

## Maximum values of angular distortion associated with plastic yielding and collapse of straight concrete sections

Rubén Darío Cano Marín<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Grupo de investigación TEP 018. Universidad de Sevilla. [rubendariocano@gabinete-rdc.com](mailto:rubendariocano@gabinete-rdc.com)

### ABSTRACT

The capacity of a reinforced concrete structure to assume an angular distortion depends among other factors on the stiffness and ductility of each section. Therefore, global values such as those established by the CTE-DB-C (2006) for the E.L.S. may be conservative or risky depending on the geometric characteristics of the section, their assembly, or material strength.

The aim of this Communication is to establish a range of maximum values of angular distortion associated with the initial plastic yielding of the material and collapse of straight concrete section.

To do this we use the modification of the classic diagram pivots and compatibility equations, as well as the method of nonlinear iterative calculation in order to obtain a balance between efforts and curvature of the section.

**Keywords:** differential movement, reinforced concrete, angular distortion, limit states

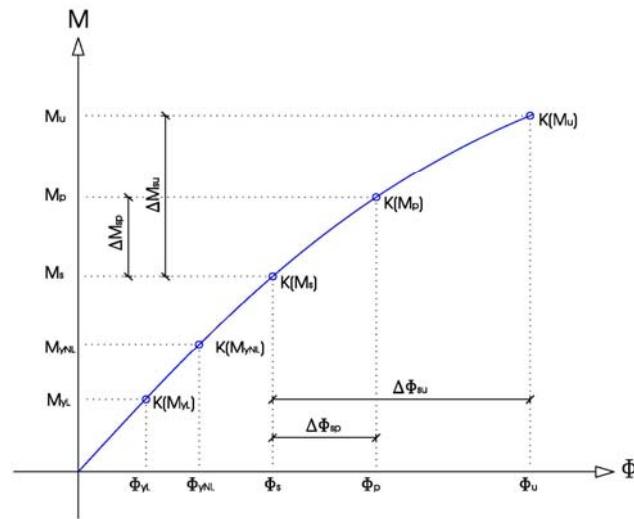
### 1. INTRODUCCIÓN

#### 1.1. Hipótesis de partida.

El empleo de determinados coeficientes de seguridad en el cálculo de una estructura permite que la misma pueda absorber ciertas deformaciones admisibles sin que ello afecte a su estabilidad, es decir podrá asumir un incremento de cargas o de deformación antes de alcanzar el límite de su estado elástico lineal y no lineal o de su estado plástico hasta alcanzar su rotura.

Por tanto bajo condiciones únicamente de las cargas habituales de servicio, se podría llegar a admitir una sollicitación externa adicional antes de alcanzar el colapso de la estructura, como puede ser el momento flector y el cortante asociado a una distorsión angular.

Conocidos los rangos de deformación por los que pasará la pieza antes de su rotura, así como el rango asociado a la situación de servicio, podremos conocer el incremento admisible de deformación hasta que los materiales comiencen a plastificar o la pieza alcance la rotura.



**Figura 1.** Incremento admisible de momento flector y curvatura de una sección sometida a las cargas habituales de servicio.

Conocida la curvatura para la situación de servicio  $\phi_s$ , la máxima curvatura asociada al inicio de la plastificación  $\phi_p$ , y la curvatura asociada a la rotura  $\phi_u$ , podremos determinar el incremento admisible de deformación desde la situación de servicio hasta cada rango de deformación,  $\Delta\phi_{sp}$  y  $\Delta\phi_{su}$ .

## 1.2. Iteración de cálculo del momento flector

Tomamos como partida el planteamiento gráfico propuesto por Murcia Vela, J., Aguado de Cea, A., Marí Bernat A.R. (1993) [1].

Esta propuesta está definida por dos etapas fundamentales e iterativas. La primera etapa resuelve mediante un cálculo lineal el valor de la rigidez asociada al momento flector para el cálculo lineal  $M_1$ . En esta fase los esfuerzos equilibran a las acciones, sin embargo esta solución, representada en una sección genérica de la estructura por el punto  $M_1, \phi_1^L$ , no cumple con las deformaciones reales del material, que vendrá definida por  $M_1, \phi_1^{NL}$ .

La diferencia entre ambos puntos dará lugar a un incremento de curvatura  $\Delta\phi_1$ , diferencia de la curvatura real y la obtenida en el cálculo de estas etapas, y a una reducción asociada del momento flector  $\Delta M_1$ , que dará lugar al punto  $M_2, \phi_2^L$ , siendo esta la segunda etapa del cálculo. Este proceso se puede repetir de forma iterativa hasta converger en un único resultado, según refleja el gráfico siguiente.

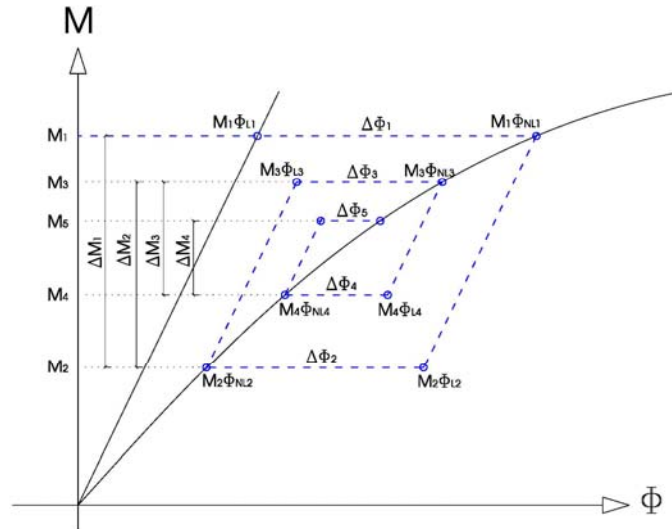


Figura 2. Modelo gráfico de la iteración de cálculo

Las dos etapas fundamentales del cálculo iterativo: estarían definidas por los siguientes pasos:

- |  |   |
|--|---|
| 1. Obtención de la curvatura lineal asociada al momento $M_1$    | $\phi_{1L} = M_1 / K_L$                 |
| 2. Obtención de la curvatura no lineal asociada al momento $M_1$ | $\phi_{1NL} = M_1 / K(M_1)$             |
| 3. Obtención del incremento de curvatura                         | $\Delta\phi_1 = \phi_{1NL} - \phi_{1L}$ |
| 4. Obtención del incremento de momento asociado a $\Delta\phi_1$ | $\Delta M_1 = \Delta\phi_1 K_L$         |
| 5. Momento flector tras la primera iteración de cálculo.         | $M_2 = M_1 - \Delta M_1$                |

Según Cano Marín R.D. (2014) [2], las ecuaciones anteriores quedan definidas mediante la una matriz con valor de  $2 \leq k < \infty$ , siendo el momento flector  $M_0 = 0$ , que responde al siguiente algoritmo, mediante el que se consigue una iteración del cálculo hasta la obtención de un valor convergente entre el momento flector y la rigidez de la sección.

$$M_k = M_{k-1} \cdot \left( 2 - \frac{K_L}{K(M_{k-1})} \right) + M_{k-2} \cdot \left( \frac{K_L}{K(M_{k-2})} - 1 \right) \quad (1)$$

### 1.3. Comportamiento de los materiales.

Si consideramos para el acero un modelo tensión-deformación bilineal, sin endurecimiento y simétrico según EC2 [3], el material mantendrá un régimen elástico y lineal hasta alcanzar una deformación  $\varepsilon_{sy} = \pm f_{yd} / E_s$ , momento a partir del cual plastificará hasta alcanzar su rotura para un valor de  $\varepsilon_{su}$ .

Tomando para el hormigón el modelo parábola rectángulo de la figura 2, contemplando la relación tensión deformación del hormigón traccionado planteada por Collins y Mitchell [4], podemos considerar que el material mantendrá un régimen elástico y lineal hasta alcanzar una deformación  $\varepsilon_{cy} = f_{cd} / E_c$ , elástico y no lineal hasta alcanzar la deformación de rotura del hormigón a compresión simple  $\varepsilon_{cp}$ , y un régimen plástico desde dicho valor hasta su rotura por flexión equivalente a una deformación  $\varepsilon_{cu}$ .

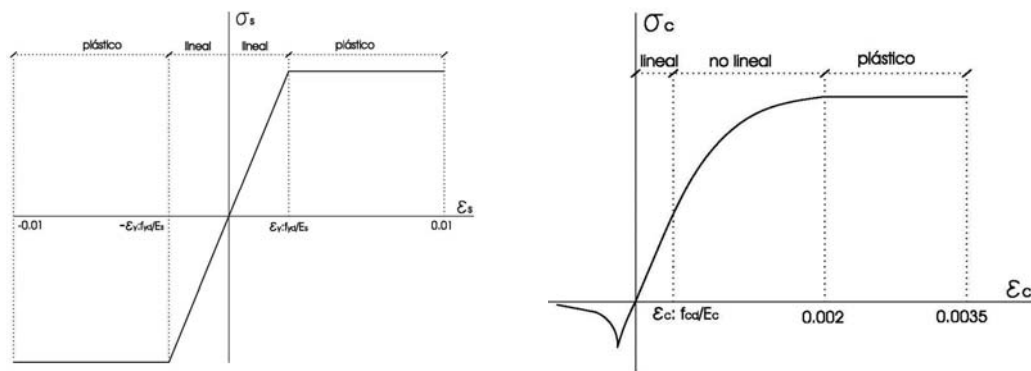


Figura 3. Modelo tensión deformación del acero y el hormigón

Si trasladamos los anteriores valores de deformación a un diagrama de pivotes y consideramos el agotamiento de la pieza definido por los máximos valores de deformación establecidos para cada fase de estudio, tendremos dos dominios para una deformación lineal y elástica definidos por los planos que pivotan en los valores  $\varepsilon_{sy}$  y  $\varepsilon_{cy}$ , cuyo máximo momento flector será  $M_y$ , dos dominios para una deformación no lineal definidos por los pivotes  $\varepsilon_{sy}$  y  $\varepsilon_{cp}$  con flector asociado  $M_p$ , y dos dominios de deformación por los que pasarán los planos de rotura definidos por los pivotes  $\varepsilon_{su}$  y  $\varepsilon_{cu}$ , cuyo momento flector será  $M_u$ , según reflejamos en la siguiente.

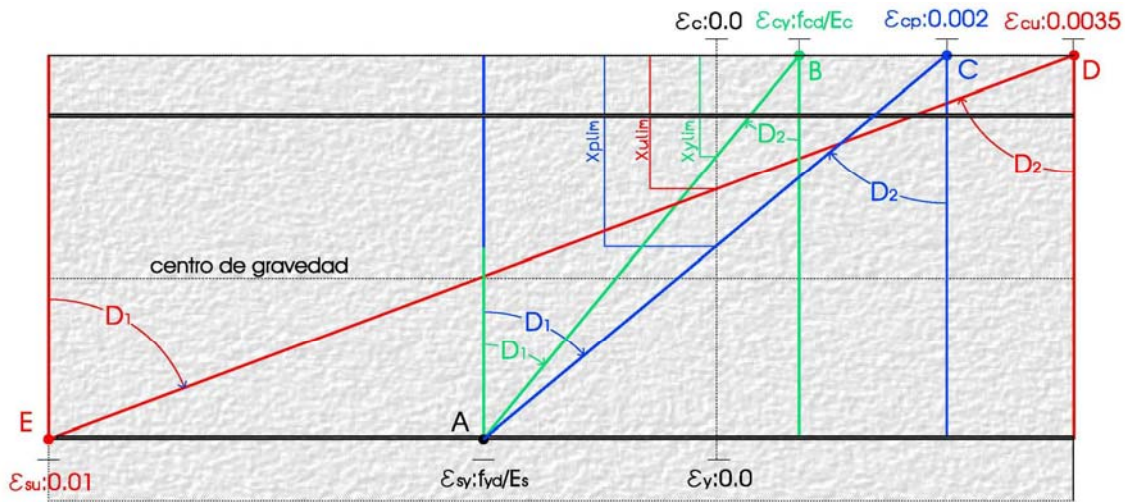


Figura 4. Modificación del diagrama clásico de pivotes

#### 1.4. Definición de los dominios de deformación.

Admitiendo la hipótesis de que las deformaciones normales a la sección sigan una ley plana y por tanto una variación lineal, al conocerse las deformaciones en dos fibras de la sección las deformaciones quedan definidas en todas sus fibras según las ecuaciones de compatibilidad:

$$\phi(x) = \frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_y}{x-y} = \frac{\epsilon_{s1}}{x-d} = \frac{\epsilon_{s2}}{x-d'} \quad (2)$$

La deformación del acero traccionado y comprimido, así como la deformación de la hormigón en cualquier fibra de la sección situada a una distancia "y", queda por tanto definida como sigue:

Deformación a una distancia "y"

$$\epsilon(x, y) = \phi(x) \cdot (x - y) \quad (3)$$

Deformación del acero traccionado en flexión positiva

$$\epsilon_{s1}(x, \phi) = \phi(x) \cdot (x - d) \quad (4)$$

Deformación del acero comprimido en flexión positiva

$$\epsilon_{s2}(x, \phi) = \phi(x) \cdot (x - d') \quad (5)$$

Considerando que los planos de deformación pivotarán sobre los valores de deformación impuestos a los materiales,  $\varepsilon_{cy}$ ,  $\varepsilon_{cp}$  ó  $\varepsilon_{cu}$  para la deformación a compresión del hormigón y  $\varepsilon_{sy}$  ó  $\varepsilon_{su}$  para la deformación a tracción del acero, la curvatura asociada quedaría:

Curvatura máxima para un comportamiento lineal

$$\phi_y(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_{sy}}{x-d} & \text{si } -\infty \leq x \leq x_{y\text{lim}} \\ \frac{\varepsilon_{cy}}{x} & \text{si } x_{y\text{lim}} < x \leq \infty \end{cases} \quad (6)$$

Curvatura máxima para un comportamiento no lineal

$$\phi_p(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_{sy}}{x-d} & \text{si } -\infty \leq x \leq x_{p\text{lim}} \\ \frac{\varepsilon_{cp}}{x} & \text{si } x_{p\text{lim}} < x \leq \infty \end{cases} \quad (7)$$

Curvatura asociada a la rotura

$$\phi_u(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_{su}}{x-d} & \text{si } -\infty \leq x \leq x_{u\text{lim}} \\ \frac{\varepsilon_{cu}}{x} & \text{si } x_{u\text{lim}} < x \leq \infty \end{cases} \quad (8)$$

Donde el valor de la profundidad de la fibra neutra que definirá el cambio de dominio  $x_{\text{lim}}$ , se puede deducir despejando la expresión (2) como sigue:

$$x_{y\text{lim}} = d \cdot \frac{\varepsilon_{cy}}{\varepsilon_{cy} + \varepsilon_{sy}} \quad (9)$$

$$x_{p\text{lim}} = d \cdot \frac{\varepsilon_{cp}}{\varepsilon_{cp} + \varepsilon_{sp}} \quad (10)$$

$$x_{u\text{lim}} = d \cdot \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{su}} \quad (11)$$

Mediante las leyes de equilibrio de esfuerzos deducimos la rigidez de la sección y el momento flector máximo asociado a cada rango de deformación.

Esfuerzo axial

$$N_c(x, \phi) = \int_0^h \sigma_c(\varepsilon_c(x, y, \phi)) \cdot b \cdot dy \quad (12)$$

Momento flector

$$M_c(x, \phi) = \int_0^h \sigma_c(\varepsilon_c(x, y, \phi)) \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot dy \quad (13)$$

Máximo axial que soporta la sección en su plano de rotura

$$N(x, \phi) = N_c(x, \phi) + A_{s1}(M_d) \cdot \sigma_s(\varepsilon_{s1}(x, \phi)) + A_{s2}(M_d) \cdot \sigma_s(\varepsilon_{s2}(x, \phi)) \quad (14)$$

Máximo momento flector que soporta la sección en su plano de rotura en flexión positiva

$$M(x, \phi) = M_c(x, \phi) + A_{s1}(M_d) \cdot \sigma_s(\varepsilon_{s1}(x, \phi)) \cdot \left(\frac{h}{2} - d\right) + A_{s2}(M_d) \cdot \sigma_s(\varepsilon_{s2}(x, \phi)) \cdot \left(\frac{h}{2} - d'\right) \quad (15)$$

Conocido el axial  $N(x, \phi)$ , que al tratarse de una viga consideramos igual a cero, podemos determinar el valor de la profundidad de la fibra neutra  $x_y, x_p, x_u$  de la curvatura máxima correspondiente al comportamiento elástico lineal, no lineal y plástico o de rotura.

Conocido el valor de "x" se puede deducir el valor del momento flector  $M_y(x, \phi), M_p(x, \phi)$  y  $M_u(x, \phi)$ , así como la rigidez asociada  $K_y(x), K_p(x)$  y  $K_u(x)$  cociente del flector y la curvatura.

Conocidos los puntos que definen el comportamiento del material podemos trazar el gráfico momento – curvatura definido por las rectas que unen los puntos anteriores.

Para obtener un cálculo más preciso del momento-curvatura se pueden obtener un número indefinido de puntos, dados por los infinitos planos de deformación de los materiales.

Para ello únicamente sería necesario imponer un desarrollo de cálculo matricial definido por  $M_{\varepsilon_s, \varepsilon_c}(x)$  y  $\phi_{\varepsilon_s, \varepsilon_c}(x)$ , donde  $0 \leq \varepsilon_s \leq 0.01$  y  $0 \leq \varepsilon_c \leq 0.0035$  en valores absolutos.

Conocido el diagrama momento curvatura podemos determinar el valor del momento flector de servicio tras la redistribución de esfuerzos dada por la iteración del cálculo, cuyo procedimiento matemático desarrollamos en las hipótesis de partida.

Conocido el momento de servicio redistribuido  $M_\eta$  podemos conocer el incremento admisible de momento flector hasta alcanzar el límite para el comportamiento elástico lineal, no lineal y plástico o de rotura de la sección, que vendrá definido por la diferencia entre el momento asociado a dichos rangos de deformación:

Incremento admisible para el límite elástico lineal

$$\Delta M_y = M_y(x_y) - M_\eta \quad (16)$$

Incremento admisible para el límite elástico no lineal

$$\Delta M_p = M_p(x_p) - M_\eta \quad (17)$$

Incremento admisible para el límite plástico o de rotura

$$\Delta M_u = M_u(x_u) - M_\eta \quad (18)$$

La distorsión angular admisible asociada a cada rango de deformación de la pieza será:

Distorsión angular admisible para el límite elástico lineal

$$\Delta \delta_y = \alpha \frac{\Delta M_y L^2}{6K_y(x_y)} \quad (19)$$

Distorsión angular admisible para el límite elástico no lineal

$$\Delta \delta_p = \alpha \frac{\Delta M_p L^2}{6K_p(x_p)} \quad (20)$$

Distorsión angular admisible el límite plástico o de rotura

$$\Delta \delta_u = \alpha \frac{\Delta M_u L^2}{6K_u(x_u)} \quad (21)$$

## 2. RESULTADOS

Resolviendo los cálculos anteriores para piezas de geometrías y cargas variables, para secciones de hormigón armado HA25 y acero B500S, obtenemos los valores máximos de distorsión angular asociados al inicio de la plastificación y rotura en función del cociente Luz / canto útil de la pieza.

Los valores distorsión inferiores a los reflejados para el inicio de la plastificación corresponderán a secciones que mantienen tras su deformación un rango de deformación elástica lineal o no lineal.



Por último reflejamos en rojo los valores de distorsión angular asociados a la rotura frágil por compresión del hormigón, correspondiendo el resto a valores asociados al colapso a una rotura dúctil por plastificación del acero.

**Tabla 1.** Valores de distorsión angular asociados a la plastificación y rotura de las piezas

LUZ (m)	b (cm)	L/d	5kN/m <sup>2</sup>		10kN/m <sup>2</sup>		15kN/m <sup>2</sup>	
			Plastificación	rotura	Plastificación	rotura	Plastificación	rotura
			L/δ	L/δ	L/δ	L/δ	L/δ	L/δ
4	20	10	383	100	383	102	341	127
		15	237	68	297	131	453	170
		20	187	86	402	130	597	137
		25	249	96	587	108	1978	115
	40	10	317	82	386	101	398	105
		15	255	67	243	68	211	93
		20	174	47	187	86	309	122
		25	120	53	255	98	385	102
	60	10	288	73	347	90	383	100
		15	229	59	258	68	239	68
		20	193	51	170	58	187	86
		25	124	33	154	71	251	96
5	20	10	409	107	367	113	360	165
		15	205	86	423	169	513	179
		20	260	112	475	138	652	146
		25	301	101	700	116	389	121
	40	10	341	88	419	110	386	103
		15	246	65	231	83	274	124
		20	172	55	261	112	359	129
		25	146	67	315	104	450	109
	60	10	305	78	374	97	412	108
		15	241	63	256	68	226	83
		20	184	49	157	72	260	113
		25	133	46	218	93	301	102
6	20	10	403	106	347	134	463	203
		15	212	98	468	177	551	188
		20	314	125	520	145	656	152
		25	341	106	774	123	1181	127
	40	10	361	94	410	108	373	103
		15	241	64	218	96	368	155
		20	163	66	326	128	406	135
		25	188	83	362	109	504	115
	60	10	323	83	398	104	405	107
		15	263	69	249	69	212	98
		20	185	50	191	87	318	125
		25	127	53	264	101	347	107

### 3. APLICACIÓN PRÁCTICA

Los planteamientos de cálculo establecidos en la presente comunicación tienen una aplicación práctica en el análisis de las estructuras de hormigón sometidas a movimientos diferenciales.

Tomamos como ejemplo el caso propio de estudio realizado en una vivienda unifamiliar entre medianeras en Encinas Reales, Córdoba, sometida a un asiento diferencial de su cimentación como consecuencia de su apoyo en rellenos mal compactados.

Para el análisis de la estabilidad estructural realizamos una nivelación topográfica de la planta baja y primera del inmueble, mediante la que calculamos la posible distorsión angular entre vanos.

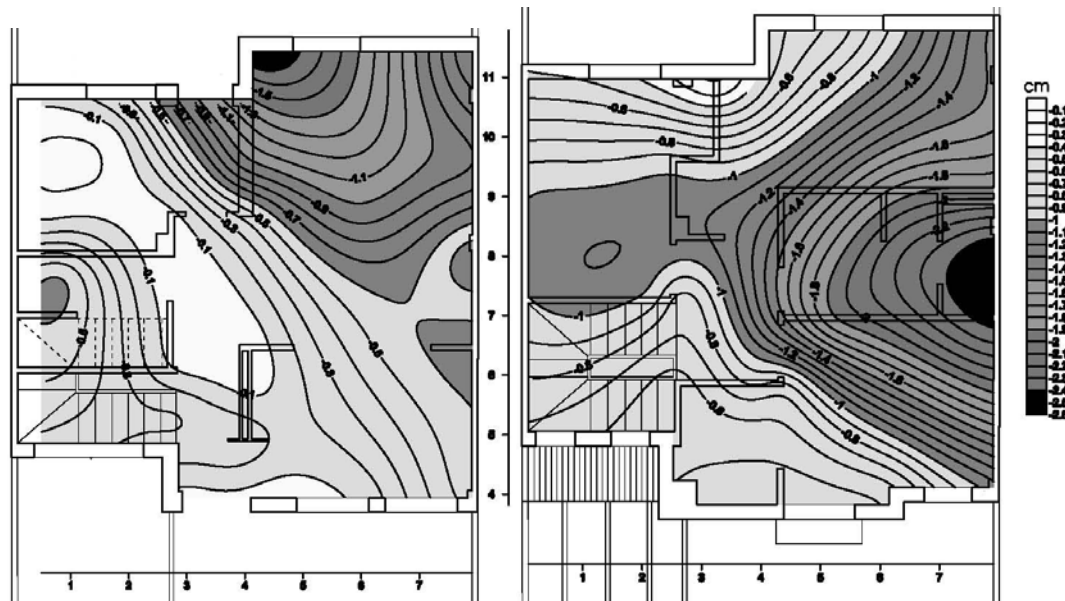


Figura 5. Nivelación topográfica. Caso propio de estudio.

Recurrimos a los valores definidos en la tabla 1 para determinar el régimen de deformación en el se encuentra cada uno de los pórticos afectados por el asiento diferencial en función a su geometría y la distorsión angular que experimenta, recurriendo a los valores más restrictivos correspondientes a las variables geometrías más cercanas a las de estudio.

Tabla 2. Análisis de la estabilidad. Caso propio de estudio

Planta	Pórtico	Luces	L/d	b	Asiento diferencial	Distorsión angular	Rango de deformación
baja	P5 - P4	4,50m	18	40	1,1cm	L/227	Elástica
	P1 - P4	5,30m	21	40	2,2cm	L/240	Plástica
primera	P5 - P4	4,50m	18	40	0,8cm	L/312	Elástica
	P1 - P4	4,30m	17	40	2,0cm	L/265	Elástica

#### 4. CONCLUSIONES

En líneas generales podemos deducir que una pieza en situación de servicio podrá experimentar una distorsión de  $L/300$  antes de que el hormigón y/o el acero plastifiquen, es decir, antes de que exista una afección a la estabilidad de la estructura.

Sin embargo comprobamos que secciones muy rígidas de gran canto, podrán plastificar ante distorsiones angulares inferiores a la establecida por el CTE-DB-C (2006) [5] para el E.L.S.

De forma general se puede establecer que la totalidad de las estructuras de hormigón podrán asumir antes del colapso una distorsión angular que variará entre  $L/80$  y  $L/150$ .

A pesar de los resultados dispares propios del cálculo no lineal, la capacidad de deformación elástica de una pieza dependerán de la geometría y la carga empleada, de tal modo la reducción de la relación  $L/d$  así como el aumento de las cargas por superficie penalizará la capacidad de deformación elástica de la pieza.

Por último se puede observar que las piezas de geometría reducida, grandes luces y secciones pequeñas, presentarán una rotura frágil como consecuencia de la necesaria movilización de mayores compresiones en la sección.

#### REFERENCES

- [1] Murcia Vela, J., Aguado de Cea, A., Marí Bernat A.R. (1993). Hormigón armado y pretensado. Barcelona, España: Universidad Politécnica de Cataluña.
- [2] Cano Marín R.D. (2014). Análisis de la estabilidad de las estructuras de hormigón sometidas a movimientos diferenciales. Tesis doctoral inédita. Sevilla: Universidad de Sevilla
- [3] EUROCÓDIGO 2. Proyecto de estructuras de hormigón. 1992.
- [4] Collins M.P. y Mitchell D, "Prestressed Concrete Structures", Prentice-Hall, New Jersey, 1991
- [5] CTE-DB-C (2006). Código Técnico de la Edificación Documento Básico Cimientos