

# Model updating of a historical building by using ambient vibration tests. Chapel of the Würzburg Residence (Germany)

Compán, Víctor<sup>1</sup>; Pachón, Pablo<sup>2</sup>; Cámara, Margarita<sup>3</sup>; Sáez, Andrés<sup>4</sup>

## ABSTRACT

One of the first difficulties that can be detected in finite element models of historical buildings is the high level of uncertainty associated with many factors affecting the actual behaviour of the structure [1]. Often the inaccuracies in this model will arise because of poorly known boundary conditions, unknown material properties or simplification in the modelling. These uncertainties in the modelling process cause the predicted dynamics of a structure to be different from the measured dynamics of the real structure. If accurate measured data is available, then this data could be used to improve the numerical model in general and some uncertain parameters of the model in particular. Thus, among the Operational Modal Analysis method [2], the finite element model updating from the dynamic structural parameters identified experimentally, allows the adjustment of these models in order to obtain a more accurate estimation of behaviour of the structure.

*Keywords: Historical structures, FE model updating, Genetic algorithm, Operational Modal Analysis.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Dentro del estudio del comportamiento estructural de las construcciones históricas se ha convertido en práctica habitual el desarrollo de un modelo de elementos finitos al objeto de determinar numéricamente su respuesta ante las acciones de naturaleza estática y dinámica. Para desarrollar un modelo numérico adecuado de la estructura es necesario reducir el número de errores matemáticos a un nivel aceptable, estableciendo con cuidado las hipótesis en las que se apoya el mismo. Sin embargo, incluso con los más cuidadosos y detallados modelos numéricos, desarrollados a partir de los datos disponibles y del mejor juicio técnico, se producen habitualmente diferencias entre los resultados obtenidos experimentalmente y los estimados, por contrapartida, de forma numérica. Esto se debe, de forma típica, a las inevitables incertidumbres asociadas al propio modelado de la estructura, las condiciones de contorno de la misma, las propiedades de los materiales constituyentes y el efecto, no siempre adecuadamente considerado, de los elementos no estructurales. Normalmente, los errores estimados entre las frecuencias naturales estimadas experimental y numéricamente no son despreciables, siendo actualmente aceptado que las propiedades modales identificadas experimentalmente son más fiables que las procedentes del modelo de elementos finitos, como indican

<sup>1</sup> Dep. of Building Structures and Geotechnical Engineering. University of Seville (SPAIN). [compan@us.es](mailto:compan@us.es).

<sup>2</sup> Dep. of Building Structures and Geotechnical Engineering University of Seville (SPAIN). [ppachon@us.es](mailto:ppachon@us.es).  
(Corresponding author).

<sup>3</sup> Dep. of Building Structures and Geotechnical Engineering. University of Seville (SPAIN). [mcamara@us.es](mailto:mcamara@us.es).

<sup>4</sup> Dep. of Continuum Mechanics and Structural Analysis. University of Seville (SPAIN). [andres@us.es](mailto:andres@us.es).

los resultados de estudios realizados sobre construcciones existentes. Una vez que los parámetros modales de la construcción histórica han sido identificados experimentalmente, los errores existentes en el modelo inicial de elementos finitos de la estructura pueden ser corregidos, denominándose dicho proceso de mejora, actualización de los modelos de elementos finitos.

En este artículo, se presenta en primer lugar el objeto de estudio, una capilla situada en el interior del Palacio Würzburg (Alemania). Se hará un breve recorrido tanto por los aspectos históricos más relevantes, como por su configuración arquitectónica. A continuación, se llevará a cabo la introducción a la metodología de actualización de los modelos de elementos finitos a partir de parámetros de la estructura obtenidos de forma experimental. Posteriormente, se aplica la técnica descrita al ajuste del modelo de elementos finitos de nuestro objeto de estudio. Se describe, en primer lugar, tanto la campaña experimental seguida, como el tratamiento de los datos que nos conducen a la identificación de las propiedades modales de la estructura. Seguidamente se presenta el estudio de sensibilidad de los principales parámetros físicos que presentan un mayor influencia en los parámetros modales de la estructuras. A partir de dichos parámetros, y tras un ajuste manual previo, basado en la comprensión del comportamiento global de la estructura, se desarrolla una actualización automática del modelo de elementos finitos. Para finalizar, se discutirán los resultados obtenidos y se presentarán las correspondientes conclusiones.

## 2. CAPILLA DEL PALACIO DE WÜRZBUG

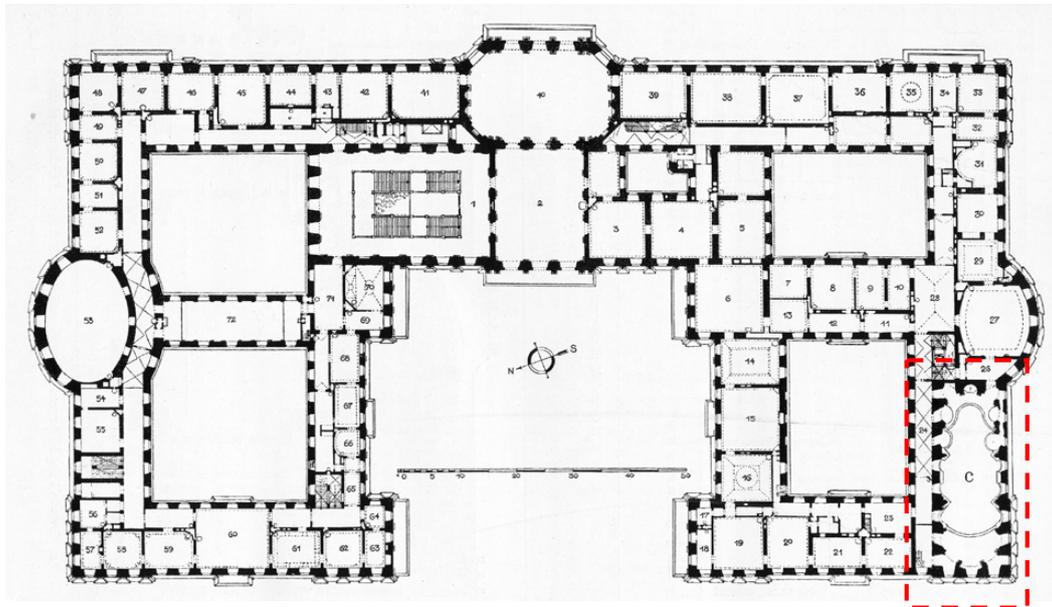
La capilla, objeto de estudio, se encuentra integrada en el palacio de Würzburg [1] (Fig. 1), una gran construcción perteneciente al Barroco Alemán, la cual fue declarada Patrimonio de la Humanidad por la UNESCO en el año 1981.



**Figura 1.** Palacio de Würzburg (Alemania).

La construcción del palacio se remonta a principios del siglo XVIII cuando la familia Schönborn, que dominaba el principado episcopal de Würzburg, decidió construir un palacio con el fin de trasladar la sede del episcopado. Friedrich Karl von Schönborn era de la opinión de que un proyecto de esa envergadura no podía abordarlo una sola persona, por lo que contrató a personalidades de relevancia como Johann Lukas von Hildebrandt y Johann Dientzenhofer, encargado de dirigir las obras. Más adelante, Balthasar Neumann [4] fue contratado para ayudar a Dientzenhofer. Neumann demostró su capacidad para el trabajo y se convirtió en el maestro principal de una obra que iba a tenerle ocupado durante más de treinta años.

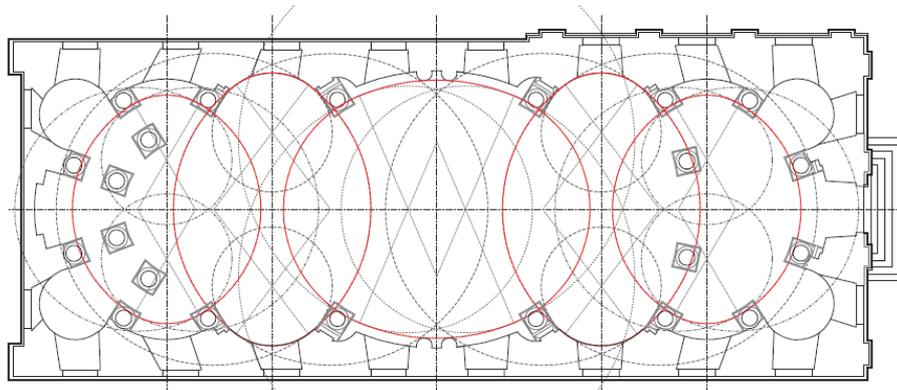
En las diferentes fases de diseño la capilla se posicionó en diferentes lugares, hasta que Balthasar Neumann la trasladó al sur este del palacio (Fig. 2). Su diseño lo consultó en París con Robert de Cotte y Gabriel Germain Boffrand, de prestigio reconocido y grandes conocedores de este tipo de edificios. Del primero de ellos, cabe destacar el diseño de la escalera principal, resuelta mediante una bóveda de gran interés, no sólo por los frescos pintados en ella, sino también por la solución estructural y constructiva propuesta.



**Figura 2.** Situación de la capilla en la planta del Palacio de Würzburg.

### 2.1. Configuración Arquitectónica

Profundizando en la configuración arquitectónica de la capilla, destacamos que Balthasar Neumann presenta una lectura espacial de claro carácter longitudinal. La capilla se organiza mediante la composición de tres celdas longitudinales principales conectadas mediante otras dos claramente transversales (Fig. 3). La intersección de dichas celdas se resuelve utilizando el mismo recurso que desarrolló Christoph Dientzenhofer, es decir, según un nervio alabeado generado mediante la intersección de dos cilindros de distinto diámetro.



**Figura 3.** Estudio de la traza de la planta y de la sección de la capilla del palacio de Würzburg.

Los espacios interiores son piezas que se diseñan independientemente de su embalaje. Esto provoca un desconocimiento total de lo que se aloja en el interior de esa caja hasta que no pasamos el umbral. El nexo de unión se realiza a través de las ventanas, elementos cuya disposición está dominada por la composición de fachada. Llama la atención la importante desmaterialización de los muros, aspecto unido al innovador concepto sobre el tratamiento de la luz que incluye Neumann en sus obras. Totalmente en contra de la idea de un elemento de gran espesor y suficientemente opaco como para poder soportar los empujes horizontales de la cubierta que sustentan. Se trata, por el contrario, de un muro suficientemente esbelto, con una altura de 15.2 metros y 1.5 m de espesor, y con un elevado porcentaje de huecos, de más del 50% de la superficie de fachada. El sistema de lunetos queda resuelto antes de llegar a las bóvedas, lo que simplifica el encuentro de los arcos superiores de los lunetos [3].

En cuanto a la cubierta, la utilización del nervio alabeado como recurso compositivo es fundamental, ya que organiza los espacios, marcando donde se encuentra su inicio y su final. Realmente se trata, desde un punto de vista estructural, de un falso nervio de dudosa capacidad portante, ya que Neumann realiza superficies continuas sin esqueleto estructural. Para poder reforzar la secuencia espacial se ve obligado a expresar dicho nervio en el interior mediante un recrecido de yeso (Fig. 4).



**Figura 4.** Vista desde el interior de la capilla.

Las bóvedas son superficies de mampostería de ladrillo de 30 cm de espesor, desarrolladas en una única capa, reforzadas en su base por medio del aumento del espesor en 15 cm. Refuerzo que también se hace presente en nervios radiales, los cuales presentan una sección de 45x45 cm (Fig. 5).



**Figura 5.** Vista desde el trasdós de las bóvedas.

### 3. INTRODUCCIÓN TEÓRICA PARA LA ACTUALIZACIÓN DE LOS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

La actualización de los modelos de elementos finitos basados en los resultados de los parámetros dinámicos de la estructura (frecuencias naturales y modos de vibración) puede desarrollarse desde dos perspectivas distintas: los métodos directos y los métodos iterativos [5].

Durante los primeros años de aplicación del método, el ajuste del modelo se realizaba, de forma directa, a través de la introducción de alteraciones en las matrices de rigidez y/o de masa de la estructura, lo que presentaba la ventaja de permitir un ajuste del modelo con datos experimentales a través de un algoritmo directo sin necesidad de realizar iteración alguna. Dicha metodología presentaba numerosos inconvenientes, destacándose que el proceso de actualización de las matrices se desarrolla sin significado físico alguno. Estos inconvenientes provocan al aparición de otra familia de métodos denominados iterativos donde la actualización del modelo [6], en base a los parámetros modales, se plantea a través de la introducción de cambios en algunos parámetros estructurales elegidos por el usuario y con un significado físico bien definido. En este caso, los parámetros modificados no están linealmente relacionados con los parámetros modales por lo que el proceso de ajuste necesita el uso de algoritmos de optimización para problemas no lineales, siendo necesario aplicar un proceso iterativo.

La forma más sencilla de realizar la actualización de los modelos de elementos finitos es minimizar las diferencias entre los resultados numéricos y experimentales [7]. La ecuación constituida con dicho objetivo es usualmente definida a partir de la formulación de un problema de mínimos cuadrados.

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m [z_j(\theta) - \tilde{z}_j]^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m r_j(\theta)^2 = \frac{1}{2} \cdot \|r(\theta)\|^2 \quad (1)$$

donde:  $z_j(\theta)$  son magnitudes resultantes del modelo numérico, que están relacionadas con las variables del modelo  $\theta$  (parámetros físicos de la estructura, tales como el módulo de elasticidad de los materiales constituyentes, la rigidez del suelo...), que serán objeto del ajuste; las variables  $\tilde{z}_j$  representan las mismas magnitudes obtenidas de forma experimental. Las diferencias entre los parámetros experimentales y numéricos se designan como residuos  $r_j(\theta)$ . Se aconseja que el número  $m$  de residuos sea mayor que el número de variables ajustadas  $\theta$ . En algunos casos, puede resultar interesante establecer diferentes variables peso  $w_j$  para cada uno de los residuos, modificando, de esta forma, la forma de la función objetivo. Ambos residuos (frecuencias naturales y modos de vibración), son aplicados en la ecuación anterior según la siguiente formulación:

$$r_f(\theta) = \frac{\lambda_j(\theta) - \tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_j}, j = 1, 2, \dots, m_f \quad (2)$$

donde  $\lambda_j(\theta)$  y  $\tilde{\lambda}_j$  son los valores propios de la estructura.

$$r_s(\theta) = \frac{\varphi_j^l(\theta)}{\varphi_j^r(\theta)} - \frac{\tilde{\varphi}_j^l}{\tilde{\varphi}_j^r}, j = 1, 2, \dots, m_f \quad (3)$$

donde  $\varphi_j^l$  y  $\varphi_j^r$  son las componentes del modo numérico de vibración  $j$  y  $\tilde{\varphi}_j^l$  y  $\tilde{\varphi}_j^r$  son las componentes obtenidas experimentalmente.

La anterior función objetivo debe minimizarse mediante la aplicación de un algoritmo de optimización. Dentro de los dos grupos de algoritmos existentes, locales y globales, los segundos serán utilizados en el desarrollo de la presente aplicación ya que por su mayor robustez la solución final no depende del punto inicial seleccionado en el proceso de búsqueda. Dentro de los métodos de optimización global, unos de los más frecuentemente utilizados, algoritmos genéticos, serán empleados en el desarrollo del estudio descrito en el presente artículo. Dichos algoritmos se basan en la analogía con la evolución natural donde los miembros de una población compiten entre sí para sobrevivir y reproducirse, presentando los mejores individuos un código genético que los ponen en ventaja respecto al resto de la población.

Finalmente, se comprueba la bondad del proceso de actualización a través de la comparación de las frecuencias naturales, de las formas modales y determinando el criterio del aseguramiento modal M.A.C., obtenido según la siguiente ecuación.

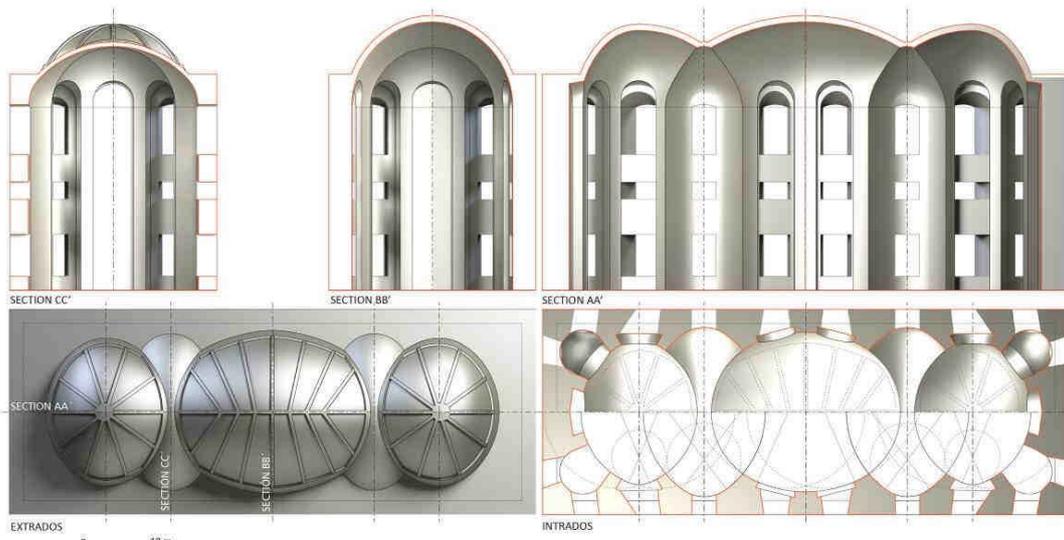
$$MAC_{j,K} = \frac{(\varphi_j^T \cdot \varphi_k)^2}{(\varphi_j^T \cdot \tilde{\varphi}_j) \cdot (\varphi_k^T \cdot \varphi_k)} \quad (4)$$

donde  $\varphi_j$  es el primer modo comparado,  $\varphi_k$  es el segundo modo comparado y T es la función traspuesta. Se ha considerado como criterio de aceptación de la bondad del ajuste que el valor de dicho parámetro sea superior a 0.90.

Una vez realizada la introducción teórica para la actualización de los modelos de elementos finitos a partir de las propiedades dinámicas de una estructura, a continuación, se presenta la campaña experimental realizada sobre nuestro objeto de estudio.

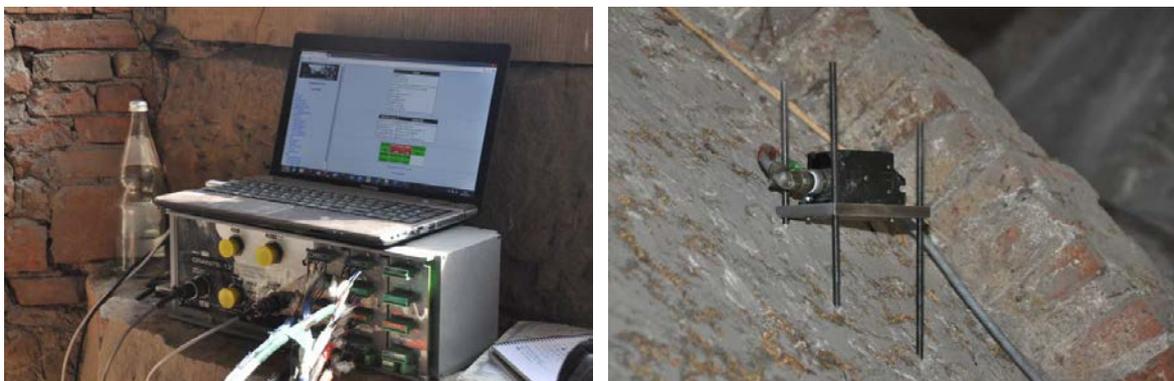
#### 4. PRUEBAS DE VIBRACIÓN AMBIENTAL

En el presente estudio, se ha realizado un estudio inicial mediante un análisis modal operacional (OMA), el cual nos proporciona los datos necesarios para poder actualizar nuestro modelo de elementos finitos [2, 8]. Como primer punto en el proceso de aplicación del análisis modal operacional se generó un modelo geométrico para decidir la situación de los acelerómetros [2, 9]. Este modelo tridimensional fue generado eliminando todos los componentes ornamentales y considerando únicamente la parte estructural (Fig. 6). A la hora de definir las propiedades mecánicas de la fábrica de ladrillo nos encontramos el gran nivel de incertidumbre que presentan debido a múltiples factores, por lo que posteriormente, como veremos en el siguiente apartado, se procedió a la actualización del mismo.



**Figura 6.** Modelo tridimensional

Con la ayuda del modelo de elementos finitos se localizaron los puntos más adecuados para la colocación de los acelerómetros de referencia, que fueron aquellos con mayor desplazamiento modal en los diferentes modos. Estos puntos se localizan en la intersección entre cúpulas y en el lateral de la misma. La monitorización de la estructura y la toma de datos se realizó con un equipo compuesto por ocho acelerómetros uniaxiales de fuerza balanceada Episensor de la casa comercial KINEMATRICS, con ancho de banda de 0-200 Hz, y una central de adquisición de datos tipo GRANITE de la misma casa (Fig. 7).



**Figura 7.** Central de Adquisición de datos, equipo informático y acelerómetro de fuerza balanceada.

Se midieron experimentalmente un total de 51 puntos donde los acelerómetros se situaron según las tres direcciones principales (vertical, transversal y longitudinal), de forma que se realizaron un total de veintiséis series de medidas con ocho acelerómetros cada una, siendo la duración de cada una de ellas de 10 min. Una vez tomados los datos, se procedió al tratamiento de los mismos (Fig. 8). Se estudió el comportamiento dinámico utilizando dos métodos de identificación modal: el método de Descomposición mejorada en el dominio de la frecuencia (EFDD) y el método de Identificación en el Subespacio Estocástico (SSI), ambos implementados en el programa comercial ARTEMIS.

**Figura 8.** Espectro de respuesta. Parámetros modales identificados mediante el método EFDD.

Con ambos métodos se identificaron cinco modos de vibración en un rango de frecuencias de 0 a 10 Hz. Los resultados obtenidos, así como la comparación del valor MAC entre ellos, se ilustran en la tabla 1. Dicho valor MAC (Modal Assurance Criterion) es el encargado de comparar las formas modales asociadas a cada uno de los modos. Cuanto más cercano a la unidad sea, mayor correlación entre las formas modales.

**Tabla 1.** Comparación de parámetros modales obtenidos mediante EFDD Y SSI.

Modo	Frecuencia Natural			MAC
	EFDD [Hz]	SSI [Hz]	Error [%]	
1	2,769	2,764	0,18	0,99
2	3,210	3,285	2,28	0,83
3	4,446	4,539	2,04	0,80
4	5,249	5,262	0,24	0,90
5	6,481	6,481	0,00	0,81

Se puede concluir mediante la observación de los modos de vibración identificados experimentalmente que los modos 1 y 3 presentan un comportamiento en flexión transversal, mientras que el segundo se corresponde más con una flexión longitudinal de la capilla. Por otro lado, los modos 4 y 5 son modos locales de parte de la cubierta por lo que los desplazamientos relativos de los diferentes puntos medidos no son tan marcados. Se considera por tanto que la bondad de los resultados en estos dos últimos modos no es suficiente para considerar dichas coordenadas en el proceso de actualización del modelo de elementos finitos de la estructura.

## 5. ACTUALIZACIÓN DEL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

### 5.1. Modelo Inicial de Elementos Finitos

Una vez localizados los parámetros modales de la estructura, retomamos el modelo inicial de elementos finitos con el objetivo de llevar a cabo una primera estimación numérica. Dicho modelo se compone por una malla de elementos sólidos (62.144 nodos y 251.267 elementos). Debido a la complejidad de las formas un elemento volumétrico de 8 nodos ha sido seleccionado. Al objeto de centrar el estudio en la cúpula, el efecto de los muros laterales se ha determinado, de forma simplificada, mediante elementos tipo muelle por nodo que representan el efecto de la rigidez a flexión del muro en la dirección considerada. Se han definido cuatro zonas en la estructura, muros 1 y 4 correspondientes a las dos bóvedas laterales y muros 2 y 3 correspondientes a la nave central (Fig. 9).

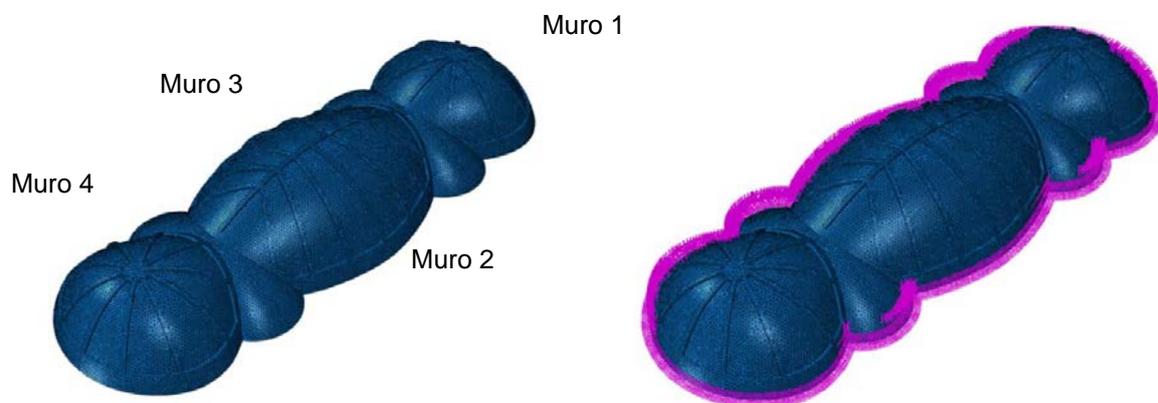


Figura 9. Modelo de elementos finitos

Inicialmente se llevó a cabo un primer análisis numérico modal para estimar las frecuencias naturales de la capilla (Tabla 2). Se presentan como referencia los tres primeros modos de vibración de la estructura, aquellos que van a ser utilizados durante el proceso de actualización.

Tabla 2. Modos de vibración numéricos originales/experimentales.

Modo	Frecuencia Natural [Hz]			MAC
	EFDD [Hz]	SSI [Hz]	Error [%]	
1	3.362	2.764	21.63	0.93
2	3.431	3.285	4.44	0.77
3	3.988	4.539	12.13	0.29

Como puede observarse en la Tabla 2, los errores entre los parámetros modales experimentales y numéricos son elevados, a pesar del empleo de un modelo de elementos finitos muy detallado, siendo por tanto necesario realizar un ajuste del modelo de elementos finitos de la estructura con el objeto de que el mismo sea capaz de representar de forma adecuada el comportamiento de la estructura.

## 5.2. Proceso de Actualización

En primer lugar, fueron determinados los parámetros físicos de la estructura que presenten mayor incertidumbre o sensibilidad con el comportamiento estructural de la misma. Para ello se realizó un estudio de sensibilidad entre los diferentes parámetros posibles. Una vez llevado a cabo dicho estudio de sensibilidad, 6 parámetros de actualización fueron seleccionados como aquellos que presentan mayor sensibilidad con el comportamiento dinámico de la estructura (Tabla 3). La selección de un número mayor de parámetros dificultaría en exceso la comprensión física del fenómeno de ajuste. Finalmente, se ha realizado la actualización del modelo mediante la implementación del algoritmo genético descrito anteriormente en el programa MATLAB.

**Tabla 3.** Parámetros de actualización.

Parámetros	Mínimo	Actualizado	Máximo
Modulo E Cúpulas [MPa]	1000	1440	1600
Rigidez Trans. Muro 2 [kN/m]	200	410	1000
Rigidez Trans. Muro 3 [kN/m]	10	21	200
Rigidez Long. Muro 2/3 [kN/m]	800	1161	1300
Rigidez Long. Muro 1/4 [kN/m]	800	1152	1300
Rigidez trans. Muro 1/4 [kN/m]	10	64	200

En este caso, la función objetivo fue definida a partir de los residuos generados por la diferencia entre las frecuencias naturales de vibración correspondientes a los tres primeros modos de vibración y los correspondientes valores MAC de cada uno de los modos. Bajo dicho criterio la función objetivo queda definida por 6 residuos (3+3) y optimizada mediante el empleo de un método de búsqueda con carácter global, algoritmos genéticos, usando una población de 1000 vectores, y alcanzándose el mínimo tras 50 iteraciones. Podemos ver en la figura 10, la gráfica que resume el proceso de actualización seguido.

**Figura 10.** Gráfica de Actualización del algoritmo genético

### 5.3. Resultados del Proceso de Actualización

Una vez llevada a cabo la implementación del proceso, podemos ver en la Tabla 4 como se mejora claramente la correlación entre las frecuencias naturales experimentales y numéricas, reduciendo la diferencia relativa entre frecuencias naturales e incrementando los valores de los ratios MAC (Fig. 11). Todos los parámetros modificados presentan valores que están dentro de su rango físico aceptable, facilitando el adecuado entendimiento del proceso de actualización y validando la convergencia del proceso de optimización empleado.

**Tabla 4.** Modos de vibración actualizados/experimentales.

Modos	Frecuencias naturales [Hz]			M.A.C.
	Actualizadas	Experimentales [SSI]	ERROR [%]	
1	2.762	2.764	0.07	0.95
2	3.283	3.285	0.06	0.91
3	4.533	4.539	0.13	0.89

**1º Modo:**

**2º Modo:**

**3º Modo:**

**MODELO NUMÉRICO**

**MODELO EXPERIMENTAL**

**Figura 11.** Modos de vibración

## 6. CONCLUSIONES

Por un lado, las pruebas de vibración ambiental realizadas, nos llevan a concluir la eficacia que presenta el Análisis Modal Operacional como técnica para identificar experimentalmente propiedades dinámicas en elementos concretos. Hemos certificado la utilidad de la técnica para identificar los parámetros modales de una cubierta ligera de fábrica. Cinco modos de vibración fueron identificados en un rango de frecuencia de 0 a 10 Hz con diferencias entre los EFDD y SSI siempre menores al 3%, y el valor MAC superior a 0,8. Esto nos indica una buena correlación entre los modos, lo cual nos aporta la seguridad necesaria para corroborar la existencia de los mismos.

En lo que se refiere al proceso de actualización, la correlación entre las frecuencias naturales, experimentales y numéricas, y los valores del M.A.C. de los tres modos de vibración estudiados se ha incrementado de forma notable. Todos los cambios en los parámetros están dentro de sus límites físicos aceptables, lo que facilita su interpretación técnica y valida el éxito global del proceso de actualización. El ajuste de los parámetros sugiere que la principal variable que controla el comportamiento dinámico de los primeros tres modos de vibración de la capilla es la rigidez de los muros, siendo esta inferior a la inicialmente considerada en el modelo de elementos finitos.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecer al proyecto de excelencia de la junta de Andalucía P12-TEP-2068, "Tratamiento y Recuperación del Patrimonio Edificado. La Inyección como Método de Consolidación de Estructuras de Fábrica", el apoyo proporcionado para realizar el presente estudio.

## REFERENCIAS

- [1] Atamturktur, S. & Laman, J. (2012). Finite Element Model Correlation and Calibration of Historic Masonry Monuments. *Structural Design of Tall and Special Buildings*, 21(2), 96-113.
- [2] Ramos, L. (2007). *Damage Identification on Masonry Structures Based on Vibration Signatures (PhD Thesis)*. University of Minho.
- [3] Compán, V. (2012). *Comportamiento estructural de las geometrías arquitectónicas del Barroco Centroeuropeo (unpublished PhD thesis)*. Universidad de Sevilla.
- [4] Christian, F. Otto. (1979). *Space into Light. MIT Press Series. 0-262-15019-0*.
- [5] Mottershead, J.E., Friswell, M.I. (1993). *Model Updating in structural dynamics: a survey. Journal of Sound and Vibration* 167, 347-375.
- [6] Zivanovic, S., Pavic, A., Reynold, R. (2007). *Finite element modelling and updating of a lively footbridge. The complete process. Engineering Structures* 301(1-2), 126-145.
- [7] Teughels A. (2003). *Inverse modelling of civil engineering structures based on operational modal data (PhD. Thesis)*. Katholieke Universiteit Leuven.
- [8] Rodrigues, J. (2004). *Identificação Modal Estocástica, Métodos de Análise e Aplicações em Estruturas de Engenharia Civil (PhD Thesis)*. University of Porto.