XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–6)

Existencia y Unicidad de Soluciones Periódicas para una Ecuación de Liénard Discontinua Lineal a Trozos

J. Llibre[1], E. Ponce[2], F. Torres[2]

[1] *Departament Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona. Facultat de Ciencies, Edifici C, 08193 Bellaterra, Barcelona E-mail:* `jllibre@mat.uab.es`.
[2] *Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de Sevilla, E.T.S.Ingenieros, Camino de los Descubrimientos, 41092 Sevilla. E-mails:* `eponcem@us.es, ftorres@us.es`.

Palabras clave: Soluciones periódicas, ecuaciones de Liénard, sistemas discontinuos.

Resumen

En esta comunicación se establece un resultado de existencia y unicidad de soluciones periódicas en una ecuación de tipo Liénard, donde las funciones involucradas son lineales a trozos discontinuas. Para ello, se ha transformado la ecuación inicial en un sistema plano de Liénard y se ha seguido el método convexo de Filippov para extender las órbitas que alcanzan la línea de discontinuidad. Nos hemos limitado a considerar sistemas que no poseen soluciones deslizantes (sliding motions) en el sentido de Filippov.

1. Introducción y principales resultados

La existencia y unicidad de soluciones periódicas para las ecuaciones de Liénard es un problema que ha producido una ingente cantidad de resultados bajo diferentes hipótesis, véase [9]. Un requisito comúnmente exigido es la suavidad de las funciones involucradas, por lo que en ausencia de continuidad los resultados conocidos no son aplicables a fortiori.

En este trabajo presentaremos diversos resultados de existencia y unicidad de soluciones periódicas para una ecuación de Liénard donde los términos de la misma son funciones discontinuas lineales a trozos con dos zonas. En concreto, consideramos la ecuación diferencial de Liénard,

$$x'' - f(x)x' + g(x) = 0, \tag{1}$$

donde las funciones f y g estan dadas por

$$f(x) = \begin{cases} T_1, & \text{si } x < 0, \\ T_2, & \text{si } x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} D_1 x + a_1, & \text{si } x < 0, \\ D_2 x + a_2, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Obsérvese que las las funciones f y g son lineales a trozos y discontinuas en el origen. Si usamos la notación $\mathbf{x} =(x,y)^T$, la ecuación (1) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{x}' = \begin{cases} \begin{pmatrix} T_1 & -1 \\ D_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \end{pmatrix}, & \text{si } x < 0, \\ \\ \begin{pmatrix} T_2 & -1 \\ D_2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix}, & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Nótese que si $a_1 = a_2$, el sistema puede extenderse de forma continua en $x = 0$, y entonces perteneceria a la clase de sistemas ya estudiados en [3]. En lo que sigue asumimos salvo indicación expresa en sentido contrario que $a_1 \neq a_2$.

La ecuación (1) es una particularización del caso más general donde las funciones f y g vienen dadas por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < 0, \\ f_2(x), & \text{si } x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x < 0, \\ g_2(x), & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{3}$$

siendo f_1, g_1 por un lado, y f_2, g_2 por otro, continuamente diferenciables en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, respectivamente. Obsérvese que las funciones f, g no están definidas para $x = 0$, resultando admisible que ambas funciones posean una discontinuidad de salto finito en el origen.

Mediante el clásico cambio de Liénard $y = F(x) - x'$, donde

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds,$$

la ecuación anterior se transforma en el sistema de Liénard,

$$\begin{aligned} x' &= F(x) - y, \\ y' &= g(x), \end{aligned} \tag{4}$$

y es claro que $F(0) = 0$, mientras que $g(0)$ no está definida por el momento.

Es evidente que ambas componentes del campo vectorial definido en (4) son continuas cuando $x \neq 0$. Por otra parte, a lo largo de la línea $x = 0$, la componente horizontal resulta continua (de hecho, $x' = -y$), mientras que la componente vertical no puede definirse con continuidad. Esto obliga normalmente a establecer algun criterio para extender las órbitas cuando alcanzan la línea $x = 0$. El criterio más frecuentemente adoptado, es el método convexo de Filippov [4], que permite definir un nuevo campo vectorial sobre la línea de discontinuidad cuando ambos campos no pueden ser concatenados de forma obvia. Debemos señalar que el criterio de Filippov ha sido justificado mediante procesos de regularización de ecuaciones diferenciales véase [5], [8], y mediante técnicas de perturbación singular véase [1], [6].

En nuestro caso, una órbita que pasa por un punto con coordenada $x < 0$ estará bien definida mientras no llegue al eje $x = 0$, pero si la órbita alcanza dicho eje lo hará en un punto $(0, y)$ con $y < 0$ y se comportará como si el valor $g(0)$ fuera igual a a_1. Seguidamente, basta admitir que la órbita continuará en la región $x > 0$ a partir del punto de llegada al eje OY comportándose como si el valor $g(0)$ fuera igual a a_2. Resulta así natural la concatenación de soluciones que llegan al eje OY, si exceptuamos el origen, de manera que el sistema no presenta soluciones deslizantes (*sliding motions*) en el sentido de Filippov.

El único punto donde se anula la primera componente de ambos campos es el origen, luego el $(0,0)$ es el único punto que puede ser singular. Dependiendo de los valores a_1 y a_2, los campos involucrados en (2) serán en el origen o bien nulos o bien tangentes al eje OY. Cuando ambos campos son anticolineales, es decir cuando $a_1a_2 < 0$, el origen es entonces un *pseudoequilibrio,* que se comporta como un punto de equilibrio del sistema (2) pero que podría ser alcanzado en tiempo finito. En este caso, estudiando las órbitas en un entorno del origen se determina que el origen es un foco topológico si $a_1 < 0$ y $a_2 > 0$, mientras que el origen es una silla topológica si $a_1 > 0$ y $a_2 < 0$.

Desde el punto de vista de las aplicaciones resulta muy interesante el caso en que el origen es un pseudoequilibrio de tipo foco porque entonces se tiene localmente comportamiento oscilatorio que facilita la existencia de órbitas periódicas. Para estos planos de fase es posible asegurar la existencia de un punto singular en el interior de cada órbita periódica y mediante el Teorema de Green podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 1 *Si el sistema* (2) *tiene una órbita periódica, entonces o bien* $T_1 = T_2 = 0$ *o bien* $T_1T_2 < 0$.

Hacemos notar que la proposición anterior nos indica que el comportamiento oscilatorio del sistema se produce sólo cuando no hay disipación en ninguna zona, (condición $T_1 = T_2 = 0$) o cuando el flujo se expande en una zona (la que posee traza positiva), y se contrae en la otra (la que posee traza negativa).

Nuestro principal resultado está referido a sistemas (2) con sólo un punto singular en el origen, por lo que exigiremos $a_1 \leqslant 0$ y $a_2 \geqslant 0$, y asumiremos que en cada semi-plano el comportamiento es de tipo foco, por lo que impondremos $4D_1 - T_1^2 > 0$ y $4D_2 - T_2^2 > 0$. Como estamos interesados en la existencia de órbitas periódicas, a la vista de la proposición anterior supondrémos asímismo la condición $T_1T_2 < 0$. Antes de enunciarlo, introduciremos dos parámetros claves

$$\gamma_1 = \frac{T_1}{2\omega_1} = \frac{T_1}{\sqrt{4D_1 - T_1^2}}, \quad \gamma_2 = \frac{T_2}{2\omega_2} = \frac{T_2}{\sqrt{4D_2 - T_2^2}}$$

que representan los cocientes entre la parte real y la parte imaginaria de los autovalores de la parte lineal del sistema en cada zona.

Teorema 2 *Suponiendo* $a_1 \leqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, $4D_1 - T_1^2 > 0$, $4D_2 - T_2^2 > 0$, $T_1T_2 < 0$ *y* $a_2T_1 \neq a_1T_2$ *en el sistema* (4), *se verifican las siguientes afirmaciones.*

(a) *Si* $\gamma_1 + \gamma_2 < 0$ *y* $a_2T_1 > a_1T_2$, *entonces el sistema* (4) *tiene una única órbita periodica, que además es un ciclo límite estable.*

(b) *Si* $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ *y* $a_2T_1 < a_1T_2$, *entonces el sistema* (4) *tiene una única órbita periodica, que además es un ciclo límite inestable.*

Existen otras situaciones no contempladas en el anterior teorema en las que el sistema posee órbitas periódicas. Se presentan cuando las dos trazas son nulas, no existe contracción ni expansión, o cuando el carácter expansivo del flujo en una zona se compensa con el carácter contractivo del flujo en la otra zona, situación que se produce cuando se verifican las igualdades $\gamma_1 = -\gamma_2$ y $a_2 T_1 = a_1 T_2$. En ambos casos, toda órbita del sistema es una órbita periódica.

En el resto del trabajo se describen las técnicas que permiten demostrar el Teorema 2. En primer lugar introducimos unas semiaplicaciones de Poincaré y describimos algunas de sus propiedades que se utilizarán en la prueba de nuestro principal resultado.

2. Aplicaciones de Poincaré.

Si tomamos el punto $(0, y)$ con $y > 0$, como punto inicial de una órbita, ésta evolucionará en la zona $x < 0$ hasta que alcanza el eje OY en un punto $(0, P_1(y))$ con $P_1(y) < 0$ después de un tiempo $t_1 = \tau_1/\omega_1$. Si ahora continuamos la órbita a través de los puntos $(0, y)$ con $y < 0$, de la manera natural que se expuso en la introducción, vemos que la órbita progresará en la zona $x > 0$ y después de un tiempo $t_2 = \tau_2/\omega_2$, llegaremos al punto $(0, P_2(y))$ con $P_2(y) > 0$. La composición de las aplicaciones P_1 y P_2 permite definir la aplicación de Poincaré

$$P : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), \quad P(y) = P_2(P_1(y)), \quad \text{con} \ \ P(0) = 0.$$

Antes de continuar introduciremos la función auxiliar

$$\varphi_\gamma(\tau) = 1 - e^{\gamma\tau}(\cos\tau - \gamma \operatorname{sen}\tau),$$

que posee las simetrias

$$\varphi_{-\gamma}(-\tau) = \varphi_\gamma(\tau), \quad \varphi_{-\gamma}(\tau) = \varphi_\gamma(-\tau), \quad \forall\ \gamma, \tau \in \mathbf{R}.$$

Si $\gamma > 0$, entonces la función φ_γ tiene máximos relativos cuando $\tau = -\pi$, $\tau = \pi$ y un primer cero positivo para un cierto valor $\hat{\tau} \in (\pi, 2\pi)$.

Puesto que la restricción del sistema a cada zona con $x \neq 0$ es lineal podemos integrarlo y determinar la aplicaciones P_i que serán explicitamente obtenidas cuando $a_i\gamma_i = 0$ y en forma paramétrica mediante el empleo de la función φ_γ cuando $a_i\gamma_i \neq 0$, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 3 *Supongamos que* $4D_1 - T_1^2 > 0$, $4D_2 - T_2^2 > 0$, *en el sistema* (4), *entonces se verifican las siguientes afirmaciones.*

(a) *Si* $a_i\gamma_i = 0$ *entonces* $P_i(y) = -e^{\gamma_i\pi}y$, *donde* $\begin{cases} y \geqslant 0, & si\ i = 1, \\ y \leqslant 0, & si\ i = 2. \end{cases}$

(b) *Si* $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$, *entonces*

$$y = -\frac{a_i\omega_i e^{-\gamma_i\tau_i}\varphi_{\gamma_i}(\tau_i)}{D_i \operatorname{sen}(\tau_i)}, \quad P_i(y) = \frac{a_i\omega_i e^{\gamma_i\tau_i}\varphi_{-\gamma_i}(\tau_i)}{D_i \operatorname{sen}(\tau_i)}, \quad \tau_i \in [0, \pi),$$

y además

$$\begin{array}{rcll} -1 \leqslant & P_i'(y) & < -e^{-\gamma_i\pi}, & si\ \ \gamma_i < 0, \\ -e^{\gamma_i\pi} < & P_i'(y) & \leqslant -1, & si\ \ \gamma_i > 0, \end{array}$$

para $i = 1, 2$.

(c) *Si* $a_2 \leqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, *entonces* $\lim_{y\to\infty} P'(y) = e^{(\gamma_1+\gamma_2)\pi}$.

(d) *La derivada de la aplicación de Poincaré en el origen está determinada en cada caso por las siguientes expresiones.*

(d1) *Si* $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, *entonces* $P'(0) = e^{\gamma_1 \pi}$.

(d2) *Si* $a_1 < 0$, $a_2 = 0$, *entonces* $P'(0) = e^{\gamma_2 \pi}$.

(d3) *Si* $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, *entonces*

$$P'(0) = 1, \quad P''(0) = \frac{4}{3}\left(\frac{T_2}{a_2} - \frac{T_1}{a_1}\right), \quad P'''(0) = \frac{3}{2}\left(P''(0)\right)^2.$$

3. Prueba del Teorema 2

Partiendo de las técnicas usadas en [2] y extendiéndolas adecuadamente hemos establecido un resultado de unicidad de ciclos límites para sistemas de Liénard con funciones discontinuas, véase [7].

Teorema 4 *Sean* f, g *funciones definidas en* (3) *tales que* f_i *y* g_i *son de clase* C^1 *para* $i = 1, 2$, *y supongamos que* f, g *tambien satisfacen las siguientes condiciones.*

(i) *Si* $x \neq 0$, *entonces* $xg(x) > 0$.

(ii) *Si* $x \neq 0$, *entonces* $xf(x) > 0$.

(iii) $\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)}{f(x)} = l_1, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = l_2, \qquad$ *con* $0 < l_2 < l_1 < \infty$.

(iv) *El sistema de ecuaciones*

$$F(x_1) = F(x_1), \qquad \frac{g(x_1)}{f(x_1)} = \frac{g(x_2)}{f(x_2)} \tag{5}$$

posee a lo sumo una solución $(x_1, x_2) = (s_1, s_2)$ *que verifica* $s_1 < 0 < s_2$.

Entonces se verifican las siguientes afirmaciones

(a) *Si el sistema* (4) *posee una una órbita periódica entonces el sistema* (5) *tiene una solución* $(x_1, x_2) = (s_1, s_2)$ *que verifica* $s_1 < 0 < s_2$.

(b) *Si la función*

$$\alpha(x) = \frac{g(x)}{f(x)F(x)}$$

es creciente para $x < 0$, *entonces el sistema* (4) *tiene a lo sumo una órbita periódica y si existe tiene un exponente característico negativo.*

Para probar el apartado (b) de este teorema se asume la existencia de una órbita periódica y se calcula su exponente característico. Se obtiene que necesariamente el citado exponente es negativo y como no es posible la existencia de dos órbitas consecutivas estables, concluimos que a lo sumo existe una única órbita periódica. Debemos resaltar que la prueba de este resultado es muy técnica, y que se obtiene mediante un adecuado cambio de variables que puede interpretarse como un plegamiento del plano de fases a lo largo del eje vertical.

La prueba del Teorema 2, tiene dos partes claramente diferenciadas, por una parte la existencia cuya prueba descansa en la comparación de las derivadas de las aplicaciones de Poincaré en el origen y para valores de la variable y suficientemente grande, y por otra parte la unicidad que es una consecuencia del Teorema 4.

Si $\gamma_1+\gamma_2<0$, de la afirmación (c) de la Proposición 3, deducimos que la derivada de la aplicación de Poincaré es positiva y menor que uno para grandes valores de y, mientras que de la afirmación $(d3)$ deducimos $P'(0)=1, P''(0)>1$. Como por otra parte $P(0)=0$, una aplicación directa del Teorema del valor medio nos permite deducir la existencia de una órbita periódica. Observamos que los sistemas (4) que verifican las hipótesis del Teorema 2 cuando $a_2T_1>a_1T_2$, tambien satisfacen las hipótesis del Teorema 4, por lo que podemos garantizar que nuestros sistemas poseen una única órbita periódica.

Finalmente el caso $\gamma_1+\gamma_2>0$, $a_2T_1>a_1T_2$ se reduce al caso anterior mediante la transformación,

$$\begin{gathered} x\to -x,\ y\to -y,\ t\to -t,\ T_1\to -T_1,\ T_2\to -T_2,\\ D_1\to D_1,\ D_2\to D_2,\ a_1\to a_1,\ a_2\to a_2. \end{gathered}$$

Referencias

[1] C. Buzzi, P.R. Silva & M.A. Teixeira, *A Singular Approach to Discontinuous Vector Fields on the Plane,* J. Differential Equations **231** (2006) 633–655.

[2] W.A. Coppel, *Some Analytical Systems with at most one Limit Cycle*, Dynamics Reported, Vol **2**, pp. 61–88, editado por U. Kirchgraber & H.O. Walther, John Wiley Sons Ltd, 1989.

[3] E. Freire, E. Ponce, F. Rodrigo & F. Torres, *Bifurcation Sets of Continuous Piecewise Linear Systems with Two Zones,* Int. J. Bifurcation and Chaos, Vol. **8** , No.11 (1998) 2073–2097.

[4] Yu. A. Kuznetsov, S. Rinaldi & A. Gragnani, *One-Parameter Bifurcations in Planar Filipov Systems,* Int. J. Bifurcation and Chaos, Vol. **13**, No.8 (2003) 2157–2188.

[5] J. Llibre & M.A. Teixeira, *Regularization of Discontinuous Vector Fields in Dimension Three.* Discrete Contin. Dynam. Systems, **3** (1997) 235–241.

[6] J. Llibre, P.R. Silva & M.A. Teixeira, *Regularization of Discontinuous Vector Fields via Singular Perturbation,* to appear in J. Dynam. Differential Equations, 2006.

[7] J. Llibre, E. Ponce & F. Torres, *On the Existence and Uniqueness of Limit Cycles in Liénard Differential Equations allowing Discontinuities,* Preprint.

[8] J. Sotomayor & M.A. Teixeira, *Regularization of Discontinuous Vector Fields,* International Conference on Differential Equations, Lisboa, Equadiff95, (1966), 207–223.

[9] Zhang Zhi-Fen et al, *Qualitative Theory of Differential Equations.* Translation of Math. Mon. **101**, AMS, Providence 1992.