

# Un modelo de aguas someras con dependencia explícita de la profundidad

J. M. RODRÍGUEZ<sup>1</sup>, R. TABOADA-VÁZQUEZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. Métodos Matemáticos e de Representación, Universidade da Coruña, E. T. S. Arquitectura, Campus da Zapateira, E-15071 A Coruña. E-mail: mmrseijo@udc.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. Métodos Matemáticos e de Representación, Universidade da Coruña, E. T. S. Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos, Campus de Elviña, E-15071 A Coruña. E-mail: raqueltv@udc.es.*

**Palabras clave:** aguas someras, análisis asintótico, fluidos incompresibles sin viscosidad

## Resumen

En este trabajo estudiamos las ecuaciones bidimensionales de Eurler en un dominio con poca profundidad. Con este propósito, se introduce un pequeño parámetro adimensional  $\varepsilon$  relacionado con la profundidad y se aplica la técnica de los desarrollos asintóticos para estudiar lo que sucede cuando  $\varepsilon$  se hace pequeño.

Se obtiene un modelo para  $\varepsilon$  pequeño que, tras deshacer el cambio de variable, en el dominio original, proporciona un modelo de aguas someras que incluye los efectos de un fondo no constante y cuya velocidad horizontal depende de  $z$  a través de la vorticidad (cuando ésta no es nula). Esta dependencia hacen que el modelo obtenido sea novedoso respecto a los modelos de aguas someras que pueden encontrarse actualmente en la literatura. Además, este modelo se obtiene sin necesidad de imponer hipótesis a priori sobre la velocidad o la presión.

El nuevo modelo es capaz de aproximar las soluciones de las ecuaciones de Euler con dependencia en  $z$  (reobteniendo el mismo perfil de velocidades), mientras que el modelo clásico únicamente calcula la velocidad media en la vertical.

## 1. Descripción del problema

Deseamos obtener un modelo de aguas someras, así que la profundidad debe ser pequeña comparada con el largo del dominio, por ejemplo un canal que representamos por un dominio  $\Omega^\varepsilon$  (ver Figura 1) definido por

$$\Omega^\varepsilon = \{(x^\varepsilon, z^\varepsilon)/x^\varepsilon \in [0, L], z^\varepsilon \in [H^\varepsilon(x^\varepsilon), s^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon)]\} \quad (1)$$

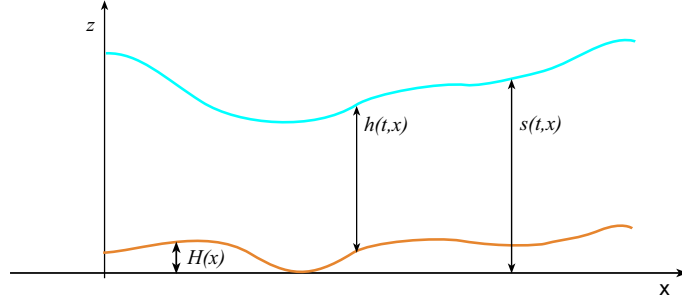


Figura 1: Dominio

donde  $x^\varepsilon$  es la coordenada horizontal,  $z^\varepsilon$  es la coordenada vertical,  $z^\varepsilon = H^\varepsilon(x^\varepsilon)$  es la ecuación del fondo del canal (que suponemos conocido),  $z^\varepsilon = s^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon)$  es la ecuación de la superficie (desconocida). Se define también  $h^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon) = s^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon) - H^\varepsilon(x^\varepsilon)$  (calado).

Definimos, ahora, un pequeño parámetro adimensional,  $\varepsilon$ , que representa el cociente entre la profundidad y el largo característicos (por lo que  $\varepsilon$  debe ser pequeño). Se puede suponer que  $H^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon H(x)$ ,  $s^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon) = \varepsilon s(t, x)$  y  $h^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon) = \varepsilon h(t, x)$ , (donde  $x = x^\varepsilon$  y  $t = t^\varepsilon$  son independientes de  $\varepsilon$ ). Esto quiere decir simplemente que  $H^\varepsilon$  y  $h^\varepsilon$  son de orden  $\varepsilon$ , es decir, son pequeños comparados con el largo del dominio.

Se considera que el flujo se rige por las ecuaciones de Euler 2D incompresibles en  $\Omega^\varepsilon$  y que las fuerzas externas que actúan sobre el fluido son las debidas a la gravedad, esto es (tanto el dominio como las funciones y las variables del problema dependen de  $\varepsilon$ , esta dependencia se indica con el super índice  $\varepsilon$ ):

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + u^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} + w^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial z^\varepsilon} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} \quad (2)$$

$$\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + u^\varepsilon \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} + w^\varepsilon \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial z^\varepsilon} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial z^\varepsilon} - g \quad (3)$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} + \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial z^\varepsilon} = 0 \quad (4)$$

donde  $\vec{u}^\varepsilon = (u^\varepsilon, w^\varepsilon) = (u^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon, z^\varepsilon), w^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon, z^\varepsilon))$  es el vector velocidad,  $p^\varepsilon = p^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon, z^\varepsilon)$  es la presión,  $\rho_0$  es la densidad del fluido y  $g$  es la aceleración de la gravedad (que suponemos constante).

Veamos, ahora, las condiciones de contorno que se imponen. La presión debe ser la atmosférica en la superficie y el fluido no puede penetrar el fondo, así que

$$p^\varepsilon = p_s^\varepsilon \quad \text{en } z^\varepsilon = s^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon) \quad (5)$$

$$\vec{u}^\varepsilon \cdot \vec{n}^\varepsilon = 0 \quad \text{en } z^\varepsilon = H^\varepsilon(x^\varepsilon) \quad (6)$$

Además, suponemos que el flujo entrante y saliente es conocido en cada instante. Sin embargo, puede imponerse otro tipo de condiciones de frontera.

Es necesario añadir a las ecuaciones de partida una más para poder aplicar el método asintótico a las ecuaciones de Euler. La ecuación escogida es la que verifica la vorticidad (véase [10]):

$$\frac{\partial \gamma^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + u^\varepsilon \frac{\partial \gamma^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} + w^\varepsilon \frac{\partial \gamma^\varepsilon}{\partial z^\varepsilon} = 0 \quad (7)$$

donde

$$\gamma^\varepsilon = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial z^\varepsilon} - \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} \quad (8)$$

Clásicamente, para obtener una ecuación que determine  $h^\varepsilon$ , se usa una condición de frontera libre en  $z^\varepsilon = s^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon)$ , pero nosotros hemos utilizado una ecuación obtenida a partir de la ley de conservación de la masa:

$$\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x^\varepsilon} \int_{H^\varepsilon}^{s^\varepsilon} u^\varepsilon dz^\varepsilon = 0 \quad (9)$$

Para cerrar las ecuaciones, sólo es necesario imponer las condiciones iniciales en  $t^\varepsilon = 0$ .

## 2. Análisis asintótico

Generalmente, cuando se usan técnicas de desarrollos asintóticos para analizar fluidos, se hace en el dominio original (véase, por ejemplo, [6] y [12]), que en este caso depende del parámetro  $\varepsilon$  y del tiempo  $t^\varepsilon$ , o la superficie se supone que es constante (véase, por ejemplo, [1]). Nosotros, en cambio, utilizamos la técnica del mismo modo que en [3], [4], [11] y otros trabajos relacionados, esto es, se realiza un cambio de variable a un dominio de referencia independiente del parámetro  $\varepsilon$  y del tiempo.

Sea  $\Omega = [0, L] \times [0, 1]$  el dominio de referencia. Se define el siguiente cambio de variable, de  $\Omega$  a  $\Omega^\varepsilon$ :

$$t^\varepsilon = t, \quad x^\varepsilon = x, \quad z^\varepsilon = \varepsilon[H(x) + zh(t, x)] \quad (10)$$

Dada cualquier función  $F^\varepsilon$  definida en  $[0, T] \times \overline{\Omega^\varepsilon}$ , se define otra función  $F(\varepsilon)$  en  $[0, T] \times \overline{\Omega}$  usando el cambio de variable:  $F(\varepsilon)(t, x, z) = F^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon, z^\varepsilon)$ . Aplicando este cambio de variable a  $u^\varepsilon$ ,  $w^\varepsilon$  y  $p^\varepsilon$  se obtiene

$$u(\varepsilon)(t, x, z) = u^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon, z^\varepsilon), \quad w(\varepsilon)(t, x, z) = w^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon, z^\varepsilon), \quad p(\varepsilon)(t, x, z) = p^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon, z^\varepsilon)$$

El cambio de variable también se aplica a las ecuaciones (2)-(9), de modo que se obtienen ecuaciones en  $\Omega$  donde la dependencia de  $\varepsilon$  es, ahora, explícita. Por ejemplo, la ecuación (2) resulta

$$D_t u(\varepsilon) + u(\varepsilon) D_x u(\varepsilon) + w(\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} D_z u(\varepsilon) = -\frac{1}{\rho_0} D_x p(\varepsilon) \quad (11)$$

donde hemos utilizado la siguiente notación

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{z}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z}, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{H' + z \frac{\partial h}{\partial x}}{h} \frac{\partial}{\partial z}, \quad D_z = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial z} \quad (12)$$

Supongamos, ahora, que  $u(\varepsilon)$ ,  $w(\varepsilon)$ ,  $p(\varepsilon)$  y  $\gamma(\varepsilon)$  admiten un desarrollo en serie de potencias de  $\varepsilon$ , esto es,

$$\begin{aligned} u(\varepsilon) &= u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots, & w(\varepsilon) &= w^0 + \varepsilon w^1 + \varepsilon^2 w^2 + \dots, \\ p(\varepsilon) &= p^0 + \varepsilon p^1 + \varepsilon^2 p^2 + \dots, & \gamma(\varepsilon) &= \varepsilon^{-1} \gamma^{-1} + \gamma_i^0 + \varepsilon \gamma_i^1 + \varepsilon^2 \gamma_i^2 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Se sustituyen estos desarrollos en las ecuaciones que se han obtenido tras el cambio de variable en  $\Omega$ . A continuación se identifican los términos multiplicados por la misma potencia de  $\varepsilon$ , y se obtienen una serie de ecuaciones que se usan para determinar  $u^0$ ,  $w^0$ ,  $p^0$ ,  $\gamma^{-1}$ ,  $h$ ,  $u^1$ , etc. Así se obtiene, por ejemplo,

$$w^0 = 0, \quad p^0 = p_s, \quad \gamma^{-1} = 0, \quad \frac{\partial u^0}{\partial z} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial t} + u^0 \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu^0)}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

$$p^1 = \rho_0 g h(1 - z), \quad w^1 = u^0 H' - h z \frac{\partial u^0}{\partial x}, \quad (16)$$

$$D_t \gamma^0 + u^0 D_x \gamma^0 + w^1 D_z \gamma^0 = 0, \quad \gamma^0 = D_z u^1, \quad \dots \quad (17)$$

En [8] y [9] se pueden ver con detalle estas deducciones.

### 3. Aproximación de primer orden

Se considera la siguiente aproximación

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\varepsilon) &= u^0 + \varepsilon u^1, & \tilde{w}(\varepsilon) &= w^0 + \varepsilon w^1 + \varepsilon^2 w^2 \\ \tilde{p}(\varepsilon) &= p^0 + \varepsilon p^1, & \tilde{\gamma}(\varepsilon) &= \varepsilon^{-1} \gamma^{-1} + \gamma^0 \end{aligned}$$

Los términos  $w^0$ ,  $p^0$  y  $\gamma^{-1}$  son conocidos ((14)),  $u^0$  y  $h$  pueden calcularse resolviendo (15) y  $w^1$ ,  $p^1$  están determinados por (16) una vez conocidos  $h$  y  $u^0$ . La dependencia de  $z$  del término  $u^1$  viene dada por (17.b) de donde se deduce:

$$u^1(t, x, z) = u^1(t, x, 0) + \int_0^z h(t, x) \gamma^0(t, x, y) dy \quad (18)$$

Para calcular (18) es necesario conocer la dependencia de  $z$  de  $\gamma^0$ . Las ecuaciones Euler (2)-(4) transportan la vorticidad (véase (7)) y, dado que nuestro propósito es encontrar un modelo de aguas someras, parece razonable suponer que dicha dependencia no es muy compleja. Además, a partir de (17.a) y (16.b) se deduce que, si las condiciones iniciales y de contorno que imponemos a  $\gamma^0$  son polinómicas en  $z$ , entonces  $\gamma^0$  es polinómico en  $z$  también. Por tanto, se asume que:

$$\gamma^0 = \sum_{i=0}^k (z^i \gamma^{0,i}) \quad (19)$$

**Observación 1** *Nótese que si la función  $\gamma^0(z)$  es continua, dado que está definida en un intervalo cerrado ( $z \in [0, 1]$ ), (19) es una buena aproximación si el grado del polinomio en  $z$  es suficientemente alto, ya que el teorema de Weierstrass garantiza que  $\gamma^0(z)$  puede aproximarse por un polinomio en  $z$ .*

Se sustituye en (17.a) tanto  $\gamma^0$  como  $w^1$  (usando (19) y (16.b), respectivamente), y así la dependencia de  $z$  es explícita. Se agrupan los términos que multiplican a la misma potencia de  $z$  (y utilizando para simplificar (15.b)) resulta:

$$\frac{\partial \gamma^{0,i}}{\partial t} + u^0 \frac{\partial \gamma^{0,i}}{\partial x} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (20)$$

Una vez calculados  $\gamma^{0,i}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ), teniendo en cuenta (19) se integra (18) respecto a  $z$ :

$$u^1 = u_0^1 + h \sum_{i=0}^k \left( \frac{z^{i+1}}{i+1} \gamma^{0,i} \right) \quad (21)$$

donde  $u_0^1(t, x) = u^1(t, x, 0)$  está determinado por

$$\frac{\partial u_0^1}{\partial t} + u_0^1 \frac{\partial u_0^1}{\partial x} + u_0^1 \frac{\partial u^0}{\partial x} = -g \frac{\partial s}{\partial x} \quad (22)$$

Se deshace el cambio de variable y se obtiene la siguiente aproximación de la solución en el dominio original:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon, z^\varepsilon) &= \tilde{u}(\varepsilon)(t, x, z), & \tilde{w}^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon, z^\varepsilon) &= \tilde{w}(\varepsilon)(t, x, z) \\ \tilde{p}^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon, z^\varepsilon) &= \tilde{p}(\varepsilon)(t, x, z), & \tilde{\gamma}^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon, z^\varepsilon) &= \tilde{\gamma}(\varepsilon)(t, x, z) \end{aligned} \quad (23)$$

Se define también

$$\check{u}^\varepsilon(t^\varepsilon, x^\varepsilon) = \check{u}(\varepsilon)(t, x) = u^0(t, x) + \varepsilon u_0^1(t, x). \quad (24)$$

**Teorema 1** *Si se supone que existe el desarrollo en serie de potencias (13) y que  $\gamma^0$  cumple (19), entonces la solución aproximada (23)-(24) verifica*

$$\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + \frac{\partial(\check{u}^\varepsilon h^\varepsilon)}{\partial x^\varepsilon} = O(\varepsilon^2) \quad (25)$$

$$\frac{\partial \check{u}^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + \check{u}^\varepsilon \frac{\partial \check{u}^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_s}{\partial x^\varepsilon} - g \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} + O(\varepsilon^2) \quad (26)$$

$$\check{p}^\varepsilon = p_s^\varepsilon + \rho_0 g (s^\varepsilon - z^\varepsilon) \quad (27)$$

$$\frac{\partial \gamma^{0,i,\varepsilon}}{\partial t^\varepsilon} + \check{u}^\varepsilon \frac{\partial \gamma^{0,i,\varepsilon}}{\partial x^\varepsilon} = O(\varepsilon) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (28)$$

$$\check{u}^\varepsilon = \check{u}^\varepsilon + \sum_{i=0}^k \left( \frac{(z^\varepsilon - H^\varepsilon)^{i+1}}{(i+1)(h^\varepsilon)^i} \gamma^{0,i,\varepsilon} \right) \quad (29)$$

$$\check{w}^\varepsilon = \check{u}^\varepsilon \frac{\partial H^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} + (H^\varepsilon - z^\varepsilon) \frac{\partial \check{u}^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} + O(\varepsilon^2) \quad (30)$$

Si tenemos en cuenta que

$$\bar{u}^\varepsilon = \frac{1}{h^\varepsilon} \int_{H^\varepsilon}^{s^\varepsilon} \check{u}^\varepsilon dz^\varepsilon = \check{u}^\varepsilon + h^\varepsilon \sum_{i=0}^k \left( \frac{1}{(i+1)(i+2)} \gamma^{0,i,\varepsilon} \right) \quad (31)$$

despejando  $\check{u}^\varepsilon$  de la ecuación anterior y sustituyendo en las ecuaciones (25)-(30), se obtiene un modelo en función de la velocidad media en la vertical manteniendo el orden de precisión:

$$\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + \frac{\partial(\bar{u}^\varepsilon h^\varepsilon)}{\partial x^\varepsilon} = O(\varepsilon^2) \quad (32)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + \bar{u}^\varepsilon \frac{\partial \bar{u}^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_s^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} - g \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} + O(\varepsilon^2) \quad (33)$$

$$\check{p}^\varepsilon = p_s^\varepsilon + \rho_0 g (s^\varepsilon - z^\varepsilon) \quad (34)$$

$$\frac{\partial \gamma^{0,i,\varepsilon}}{\partial t^\varepsilon} + \bar{u}^\varepsilon \frac{\partial \gamma^{0,i,\varepsilon}}{\partial x^\varepsilon} = O(\varepsilon) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (35)$$

$$\tilde{u}^\varepsilon = \bar{u}^\varepsilon + \sum_{i=0}^k \left[ \left( \frac{(z^\varepsilon - H^\varepsilon)^{i+1}}{(i+1)(h^\varepsilon)^i} - \frac{h^\varepsilon}{(i+1)(i+2)} \right) \gamma^{0,i,\varepsilon} \right] \quad (36)$$

$$\tilde{w}^\varepsilon = \tilde{u}^\varepsilon \frac{\partial H^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} - \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} (z^\varepsilon - H^\varepsilon) + O(\varepsilon^2) \quad (37)$$

## 4. Modelo propuesto

Despreciando en las ecuaciones (32), (33) y (37) los términos en  $O(\varepsilon^2)$  y en (35) los términos en  $O(\varepsilon)$  (aunque en estas ecuaciones se eliminan términos de orden  $O(\varepsilon)$ , dado que  $\gamma^{0,i,\varepsilon}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ) están multiplicados por términos de orden  $O(\varepsilon)$  en (36), finalmente el error cometido es de orden  $\varepsilon^2$ ), se obtiene el siguiente modelo de aguas someras cuyo orden de precisión, al menos formalmente, es  $O(\varepsilon^2)$ :

$$\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + \frac{\partial(\bar{u}^\varepsilon h^\varepsilon)}{\partial x^\varepsilon} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + \bar{u}^\varepsilon \frac{\partial \bar{u}^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_s^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} - g \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} \quad (39)$$

$$\tilde{p}^\varepsilon = p_s^\varepsilon + \rho_0 g (s^\varepsilon - z^\varepsilon) \quad (40)$$

$$\frac{\partial \gamma^{0,i,\varepsilon}}{\partial t^\varepsilon} + \bar{u}^\varepsilon \frac{\partial \gamma^{0,i,\varepsilon}}{\partial x^\varepsilon} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k) \quad (41)$$

$$\tilde{u}^\varepsilon = \bar{u}^\varepsilon + \sum_{i=0}^k \left[ \left( \frac{(z^\varepsilon - H^\varepsilon)^{i+1}}{(i+1)(h^\varepsilon)^i} - \frac{h^\varepsilon}{(i+1)(i+2)} \right) \gamma^{0,i,\varepsilon} \right] \quad (42)$$

$$\tilde{w}^\varepsilon = \tilde{u}^\varepsilon \frac{\partial H^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} - \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} (z^\varepsilon - H^\varepsilon) \quad (43)$$

## 5. Comparación numérica

Deseamos comparar numéricamente el modelo clásico de aguas someras sin viscosidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + \frac{\partial(u^\varepsilon h^\varepsilon)}{\partial x^\varepsilon} &= 0 \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} + u^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} + g \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x^\varepsilon} &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

que denotaremos por **MC**, con el nuevo modelo propuesto ((38)-(43)) al que llamaremos **MN**. Para realizar esta comparación se ha empleado en esquema de MacCormack (véase por ejemplo [2, 5, 7]).

Si tratamos de aproximar una solución de las ecuaciones de Euler con velocidad y calados constantes, ambos modelos (MC y MN) la calculan de forma exacta. Si por el contrario se considera una solución con velocidad horizontal polinómica en  $z$ , como por ejemplo:

$$\begin{aligned} u &= B + Cz + Dz^2 + Ez^3 + Fz^4 + Gz^5, \quad w = 0, \\ H &= 0, \quad s = h = A > 0, \quad p = p_s + \rho(A - z)g \end{aligned} \quad (45)$$

donde  $A, B, C, D, E, F, G, p_s$  son constantes; y para calcularla se utiliza tanto el modelo MC como el modelo MN aproximando  $\gamma = C + 2Dz + 3Ez^2 + 4Fz^3 + 5Gz^4$  por un polinomio de grado 0, 1, 2, 3 ó 4, con los siguientes valores para las constantes:

$$A = 1, \quad B = 5, \quad C = 1, \quad D = 0.5, \quad E = 0.1, \quad F = -0.2, \quad G = 0.3,$$

el calado se obtiene de forma exacta con ambos modelos y en la Tabla 1 se pueden ver los errores obtenidos (en norma infinito) para la velocidad horizontal, considerando distintos valores de  $z$ . Se observa que la peor aproximación es la que proporciona el modelo MC que tan sólo calcula la velocidad media. Si resolvemos empleando el modelo MN, apreciamos que al aumentar el grado del polinomio con el que se aproxima la vorticidad, la estimación de la velocidad mejora, y en caso de que la vorticidad se aproxime por un polinomio de grado cuatro, el modelo MN alcanza la solución exacta (los pequeños errores se deben a la precisión numérica). Los errores mayores se obtienen para  $z = 1$ .

Calado ( $z$ )	0	0.25	0.5	0.75	1
MC	$7.0 \cdot 10^{-1}$	$4.2 \cdot 10^{-1}$	$6.7 \cdot 10^{-2}$	$3.8 \cdot 10^{-1}$	$1.0 \cdot 10^0$
MN ( $\gamma$ grado 0)	$8.3 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$6.7 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-1}$
MN ( $\gamma$ grado 1)	$3.8 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$9.3 \cdot 10^{-2}$
MN ( $\gamma$ grado 2)	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$
MN ( $\gamma$ grado 3)	$9.4 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-4}$	0	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$9.4 \cdot 10^{-3}$
MN ( $\gamma$ grado 4)	0	0	$8.9 \cdot 10^{-16}$	$8.9 \cdot 10^{-16}$	$8.9 \cdot 10^{-16}$

Tabla 1: Errores en norma infinito al estimar la solución (45) a diferentes alturas.

Como último ejemplo, tratamos de aproximar la siguiente solución de las ecuaciones de Euler con velocidad horizontal no polinómica:

$$\begin{aligned} u &= B + Ce^{Dz}, \quad w = 0, \\ H &= 0, \quad s = h = A > 0, \\ p &= p_s + \rho(A - z)g \end{aligned} \tag{46}$$

En este caso, la vorticidad es  $\gamma = CDe^{Dz}$ . De nuevo, el modelo MC calcula la velocidad media mientras podemos observar en la Tabla 2 (para los siguientes valores de las

MC	$3.5 \cdot 10^{-1}$
MN ( $\gamma$ grado 0)	$3.0 \cdot 10^{-2}$
MN ( $\gamma$ grado 1)	$3.5 \cdot 10^{-3}$
MN ( $\gamma$ grado 2)	$1.8 \cdot 10^{-4}$
MN ( $\gamma$ grado 3)	$1.1 \cdot 10^{-5}$
MN ( $\gamma$ grado 4)	$3.9 \cdot 10^{-7}$
MN ( $\gamma$ grado 5)	$1.6 \cdot 10^{-8}$
MN ( $\gamma$ grado 6)	$4.5 \cdot 10^{-10}$

Tabla 2: Errores globales en norma infinito al estimar la solución (46).

constantes:  $A = 1$ ,  $B = 4$ ,  $C = 1$  y  $D = 0.5$ ) cómo el modelo MN es capaz de obtener una solución aproximada tan precisa como se desee, eligiendo el grado del polinomio que aproxima a  $\gamma$  suficientemente alto.

## 6. Conclusiones

Hemos mostrado cómo el método de los desarrollos asintóticos nos permite obtener el modelo de aguas someras (38)-(43) sin realizar hipótesis a priori. Destacamos que en este modelo la velocidad horizontal depende de la profundidad del agua si la vorticidad no es nula. Esto representa una interesante novedad respecto a los modelos de aguas someras que pueden encontrarse en la literatura.

Hemos comparado el nuevo modelo numéricamente con el modelo clásico sin viscosidad y hemos observado que ambos modelos capturan la solución exacta de las ecuaciones de Euler cuando las velocidades son constantes, pero el modelo (38)-(43) siempre obtiene resultados mejores si la solución dependen de  $z$  (véanse las Tablas 1 y 2) que el modelo clásico, cuyos errores pueden ser muy grandes para valores de  $z$  alejados de la profundidad media. La vorticidad se aproxima por un polinomio en  $z$  y, como hemos visto, cuanto mayor es el grado de este polinomio, más precisa es la solución obtenida.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia mediante el proyecto MTM2006-14491.

## Referencias

- [1] P. Azérad, F. Guillén, *Mathematical justification of the hydrostatic approximation in the primitive equations of geophysical fluid dynamics*, Siam J. Math. Anal., **33**(4), (2001), 847-859 .
- [2] M. H. Chaudhry, *Open-Channel Flow*, Prentice Hall. New Jersey. 1993.
- [3] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity. Volume II: Theory of Plates*, North-Holland, Amsterdam, 1997.
- [4] P. Destuynder, *Une Théorie Asymptotique des Plaques Minces en Élasticité Linéaire*, Masson, Paris, 1986.
- [5] P. García-Navarro, J. M. Saviron, *McCormack's method for the numerical simulation of one-dimensional discontinuous unsteady open channel flow*, Journal of Hydraulic Research, **30**(1), (1992), 95-105.
- [6] J.-F. Gerbeau, B. Perthame, *Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; numerical validation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, **1**(1), (2001), 89-102.
- [7] R. W. MacCormack, *Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer*, Proceedings 2nd Int. Conf. on Num. Methods in Fluid Dynamics. M. Holt, Springer-Verlag, (1971), 151-163.
- [8] J. M. Rodríguez, R. Taboada-Vázquez, *A new shallow water model with polynomial dependence on depth*, en revisión.
- [9] R. Taboada-Vázquez, *Tesis Doctoral*, Universidade da Coruña, 2006.
- [10] R. Teman, A. Miranville, *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*. Cambridge University Press. 2001.
- [11] L. Trabucho, J. M. Viaño, "Mathematical modeling of rods", in: P. G. Ciarlet, J.-L. Lions (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. IV, North-Holland, Amsterdam, 1996, pp. 487-974.
- [12] R. K. Zeytounian, *Modélisation asymptotique en mécanique des fluides newtoniens*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.