XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–6)

Sobre soluciones reflexivas de la ecuación matricial $AXB = C$

A. Herrero, N. Thome

Instituto de Matemática Multidisciplinar. Universidad Politécnica de Valencia.
E-mail: aherrero@mat.upv.es, njthome@mat.upv.es.

Palabras clave: Ecuación matricial, solución reflexiva, reflexión generalizada tripotente.

Resumen

El problema de resolver la ecuación matricial $AXB = C$ ha sido estudiado en la literatura. Algunos autores han buscado la solución general de este problema mientras que otros han considerado algún tipo de restricción sobre la solución buscada (simétrica, definida positiva, etc.) o bien sobre las matrices conocidas (por ejemplo, siendo B la matriz identidad y A una reflexión generalizada).

En este trabajo se estudia dicho problema buscando soluciones X que sean reflexivas con respecto a una reflexión generalizada tripotente P (es decir, la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ debe cumplir la condición $X = PXP$) siendo $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz Hermítica y tripotente conocida.

1. Introducción

Una matriz $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se llama reflexiva generalizada si $P^2 = I$ y $P^* = P$, siendo P^* la traspuesta conjugada de la matriz P e I la matriz identidad de tamaño adecuado. Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice reflexiva con respecto a una matriz reflexiva generalizada $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si $PXP = X$.

Zhen-yun Peng y Xi-yan Hu [5] resolvieron el problema de existencia y hallaron la forma de la solución X que satisface la ecuación matricial $AX = B$ y es reflexiva generalizada con respecto a una reflexión generalizada dada.

Por medio de propiedades de las matrices Hamiltonianas Hermíticas generalizadas, Zhong-Zhi Zhang, Xi-Yan Hu y Lei Zhang [2] encontraron condiciones necesarias y suficientes que caracterizan la existencia de solución del problema $AX = B$ en el conjunto de las matrices Hamiltonianas Hermíticas generalizadas.

El problema de resolver la ecuación matricial $AXB = C$ ha sido estudiado en [1, 2]. Algunos autores han buscado la solución general de este problema mientras que otros han considerado algún tipo de restricción sobre la solución buscada (simétrica, definida positiva, etc.) o bien sobre las matrices conocidas (por ejemplo, siendo B la matriz identidad y A una reflexión generalizada). Este tipo de matrices se utiliza en ingeniería y computación científica como puede verse en [4], así como su aplicación en teoría de control aparece en [6, 7].

En este trabajo se estudia el problema de resolver la ecuación matricial $AXB = C$ buscando soluciones X que sean reflexivas con respecto a una reflexión generalizada tripotente P (es decir, la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ debe cumplir la condición $X = PXP$) siendo $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz Hermítica y tripotente (es decir, $P^* = P$ y $P^3 = P$).

Para resolver el problema planteado serán necesarios los siguientes resultados.

Teorema 1 (Teorema 2.1 [8]) *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$A^{k+1} = A$ (es decir, A es $\{k+1\}$-potente).*
2. *A es diagonalizable y su espectro está contenido en el conjunto $\{0\} \cup \Omega_k$, donde Ω_k representa el conjunto de todas las raíces de la unidad de orden k.*

Para una matriz $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ reflexiva generalizada existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$P = U \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & -I_{n-r} \end{bmatrix} U^*.$$

Por otro lado, la descomposición generalizada en valores singulares para un par de matrices $[M, N]$ viene dada por $M = W\Sigma_M U_M$ y $N = W\Sigma_N V_N$ donde W es una matriz invertible, U_M y V_N son matrices unitarias y

$$\Sigma_M = \begin{bmatrix} I_M & & \\ & D_M & \\ & & O_M \\ & O & \end{bmatrix}, \qquad \Sigma_N = \begin{bmatrix} O_N & & \\ & D_N & \\ & & I_N \\ & O & \end{bmatrix},$$

siendo todas las matrices de tamaños adecuados y las matrices D_M y D_N conteniendo los valores singulares estrictamente positivos de M y N, respectivamente [3].

2. Planteamiento y resolución del problema

Consideremos la ecuación matricial

$$AXB = C$$

donde $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se trata de buscar soluciones $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que sean reflexivas con respecto a una reflexión generalizada tripotente P, es decir, la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ debe cumplir la condición $X = PXP$ siendo $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz Hermítica y tripotente conocida.

Del Teorema 1 es claro que si P es una matriz tripotente entonces su espectro está contenido en $\{0, 1, -1\}$. Además, al ser P Hermítica, P es diagonalizable por una matriz unitaria, es decir, existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $P = UDU^*$ con

$$D = \begin{bmatrix} I_\alpha & O & O \\ O & -I_\beta & O \\ O & O & O \end{bmatrix}$$

siendo $\alpha + \beta = \text{rango}(P)$.

Puesto que la relación entre la matriz X y la reflexión generalizada tripotente P debe ser $PXP = X$, se tiene que $X = UDU^*XUDU^*$. Premultiplicando por U^* y postmultiplicando por U se construye una matriz $\tilde{X}$ que verifica $\tilde{X} = D\tilde{X}D$. Dividiendo en bloques la matriz $\tilde{X}$ de tamaños adecuados según los bloques de la matriz D, se tiene que

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_\alpha & O & O \\ O & -I_\beta & O \\ O & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\alpha & O & O \\ O & -I_\beta & O \\ O & O & O \end{bmatrix}$$

por tanto

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & O & O \\ O & X_{22} & O \\ O & O & O \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que $X = U\tilde{X}U^*$, la ecuación matricial $AXB = C$ se transforma en

$$\tilde{A}\tilde{X}\tilde{B} = C \qquad \text{donde} \qquad \tilde{A} = AU \qquad \text{y} \qquad \tilde{B} = U^*B.$$

Dividiendo en bloques las matrices $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ se tiene:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}^* \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

y sustituyendo en la ecuación matricial $\tilde{A}\tilde{X}\tilde{B} = C$ resulta

$$\begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* & A_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & O & O \\ O & X_{22} & O \\ O & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = C.$$

Realizando los productos por bloques correspondientes esta ecuación se reduce a

$$A_1^*X_{11}B_1 + A_2^*X_{22}B_2 = C. \qquad (3)$$

Aplicando la descomposición generalizada en valores singulares a los pares de matrices $[A_1^*, A_2^*]$ y $[B_1^*, B_2^*]$ se obtiene la forma de la solución X. En efecto, se tiene que

$$A_1^* = W_A\Sigma_{1A}U_A^*, \qquad A_2^* = W_A\Sigma_{2A}V_A^*$$

y

$$B_1^* = W_B\Sigma_{1B}U_B^*, \qquad B_2^* = W_B\Sigma_{2B}V_B^*,$$

donde las matrices involucradas verifican las condiciones indicadas al final de la Introducción. Sustituyendo las expresiones anteriores en la igualdad (3) se llega a:

$$\Sigma_{1A}(U_A^* X_{11} U_B)\Sigma_{1B}^* + \Sigma_{2A}(V_A^* X_{22} V_B)\Sigma_{2B}^* = W_A^{-1} C W_B^{-*} \tag{4}$$

donde se ha utilizado que las matrices W_A y W_B^* son invertibles. Dividiendo en bloques las matrices de los paréntesis anteriores se tiene:

$$U_A^* X_{11} U_B = \begin{bmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{X}_{12} & \bar{X}_{13} \\ \bar{X}_{21} & \bar{X}_{22} & \bar{X}_{23} \\ \bar{X}_{31} & \bar{X}_{32} & \bar{X}_{33} \end{bmatrix}, \qquad V_A^* X_{22} V_B = \begin{bmatrix} \bar{X}_{44} & \bar{X}_{45} & \bar{X}_{46} \\ \bar{X}_{54} & \bar{X}_{55} & \bar{X}_{56} \\ \bar{X}_{64} & \bar{X}_{65} & \bar{X}_{66} \end{bmatrix}$$

y además puede escribirse:

$$W_A^{-1} C W_B^{-*} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo estas últimas tres expresiones en la igualdad (4) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{X}_{12} D_{1B} & O & O \\ D_{1A}\bar{X}_{21} & D_{1A}\bar{X}_{22} D_{1B} + D_{2A}\bar{X}_{55} D_{2B} & D_{2A}\bar{X}_{56} & O \\ O & \bar{X}_{65} D_{2B} & \bar{X}_{66} & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix}$$

En consecuencia, esta igualdad se verifica si y sólo si se cumple que

$$C_{14} = O, C_{24} = O, C_{34} = O, C_{13} = O, C_{31} = O, C_{41} = O, C_{42} = O, C_{43} = O, C_{44} = O.$$

En resumen, se ha demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 2 *Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times l}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times l}$ y $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $P^* = P$ y $P^3 = P$. Entonces existe una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que verifica las ecuaciones matriciales*

$$AXB = C \qquad y \qquad PXP = X$$

si y sólo si

$$C_{14} = O, C_{24} = O, C_{34} = O, C_{13} = O, C_{31} = O, C_{41} = O, C_{42} = O, C_{43} = O, C_{44} = O$$

donde

$$W_A^{-1} C W_B^{-*} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix}$$

siendo W_A y W_B las matrices invertibles que aparecen al aplicar la descomposición generalizada en valores singulares sobre el par de matrices $[A_1^*, A_2^*]$ y $[B_1^*, B_2^*]$, respectivamente (es decir, $A_1^* = W_A\Sigma_{1A}U_A^*$, $A_2^* = W_A\Sigma_{2A}V_A^*$ y $B_1^* = W_B\Sigma_{1B}U_B^*$, $B_2^* = W_B\Sigma_{2B}V_B^*$).

En este caso la solución general se puede expresar como:

$$X = U \begin{bmatrix} U_A^{-*}\mathcal{X}_1 U_B^{-1} & O & O \\ O & V_A^{-*}\mathcal{X}_2 V_B^{-1} & O \\ O & O & O \end{bmatrix} U^*$$

donde

$$\mathcal{X}_1 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12}D_{1B}^{-1} & \bar{X}_{13} \\ D_{1A}^{-1}C_{21} & \bar{X}_{22} & \bar{X}_{23} \\ \bar{X}_{31} & \bar{X}_{32} & \bar{X}_{33} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathcal{X}_2 = \begin{bmatrix} \bar{X}_{44} & \bar{X}_{45} & \bar{X}_{46} \\ \bar{X}_{54} & D_{2A}^{-1}(C_{22} - D_{1A}\bar{X}_{22}D_{1B})D_{2B}^{-1} & D_{2A}^{-1}C_{23} \\ \bar{X}_{64} & C_{32}D_{2B}^{-1} & C_{33} \end{bmatrix},$$

siendo $\bar{X}_{ij}$ matrices arbitrarias de tamaños adecuados.

OBSERVACIÓN 1 *Notar que alguno de los bloques de $\tilde{X}$ en (1) puede estar ausente puesto que algún bloque de D puede no figurar entre los bloques de la diagonal de P. Esto ocurrirá cuando el espectro de P esté estrictamente contenido en $\{0, 1, -1\}$.*

EJEMPLO 1 *La solución reflexiva de la ecuación matricial $AXB = C$ donde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad y \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con respecto a la reflexión generalizada tripotente

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es

$$X = \begin{bmatrix} 1 + \frac{a}{2} & 1 - \frac{a}{2} & 0 \\ 1 - \frac{a}{2} & 1 + \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{para cualquier valor de } a \in \mathbb{C}.$$

En efecto, es fácil ver que

$$P = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U^*}$$

y por tanto $P^3 = P = P^*$ (cumpliéndose además que $P^2 \neq I$ [3]).

Siguiendo el razonamiento anterior se tiene que:

$$\tilde{X} = U^*XU = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y además

$$\tilde{A} = AU = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{B} = U^*B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con lo que la ecuación (3) se transforma en:

$$x_{11} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

de donde se obtiene que la ecuación matricial tiene solución y además $x_{11} = 2$ *y* $x_{22} = a$, *con* $a \in \mathbb{C}$ *arbitrario.*

Referencias

[1] Q. Wang, C. Yang. *The Re–nonngetive definite solutions to the matrix equation* $AXB = C$, Comment. Math. Univ. Carolinae, 39 (1998), 7–13.

[2] Z. Zhang, X. Hu, L. Zhang. *On the Hermitian–generalized Hamiltonian solutions of the linear matrix equations.* SIAM J. Matrix Anal. Appl., 27, 1 (2005), 294–303.

[3] X. Peng, X. Hu, L. Zhang. *The reflexive and anti-reflexive solutions of the matrix equation* $A^H XB = C$. Journal of Computational and Applied Mathematics, 200 (2007), 749–760.

[4] H. C. Chen. *Generalizaed reflexive matrices: special properties and applications*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 19 (1998), 140–153.

[5] Zhen-yun Peng, Xi-yan Hu. *The reflexive and anti-reflexive solutions of the matrix equation* $AX = B$. Linear Algebra and its Applications 375 (2003), 147–155.

[6] M. Jamshidi. *An overview on the solutions of the algebraic matix Riccati equation and related problems.* Large Scale Systems 1 (1980), 167–192.

[7] H. K. Wimmer. *Decompodition and parametrization of semidefinite solutions of the continuous–time algebraic Riccati equation*, SIAM J. Control Optim., 32 (1994), 995–1007.

[8] J. Benítez, N. Thome. $\{k\}$*-group periodic matrices.* SIAM Matrix Anal. Appl., 28, 1 (2006), 9–25.