

Multiplicidad de soluciones estacionarias para un modelo climático con una condición de contorno difusiva no lineal.

J.I DÍAZ¹, L. TELLO²

¹ *Dpto. de Matemática Aplicada, F. Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, Plaza de las Ciencias 3, 28040 Madrid. E-mail: diaz.racefyn@insde.es.*

² *Dpto. de Matemática Aplicada, ETS Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid, Av. Juan de Herrera 4, 28040 Madrid. E-mail: l.tello@upm.es.*

Palabras clave: Modelos atmósfera - océano, condiciones de contorno difusivas, p-Laplaciano, sub y supersoluciones, principio de comparación.

Resumen

En este trabajo se estudian las soluciones estacionarias de un modelo climático bidimensional (latitud - profundidad), del tipo del propuesto por R.G. Watts y R. Morantine en 1990 que corresponde al acoplamiento entre la temperatura superficial promediada y la temperatura interior de un océano profundo.

1. Introducción

En este trabajo estudiamos la multiplicidad o unicidad de estados estacionarios para un modelo climático de tipo de balance de energía que incorpora explícitamente el acoplamiento entre un océano profundo y la superficie atmosférica promediada (en espesor) propuesto inicialmente en Watts y Morantine [20].

El modelo considerado describe la evolución de la temperatura en el interior de un océano “global” de profundidad H así como en su superficie que se supone coincidente con la superficie resultante al promediar en altura la capa atmosférica colindante. Motivados por el trabajo de Stone [19], nuestro modelo incorpora un operador de difusión superficial de tipo p-Laplaciano. Suponiendo temperatura constante sobre cada paralelo, se toman como variables espaciales (x, z) , siendo x el seno de la latitud y $-z$ la profundidad. Así, el dominio espacial se denota por $\Omega = (-1, 1) \times (-H, 0)$ y su contorno, $\Gamma_H \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, siendo $\Gamma_H = \{(x, z) \in \bar{\Omega} : z = -H\}$, $\Gamma_0 = \{(x, z) \in \bar{\Omega} : z = 0\}$, $\Gamma_1 = \{(x, z) \in \bar{\Omega} : x = 1 \text{ ó } x = -1\}$. U representa la temperatura en el interior del océano y viene dada por la ecuación:

$$U_t - \left(\frac{K_H}{R^2}(1-x^2)U_x\right)_x - K_V U_{zz} + wU_z = 0 \quad (0, T) \times \Omega,$$

donde K_V y K_H son los coeficientes de difusión vertical y horizontal, respectivamente. w es la velocidad vertical y R , el radio de la Tierra. La condición de contorno en $z = 0$ proviene del balance de energía:

$$DU_t - \frac{DK_{H_0}}{R^2}((1-x^2)^{\frac{p}{2}}|U_x|^{p-2}U_x)_x + \mathcal{G}(U) + K_V \frac{\partial U}{\partial n} + wxU_x \in QS(x)\beta(U) + f$$

donde $\mathcal{G}(U) - f$ es la energía emitida por enfriamiento de la superficie, D es el espesor de la capa mixta y K_{H_0} la difusividad horizontal en la capa mixta. Las constantes ρ y c representan la densidad y el calor específico del agua, respectivamente.

El efecto feedback del coalbedo (β) aparece en la condición de contorno; β depende de la temperatura. $S(x)$ es la función de insolación y Q la constante solar (un parámetro significativo en este modelo). Resultados sobre las soluciones de evolución se encuentran en [9] y [11].

En este trabajo completamos nuestros resultados previos sobre tal problema mostrando que el modelo es muy sensible frente a pequeñas variaciones del parámetro solar, Q , que aparece involucrado en la condición de contorno difusiva modelizando la amplitud de un término fuente que tiene cuenta del coalbedo. Mostramos que puede aparecer multiplicidad de soluciones estacionarias y analizamos la variación del número de soluciones ante variaciones de Q .

2. Soluciones estacionarias

En este trabajo estudiamos el número de soluciones del siguiente problema:

$$(P_Q) \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{K_H}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2) \frac{\partial U}{\partial x} \right) - K_V \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + w \frac{\partial U}{\partial z} = 0 & \Omega, \\ wx \frac{\partial U}{\partial x} + K_V \frac{\partial U}{\partial z} = 0 & \Gamma_H \\ -\frac{DK_{H_0}}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2)^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \mathcal{G}(U) + K_V \frac{\partial U}{\partial n} + wx \frac{\partial U}{\partial x} \\ \in \frac{1}{\rho c} QS(x)\beta(x, U) + f(x) & \Gamma_0 \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 & \Gamma_1, \end{array} \right.$$

bajo las siguientes hipótesis estructurales:

(H_S) $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $S \in L^\infty(-1, 1)$, $S_1 \geq S(x) \geq S_0 > 0$, para ciertas constantes $S_1 > S_0$.

(H_G) $\mathcal{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, estrictamente creciente tal que $\mathcal{G}(0) = 0$ y $\lim_{|s| \rightarrow \infty} |\mathcal{G}(s)| = +\infty$.

(H_f) $f \in L^\infty(\Omega)$ y existe $C_f > 0$ tal que $-\|f\|_\infty \leq f(x) \leq -C_f$ c.p.t. $x \in \Omega$.

(H $_{\beta}$) β es un grafo maximal monótono de \mathbb{R}^2 tal que existen dos números reales $0 < m < M$ y $\epsilon > 0$ verificando $\beta(r) = \{m\}$ para todo $r \in (-\infty, -10 - \epsilon)$ y $\beta(r) = \{M\}$ para todo $r \in (-10 + \epsilon, +\infty)$.

(H $_{C_f}$) $\mathcal{G}(-10 - \epsilon) + C_f > 0$ y $\frac{\mathcal{G}(-10 + \epsilon) + \|f\|_{\infty}}{\mathcal{G}(-10 - \epsilon) + C_f} \leq \frac{S_0 M}{S_1 m}$.

(H $_w$) $w \in C^1(\bar{\Omega})$.

(H $_K$) $p \geq 2$ y las constantes $K_H, K_V, K_H, K_{H_0}, D, R, \rho, c$ y Q son positivas.

Definimos, en primer lugar, los espacios funcionales:

$$V(\Omega) = \{U \in L^2(\Omega) : (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial U}{\partial x} \in L^2(\Omega), \frac{\partial U}{\partial z} \in L^2(\Omega)\},$$

$$V_p(\Gamma_0) = \{u \in L^2(\Gamma_0) : (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x} \in L^p(\Gamma_0)\}.$$

Definición 1 Diremos que un par $(U, u) \in (V(\Omega) \times V_p(\Gamma_0)) \cap (L^{\infty}(\Omega) \times L^{\infty}(\Gamma_0))$ es una solución débil acotada del problema estacionario si $U|_{\Gamma_0} = u$ y se verifica:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{K_H}{R^2} (1 - x^2) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dA + \int_{\Omega} K_v \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} dA + \int_{\Omega} w \frac{\partial U}{\partial z} \psi dAdt \\ & - \int_{-1}^1 wx \frac{\partial U}{\partial x}(x, -H) \psi(x, -H) dx - \int_{-1}^1 K_v \frac{\partial U}{\partial z}(x, 0) \psi(x, 0) dx = 0, \\ & \int_{-1}^1 \frac{DK_{H_0}}{R^2} (1 - x^2)^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{\frac{p}{2}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \\ & + \int_{-1}^1 K_v \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) \zeta dx + \int_{-1}^1 wx \frac{\partial u}{\partial x} \zeta dx + \int_{-1}^1 \mathcal{G}(u) \zeta dx \\ & = \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho c} QS(x) h \zeta dx \end{aligned}$$

para algún $h \in L^{\infty}(\Gamma_0)$, $h \in \beta(\cdot, u)$ y $\forall (\psi, \zeta)$ funciones test.

El resultado principal de este trabajo se recoge en el siguiente:

Teorema 1 Bajo las hipótesis (H $_S$), (H $_G$), (H $_f$), (H $_w$), (H $_K$) y (H $_{\beta}$) se tiene,

i) para todo $Q > 0$ existe una solución minimal $(\underline{U}, \underline{u})$ (resp. solución maximal (\bar{U}, \bar{u})) del problema (P $_Q$).

Además, si se tiene (H $_{C_f}$) entonces existen $Q_1 < Q_2 < Q_3 < Q_4$ tales que

ii) si $0 < Q < Q_1$ entonces (P $_Q$) tiene solución única,

iii) si $Q_2 < Q < Q_3$ entonces (P $_Q$) tiene al menos tres soluciones,

iv) si $Q_4 < Q$ entonces (P_Q) tiene solución única, siendo

$$Q_1 = \frac{(\mathcal{G}(-10 - \epsilon) + C_f)\rho c}{S_1 M}, \quad Q_2 = \frac{(\mathcal{G}(-10 + \epsilon) + \|f\|_\infty)\rho c}{S_0 M},$$

$$Q_3 = \frac{(\mathcal{G}(-10 - \epsilon) + C_f)\rho c}{S_1 m}, \quad Q_4 = \frac{(\mathcal{G}(-10 + \epsilon) + \|f\|_\infty)\rho c}{S_0 m}.$$

Definición 2 Se define el operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)$, $\mathcal{A}(U, u) := (AU, Bu)$ sobre el dominio,

$$D(\mathcal{A}) = \{(U, u) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0) : AU \in L^2(\Omega), Bu \in L^2(\Gamma_0), U|_{\Gamma_0} = u\},$$

siendo

$$AU = -\frac{K_H}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2) \frac{\partial U}{\partial x} \right) - K_V \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + w \frac{\partial U}{\partial z}$$

y

$$Bu = -\frac{DK_{H_0}}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2)^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + K_V \frac{\partial U}{\partial n} + wx \frac{\partial U}{\partial x} + \mathcal{G}(U).$$

Obsérvese que podemos reescribir el problema como el sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{cases} AU = 0 & \Omega \\ Bu \in \frac{1}{\rho c} QS(x)\beta(u) + f & \Gamma_0 \\ U|_{\Gamma_0} = u & \\ wxU_x + K_V U_z = 0 & \Gamma_H \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}} |U_x|^{p-2} U_x = 0 & \Gamma_1. \end{cases} \quad (1)$$

Los siguientes lemas son fundamentales en la demostración del Teorema 1:

Lema 1 ([9]) $\mathcal{A} + \omega I$ es T -acretivo en $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)$, donde $\omega > \frac{1}{2}$. \square

En consecuencia, tenemos un principio de comparación para el sistema:

$$(P_{F,f}) \begin{cases} \omega U + AU = F & \text{en } L^2(\Omega) \\ \omega u + Bu = f & \text{en } L^2(\Gamma_0) \\ U|_{\Gamma_0} = u \\ wx \frac{\partial U}{\partial x} + K_V \frac{\partial U}{\partial z} = 0 & \Gamma_H \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 & \Gamma_1. \end{cases}$$

Si $F_1 \leq F_2$ y $f_1 \leq f_2$ entonces las soluciones de (P_{F_1, f_1}) y (P_{F_2, f_2}) satisfacen $U_1 \leq U_2$, $u_1 \leq u_2$.

Además, tenemos

Lema 2 ([9]) $R(\mathcal{A} + \lambda I) = L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)$ para $\lambda > \frac{1}{2}$. \square

Demostración del Teorema 1.

(i) La existencia de solución maximal y solución minimal es consecuencia del principio de comparación para el sistema auxiliar:

$$\begin{cases} \omega U + AU = H, \\ \omega u + Bu = h. \end{cases} \quad (2)$$

Además, si $H_1 \leq H_2$ y $h_1 \leq h_2$ entonces $U_1 \leq U_2$ y $u_1 \leq u_2$.

Es fácil ver que existen funciones constantes $(\underline{V}, \underline{v})$ y $(\overline{U}, \overline{u})$ que verifican

$$\begin{cases} \omega \underline{V} + A\underline{V} = \omega \underline{V} & \Omega \\ \omega \underline{v} + B\underline{v} = \omega \underline{v} + \frac{1}{\rho c} QS_0 m - \|f\|_\infty \leq \omega \underline{v} + \frac{1}{\rho c} QS(x)\underline{\beta}(\underline{v}) + f, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega \overline{U} + A\overline{U} = \omega \overline{U} & \Omega \\ \omega \overline{u} + B\overline{u} = \omega \overline{u} + \frac{1}{\rho c} QS_1 M - C_f \geq \omega \overline{u} + \frac{1}{\rho c} QS(x)\overline{\beta}(\overline{u}) + f. \end{cases}$$

Definimos la sucesión $\{(\underline{V}_n, \underline{v}_n)\}$ como

$$(P_n) \begin{cases} \omega \underline{V}_n + A\underline{V}_n = \omega \underline{V}_{n-1} \\ \omega \underline{v}_n + B\underline{v}_n = \omega \underline{v}_{n-1} + QS(x)\underline{\beta}(\underline{v}_{n-1}) + f \\ \underline{V}_n|_{\Gamma_0} = \underline{v}_n \\ wx \frac{\partial \underline{V}_n}{\partial x} + K_V \frac{\partial \underline{V}_n}{\partial z} = 0 & \Gamma_H \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial \underline{V}_n}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial \underline{V}_n}{\partial x} = 0 & \Gamma_1, \end{cases}$$

y $(\underline{V}_0, \underline{v}_0) := (\underline{V}, \underline{v})$. Por el principio de comparación aplicado al problema auxiliar (2), las sucesiones $\{\underline{V}_n\}$ y $\{\underline{v}_n\}$ son monótonas. Estimaciones a priori uniformes de $\{(\underline{V}_n, \underline{v}_n)\}$, nos permiten pasar al límite en la formulación débil y obtenemos

$$(\underline{V}_n, \underline{v}_n) \rightarrow (V_*, v_*),$$

donde el límite (V_*, v_*) es una solución de (P_Q) y cualquier solución (W, w) verifica $V_* \leq W$ y $v_* \leq w$, es decir, (V_*, v_*) es una solución minimal. Análogamente, obtenemos la solución maximal (U^*, u^*) .

(ii) Si $Q < Q_1$ entonces $\underline{V} \leq \overline{U} \leq -10 - \epsilon$. Así, cada solución (U, u) de (P_Q) verifica $u < -10 - \epsilon$ y es solución del problema

$$(P_Q^m) \begin{cases} AU = 0 & \Omega \\ Bu = \frac{1}{\rho c} QS(x)m + f & \Gamma_0 \\ U|_{\Gamma_0} = u \\ wx \frac{\partial U}{\partial x} + K_V \frac{\partial U}{\partial z} = 0 & \Gamma_H \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 & \Gamma_1, \end{cases}$$

que tiene solución única. Para probarlo, suponemos que existen dos soluciones, (U_1, u_1) y (U_2, u_2) y tomamos la diferencia $U_1 - U_2$ con función test en la formulación débil. El Lema de Gronwall nos permite concluir la unicidad.

(iii) Si $Q_4 < Q$ entonces $-10 + \epsilon \leq \underline{V} \leq \overline{U}$. Así, cada solución (U, u) verifica $-10 + \epsilon \leq u$ y $\beta(u) = M$.

$$(P_Q^M) \begin{cases} AU = 0 & \Omega \\ Bu = \frac{1}{\rho c} QS(x)M + f & \Gamma_0 \\ U|_{\Gamma_0} = u \\ wx \frac{\partial U}{\partial x} + K_V \frac{\partial U}{\partial z} = 0 & \Gamma_H \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 & \Gamma_1. \end{cases}$$

como en (ii), este problema tiene solución única.

(iv) La demostración de la multiplicidad de soluciones para $0 < Q_2 < Q < Q_3$ está basada en Díaz - Hernández - Tello [8], donde se probó la existencia de al menos tres soluciones para el problema

$$-\Delta_p u + \mathcal{G}(u) \in QS(x)\beta(u) + f \text{ en } \mathcal{M},$$

siendo \mathcal{M} el caso general de una variedad Riemanniana bidimensional compacta sin borde.

Hemos dividido la demostración en tres etapas.

Etapla 1. *Construcción de sub y supersoluciones.* Si $Q_2 < Q < Q_3$ entonces,

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &:= \mathcal{G}^{-1}\left(\frac{1}{\rho c} QS_1 M - C_f\right) && \text{es una supersolución de } (P_Q^M) \\ \underline{V}_1 &:= \mathcal{G}^{-1}\left(\frac{1}{\rho c} QS_0 M - \|f\|_\infty\right) && \text{es una subsolución de } (P_Q^M) \\ \bar{U}_2 &:= \mathcal{G}^{-1}\left(\frac{1}{\rho c} QS_1 m - C_f\right) && \text{es una supersolución de } (P_Q^m) \\ \underline{V}_2 &:= \mathcal{G}^{-1}\left(\frac{1}{\rho c} QS_0 m - \|f\|_\infty\right) && \text{es una subsolución de } (P_Q^m). \end{aligned}$$

Además, $\bar{V}_2 < \bar{U}_2 < -10 - \epsilon < -10 + \epsilon < \underline{V}_1 < \bar{U}_1$. Entonces, existen dos soluciones (U_1, u_1) y (U_2, u_2) de (P_Q) tales que u_1 y u_2 no cruzan el nivel -10. Para encontrar la tercera solución usamos un resultado de Amann [1]. Este resultado se aplica al caso en el que β es una función Lipschitz. En la siguiente etapa, aproximaremos el grafo β por funciones Lipschitz.

Etapla 2. *El problema aproximado.*

Definimos una nueva familia de problemas

$$(P_{Q,\lambda}) \begin{cases} AU = 0 & \Omega \\ Bu = QS(x)\beta_\lambda(u) + f(x) & \Gamma_0 \\ B.C. & \Gamma_H \cup \Gamma_1 \end{cases}$$

donde β_λ es una función Lipschitz $\beta_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - (I - \lambda\beta)^{-1})$, $\lambda > 0$ (la aproximación Yosida de β). Como β verifica (H_β) , tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_\lambda &\text{ es acotada y no decreciente } \forall \lambda > 0, \\ \beta_\lambda(s) &= \beta(s) \text{ para todo } s \notin [-10 - \epsilon, -10 + \epsilon + \lambda M], \forall \lambda > 0, \\ \beta_\lambda(s) &\rightarrow \beta(s) \text{ en el sentido de los grafos maximales monótonos cuando } \lambda \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(véase Brezis [4]). En el caso en el que β es una función Lipschitz, tomamos $\beta_\lambda = \beta$.

Ahora, aplicando el argumento utilizado en la etapa 1 al problema $(P_{Q,\lambda})$, tenemos que existe λ_0 tal que $\underline{V}_2 < \bar{U}_2 < -10 - \epsilon < -10 + \epsilon + \lambda_0 M < \underline{V}_1 < \bar{U}_1$. Obtenemos dos familias de soluciones de $\{(P_{Q,\lambda})\}$ tales que u_1^λ y u_2^λ no cruzan el nivel -10. la tercera familia de soluciones se obtiene como consecuencia del siguiente resultado.

Lema 3 (Amann [1]) *Sea X un retracto de un espacio de Banach E y sea $F : X \rightarrow X$ una aplicación compacta. Supongamos que X_1 y X_2 son retractsos disjuntos de X , y sean Y_k , $k = 1, 2$ abiertos de X tales que $Y_k \subset X_k$. Supongamos además que $F(X_k) \subset X_k$ y que F no tiene puntos fijos en $X_k - Y_k$, $k = 1, 2$. Entonces F tiene al menos tres puntos fijos distintos x, x_1, x_2 con $x_k \in X_k$ y $x \in X - (X_1 \cup X_2)$.*

Toda solución u del problema (P_Q^λ) es un punto fijo de $F : L^\infty(\Gamma_0) \rightarrow L^\infty(\Gamma_0)$ definida por

$$F(u) = P_2(\mathcal{A}^{-1}(0, \frac{1}{\rho c} QS(\cdot)\beta_\lambda(u) + f_\infty(\cdot))).$$

\mathcal{A} es el operador definido en 2 y P_2 la proyección sobre la segunda componente.

Sea $E = L^\infty(\Gamma_0)$, espacio de Banach ordenado con respecto al orden natural dado por el cono positivo,

$$L_+^\infty(\Gamma_0) = \{v \in L^\infty(\Gamma_0) : v(x) \geq 0 \text{ a.e. } x \in \Gamma_0\},$$

y que tiene interior no vacío. Sean $X = [\underline{V}_2 - \delta, \bar{U}_1 + \delta]$, $X_1 = [\underline{V}_1 - \delta, \bar{U}_1 + \delta]$ and $X_2 = [\underline{V}_2 - \delta, \bar{U}_2 + \delta]$ where $\delta > \lambda_0 M$ is taken such that $\underline{V}_1 > -10 + \epsilon + \delta$, $\bar{U}_2 > -10 - \epsilon - \delta$. Así, existe un abierto Y_k de $L^\infty(\Gamma_0)$ conteniendo u_k^λ para $k = 1, 2$ tal que $Y_k \subset X_k$.

Los conjuntos X, X_1 y X_2 son retractsos de $L^\infty(\Gamma_0)$ (resp. X), por ser subconjuntos no vacíos cerrados y convexos de $L^\infty(\Gamma_0)$ (resp. X). Moreover, $F(X) \subset X$ y $F(X_k) \subset X_k$. Finalmente, por las propiedades de β_λ y la inclusión compacta $V_p(\Gamma_0) \subset L^\infty(\Gamma_0)$ para $p \geq 2$, se llega a que $F : X \rightarrow X$ es una aplicación compacta.

Así, por el Lema 3 concluimos que F tiene al menos tres puntos fijos, o equivalentemente, $(P_{Q,\lambda})$ tiene al menos tres soluciones: $u_1^\lambda \in X_1$, $u_2^\lambda \in X_2$ y $u_3^\lambda \in X - (X_1 \cup X_2)$.

Etapas 3. La demostración termina probando la convergencia de una subsucesión de $\{u_3^\lambda\}$ a u_3 tal que (U_3, u_3) es solución de (P_Q) . Para obtener este límite utilizamos un resultado relativo a grafos maximales monótonos ([5]) que garantiza que el límite de $\beta_\lambda(u_3^\lambda)$ está en el grafo $\beta(u_3)$. Finalmente, la convergencia en $L^\infty(\Gamma_0)$ nos permite mostrar que u_3 es distinta de u_1 y u_2 . En particular, u_3 atraviesa el nivel -10 .

Observación 1 *En el trabajo [10] se prueba que en ciertos modelos atmosféricos de una capa existe un rango de Q para el que existen infinitos estados estacionarios. En dicho problema aparece también el operador p -Laplaciano y un grafo β de tipo Heaviside. Este resultado nos sugiere que el problema estudiado podría poseer más de tres soluciones para ciertos valores de la constante solar Q .*

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos MTM2005-03463 y CCG06-UCM/ESP-1110 de la DGUIIC de la CAM y la UCM.

Referencias

- [1] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Review, 18, No. 4 (1976) 620-709.
- [2] D. Arcoya, J.I. Díaz, L. Tello, *S-shaped bifurcation branch in a quasilinear multivalued model arising in Climatology*, Journal of Differential Equations, 150 (1998) 215-225.
- [3] W.H. Berger, S. Burkner, E. Vincent, *Glacial-Holocene transition: Climate Pulsations and Sporadic Shutdown of NADW production*, in “Abrupt Climatic Change - Evidence and Implications”, (eds. W.H. Berger, L.D. Labeyrie), Reidel Publishing Co. Dordrecht Holland (1987).
- [4] H. Brezis, *Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North Holland, Amsterdam (1973).
- [5] H. Brezis, *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations*, in “Contributions to Nonlinear Functional Analysis”, (Zarantonello, E. Ed.), Academic Press New York (1971) 101-156.
- [6] M.I. Budyko, *The effects of solar radiation variations on the climate of the Earth*, Tellus 21 (1969) 611-619.
- [7] J.I. Díaz, *Mathematical analysis of some diffusive energy balance climate models*, in the book “Mathematics, Climate and Environment”, (J.I. Díaz and J.L. Lions, eds.) Masson, Paris, (1993) 28-56.
- [8] J.I. Díaz, J. Hernández, L. Tello, *On the multiplicity of equilibrium solutions to a nonlinear diffusion equation on a manifold arising in Climatology*, J. Math. An. Appl. 216 (1997) 593-613.
- [9] J.I. Díaz, L. Tello, *Sobre un modelo climatico de balance de energia superficial acoplado con un oceano profundo*, Actas del XVII CEDYA/ VI CMA, (2001).
- [10] J.I. Díaz, L. Tello, *Infinitely many stationary solutions for a simple climate model via a shooting method*, Math. Meth. Appl. Sci. 25 (2002) 327-334.
- [11] J.I. Díaz, L. Tello, *On a parabolic problem with diffusion on the boundary arising in Climatology*, Internacional Conference on Differential Equations. Ed. World Scientific, New Jersey (2005) 1056-1058.
- [12] P.G. Drazin, D.H. Griffel, *On the branching structure of diffusive climatological models*, J. Atmos. Sci. 34 (1977) 1969-1706.
- [13] M. Ghil, S. Childress, *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics Dynamo Theory and Climate Dynamics*. Springer Verlag. Applied Mathematical Sciences. 1987.
- [14] G. Hetzer, *The structure of the principal component for semilinear diffusion equations from energy balance climate models*, Houston Journal of Math. 16 (1990) 203-216.
- [15] G. Hetzer, *The number of stationary solutions for a one-dimensional Budyko-type climate model*, Nonlinear Analysis 2 (2001) 259-272.
- [16] A. Kufner *Weighted Sobolev Spaces*, J. Wiley & sons, (1985).
- [17] G.R. North, *Multiple solutions in energy balance climate models*, Paleogeography, Paleoclimatology, Paleoecology 82, Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam, 225-235 (1990).
- [18] W.D. Sellers, *A global climatic model based on the energy balance of the earth-atmosphere system*, J. Appl. Meteorol. 8 (1969) 392-400.
- [19] P.H. Stone, *A simplified radiative-dynamical model for the static stability of rotating atmospheres*, J. Atmos. Sci. (3) 29 (1972) 405-418.
- [20] R.G. Watts, M. Morantine, *Rapid climatic change and the deep ocean*, Climatic Change 16 (1990), 83-97.