

XX CONGRESO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICACIONES  
X CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA  
Sevilla, 24-28 septiembre 2007  
(pp. 1-8)

## Submatriz sudeste más próxima que hace múltiple un valor propio prescrito

JUAN-MIGUEL GRACIA<sup>1</sup>, FRANCISCO E. VELASCO<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>*Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad del País Vasco, Facultad de Farmacia, Paseo de la Universidad, 7, 01006 Vitoria-Gasteiz, Spain. E-mail: [juanmiguel.gracia@ehu.es](mailto:juanmiguel.gracia@ehu.es), [franciscoenrique.velasco@ehu.es](mailto:franciscoenrique.velasco@ehu.es).*

**Palabras clave:** Kalman, Moore-Penrose, Schur, Wilkinson, continuidad y derivadas direccionales de valores singulares, controlable, observable

### Resumen

Dadas cuatro matrices complejas  $A, B, C$  y  $D$ , donde  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $D \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , estudiamos el problema de Wilkinson generalizado: ¿Cuál es la distancia desde  $D$  al conjunto de matrices  $X \in \mathbb{C}^{m \times m}$  tales que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$$

tenga algún valor propio múltiple? En esta comunicación resolvemos este problema, salvo en un caso, y damos una conjetura sobre la solución completa.

## 1. Introducción

Utilizando ideas sobre el radio de estabilidad de matrices reales de Qiu y otros [8], Malyshev [6] logró una fórmula elegante que resolvió el problema de Wilkinson: Dada una matriz  $G \in \mathbb{C}^{q \times q}$  con todos sus valores propios simples hallar la matriz más próxima a  $G$ , en la norma espectral, que tenga algún valor propio múltiple. Este problema esperó solución durante tres décadas.

Malyshev [6, Section 6] observó que su fórmula permitía hallar el valor crítico de flameo “flutter analysis” de una matriz  $G \in \mathbb{R}^{q \times q}$ . Este análisis se utiliza en el estudio de vibraciones peligrosas de estructuras mecánicas tales como las alas de un avión o el tablero de un puente suspendido [9]. Si los valores propios de  $G$  son reales y simples, entonces todas las matrices reales suficientemente próximas a  $G$  tienen sus valores propios

simples y reales. El valor crítico de flameo de la estructura representada por  $G$  viene dado por  $f_{\text{crit}} := \min\{\|Y - G\| : Y \in \mathbb{R}^{q \times q} \text{ tiene un valor propio múltiple real}\}$ , que coincide con

$$f_{\text{crit}} = \min_{x \in \mathbb{R}} \max_{t \geq 0} \sigma_{2q-1} \begin{pmatrix} xI - G & tI \\ 0 & xI - G \end{pmatrix}.$$

A partir de  $f_{\text{crit}}$  el valor propio real doble (genéricamente) de  $Y$  se bifurca en dos valores propios complejos con parte imaginaria no nula y simples.

En esta comunicación resolvemos el problema de Wilkinson cuando se perturban únicamente los elementos de una submatriz sudeste de  $G$  (perturbación estructurada), salvo en un caso especial. Supongamos que  $G$  está partida en la forma  $G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  donde  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{C}^{m \times m}$  y  $q = n + m$ .

Empezamos por la cuestión: Si  $z_0 \in \mathbb{C}$  ¿cuál es la distancia desde  $D$  al conjunto  $\mathcal{M}$  de matrices  $X \in \mathbb{C}^{m \times m}$  tales que  $z_0$  es valor propio múltiple de  $G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$  en el caso de que este conjunto no sea vacío? Para analizar en qué casos  $\mathcal{M} = \emptyset$  utilizamos elementos de teoría de control (descomposición de Kalman, par controlable, par observable, forma canónica controladora). En el caso particular en el que  $z_0$  recorra los números imaginarios puros y  $G$  sea una matriz estable, averiguamos la distancia mínima  $d$  de  $D$  a  $X$  tal que  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$  tiene un valor propio imaginario múltiple. Este valor  $d$  da un margen de seguridad que permite asegurar la acotación de todas las soluciones del sistema diferencial  $\dot{x} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} x$ , siempre que  $\|X - D\| < d$ . Más pertinente aun sería resolver el problema de hallar la distancia desde  $D$  al conjunto de matrices  $X$  tales que  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$  tiene algún valor propio imaginario  $\omega i$  puro de índice  $\nu(\omega i) \geq 2$ .

En [6] Malyshev dio la fórmula

$$\min_{\substack{Y \in \mathbb{C}^{q \times q} \\ m(z_0, Y) \geq 2}} \|Y - G\| = \max_{t \geq 0} \sigma_{2q-1} \begin{pmatrix} z_0 I_q - G & t I_q \\ 0 & z_0 I_q - G \end{pmatrix}, \quad (1)$$

donde  $G \in \mathbb{C}^{q \times q}$  es una matriz dada con valores propios simples y  $z_0$  es un número complejo dado. Aquí  $\sigma_{2q-1}$  denota el  $(2q - 1)$ -ésimo valor singular cuando estos valores están ordenados en sentido decreciente; la norma  $\|\cdot\|$  es la espectral, y  $m(z_0, Y)$  denota la multiplicidad algebraica de  $z_0$  como valor propio de  $Y$ .

En este trabajo vamos a estudiar un problema similar, pero perturbando una parte de la matriz. Concretamente, abordamos el problema siguiente: dadas cuatro matrices complejas  $A, B, C, D$ , donde  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $D \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , nos preguntamos por la distancia desde  $D$  al conjunto de matrices  $X \in \mathbb{C}^{m \times m}$  tales que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}$$

tenga algún valor propio múltiple.

Vamos a concretar más este problema, e introducir algunas notaciones. Dada  $G \in \mathbb{C}^{q \times q}$ , denotamos por  $\Lambda(G)$  su espectro y por  $\Lambda_2(G)$  el conjunto de valores propios múltiples. Denotaremos por  $L_{n,m}$  el producto cartesiano  $\mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times m} \times \mathbb{C}^{m \times n}$ . Dada una terna de matrices  $\alpha := (A, B, C) \in L_{n,m}$ , para toda  $X \in \mathbb{C}^{m \times m}$  denotaremos por

$$M(\alpha, X) := \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix}. \quad (2)$$

De ahora en adelante  $D$  será una matriz de  $\mathbb{C}^{m \times m}$ . Los problemas que vamos a abordar en este trabajo son los siguientes:

**Problema 1.** Hallar el mínimo

$$\min_{\substack{X \in \mathbb{C}^{m \times m} \\ \Lambda_2(M(\alpha, X)) \neq \emptyset}} \|X - D\|, \quad (3)$$

siempre que el conjunto  $\mathcal{M}_2(\alpha) := \{X \in \mathbb{C}^{m \times m} \mid \Lambda_2(M(\alpha, X)) \neq \emptyset\}$  no sea vacío.

**Problema 2.** Dado  $z_0 \in \mathbb{C}$  hallar el mínimo

$$\min_{\substack{X \in \mathbb{C}^{m \times m} \\ m(z_0, M(\alpha, X)) \geq 2}} \|X - D\|, \quad (4)$$

siempre que el conjunto  $\mathcal{M}_2(z_0, \alpha) := \{X \in \mathbb{C}^{m \times m} \mid m(z_0, M(\alpha, X)) \geq 2\}$  no sea vacío.

A la hora de abordar el Problema 2, podemos suponer que  $z_0 = 0$ . Para el Problema 1, una primera cuestión que surge es si el conjunto  $\mathcal{M}_2(\alpha)$  es no vacío.

## 2. Existencia del espectro de multiplicidad $\geq 2$

Definimos el conjunto

$$\hat{\Lambda}_2(\alpha) := \bigcup_{X \in \mathbb{C}^{m \times m}} \Lambda_2(M(\alpha, X)),$$

que llamaremos espectro extendido múltiple de la terna de matrices  $\alpha$ .

**Definición 1.** Dadas dos matrices  $N_1, N_2 \in \mathbb{C}^{(n+m) \times (n+m)}$ , diremos que son  $(n, m)$ -semejantes si existen matrices  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  y  $Q \in \text{GL}_m(\mathbb{C})$  tales que

$$N_1 = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} N_2 \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1}.$$

**Lema 1.** Sean  $\alpha, \alpha' \in L_{n,m}$ . Si las matrices  $M(\alpha, 0)$  y  $M(\alpha', 0)$  son  $(n, m)$ -semejantes, entonces  $\hat{\Lambda}_2(\alpha) = \hat{\Lambda}_2(\alpha')$ .

**Lema 2.** Supongamos que  $B$  y  $C$  son matrices no nulas. Entonces, la matriz  $M(\alpha, 0)$  es  $(n, m)$ -semejante, con matrices de paso unitarias, a una matriz de la forma

$$\left( \begin{array}{cccc|c} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & B_3 \\ A_{41} & A_{42} & 0 & A_{44} & B_4 \\ \hline C_1 & 0 & 0 & C_4 & 0 \end{array} \right), \quad (5)$$

siendo

$$\left( \begin{array}{cc|c} A_{33} & A_{34} & B_3 \\ 0 & A_{44} & B_4 \end{array} \right)$$

un par controlable. Además, si  $C_i \neq 0$ , el par  $(C_i, A_{ii})$  es observable,  $i = 1, 4$ . Por el contrario, si  $C_i = 0$ , entonces en la forma (5) eliminamos los bloques  $(i, k), (k, i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Un resultado sobre el conjunto  $\hat{\Lambda}_2(\alpha)$ , es el siguiente:

**Teorema 3.** *Sea una terna  $\alpha = (A, B, C) \in L_{n,m}$  en la forma (5). Entonces:*

- (i) *Si  $m = 1$ , el conjunto  $\hat{\Lambda}_2(\alpha)$  es no vacío y finito.*
- (ii) *Si  $m > 1$ ,  $\mathbb{C} \setminus \Lambda(A_{44}) \subset \hat{\Lambda}_2(\alpha)$ .*

### 3. Resultados auxiliares

Un primer resultado básico, utilizado en nuestro trabajo, es el siguiente:

**Teorema 4.** *Dada una terna  $\alpha = (A, B, C) \in L_{n,m}$  y  $D \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , denotemos por*

$$\rho := \text{rg}[A, B] + \text{rg} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - \text{rg} A.$$

*Entonces  $\rho \leq \text{rg} M(\alpha, X)$ , para toda matriz  $X \in \mathbb{C}^{m \times m}$ . Ahora sean  $M := (I - AA^\dagger)B$  y  $N := C(I - A^\dagger A)$ . Entonces, para toda  $X \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $\text{rg} M(\alpha, X) = \rho + \text{rg} S(X)$ , donde*

$$S(X) := (I - NN^\dagger)(X - CA^\dagger B)(I - M^\dagger M). \quad (6)$$

*Además, para todo entero  $r$  tal que  $\rho \leq r < \text{rg} M(\alpha, D)$ , se cumple*

$$\min\{\|X - D\| : X \in \mathbb{C}^{m \times m}, \text{rg} M(\alpha, X) \leq r\} = \sigma_{p+1}(S(D)),$$

*donde  $p = r - \rho$ .*

Por  $Z^\dagger$  se denota la inversa Moore-Penrose de una matriz  $Z \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . La demostración del Teorema 4 puede verse en [7, Theorem 19,(8.1), (8.2) and (8.6)], [2, Theorem 3], [11, Theorem 2.1] y Theorem 6.3.7, pág. 102, del libro [1]. También necesitamos resultados sobre derivadas direccionales de valores singulares de matrices que dependen de varias variables reales.

**Definición 2.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  abierto y  $d \in \mathbb{R}^p$ ,  $\|d\|_2 = 1$ . Sea la función  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Se llama *derivada direccional* de  $f$  en el punto  $x_0 \in \Omega$  respecto de  $d$  al límite

$$f'(x_0, d) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}.$$

siempre que exista.

Sea la función  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$  de clase  $C^1$ . Para cada  $x \in \Omega$ , sean

$$s_1(x) := \sigma_1(F(x)) \geq \cdots \geq s_q(x) := \sigma_q(F(x)), \text{ con } q := \min(m, n),$$

los valores singulares de  $F(x)$ . Supongamos que

$$s_{k-i_k}(x_0) > \overbrace{s_{k-i_k+1}(x_0) = \cdots = s_k(x_0)}^{i_k} = \overbrace{s_{k+1}(x_0) = \cdots = s_{k+j_k}(x_0)}^{j_k} > s_{k+j_k+1}(x_0)$$

con  $r_k = i_k + j_k$  la multiplicidad del valor singular  $s_k(x_0)$ . Sean  $U_2 := [u_{k-i_k+1}, \dots, u_{k+j_k}] \in \mathbb{C}^{m \times r_k}$  y  $V_2 := [v_{k-i_k+1}, \dots, v_{k+j_k}] \in \mathbb{C}^{n \times r_k}$  matrices cuyas columnas son pares de vectores singulares de  $F(x_0)$  para  $s_k(x_0)$ . La *parte real* de una matriz  $G \in \mathbb{C}^{n \times n}$  se define por  $\text{Re}(G) := (G + G^*)/2$ ; la matrix  $\text{Re}(G)$  es hermitica.

**Teorema 5** (Hiriart-Urruty and Ye, Sun, Lippert). *Para cada  $k \in \{1, \dots, q\}$ ,  $d = (d_1, \dots, d_p) \in \mathbb{R}^p$  unitario,  $s'_k(x_0, d) = \mu_{i_k}$ , con  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{i_k} \geq \dots \geq \mu_{r_k}$  los valores propios de la matriz*

$$\operatorname{Re} \left[ U_2^* \left( \sum_{j=1}^p d_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(x_0) \right) V_2 \right].$$

**Lema 6** ([6]). *Sean  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}$  y  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$  una función analítica en  $\Omega$ . Si la función  $\sigma_i(F(t))$  tiene un máximo local (o mínimo) en  $t_0 \in \Omega$ , entonces existe un par de vectores singulares  $u \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ ,  $v \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  de  $F(t_0)$  asociados a  $\sigma_i(F(t_0))$  tales que*

$$\operatorname{Re} \left( u^* \frac{dF}{dt}(t_0)v \right) = 0.$$

#### 4. Cota inferior del mínimo (4)

Suponemos, sin pérdida de generalidad, que  $z_0 = 0$ . Consideremos la terna  $\alpha = (A, B, C) \in L_{n,m}$  y  $D \in \mathbb{C}^{m \times m}$ . Sea  $X$  tal que  $m(z_0, M(\alpha, X)) \geq 2$ . Entonces,  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{rg} \left( \begin{array}{cc|cc} A & tI_n & B & 0 \\ 0 & A & 0 & B \\ \hline C & 0 & X & tI_m \\ 0 & C & 0 & X \end{array} \right) \leq 2(n+m) - 2. \quad (7)$$

Ahora, utilizando las notaciones del Teorema 4, consideremos

$$\begin{aligned} \rho(t) &:= \operatorname{rg} \left( \begin{array}{cc|cc} A & tI_n & B & 0 \\ 0 & A & 0 & B \end{array} \right) + \operatorname{rg} \left( \begin{array}{cc} A & tI_n \\ 0 & A \\ \hline C & 0 \\ 0 & C \end{array} \right) - \operatorname{rg} \left( \begin{array}{cc} A & tI_n \\ 0 & A \end{array} \right), \\ p(t) &:= 2n + 2m - 2 - \rho(t), \end{aligned} \quad (8)$$

$$M(t) := \left( I_{2n} - \begin{pmatrix} A & tI_n \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & tI_n \\ 0 & A \end{pmatrix}^\dagger \right) \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$N(t) := \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \left( I_{2n} - \begin{pmatrix} A & tI_n \\ 0 & A \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} A & tI_n \\ 0 & A \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} S_2(t) &:= (I_{2m} - N(t)N(t)^\dagger) \times \\ &\quad \left( \begin{pmatrix} D & tI_m \\ 0 & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & tI_n \\ 0 & A \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right) (I_{2m} - M(t)^\dagger M(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

Con estas notaciones se tiene:

**Proposición 7** (Acotación inferior de (4)).

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sigma_{p(t)+1}(S_2(t)) \leq \min_{X \in \mathcal{M}_2(0, \alpha)} \|X - D\|.$$

**Conjetura 8.**

$$\min_{\substack{X \in \mathbb{C}^{m \times m} \\ m(0, M(\alpha, X)) \geq 2}} \|X - D\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sigma_{p(t)+1}(S_2(t)), \quad (10)$$

donde

$$\sigma_j(S_2(t)) := \begin{cases} \infty & \text{si } j < 1, \\ 0 & \text{si } j > 2m. \end{cases}$$

Si no existe ninguna matriz  $X \in \mathbb{C}^{m \times m}$  tal que  $m(z_0, M(\alpha, X)) \geq 2$ , podemos interpretar que  $\min \|X - D\| = \infty$ .

## 5. Caso $0 \notin \Lambda(A)$

En este caso, la Conjetura 8 es cierta. Además, como  $0 \notin \Lambda(A)$ , de (8) obtenemos inmediatamente que  $p(t) + 1 = 2m - 1$ . Luego, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 9.** *Supongamos que 0 no es valor propio de A. Entonces*

$$\min_{X \in \mathcal{M}_2(0, \alpha)} \|X - D\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sigma_{2m-1}(S_2(t)). \quad (11)$$

Como  $0 \notin \Lambda(A)$ , denotando por  $\mathcal{M} := D - CA^{-1}B$  y  $\mathcal{N} := I_m + CA^{-2}B$ , de (9) resulta

$$S_2(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & t\mathcal{N} \\ 0 & \mathcal{M} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

En la demostración del Teorema 9, el caso  $m = 1$  se puede hacer directamente. Para  $m > 1$  distinguimos tres casos: (1) cuando el supremo se alcanza en un  $t_0 > 0$ ; (2) cuando sólo se alcanza en  $t_0 = 0$ ; (3) cuando no se alcanza en ningún  $t \in \mathbb{R}$ . En este caso (3)  $\text{rg } \mathcal{N} = 1$ , además

$$\ell := \sup_{t \in \mathbb{R}} \sigma_{2m-1}(S_2(t)) < \infty.$$

El valor  $\ell$  lo podemos determinar así: como  $\text{rg } \mathcal{N} = 1$  existen matrices unitarias  $U, V$  tales que

$$U^* \mathcal{N} V = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_1 > 0.$$

Sean

$$U^* \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11}^1 & \mathcal{M}_{12}^1 \\ \mathcal{M}_{21}^1 & \mathcal{M}_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} V = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11}^2 & \mathcal{M}_{12}^2 \\ \mathcal{M}_{21}^2 & \mathcal{M}_{22}^2 \end{pmatrix},$$

con  $\mathcal{M}_{11}^1, \mathcal{M}_{11}^2 \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$ . Entonces

$$\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{2m-1}(S_2(t)) = \sigma_{2m-2} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}_{21}^1 & \mathcal{M}_{22}^1 \\ \mathcal{M}_{12}^2 & 0 & 0 \\ \mathcal{M}_{22}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 6. Caso $0 \in \Lambda(A)$

Para esta situación, vamos a considerar varias opciones:

### 6.1. Caso $B = 0$ ó $C = 0$ .

Para este caso, la Conjetura 8 es cierta, además la distancia es 0.

### 6.2. Caso $B \neq 0$ y $C \neq 0$ .

Por el Lema 2, podemos suponer que la terna  $(A, B, C)$  está en la forma (5). Por simplificación, vamos a denotar por

$$\tilde{A} := \text{diag}(A_{11}, A_{22}, A_{33}), \quad A_4 := A_{44} \in \mathbb{C}^{n_4 \times n_4}.$$

Ahora, consideramos los casos siguientes:

$$\begin{aligned} & \text{(I)} \quad 0 \in \Lambda_2(\tilde{A}) \\ & \text{(II)} \quad 0 \notin \Lambda_2(\tilde{A}), C_4 = 0, \\ & \text{(III)} \quad 0 \notin \Lambda_2(\tilde{A}), C_4 \neq 0, \begin{cases} \text{(III-a)} \quad 0 \in \Lambda(\tilde{A})/\Lambda_2(\tilde{A}) \\ \text{(III-b)} \quad 0 \notin \Lambda(\tilde{A}), m = 1 \\ \text{(III-c)} \quad 0 \notin \Lambda(\tilde{A}), m > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

#### 6.2.1. I.- $0 \in \Lambda_2(\tilde{A})$

La Conjetura 8 es cierta, concretamente la distancia es 0 .

#### 6.2.2. II.- $0 \notin \Lambda_2(\tilde{A}), C_4 = 0$ .

También para este caso la Conjetura 8 es cierta. Además, la distancia es  $\sigma_m(D)$ .

#### 6.2.3. III-a.- $C_4 \neq 0, 0 \in \Lambda(\tilde{A})/\Lambda_2(\tilde{A})$

Denotando por  $\alpha_4 = (A_4, B_4, C_4)$ , vamos a considerar la matriz  $M(\alpha_4, D)$ . Ahora, tenemos tres opciones:

$\text{rg } M(\alpha_4, D) < n_4 + m$ : en este caso la Conjetura 8 es cierta, y la distancia es 0.

Supongamos ahora que  $\text{rg } G_D = n_4 + m$ . Como  $(A_4, B_4)$  es controlable  $\nu(A_4) = \dim \ker(A_4) \leq m$ .

Si  $\nu(A_4) = m$ : la distancia es infinita, pero la Conjetura 8 no está probada.

Si  $\nu(A_4) < m$ : el Problema 2 se resuelve en términos del Teorema 4, mas la Conjetura 8 no está probada.

#### 6.2.4. III-b.- $C_4 \neq 0, 0 \notin \Lambda(\tilde{A}), m = 1$

Para este caso la Conjetura 8 es cierta, y la distancia es infinita.

### 6.2.5. III-c.- $C_4 \neq 0, 0 \notin \Lambda(\tilde{A}) m > 1$

Como  $(A_4, B_4)$  es controlable, entonces  $\nu(A_4) \leq m$ . Este caso no está resuelto, aunque se pueden avanzar algunos hechos, aplicando el Teorema 4:

- Si  $\nu(A_4) = m$ , entonces la distancia es infinita.
- Si  $\nu(A_4) \leq m - 2$ , la distancia es finita.
- Si  $\nu(A_4) = m - 1$ , la distancia puede ser finita o infinita. Dos ejemplos

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{array} \right) \text{ infinita ; } \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{array} \right) \text{ finita , } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Agradecimientos

Este material fue presentado en seminarios del Grupo de Álgebra Lineal de la Universidad del País Vasco, a cuyos miembros agradecemos el interés prestado y sus comentarios. Este trabajo fue financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia, Proyecto MTM2004-06389-CO2-01.

### Referencias

- [1] S. L. Campbell and C. D. Meyer. *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Pitman, London, 1979.
- [2] J. Demmel. The smallest perturbation of a submatrix which lowers the rank and constrained total least squares problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(1):199-206, 1987. .
- [3] J.-M. Gracia. Nearest matrix with two prescribed eigenvalues. *Linear Algebra Appl.*, 401:277-294, 2005.
- [4] J. B. Hiriart-Urruty and D. Ye. Sensitivity analysis of all eigenvalues of a symmetric matrix. *Numer. Math.*, 70:45-72, 1995.
- [5] Ross A. Lippert. Fixing two eigenvalues by a minimal perturbation. *Linear Algebra Appl.*, 406:177-200, 2005.
- [6] A.-N. Malyshev. A formula for the 2-norm distance from a matrix to the set of matrices with multiple eigenvalues. *Numer. Math.*, 83(3):443-454, 1999.
- [7] G. Marsaglia and G. P. Styan. Equalities and inequalities for ranks of matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 2:269-292, 1974.
- [8] L. Qiu, B. Bernhardsson, A. Rantzer, E.J. Davison, P.M. Young, J.C. Doyle. *A formula for computation of the real stability radius*. *Automatica* 31 (6) (1995), 879-890.
- [9] A.P. Seyranian and A.A. Mailybaev. *Multiparameter stability theory with mechanical applications*. World Scientific, Singapore, 2003.
- [10] Ji-Guan Sun. Sensitivity analysis of zero singular values and multiple singular values. *J. Comput. Math.*, 6(4)70:325-335, October 1988.
- [11] M. Wei. Perturbation theory for the Eckart-Young-Mirsky theorem and the constrained total least squares problem. *Linear Algebra Appl.*, 280:267-287, 1998.
- [12] J. H. Wilkinson. Sensitivity of eigenvalues. *Utilitas Mathematica*, 25:5-76, 1984.