

## NURBS-ENHANCED FEM PARA PROBLEMAS DE SCATTERING

R. SEVILLA, S. FERNÁNDEZ-MÉNDEZ Y A. HUERTA

*Laboratori de Càlcul Numèric (LaCàN)*  
*Departament de Matemàtica Aplicada III*  
*Universitat Politècnica de Catalunya*  
*e-mail: {ruben.sevilla,sonia.fernandez,antonio.huerta}@upc.edu*  
*web page: <http://www-lacan.upc.edu>*

**Palabras clave:** NURBS, elementos finitos, CAD, modelo geométrico exacto, elementos isoparamétricos de alto orden, Discontinuous Galerkin

### Resumen

En [1] se presenta el NURBS-Enhanced Finite Element Method (NEFEM), una mejora del clásico método de los elementos finitos que permite trabajar con el modelo geométrico exacto, independientemente de la discretización espacial utilizada. En [1] se desarrollan nuevas estrategias que permiten realizar la interpolación y la integración numérica para los elementos que tienen una arista definida mediante Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) trimadas, ver [2].

En este trabajo se plantea la aplicación del NEFEM, con una formulación de Galerkin discontinuo (DG), para la resolución de las ecuaciones de Maxwell. La importancia de trabajar con un buen modelo geométrico está justificada en aplicaciones de scattering de ondas electromagnéticas, donde la geometría del obstáculo es determinante para poder obtener resultados precisos. Mediante ejemplos numéricos se observa que el NEFEM presenta importantes ventajas respecto a los clásicos elementos isoparamétricos. Para una malla fijada el NEFEM es entre 11 y 15 veces más preciso. Por otro lado, para una precisión fijada, el NEFEM también resulta más eficiente, ya que sólo requiere el 38 % de grados de libertad y el 75 % del tiempo de CPU consumido por el método DG estándar.

## 1. Introducción

Son muchos los autores que en los últimos años destacan la importancia de disponer de un buen modelo geométrico para la simulación numérica de problemas de contorno. En el contexto de métodos DG, ver [5], la importancia del modelo geométrico en la resolución de las ecuaciones de Euler fue claramente demostrada en [3]. Utilizando interpolaciones lineales, la pérdida de precisión cerca de contornos curvos es demasiado importante y acaba afectando al comportamiento global de la solución. Por otra parte, en [4] se propone el denominado análisis isogeométrico. El objetivo fundamental de este planteamiento es trabajar con el modelo geométrico exacto, independientemente de la discretización espacial utilizada. La estrategia adoptada consiste en utilizar las funciones base de las NURBS, para describir la geometría de todo el dominio computacional y para aproximar la solución.

La metodología presentada en [1], el NEFEM, comparte el objetivo principal del análisis isogeométrico, pero es más natural ya que la descripción mediante NURBS sólo se utiliza para el contorno del dominio, es decir, lo que usualmente se obtiene con un programa estándar de CAD (*Computed Aided Design*). De esta manera, el NEFEM considera la descripción geométrica exacta pero, a diferencia del análisis isogeométrico, la solución se interpola de la manera habitual en elementos finitos, mediante funciones polinómicas en cada elemento. En la mayor parte del dominio (elementos con lados rectos) se utilizan elementos finitos clásicos, mientras que para los elementos con una arista definida mediante NURBS es necesario definir la interpolación y diseñar cuadraturas numéricas adecuadas.

El uso de la interpolación clásica del método de los elementos finitos representa una gran ventaja frente al uso de una aproximación funcional mediante NURBS: el NEFEM garantiza las buenas propiedades de los elementos finitos desde un punto de vista de eficiencia computacional y de convergencia.

La sección 2 repasa brevemente los conceptos básicos del NEFEM. En la sección 3 se presenta una aplicación del NEFEM en 2D. Se combina la utilización del método DG con la descripción del contorno mediante NURBS para la resolución de problemas de scattering de ondas electromagnéticas en dos dimensiones. Los resultados se comparan con los obtenidos mediante elementos isoparamétricos de alto orden. Finalmente, en la sección 4 se presentan las conclusiones de este trabajo.

## 2. Conceptos básicos del NEFEM

En esta sección se recuerdan los ingredientes básicos del NEFEM en 2D, ver [1] para los detalles. Se considera el contorno del dominio computacional descrito mediante curvas NURBS y, por tanto, es necesario prestar una atención especial a la interpolación y la integración en los elementos con una arista definida por una curva NURBS trimada. Por otro lado, en los elementos interiores se utilizan elementos finitos clásicos.

En esta sección se considera un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , donde el contorno  $\partial\Omega$  (o una parte de él) está definido mediante curvas NURBS. Cada NURBS está definida por una parametrización

$$\mathbf{C} : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{C}([0, 1]) \subseteq \partial\Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Se asume, también, una triangulación del dominio  $\Omega$ , tal que cada elemento tiene como máximo una arista sobre el contorno NURBS, ver la figura 1.



Figura 1: Dominio computacional con una parte del contorno definido mediante una curva NURBS (izquierda) y una triangulación válida para el uso del NEFEM (derecha)

Para sistematizar los cálculos se considera la transformación lineal  $\Psi$  que lleva los vértices del elemento  $\Omega_e$  a los vértices  $v_I = (-1, -1)$ ,  $v_{II} = (1, -1)$  y  $v_{III} = (-1, 1)$  del elemento de referencia  $I^e$ , ver figura 2.

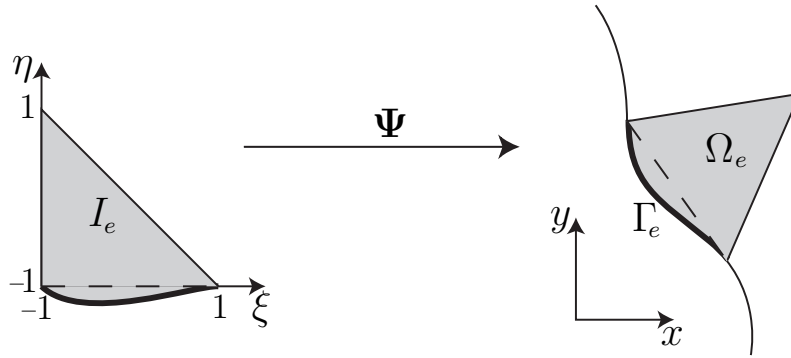


Figura 2: Transformación lineal,  $\Psi$ , para un elemento con una arista descrita mediante una NURBS trimada.

Para la aproximación funcional se considera una interpolación polinómica de grado  $m$  en el elemento  $I^e = \Psi^{-1}(\Omega_e)$ , con coordenadas  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$  que, mediante la transformación lineal, corresponde a una interpolación polinómica de grado  $m$  en coordenadas cartesianas  $\boldsymbol{x} = (x, y)$ . Dado un conjunto de  $n + 1$  nodos  $\boldsymbol{\xi}_i = (\xi_i, \eta_i)$  en el triángulo  $I^e$ , se considera la base formada por los polinomios de Lagrange,  $L_i(\boldsymbol{\xi})$ . Para sistematizar la evaluación de los polinomios  $L_i$ , para cualquier distribución de nodos, se adopta la implementación propuesta en [7].

En el proceso de cálculo de las integrales de la forma débil es necesario definir cuadraturas adecuadas para aproximar integrales sobre el contorno definido por NURBS e integrales en el interior de elementos con una arista definida por NURBS.

Para cada elemento  $\Omega_e$  con una arista sobre el contorno descrito por NURBS se conoce el intervalo del espacio de parámetros  $[\lambda_1^e, \lambda_2^e]$  tal que  $\mathbf{C}([\lambda_1^e, \lambda_2^e]) = \Gamma^e$ , donde  $\Gamma^e$  es la arista de  $\Omega_e$  definida por la NURBS  $\mathbf{C}$ , ver figura 2.

Para integrar una función  $f$  sobre la arista  $\Gamma^e$  se aproxima

$$\int_{\Gamma^e} f \, d\ell = \int_{\lambda_1^e}^{\lambda_2^e} f(\mathbf{C}(\lambda)) |J_{\mathbf{C}}(\lambda)| \, d\lambda \approx \sum_{i=1}^n f(\mathbf{C}(\lambda_i)) |J_{\mathbf{C}}(\lambda_i)| \omega_i,$$

donde  $J_{\mathcal{C}}$  es la derivada de la NURBS y  $(\lambda_i, \omega_i)$  son los puntos y pesos de integración en el intervalo  $[\lambda_1^e, \lambda_2^e]$  del espacio de parámetros. Se han comparado diferentes cuadraturas y, desde el punto de vista de eficiencia computacional, la mejor opción consiste en utilizar cuadraturas de Gauss-Legendre simples, ver [1] para más detalles.

Para la integración en el interior de un elemento curvo  $\Omega_e$  se han estudiado diferentes opciones, ver [1]. La mejor alternativa (desde el punto de vista de coste computacional) consiste en definir cuadraturas de Gauss en el rectángulo  $[\lambda_1^e, \lambda_2^e] \times [0, 1]$ , y adaptarlas a la geometría del elemento  $I^e$  mediante la aplicación  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [\lambda_1^e, \lambda_2^e] \times [0, 1] \rightarrow I_e$ , definida como

$$\varphi_1(\lambda, \zeta) := \phi_1(\lambda)(1 - \zeta) - \zeta, \quad \varphi_2(\lambda, \zeta) := \phi_2(\lambda)(1 - \zeta) + \zeta$$

Mediante esta transformación las integrales interiores para un elemento curvo  $\Omega_e$  se calculan como

$$\int_{\Omega_e} f \, dx \, dy = |J_{\Psi}| \int_{I_e} f \, d\xi \, d\eta \simeq |J_{\Psi}| \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} f(\boldsymbol{\xi}_{ij}) |J_{\varphi}(\lambda_i, \zeta_j)| \omega_i \varpi_j$$

donde  $J_{\Psi}$  es el jacobiano de la transformación lineal  $\Psi$ ,  $\boldsymbol{\xi}_{ij} = \varphi(\lambda_i, \zeta_j)$ ,  $\{\lambda_i, \omega_i\}$  y  $\{\zeta_i, \varpi_i\}$  son los puntos y pesos de integración en los intervalos  $[\lambda_1^e, \lambda_2^e]$  y  $[0, 1]$  respectivamente, y  $J_{\varphi}$  es el jacobiano de la transformación  $\varphi$ .

### 3. Ejemplos numéricos

En esta sección se presentan dos ejemplos numéricos para demostrar la eficiencia del NEFEM frente a la utilización de elementos isoparamétricos de alto orden. En todos los ejemplos se ha considerado una formulación DG.

Las ecuaciones de Maxwell, utilizadas para la simulación de problemas de scattering de ondas electromagnéticas, se pueden escribir como un sistema hiperbólico de primer orden

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_k(\mathbf{U})}{\partial x_k} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

con una definición adecuada del vector de cantidades conservadas  $\mathbf{U}$  y los vectores de flujos  $\mathbf{F}_k$ . Se utiliza la notación de Einstein, es decir, índices repetidos indican un sumatorio en ese índice.

En dos dimensiones, las ecuaciones de Maxwell se simplifican y se obtienen dos sistemas desacoplados, denominados modos TE (*Transverse Electric*) y TM (*Transverse Magnetic*). Los modos TE y TM se pueden escribir como (1) definiendo adecuadamente el vector  $\mathbf{U}$  y los flujos  $\mathbf{F}_k$ . Por ejemplo, para el modo TM se define

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mu H_1 \\ \mu H_2 \\ \epsilon E_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_3 \\ -H_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} E_3 \\ 0 \\ H_1 \end{pmatrix}.$$

### 3.1. Scattering por un círculo PEC

En primer lugar se considera el scattering causado por un círculo de radio unidad formado por un material conductor eléctrico perfecto (PEC). La onda incidente viaja de izquierda a derecha a velocidad unitaria y se toma como longitud de onda  $\lambda=1$ . En la figura 3 se ha representado el campo scattered después de 4 ciclos completos y la *Radar Cross Section* (RCS), para el modo TM. La RCS es la cantidad de interés en problemas de scattering de ondas electromagnéticas, y proporciona información de lo visible que es un objeto ante un radar, ver [8] para una descripción en detalle. Se observa una excelente correspondencia entre los resultados numéricos y analíticos en la RCS utilizando el NEFEM con una interpolación funcional de grado  $p=7$ .

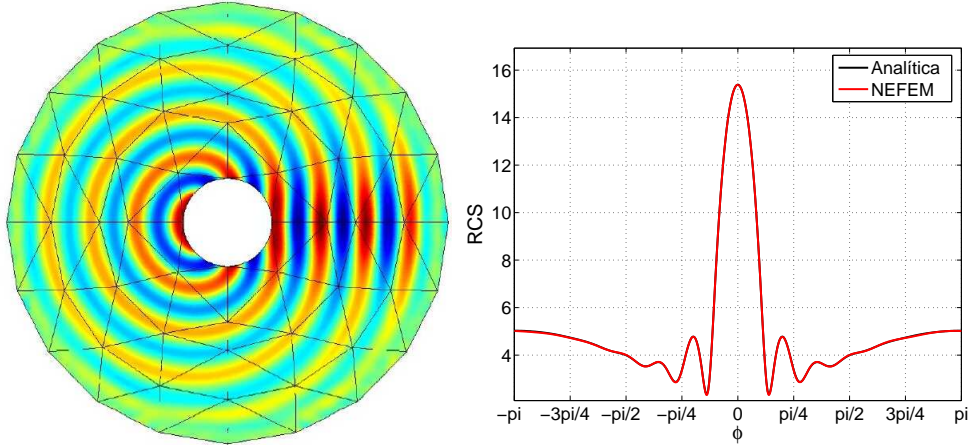


Figura 3: Círculo PEC, solución NEFEM para  $\lambda = 1$  con  $p=7$ : componente  $E_3$  (izquierda) y RCS (derecha) para el modo TM

En la figura 4 se comparan los resultados obtenidos mediante elementos isoparamétricos de alto orden y el NEFEM, para el modo TM. A simple vista se observa una clara ventaja en la utilización del NEFEM. Utilizando polinomios de grado  $p=5$  el NEFEM consigue capturar con una alta precisión la RCS en el rango  $\phi \in [-\pi/3, \pi/3]$  mientras que utilizando elementos isoparamétricos el error cometido en  $\phi = \pi/3$  es muy elevado. Si se aumenta el grado de los polinomios, es decir, considerando  $p=6$ , la solución obtenida con el NEFEM y la solución analítica son prácticamente idénticas. Sin embargo, utilizando elementos isoparamétricos con  $p=6$  la solución mejora sustancialmente, aunque fuera del rango  $[-\pi/4, \pi/4]$  los errores son muy elevados y se pueden observar a simple vista. De manera cuantitativa, con una medida del error en la RCS en norma  $\mathcal{L}^2$ , los resultados obtenidos con el NEFEM son un orden de magnitud más precisos que los obtenidos con elementos isoparamétricos, para la misma discretización espacial. Además, para este ejemplo, las ventajas del NEFEM, en términos de eficiencia computacional, son muy claras. Para obtener una precisión fijada, por ejemplo un error de  $10^{-2}$ , el NEFEM necesita alrededor del 50% de grados de libertad utilizado por los elementos isoparamétricos. Esto supone que, para obtener el mismo error, el NEFEM necesita un grado de interpolación  $p = 6$  (2688 grados de libertad) mientras que con elementos isoparamétricos es necesario

utilizar un grado de interpolación  $p = 9$  (5280 grados de libertad), ver figura 5. En esta figura se observa la evolución del error en la RCS, en norma  $\mathcal{L}^2$ , al aumentar el grado de la aproximación funcional. Al utilizar elementos isoparamétricos de alto orden se converge a un resultado que no es físicamente correcto, ver [6] para una discusión en detalle de la problemática de los elementos isoparamétricos de alto orden. Para evitar los errores introducidos por la transformación isoparamétrica se ha utilizado una implementación de los elementos de alto orden en coordenadas cartesianas, sin tener en cuenta la transformación isoparamétrica. Los resultados obtenidos muestran que para obtener una misma precisión, con elementos cartesianos se necesita un grado de interpolación más que en NEFEM, ver figura 5. Puesto que el coste de los elementos cartesianos es comparable al coste de NEFEM la ventaja de la propuesta realizada en este trabajo es clara.

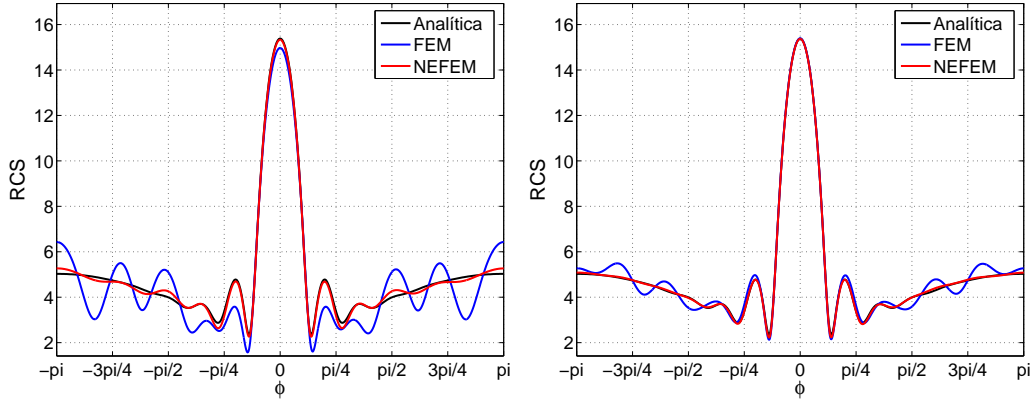


Figura 4: Círculo PEC, solución del modo TM para  $\lambda = 1$  con:  $p=5$  (izquierda) y  $p=6$  (derecha)

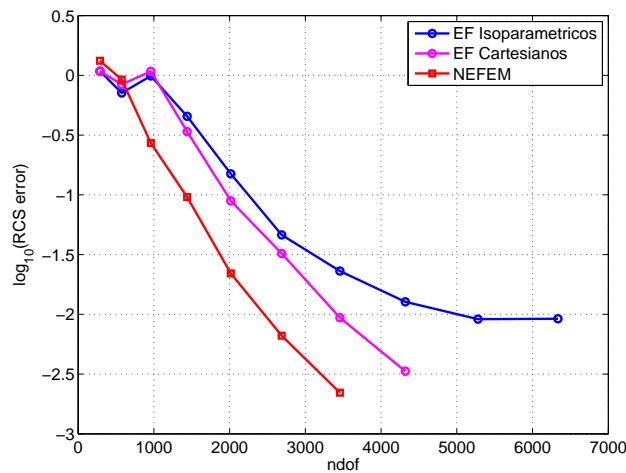


Figura 5: Círculo PEC, solución del modo TM para  $\lambda = 1$ : convergencia aumentando el grado  $p$

### 3.2. Scattering por un perfil NACA0012 PEC

Para finalizar, se considera un segundo ejemplo numérico con un obstáculo de geometría más compleja y una onda incidente de alta frecuencia y que viaja de abajo a arriba. Concretamente, el obstáculo corresponde a un perfil NACA0012 de ala de avión, y la longitud de onda considerada es  $\lambda=0.2$ .

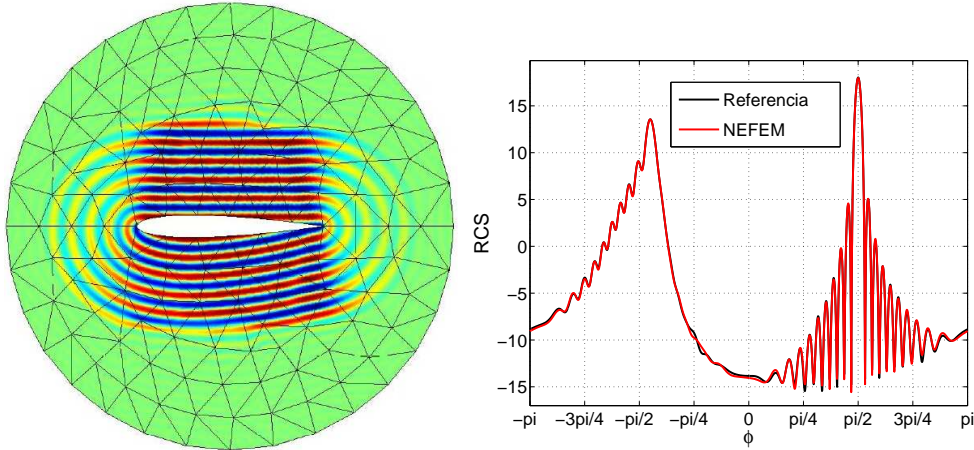


Figura 6: Perfil NACA0012 PEC, solución NEFEM para  $\lambda = 0.2$  con  $p=14$ : componente  $E_3$  (izquierda) y RCS (derecha) para el modo TM

Para este ejemplo no se dispone de solución analítica. Como solución de referencia se toma la calculada en una malla refinada con una interpolación funcional de alto orden. En la figura 6 se observa una muy buena correspondencia entre los resultados numéricos y los resultados de referencia. Se observa también una buena correspondencia con los resultados publicados por otros autores, ver por ejemplo [9].

## 4. Conclusiones

En [1] se presenta una mejora del clásico método de los elementos finitos, el NURBS-Enhanced Finite Element Method (NEFEM). Se propone la utilización del modelo geométrico exacto que proporciona un modelo de CAD y, por tanto, es necesario modificar la interpolación y proponer técnicas de integración numérica para los elementos que tienen una arista definida mediante curvas NURBS.

En este trabajo se propone la utilización del NEFEM para la resolución numérica de las ecuaciones de Maxwell. En concreto, se plantea la resolución de problemas de scattering de ondas electromagnéticas. Mediante los ejemplos numéricos se demuestra la ventaja de trabajar con el NEFEM en este tipo de problemas, obteniendo una precisión entre 11 y 15 veces mayor que los elementos isoparamétricos, para una discretización espacial fijada.

## Agradecimientos

Los autores agradecen el financiamiento recibido del *Ministerio de Educación y Ciencia* (DPI2004-03000) y del *Departament de Matemàtica Aplicada III* de la *Universitat Politècnica de Catalunya*.

## Referencias

- [1] R. Sevilla, A. Huerta y S. Fernández-Méndez, *NURBS-Enhanced Finite Element Method (NEFEM)* Libro de Resúmenes (CEDYA 2005). Universidad Carlos III de Madrid, 2005.
- [2] L. Piegl, W. Tiller, *The NURBS Book*, Springer-Verlag, London, 1995.
- [3] F. Bassi and S. Rebay, *High-order accurate Discontinuous Finite Element solution of the 2D Euler equations*, *J. Comput. Phys.*, v. 138, p. 251-285, 1997.
- [4] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell and Y. Bazilevs *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 194, p. 4135-4195, 2005.
- [5] B. Cockburn, Discontinuous Galerkin methods for Computational Fluid Dynamics, in: E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes (Eds.), *Fluids, Encyclopedia of Computational Mechanics*, vol. 3, Wiley, New York, 2004, chapter 4.
- [6] Barna Szabó, Alexander Düster and Ernest Rank, The  $p$ -version of the Finite Element Method, in: E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes (Eds.), *Fundamentals, Encyclopedia of Computational Mechanics*, vol. 1, Wiley, New York, 2004, chapter 5.
- [7] J. S. Hesthaven and T. Warburton, Nodal high-order methods on unstructured grids - I. Time-domain solution of Maxwell's equations, *J. Comput. Phys.* 181 (1), 186–221, 2002.
- [8] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley and Sons, New York, 1989.
- [9] Jie Wu and Bo-nan Jiang, A least-squares finite element method for electromagnetic scattering problems, *NASA Technical Report* (1996).