XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Propiedades de las Matrices Totalmente no Positivas

R. Cantó[1], B. Ricarte[1], A.M. Urbano[1]

[1] *Institut de Matemàtica Multidisciplinar, Universidad Politécnica de Valencia, E-46022 Valencia.*
E-mails: rcanto@mat.upv.es, bearibe@mat.upv.es, amurbano@mat.upv.es.

Palabras clave: Matrices totalmente no positivas, factorización LDU, eliminación de Neville.

Resumen

Una matriz real A se dice que es totalmente (negativa) no positiva si todos sus menores son (negativos) no positivos. En este trabajo veremos la factorización LDU de una matriz totalmente no positiva e invertible a partir del método de eliminación completo de Neville sin intercambio de filas y columnas. Dicha factorización nos permitirá generar de una forma sencilla matrices totalmente (negativas) no positivas del cualquier orden a partir de matrices totalmente positivas.

1. Introducción

Una matriz real A de tamaño $n \times n$ es (*estrictamente*) *totalmente positiva* y se denota como matriz (STP) TP, si todos sus menores son (positivos) no negativos. Un trabajo clásico donde se estudia este tipo de matrices desde un punto de vista algebraico es [1]. La importancia de las matrices totalmente positivas radica en la gran cantidad de aplicaciones que tiene en teoría de la aproximación, diseño asistido por ordenador, economía estadística, etc. [11]. Numerosos autores han estudiado este tipo de matrices obteniendo caracterizaciones que permiten reducir el número de menores a chequear para saber si una matriz es (STP) TP, así como una factorización del tipo LDU mediante el algoritmo de Gauss y el método de eliminación completo de Neville ([3, 4],[6]-[8]).

Cuando todos los menores de la matriz A son (negativos) no positivos se dice que la matriz A es *totalmente (negativa) no positiva* y se denota como matriz (t.n.) t.n.p. Las matrices t.n.p. pueden considerarse una generalización de las *N-matrices*, es decir, matrices cuyos menores principales son negativos y que aparecen en modelos económicos, en problemas de análisis multivariable, problemas de complementariedad y en conexión con el algoritmo de Lemke para resolver problemas de programación lineal y de programación cuadrática convexa [12, 13].

En [9] los autores presentan una caracterización de las matrices t.n. en términos de los parámetros obtenidos a partir del proceso de eliminación de Neville y en [5] se obtiene una descomposición UDL de esta clase de matrices, así como propiedades espectrales y complementos de Schur.

En [2] se estudian las propiedades de las matrices t.n.p. semejantes a las propiedades que han sido estudiadas para las matrices TP. Para ello en primer lugar se obtiene una descomposición del tipo LDU para las matrices t.n.p. invertibles aplicando el algoritmo de Gauss sin intercambio de filas, lo que permite afirmar que la matriz L es triangular inferior, U triangular superior y D es una matriz diagonal que contiene los pivotes del proceso de eliminación. Como consecuencia de esta descomposición se estudia la caracterización de las matrices t.n.p. a partir del signo de un número reducido de menores.

Es conocido que la descomposición LDU también puede obtenerse, bajo ciertas condiciones, aplicando el método de eliminación completo de Neville. En este trabajo vamos a demostrar que a las matrices t.n.p. invertibles y con el elemento que ocupa la posición $(1,1)$ negativo podemos aplicarle dicho método sin intercambio de filas ni de columnas para obtener la factorización LDU. Finalmente, veremos cómo utilizar la factorización obtenida para generar matrices t.n.p. de cualquier orden a partir de matrices TP.

2. Notación y resultados preliminares

Sea A una matriz real de tamaño $n \times n$. La submatriz de A formada por las filas de índices $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ y las columnas de índices $\beta \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ se denota por $A[\alpha|\beta]$ y la submatriz principal $A[\alpha|\alpha]$ se abrevia de la forma $A[\alpha]$. El conjunto de índices α^c denota el complemento del conjunto α. Siguiendo la notación de [1], dado $k, n \in \mathbb{N}$, con $1 \leq k \leq n$, $\mathcal{Q}_{k,n}$ denota el conjunto de todas las sucesiones crecientes de k números naturales menores o iguales que n. Por tanto, una matriz A de tamaño $n \times n$ es una matriz TP (STP) si $\det A[\alpha|\beta] \geq 0 \;\; (> 0) \;\; \alpha, \beta \in \mathcal{Q}_{k,n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. De manera análoga, una matriz A de tamaño $n \times n$ es una matriz t.n.p. (t.n.) si $\det A[\alpha|\beta] \leq 0 \;\; (< 0) \;\; \alpha, \beta \in \mathcal{Q}_{k,n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
La siguiente proposición presenta algunas propiedades importantes de las matrices t.n.p.

Proposición 1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz t.n.p. de tamaño $n \times n$.*

1. *Si D es una matriz diagonal positiva, entonces DA y AD son matrices t.n.p.*
2. *Si D es una matriz diagonal positiva, entonces DAD^{-1} es una matriz t.n.p.*
3. *Si $a_{ii} \neq 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $a_{ij} < 0$, para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$.*
4. *Cualquier submatriz de A es una matriz t.n.p.*
5. *La propiedad de total negatividad no se preserva, por regla general, bajo semejanza de permutación.*
6. *Si P es la matriz de permutación $[n, n-1, \ldots, 2, 1]$ entonces PAP es una matriz t.n.p.*
7. *Si la ith fila de A es nula y P es la matriz de permutación $[1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n, i]$, entonces PA es una matriz t.n.p.*

8. Si A es invertible, entonces $a_{ij} < 0$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$, con $a_{ij} \notin \{a_{11}, a_{nn}\}$.

Es conocido que una matriz TP admite una factorización LDU donde L (U) es una matriz TP triangular inferior (superior) con unos en la diagonal principal y D es una matriz diagonal positiva ([1, Teorema 3.5] y [3, Teorema 1.1]). Utilizando esta descomposición en [2] se demuestra el resultado siguiente que permite caracterizar las matrices t.n.p. invertibles a partir de una factorización LDU del mismo tipo.

Teorema 1 *([2, Teorema 4.2]) Sea A una matriz de tamaño $n\times n$ con $a_{11} < 0$ y $a_{nn} \leq 0$. Entonces, A es una matriz t.n.p. si y sólo si A puede escribirse como $A = LDU$ donde L (U) es una matriz TP de tamaño $n\times n$ triangular inferior (superior) con todas las entradas en la parte triangular inferior (superior) positivas y con unos en la diagonal principal y D es una matriz diagonal con todas las entradas de la diagonal principal positivas excepto una negativa en la posición $(1, 1)$.*

El teorema anterior permite, al igual que en el caso de las matrices TP, dar la siguiente caracterización de las matrices invertibles t.n.p. en términos del signo de algunos de sus menores.

Teorema 2 *([2, Teorema 5.1]) Sea A una matriz invertible de tamaño $n\times n$ con todas sus entradas negativas excepto la entrada (n, n) que es no positiva. Entonces, A es una matriz t.n.p. si y sólo si se satisfacen simultáneamente, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned} &\det A[\alpha|1, 2, \ldots, k] \leq 0, && \forall\alpha \in \mathcal{Q}_{k,n} \\ &\det A[1, 2, \ldots, k|\beta] \leq 0, && \forall\beta \in \mathcal{Q}_{k,n} \\ &\det A[1, 2, \ldots, k] < 0 \end{aligned}$$

3. Descomposición LDU de matrices invertibles totalmente no positivas a partir del método de eliminación de Neville

El método de eliminación de Neville consiste en hacer ceros en una columna de una matriz sumando a cada fila un múltiplo de la fila anterior, a diferencia del método de eliminación de Gauss que usa una fila fija con un pivote fijo. Un desarrollo detallado del método de Neville puede encontrarse en [7] donde además introducen el concepto de *eliminación completa de Neville (CNE) de una matriz A de tamaño $n \times m$*, que consiste en realizar el proceso de eliminación de Neville a la matriz A hasta llegar a la matriz U en forma escalonada superior (que no es más que la matriz DU que obtenemos al realizar la descomposicón LDU de A) y a continuación realizar de nuevo el proceso de eliminación de Neville pero a la matriz U^T, lo cual equivale a realizar Neville a la matriz U pero por columnas en lugar de por filas.

Cuando la matriz con la que trabajamos es una matriz t.n.p. invertible es conocido que el algoritmo de Gauss puede ser aplicado sin intercambio de filas. Vamos a demostrar que también es posible para esta clase de matrices aplicar el método de eliminación completa de Neville sin intercambio de filas ni de columnas.

Proposición 2 *Sea A una matriz t.n.p. invertible de tamaño $n\times n$ con el elemento $a_{11} < 0$. Entonces, podemos realizar la primera iteración del proceso de eliminación de Neville sin intercambio de filas.*

Demostración: Supongamos que tenemos una matriz $A = (a_{ij})$ t.n.p. invertible de tamaño $n \times n$ y con el elemento $a_{11} < 0$. Aplicando la propiedad 8 de la Proposición 1 tenemos que todos los elementos de la matriz A son negativos, a excepción del a_{nn} del que no podemos decir nada. Como consecuencia la primera iteración del método de eliminación de Neville puede ser realizada sin intercambio de filas ya que todos los pivotes son distintos de cero, por lo que transformamos la matriz A en la matriz $\tilde{A}$ haciendo ceros en la primera columna de la matriz inicial sumando a cada fila un múltiplo de la fila anterior. Es decir, $\tilde{A} = E_1A$, donde E_1 es la matriz

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_{31}}{a_{21}} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{n1}}{a_{n-11}} & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

□

Como la matriz A es una matriz t.n.p. invertible sabemos que admite una descomposición LDU aplicando el algoritmo de Gauss sin intercambio de filas. La matriz L es TP triangular inferior con unos en la diagonal principal y con los elementos por debajo de la diagonal principal mayores que cero. Por tanto a la matriz L podemos aplicarle el método de eliminación de Neville sin intercambio de filas [7]. Teniendo en cuenta cómo son los elementos de la primera columna de la matriz L, no es difícil comprobar que podemos aplicar la primera iteración de Neville premultiplicando a L por E_1. Es decir,

$$E_1A = \tilde{A} = E_1(LDU) = (E_1L)DU = \tilde{L}DU$$
$$\Downarrow$$
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = \tilde{L}DU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\tilde{A}_{22} = \tilde{L}_{22}D_2U_{22}$$

Las matrices D_2 y U_{22} son TP y la matriz $\tilde{L}_{22}$ tambiés porque L es TP y hemos aplicado una vez el proceso de eliminación de Neville [7, Teorema 5.4], [1, Teorema 2.3, Teorema 3.1]. Como el producto de matrices TP es una matriz del mismo tipo tenemos que $\tilde{A}_{22}$ es una matriz TP y como consecuencia podemos aplicar el método de eliminación de Neville sin intercambio de filas, siendo todos los pivotes no negativos [7, Corolario 5.5]. Por tanto existe una matriz N_2 triangular inferior con unos en la diagonal principal tal que:

$$N_2\tilde{A}_{22} = N_2\tilde{L}_{22}D_2U_{22} = D_2U_{22}$$

y por tanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & O \\ O & N_2 \end{bmatrix} E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & O \\ O & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & N_2 \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & D_2 U_{22} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta cómo son los elementos de la primera fila de la matriz U en la descomposición LDU de una matriz A t.n.p. invertible tenemos que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & D_2 U_{22} \end{bmatrix} = DU$$

Sea $I_{(-i)}$ la matriz obtenida a partir de la matriz identidad con el elemento en la posición (i,i) igual a -1, entonces

$$DU = I_{(-1)} \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} = I_{(-1)} \begin{bmatrix} -a_{11} & -A_{12} \\ 0 & D_2 U_{22} \end{bmatrix}$$

donde la matriz triangular superior

$$U_{(-1)} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -A_{12} \\ 0 & D_2 U_{22} \end{bmatrix}$$

es TP por ser producto de matrices TP.

Aplicando [7, Corolario 5.5] a la matriz $U_{(-1)}^T$ sabemos que podemos realizar el proceso de eliminación de Neville sin intercambio de filas y los pivotes son todos no negativos, o lo que es lo mismo, existe una matriz C triangular inferior con unos en la diagonal principal tal que

$$CU_{(-1)}^T = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} 1 & O \\ O & N_2 \end{bmatrix} E_1 A C^T = I_{(-1)} U_{(-1)} C^T = I_{(-1)} \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} = D$$

Los resultados obtenidos dan lugar al siguiente teorema:

Proposición 3 *Si A es una matriz t.n.p. invertible con $a_{11} < 0$, podemos aplicarle el proceso de eliminación completo de Neville sin intercambio de filas ni de columnas, siendo todos los pivotes no negativos excepto los de la primera iteración en el proceso de eliminación por filas y los de la primera iteración en el proceso de eliminación por columnas, que son negativos. Al final de todo el proceso conseguimos una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal principal positivos excepto el que está en la posición $(1,1)$ que es negativo.*

Recíprocamente, supongamos que tenemos una matriz $A = (a_{ij})$ invertible con todos los elementos negativos excepto el que está en la posición (n,n) que puede ser nulo y queremos saber si es una matriz t.n.p. Supongamos que podemos aplicarle a la matriz A el proceso de eliminación completo de Neville sin intercambio de filas ni de columnas, con todos los pivotes no negativos a excepción de los de la primera iteración de la eliminación por filas y por columnas que son negativos, obteniendo una matriz diagonal con los elementos de la diagonal principal positivos a excepción del primero que es negativo. Es decir,

$$(E_{n-1}E_{n-2}\dots E_2E_1)A(C_1C_2\dots C_{n-2}C_{n-1}) = D,$$

donde E_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$, son matrices bidiagonales inferiores, con unos en la diagonal principal y los elementos de la subdiagonal, $-e^{(i)}_{jj-1}$, $j = 2, 3, \dots, n$, nulos hasta la fila $i-$ésima y a partir de esta fila no positivos, porque al no haber intercambio de filas si existe un j, $i+1 \leq j \leq n$, tal que $-e^{(i)}_{jj-1} = 0$, entonces $-e^{(i)}_{j+k,j+k-1} = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-j$. Además, como los elementos de la primera columna de la matriz A son todos negativos podemos afirmar que los elementos de la subdiagonal de E_1 son todos negativos (ver la matriz (1)).

De forma análoga, C_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$, son matrices bidiagonales superiores con unos en la diagonal principal y los elementos de la superdiagonal, $-c^{(i)}_{j-1j}$ $j = 1, 2, \dots, n-1$, nulos hasta la fila $(i-1)$-ésima y a partir de aquí no positivos. Como no hay intercambio de columnas, si existe un j, $i+1 \leq j \leq n$, tal que $-c^{(i)}_{j-1j} = 0$, entonces $-c^{(i)}_{j+k-1,j+k} = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-j$. En este caso también podemos afirmar que los elementos $c^{(1)}_{i,i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, son negativos, ya que los elementos de la primera fila de la matriz A son todos negativos.

Por tanto $A = (E_1^{-1}E_2^{-1}\dots E_{n-2}^{-1}E_{n-1}^{-1})D(C_{n-1}^{-1}C_{n-2}^{-1}\dots C_2^{-1}C_1^{-1})$, donde las matrices E_i^{-1}, $i = 1, 2, \dots, n-1$, son TP y tienen la estructura siguiente:

$$E_i^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccccccc}
I & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & e^{(i)}_{i+1i} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \prod_{j=i}^{i+1} e^{(i)}_{j+1j} & e^{(i)}_{i+2i+1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \prod_{j=i}^{i+2} e^{(i)}_{j+1j} & \prod_{j=i+1}^{i+2} e^{(i)}_{j+1j} & e^{(i)}_{i+3i+2} & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \prod_{j=i}^{n-2} e^{(i)}_{j+1j} & \prod_{j=i+1}^{n-2} e^{(i)}_{j+1j} & \prod_{j=i+2}^{n-2} e^{(i)}_{j+1j} & \prod_{j=i+3}^{n-2} e^{(i)}_{j+1j} & \dots & 1 & 0 \\
0 & \prod_{j=i}^{n-1} e^{(i)}_{j+1j} & \prod_{j=i+1}^{n-1} e^{(i)}_{j+1j} & \prod_{j=i+2}^{n-1} e^{(i)}_{j+1j} & \prod_{j=i+3}^{n-1} e^{(i)}_{j+1j} & \dots & e^{(i)}_{nn-1} & 1
\end{array}\right]$$

El producto $E_1^{-1}E_2^{-1}\dots E_{n-2}^{-1}E_{n-1}^{-1}$ es una matriz TP triangular inferior con unos en la diagonal principal y con todos los elementos de la parte triangular inferior positivos, que representamos por L.

Análogamente, las matrices C_i^{-1}, $i = 1, 2, \dots, n-1$, son matrices TP triangulares superiores y con una estructura similar a la de las matrices $(E_i^{-1})^T$. Por tanto, el producto $C_{n-1}^{-1}C_{n-2}^{-1}\dots C_2^{-1}C_1^{-1}$ es una matriz TP triangular superior con unos en la diagonal principal y con todos los elementos de la parte triangular superior positivos, que representamos por U.

Como consecuencia la matriz A admite una descomposición LDU de la forma dada en [2]. Aplicando [2, Teorema 3.8] tenemos que A es una matriz t.n.p.

Este último resultado junto con la Proposición 3 nos permite dar la siguiente caracterización para las matrices t.n.p. invertibles.

Teorema 3 *Sea A una matriz invertible de tamaño $n \times n$ con todos sus elementos negativos excepto $a_{nn} \leq 0$. Entonces, A es una matriz t.n.p. si y sólo si podemos aplicarle el proceso de eliminación completo de Neville sin intercambio de filas ni de columnas, siendo todos los pivotes no negativos excepto los de la primera iteración en el proceso de eliminación por filas y por columnas que son negativos, obteniendo una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal principal positivos excepto el que está en la posición $(1,1)$ que es negativo.*

4. Generación de matrices t.n.p. y t.n.

La factorización LDU de una matriz t.n.p. invertible $A = (a_{ij})$ de tamaño $n \times n$ y con el elemento $a_{11} < 0$, a partir del proceso de eliminación completo de Neville que hemos obtenido en la sección anterior, nos proporciona el siguiente procedimiento rápido y sencillo para generar matrices t.n.p. y t.n.

1. Construimos las matrices TP E_i^{-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$, definidas anteriormente, teniendo en cuenta que E_1^{-1} ha de tener todos sus elementos por debajo de la diagonal principal positivos.

2. Construimos las matrices TP C_i^{-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$, teniendo en cuenta que C_1^{-1} ha de tener todos sus elementos por encima de la diagonal principal positivos.

3. Por último definimos una matriz diagonal D con todos los elementos de la diagonal principal positivos excepto el primero, que determinaremos de forma que sea negativo y que al hacer el producto total obtengamos que el elemento a_{nn} de la matriz A sea no positivo.

De esta forma, al realizar el producto $(E_1^{-1}E_2^{-1} \ldots E_{n-2}^{-1}E_{n-1}^{-1})D(C_{n-1}^{-1}C_{n-2}^{-1} \ldots C_2^{-1}C_1^{-1})$ conseguimos una matriz A t.n.p. ([2, Teorema 3.8]).

Ejemplo 1 *Supongamos que queremos generar una matriz t.n.p. de tamaño 4×4. Podemos elegir las matrices siguientes $E_2^{-1} = E_3^{-1} = C_2^{-1} = C_3^{-1} = I_{4\times 4}$ y*

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \; C_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; y \; D = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Haciendo el producto correspondiente tenemos que $a_{44} \leq 0$ si $a \geq 1.27$ Eligiendo $a = 2$ obtenemos la siguiente matriz t.n.p.

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}DC_3^{-1}C_2^{-1}C_1^{-1} = E_1^{-1}DC_1^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 & -20 \\ -2 & -2 & -2 & -10 \\ -4 & -4 & -3 & -15 \\ -12 & -12 & -9 & -44 \end{bmatrix}$$

Si lo que queremos es encontrar una matriz A t.n. de tamaño $n \times n$ necesitamos que las matrices E_i^{-1} (C_i^{-1}), $i = 1, 2, \ldots, n-1$, tengan todos los elementos por debajo (encima) de la diagonal principal distintos de cero a partir de la columna i-ésima.

Agradecimientos

Trabajo financiado por el proyecto DGI AGL2004-03263/AGR y por el proyecto de incentivación de la investigación de la Universidad Politécnica de Valencia.

Referencias

[1] T. Ando, *Totally positive matrices*, Linear Algebra and its Applications, vol. 90, (1987), 165-219.

[2] R. Cantó; B. Ricarte; A. M. Urbano, *LDU factorization of nonsingular totally nonpositive matrices*, Submited, (2006).

[3] C. W. Cryer, *The LU-factorization of Totally Positive Matrices*, Linear Algebra and its Applications, vol. 7, (1973), 83-92.

[4] S. M. Fallat; A. Herman; M. I. Gekhtman; C. R. Johnson, *Compressions of totally positive matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 28, (2006), 68-80.

[5] S. M. Fallat; P. Van Den Driessche, *On matrices with all minors negative*, The Electronical Journal of Linear Algebra, vol. 7, (2000), 92-99.

[6] M. Gasca; C. A. Micchelli, *Total Positivity and its Applications*, Mathematics and its Applications, 359, Dordrecht, The Netherlands, 1996, Kluwer Academic Publishers.

[7] M. Gasca; J. M. Peña, *Total positivity and Neville elimination*, Linear Algebra and its Applications, vol. 44 (1992), 25-44.

[8] M. Gasca; J. M. Peña, *Total positivity, QR factorization and Neville elimination*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 4, (1993), 1132-1140.

[9] M. Gasca; J. M. Peña, *A test for Strictly Sign-regularity*, Linear Algebra and its Applications, vol. 197-198, (1994), 133-142.

[10] M. Gasca; J. M. Peña, *Characterizations and decompositions of almost strictly positive matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 28, (2006), 1-8.

[11] S. Karlin, *Total Positivity, Vol.I*, Stanford University Press, Stanford, CA, 1968.

[12] T. Parthasarathy; G. Ravindran, *N-matrices*, Linear Algebra and its Applications, vol. 139, 1990, 89-102.

[13] R. Saigal, *On the class of Complementary Cones and Lemke's Algorithm*, SIAM J. Appl. Math., vol. 23, (1972), 46-60.