esferas tropezarían con esfuerzos similares en la otra. La composición transversal de estos vectores a lo largo del arco común, daría una nueva **secuencia de compresiones** hasta llegar a los extremos de este arco.

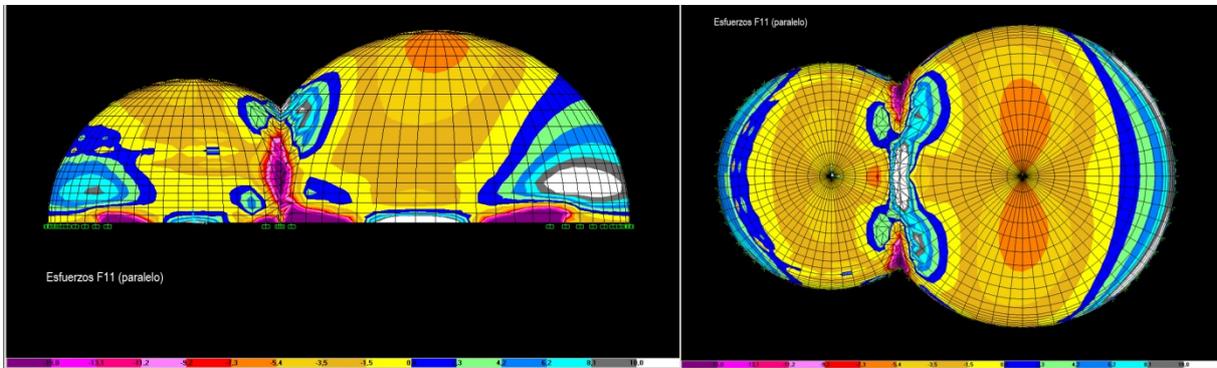


Figura 19. Esfuerzos de paralelo en dos cúpulas intersectadas (a) visión lateral (b) visión a vista de pájaro

Nada más lejos de la realidad. La **Fig.19(b)** corresponde a los esfuerzos de **paralelo** vistos en **planta**. Se aprecia, que en las zonas próximas al círculo común de intersección (centro de la línea recta proyección del mismo), los paralelos de ambas cúpulas presentan direcciones muy **próximas** a dicha recta. En consecuencia, las **tracciones**, claramente reveladas por la cromática en los mismos, deben **coincidir** sensiblemente con el de la zona alta (muy próxima) del círculo común. La consecuencia es aterradora porqué, un intuido comportamiento de **transmisión de compresiones**, se convierte en una serie de **tirantes curvos**. Esta parte de la geometría el arco y sus paralelos concomitantes **trabajan**, contra todo pronóstico, a **tracción**. Se puede observar, con mucha claridad la mancha común en forma de **hueso** limitada por el perímetro azul oscuro, que fija las tracciones. En la **Fig. 19(a)**, la misma visión del problema, vista en alzado, muestra que dicho arco común cambia su signo, por compresiones (granates), aproximadamente en los **tercios** bajos que llegan a los estribos. Esto es lo que desde un principio se presuponía.

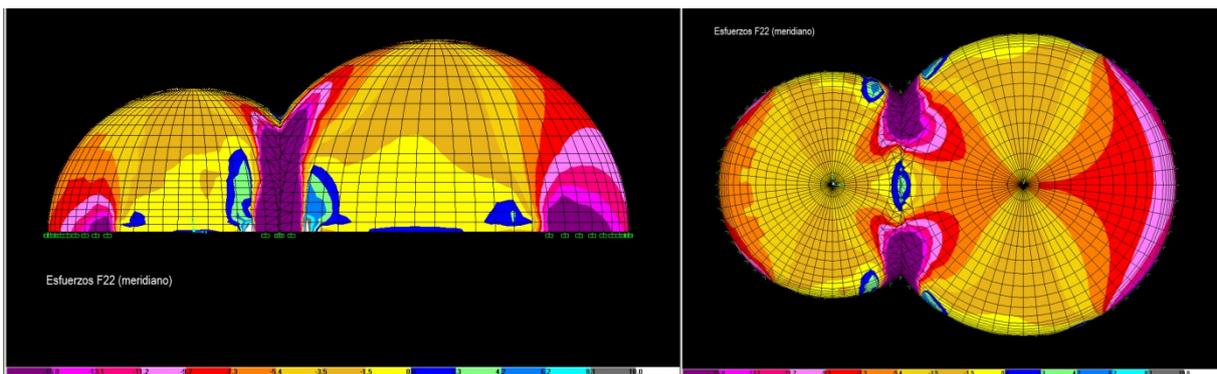


Figura 20. Esfuerzos de meridiano en dos cúpulas intersectadas (a) visión lateral (b) visión a vista de pájaro

En la **Fig. 20** se puede proponer un paquete de comentarios similar a la anterior. En este caso **Fig. 20(b)** estamos considerando los esfuerzos de **meridiano**. En la zona central superior del arco común, sucede lo mismo que en el otro esfuerzo, solo que a escala mucho menor. El perímetro azul oscuro de tracciones es un pequeño labio en la parte de la **clave**. En cambio, en el alzado lateral (**Fig.20(a)**) puede observarse que en el estribo del arco (de geometría muy **parecida** a sus meridianos próximos)

predomina la **compresión**. El fenómeno es similar al de los **paralelos**, solo que se **invierten** las proporciones tracción / compresión. En compensación, en zonas muy próximas al apoyo del arco común aparecen sendas manchas de tracción de meridiano en ambas cúpulas.

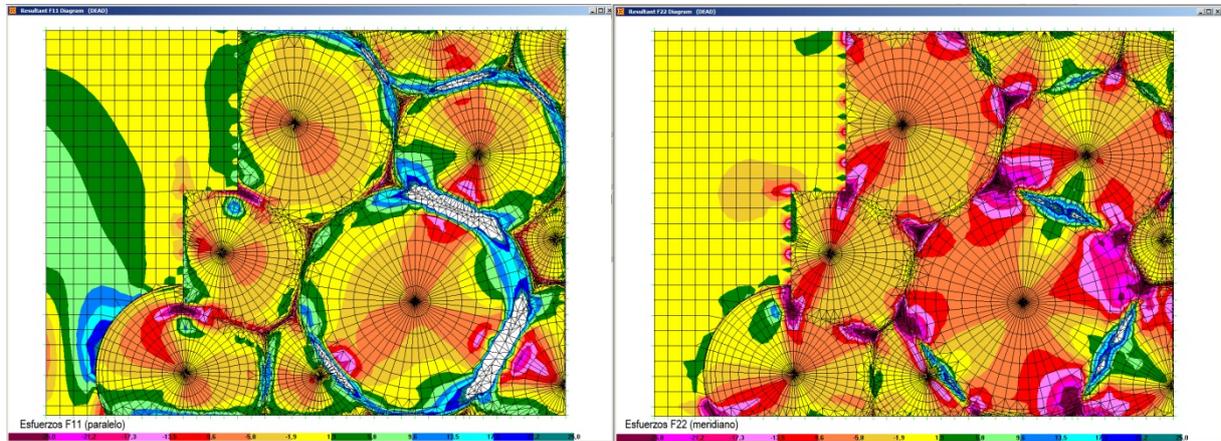


Figura 21. Esfuerzos de membrana a vista de pájaro (a) Paralelo (b) Meridiano

La interpretación final de la cromática indica lo ya anunciado: las zonas próximas a las claves de los arcos intersección están trabajando a tracción, así como los meridianos y paralelos próximos. En la **Fig. 21 (a) (b)** se visualiza claramente los comportamientos en esas zonas a vista de pájaro. En la **Fig. 21 (a)** predominan las tracciones, de afinidad con los paralelos, y en la **Fig. 21 (b)** sucede lo propio (con mucha menos zona azul) en los meridianos. También se puede comprobar la preponderancia de la **cúpula mayor**. En este caso el “cero” (paso de tracciones a compresiones) está en medio de la mancha **amarilla**. Los “huesos de paralelo” a tracción, antes citados, están ribeteados, ahora, de color verde oscuro.

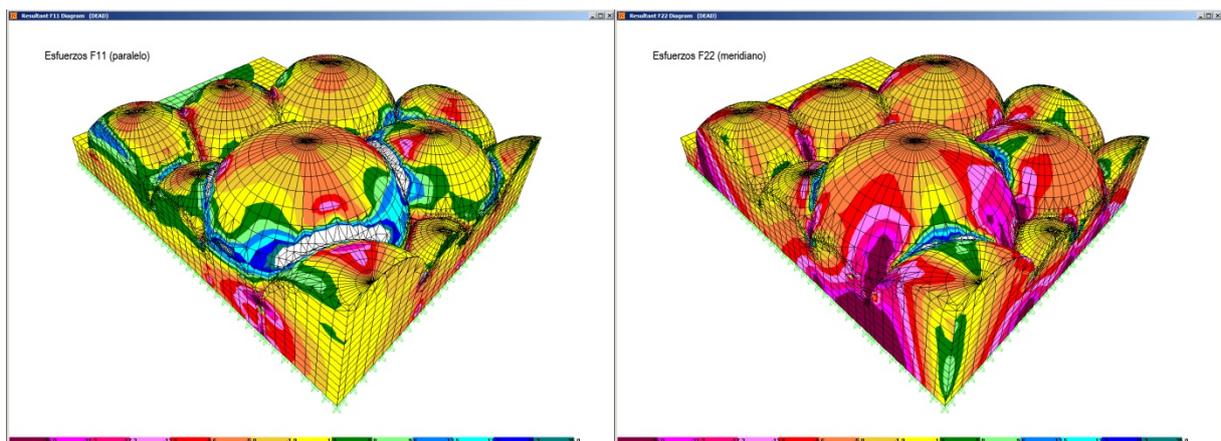


Figura 22. Visión perspectiva de los esfuerzos de membrana (a) Paralelo (b) Meridiano

La **Fig. 22** proporciona una visión perspectiva de las anteriores con su correspondencia en la transmisión a través de los **muros perimetrales**. Es particularmente evidente en la **Fig. 22 (b)** la transmisión de las compresiones de meridiano en la cúpula grande a través de la pared contigua (color granate).

H. La modelización de la fisuración a través de la estructura de Bellesguard

Bellesguard (Fig. 23 (a)) es una finca modernista proyectada por **Gaudí** en su etapa joven. Obedece a una tipología de vivienda aislada de tres plantas aéreas más una cúpula en **artesa** a la que se añade una planta complementaria en sótano. Sobre una base cuadrada, pero de fachadas diferentes, se carga una **torre** en una de sus esquinas (**Fig.22(a)**).

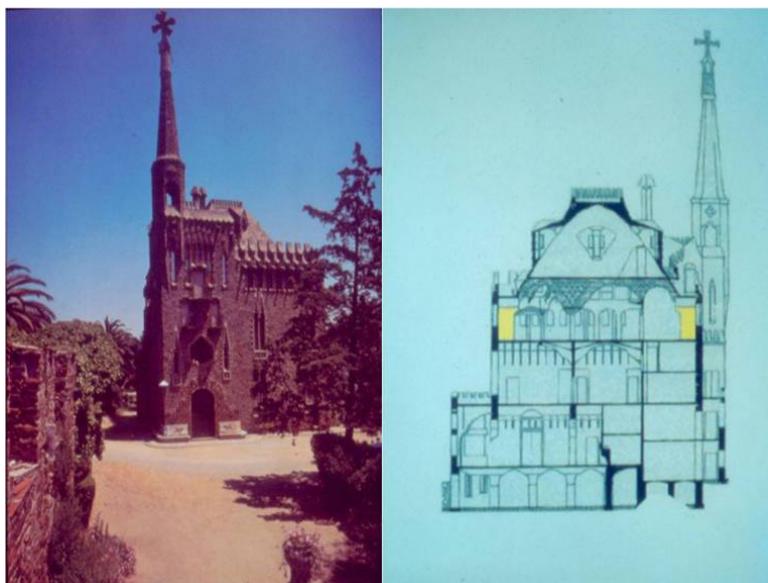


Figura 23. *Bellesguard (a) Vista exterior (b) Sección central*

En la **Fig. 23 (b)** se presenta una sección con unos **machones** en la planta tercera (coloreados en amarillo), que constituyeron el motivo de una investigación realizada por el autor del presente escrito, hace unos años.

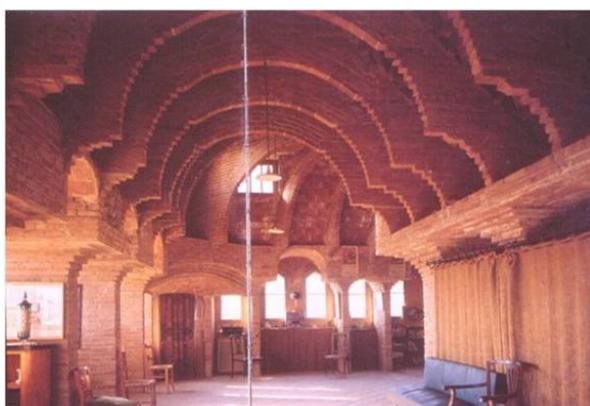


Figura 24. *Bellesguard (a) interior de la planta tercera con su espectacular geometría*

La **Fig. 24** (extraída de un texto) muestra el espectacular interior de la planta de los machones que centra gran parte de su atractivo en el **ladrillo visto**. Estudios historiográficos han demostrado que este acabado obedece, sencillamente, a la falta de ganas y presupuesto para revocarlo en blanco. En el ángulo izquierdo de la fotografía, se ven los machones, antes coloreados, y su entrega con unos **arcos formeros** en forma de **yugo**.

Uno de estos puntos de encuentro va a ser presentado en este escrito en relación con su comportamiento ante la aparición de posibles **fisuras**. Con ello se pretende visualizar el inteligente **descenso** automático de **tensiones de tracción**, debido a la aparición de las mismas.

La **Fig. 25 (a)** muestra una **visión extruida** del modelo geométrico, base del estudio informático. Como se ve, corresponde a la mitad de la volumetría de las dos últimas plantas, más la artesa troncopiramidal. En la **Fig. 25 (b)** se muestra una visión de la **deformada** general por el plano de simetría del conjunto.

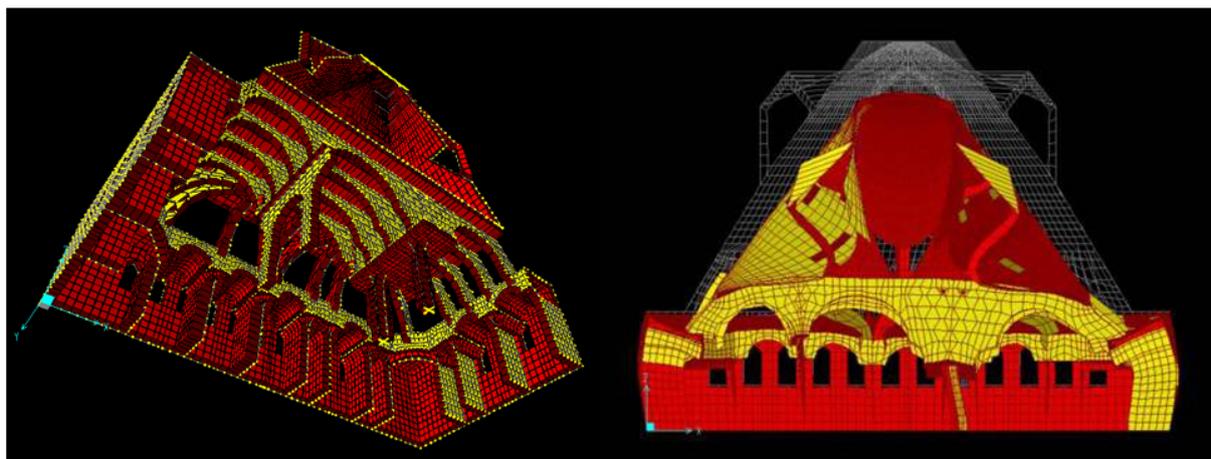


Figura 25. Bellesguard (a) *Visión extruida del modelo* (b) *Deformada general*

En las **Fig. 26 (a) (b)** queda más claramente conformada la estructura geométrica. El paso de la pirámide troncopiramidal o artesa a la planta de los machones implica una terraza perimetral. Esta superficie circundante, no es gratuita. Sirve de **zuncho perimetral**. Consecuentemente, tendrá gran parte de su geometría trabajando a **posibles tracciones**.

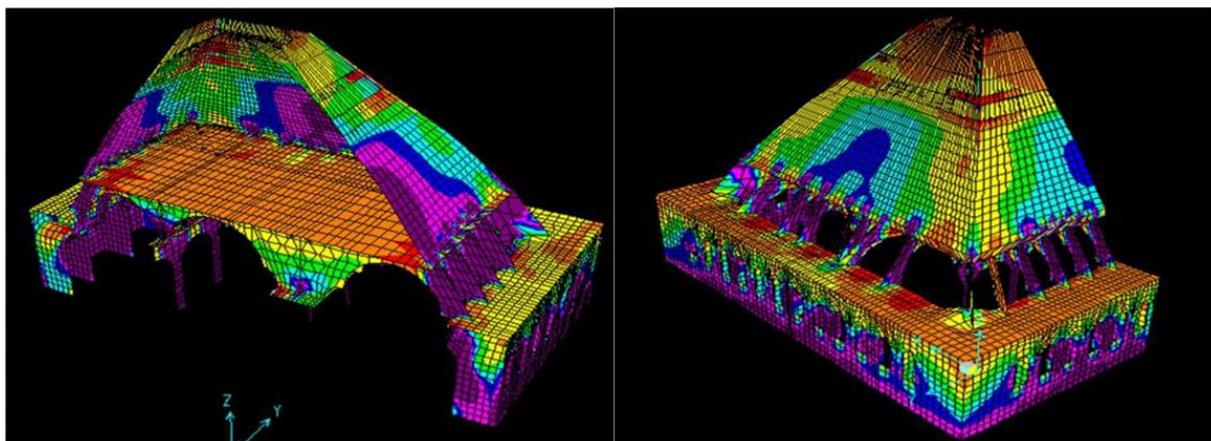


Figura 26. Bellesguard (a) *Visión general desde el plano de simetría* (b) *Visión general desde el exterior*

La **Fig. 27 (a)** muestra el perímetro interior de la terraza antes reseñada. Se trata de cuatro **paramentos verticales** horadados por pequeñas **bóvedas**, que como en el caso anterior, pueden estar sometidos a **tracciones**. La **Fig. 27 (b)** muestra un detalle de uno de los nudos de entrega del

paramento vertical con tres de los **arcos formeros** en forma de yugo que confluyen en una vertical única. Esta zona es fácil de reconocer en la **Fig. 27 (a)**.

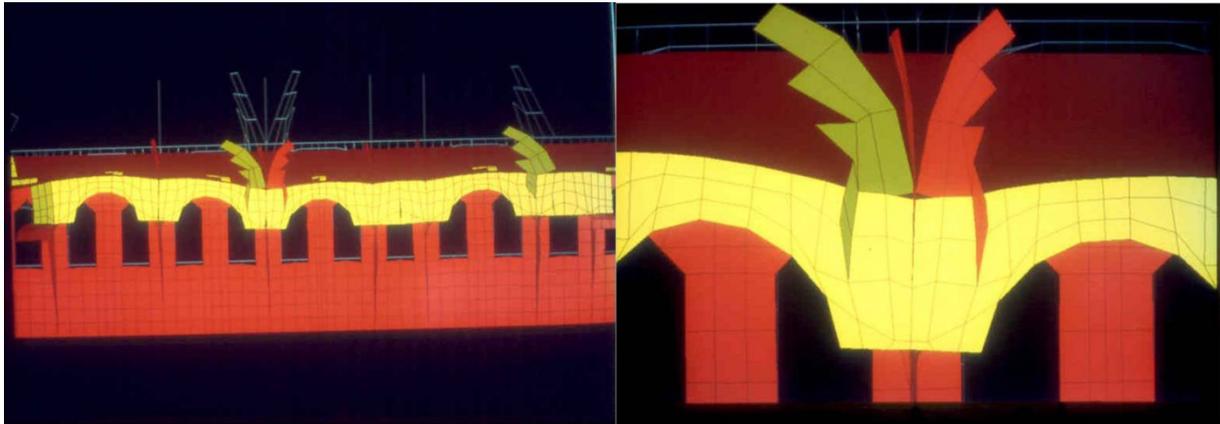


Figura 27. Bellesguard (a) Plano general interior de entrega con la terraza (b) Detalle del mismo

En la **Fig. 28** y en el punto de encuentro, comentado en la anterior, se modelizan las tensiones σ_{xx} . En la imagen izquierda (**Fig. 28 (a)**) se hace como **superficie continua**. En la **Fig. 28 (b)** se ha establecido una **fisura** en el eje central del nudo. Ésta se coloca en “la nariz de la cabeza del leopardo”.

El procedimiento es evidente. El **cúter virtual** se provoca **duplicando la numeración** de los nodos contiguos que, a partir de ese momento, quedan separados. Cualquier programa moderno (incluso el aquí utilizado) dispone de subrutinas que provocan estos cortes de una forma automática.

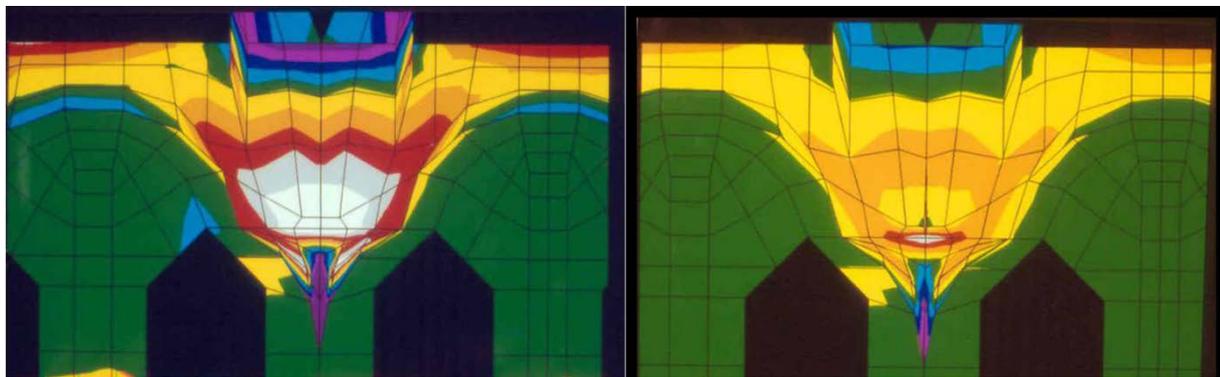


Figura 28. Bellesguard (a) Tensiones σ_{xx} sin fisuración (b) Id. Con fisura central

En la **Fig. 28 (a)** se visualizan las tensiones horizontales **σ_{xx} sin fisuración**. El ribeteado rojo de la “cabeza del leopardo” indica los límites de tracciones. El color blanco de la “nariz” indica valores altos de tracción. En la **Fig. 28 (b)** se ha establecido la ya anunciada fisura central. Con la misma cromática la mancha de tracción (rojo) **disminuye** sensiblemente.

2. CONCLUSIONES

A través de ocho casos se ha ido pasando revista a **comportamientos básicos** (y en ocasiones atípicos) del análisis por **tensiones elásticas** de continuos estructurales y su extensión al mundo de las láminas en las llamadas **“tensiones extendidas”** o **esfuerzos de láminas**. En los primeros apartados se ha hecho hincapié en la correlación entre **diagramas de momentos** y **líneas isostáticas** con los mapas **cromático/tensionales**.

Se ha intentado demostrar que la **Visión Elástica** provee **toda la información** que puede suministrar la **Resistencia de Materiales** y más cosas que ésta última **no puede proporcionar**. En esta idea es paradigmática la discusión de la **definición de “nudo”** como elemento geométrico mítico entre pilares y jácenas (cruce de sus respectivas líneas neutras). Cuando en realidad, no se trata más que de uno de los **infinitos puntos** de su entorno, donde el comportamiento estructural es similar en todos ellos.

Llevando este razonamiento al extremo (con todas las reservas que se quiera), podría llegarse a afirmar que en las estructuras formadas por elementos de longitud dominante, el concepto de **“esfuerzo”** empieza a convertirse en obsoleto al recuperar el de **“tensión”**.

En el estudio de las láminas, suele ser muy útil la adopción del ya citado concepto de **“tensión extendida”** o **esfuerzo de lámina**. Los mapas cromáticos de los diversos esfuerzos representarían auténticas visiones **topográficas** de las superficies virtuales, que representan el límite de comportamiento de estos esfuerzos.

Faltaría todo un eslabón de sólidos tridimensionales, cuya modelización volvería a exigir la adopción del concepto clásico de **tensión**.

Avanzando por el terreno de la caracterización de los materiales, se ha visto en el **caso H** la fácil **generación** geométrica de **fisuras**. De una forma similar se podría conseguir la **plastificación** de parte de los elementos finitos que componen el modelo. Esto se lograría a base de introducir algún mecanismo que mantuviera **congelado** el aumento de tensiones en algunos de esos elementos.

REFERENCIAS [CALIBRI, 11PT, NEGRITA, MAYÚSCULA, ALINEADO A LA IZQUIERDA]

- [1] Cook, R. D; Malkus, D. S; Plesha M. E. (1989). *Concepts and Applications of Finite Elements Analysis*. John Wiley & Sons.
- [2] Gibson, J. E. (1962). *Diseño de cascarones cilíndricos*, Compañía Editorial Continental, S.A. México.
- [3] Oñate, E. (1992). *Cálculo de estructuras por el método de los Elementos Finitos. Análisis estático lineal*. CIMNE. Artes Gráficas Torres, S.A. Barcelona.
- [4] Wunderlich, W; Pilkey, W. D. *Mechanics of Structures. Variational and Computational Methods*. CRC PRESS.
- [5] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. (1994). *El método de los Elementos Finitos. Formulación Básica y Problemas Lineales*. CIMNE. Mc-Graw-Hill Book Company. Barcelona.
- [6] Argüelles, R. (1981). *Cálculo de Estructuras*. Grefol S.A. Madrid.