

XX CONGRESO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICACIONES  
X CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA  
Sevilla, 24-28 septiembre 2007  
(pp. 1-8)

## Aproximación numérica de quinto orden de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi

S. SERNA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, University of California Los Angeles, Los Angeles, CA 90095-1555, USA. E-mail: [serna@math.ucla.edu](mailto:serna@math.ucla.edu).*

**Palabras clave:** Hamilton-Jacobi, Weighted Power-ENO, método de los “level sets”

### Resumen

En este trabajo aproximamos la solución de viscosidad de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi asociadas al problema de la reinicialización de curvas de nivel. Utilizamos para ello un método de quinto orden de precisión espacial óptimo para la aproximación de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi. Como aplicación calculamos la aproximación a alto orden de funciones distancia euclídea signadas de curvas en  $R^2$ .

## 1. Introducción

Consideramos la aproximación numérica de las soluciones de viscosidad del problema de valores iniciales para las ecuaciones de Hamilton-Jacobi de la forma

$$\phi_t + H(x, \phi, \nabla \phi) = 0, \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad x \in R \quad t > 0 \quad (1)$$

donde  $H$  es una función de  $\phi$  no decreciente, ([2, 3]).

Las ecuaciones de Hamilton-Jacobi aparecen en numerosas aplicaciones que abarcan desde el control óptimo hasta la dinámica de fluidos. El estudio de métodos numéricos eficientes y precisos para resolverlas ha sido un campo de investigación muy activo en los últimos veinte años, ([6, 7, 10, 13, 14]).

La solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi desarrolla discontinuidades en derivada en tiempo finito. Los esquemas numéricos en general y de primer orden en particular tienden a suavizar estas singularidades. Por esto es necesario diseñar métodos numéricos de alto orden en espacio para aproximar las singularidades de la solución de forma precisa ([6, 10, 13]).

La aproximación numérica del movimiento de interfases gobernado por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales es un problema importante en física computacional

debido a la acumulación de ruido y difusión introducidos por el método numérico y a la dificultad de reproducir los cambios topológicos que sufre la interfase a lo largo de la evolución. Este fenómeno aparece en la dinámica de fluidos polifásicos compresibles e incompresibles [1, 5, 8].

La descripción de interfases en movimiento mediante la curva de nivel cero de una función implícita que evoluciona en tiempo con la dinámica es uno de los fundamentos del método de los conjuntos de nivel, ([4, 8]).

El método de los conjuntos de nivel establece una clase importante de ecuaciones de Hamilton-Jacobi donde el campo de velocidades que mueve las curvas de nivel es función de la curvatura media [9]. La función distancia euclídea signada a la interfase es la función implícita que mejor describe la curva de nivel cero. Una aproximación de alta precisión de esta función distancia permite realizar cálculo de integrales precisas sobre la interfase.

El concepto de reinicialización fue introducido en [15] para mantener la precisión de la interfase en movimiento descrita como la curva de nivel cero de una función implícita y reducir su degradación cuando evoluciona en tiempo. La ecuación de reinicialización de los conjuntos de nivel propuesta en [15] es una ecuación de Hamilton-Jacobi que permite aproximar la función distancia euclídea signada.

En este trabajo proponemos calcular con alta precisión espacial mediante la ecuación de reinicialización, funciones distancia de curvas mediante el esquema numérico de alto orden Weighted PowerENO propuesto en [13] para ecuaciones de Hamilton-Jacobi de evolución.

En la sección 2 se describe el esquema numérico y en la sección 3 se presenta un conjunto de experimentos donde se calcula de manera aproximada la función distancia signada de algunas curvas en  $R^2$ .

## 2. Esquema numérico

En esta sección presentamos un esquema en diferencias finitas de alto orden para las ecuaciones de Hamilton-Jacobi. Describimos el Hamiltoniano numérico monótono debido a Osher y Sethian ([9]) y un método de reconstrucción de quinto orden óptimo para la aproximación de la solución de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi propuesto en [13]. La estrategia consiste en primero aproximar con diferencias finitas las derivadas parciales de la solución a alto orden y después insertarlas en el Hamiltoniano numérico. La integración en tiempo se realiza mediante un método de alto orden Runge-Kuta ([16]).

### 2.1. Un Hamiltoniano numérico monótono

Describimos el esquema numérico básico de primer orden para el problema de valores iniciales de la ecuación de Hamilton-Jacobi en dos dimensiones espaciales

$$\phi_t + H(\phi_x, \phi_y) = 0, \quad \phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y), \quad t > 0 \quad (2)$$

mediante una malla computacional definida por los incrementos  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta t$ , siendo  $\phi_{j,k}^n$  la aproximación numérica a la solución de viscosidad de (2)

$$\phi(x_j, x_k, t^n) = \phi(j\Delta x, k\Delta y, n\Delta t) \quad (3)$$

Eliminamos la dependencia de  $x, y$  y  $\phi$  para simplicidad en la exposición. Consideramos el esquema de primer orden,

$$\phi_{j,k}^{n+1} = \phi_{j,k}^n - \Delta t g(D_-^x \phi_{j,k}, D_+^x \phi_{j,k}, D_-^y \phi_{j,k}, D_+^y \phi_{j,k}) \quad (4)$$

donde  $g$  es un flujo Lipschitz continuo y monótono en cada una de las variables y consistente con el Hamiltoniano de la ecuación  $H$ ,  $g(u, u, v, v) = H(u, v)$  y

$$D_-^x \phi_{j,k} = \frac{\phi_{j,k} - \phi_{j-1,k}}{\Delta x}; \quad D_+^x \phi_{j,k} = \frac{\phi_{j+1,k} - \phi_{j,k}}{\Delta x}; \quad (5)$$

$$D_-^y \phi_{j,k} = \frac{\phi_{j,k} - \phi_{j,k-1}}{\Delta y}; \quad D_+^y \phi_{j,k} = \frac{\phi_{j,k+1} - \phi_{j,k}}{\Delta y}. \quad (6)$$

Una función  $g$  con estas propiedades se denomina Hamiltoniano numérico monótono asociado a la ecuación original.

En este trabajo aproximamos la solución de ecuaciones de Hamilton-Jacobi con un Hamiltoniano  $H(u, v)$  que cumpla  $H(u, v) = h(u^2, v^2)$  tal que  $h_1 \cdot h_2 > 0$ , donde  $h_j$  es la derivada parcial de  $h$  respecto del argumento  $j$  de la función  $h$ . Para este tipo de Hamiltonianos se puede utilizar el Hamiltoniano numérico de Osher-Sethian [9] definido como:

$$g(u^-, u^+, v^-, v^+) = \begin{cases} h([\max((u^-)^+, (u^+)^-)]^2, [\max((v^-)^+, (v^+)^-)]^2) & h_1 \geq 0 \\ h([\max((u^-)^-, (u^+)^+)]^2, [\max((v^-)^-, (v^+)^+)]^2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

donde  $(a)^+ = \max(a, 0)$  y  $(a)^- = -\min(a, 0)$ .

Este Hamiltoniano numérico es monótono y define un esquema numérico de primer orden que converge a la solución de viscosidad, ([9]).

## 2.2. Reconstrucción espacial de quinto orden para las ecuaciones de Hamilton-Jacobi

En esta sección revisamos el método de reconstrucción Weighted Power-ENO de quinto orden de precisión espacial.

Los métodos Weighted Power-ENO ([12]) se propusieron originalmente para leyes de conservación hiperbólicas. La idea fundamental de las reconstrucciones Power-ENO consiste en aplicar una clase extendida de limitadores ([11, 12]) a diferencias de segundo orden de los métodos de reconstrucción ENO clásicos de manera que la reconstrucción retiene más información de las escalas finas y mejora la resolución alrededor de las discontinuidades de la solución. Una estrategia de ponderación basada en indicadores de suavidad apropiados ([12]) se usa para conseguir una aproximación de quinto orden. El método de quinto orden que resulta es el llamado método Weighted Power-ENO.

En [13] se adaptan los métodos de reconstrucción Weighted PowerENO para abordar la aproximación de la solución de viscosidad de las ecuaciones de las Hamilton-Jacobi y así mejorar la resolución alrededor de las esquinas donde el gradiente de la solución es discontinua.

Los limitadores  $\text{power}_p$ , a partir de los cuales se diseñan estos métodos, se definen a partir de las siguientes medias: dados dos números positivos  $x > 0$  e  $y > 0$ , para un número natural  $p$ , en [12] se define la media  $\text{power}_p(x, y)$  como:

$$\text{power}_p(x, y) = \frac{(x+y)}{2} \left( 1 - \left| \frac{x-y}{x+y} \right|^p \right) \quad (7)$$

Las siguientes desigualdades se satisfacen para todo  $x > 0$  e  $y > 0$ :

$$\min(x, y) \leq \text{power}_p(x, y) \leq \text{power}_q(x, y) \leq \frac{x+y}{2}$$

para  $0 < p < q$ .

Obsérvese que  $\lim_{p \rightarrow \infty} \text{power}_p(x, y) = \frac{x+y}{2} := \text{power}_\infty(x, y)$ .

Dados los valores puntuales  $\phi(x_j), j = 1, 2, \dots$  de una función en nodos equiespaciados  $x_j$ , tal que  $x_{j+1} = x_j + \Delta x$  denotamos sus diferencias finitas divididas como

$$z_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta x} \quad (8)$$

Introducimos la siguiente notación para las diferencias:

$$d_j = z_{j+\frac{1}{2}} - z_{j-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \frac{d_j + d_{j+1}}{2} \quad (10)$$

$$D_{j+\frac{1}{2}} = d_{j+1} - d_j \quad (11)$$

La reconstrucción Weighted PowerENO está basada en una combinación convexa de las tres parábolas siguientes asociadas a cada intervalo  $I_j = [x_j, x_{j+1}]$

$$p_j^P(x) = z_{j+\frac{1}{2}} - \frac{P_j}{24} + \frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left[ d_j + \frac{P_j}{2} + \frac{P_j}{2} \left( \frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \right] \quad (12)$$

$$p_{j+\frac{1}{2}}(x) = z_{j+\frac{1}{2}} - \frac{D_{j+\frac{1}{2}}}{24} + \frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left[ d_{j+\frac{1}{2}} + \frac{D_{j+\frac{1}{2}}}{2} \left( \frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \right] \quad (13)$$

$$p_{j+1}^P(x) = z_{j+\frac{1}{2}} - \frac{P_{j+1}}{24} + \frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left[ d_{j+1} - \frac{P_{j+1}}{2} + \frac{P_{j+1}}{2} \left( \frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \right] \quad (14)$$

donde  $P_j := \text{powermod}_p(D_{j-\frac{1}{2}}, D_{j+\frac{1}{2}})$  y

$$\text{powermod}_p(x, y) = \frac{\text{sign}(x) + \text{sign}(y)}{2} \text{power}_p(|x|, |y|) \quad (15)$$

En particular, en  $x = x_j$  tenemos

$$p_j^P(x_j) = z_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}d_j - \frac{1}{6}P_j \quad (16)$$

$$p_{j+\frac{1}{2}}(x_j) = z_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}d_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}D_{j+\frac{1}{2}} \quad (17)$$

$$p_{j+1}^P(x_j) = z_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}d_{j+1} + \frac{1}{3}P_{j+1} \quad (18)$$

Para obtener la precisión óptima de  $u^+(x_j)$  en la interfase de  $I_j$  usamos la siguiente combinación convexa

$$u^+(x_j) = w_0 \cdot p_j^P(x_j) + w_1 \cdot p_{j+\frac{1}{2}}(x_j) + w_2 \cdot p_{j+1}^P(x_j) \quad (19)$$

donde

$$w_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2} \quad k = 0, 1, 2 \quad (20)$$

y

$$\alpha_k = \frac{C_k}{(\epsilon + IS_k)^2} \quad (21)$$

aquí  $C_0 = 0,6$ ,  $C_1 = 0,2$  y  $C_2 = 0,2$  son los pesos óptimos.

Para calcular los indicadores de suavidad utilizamos la norma  $L^2$  de las derivadas de los polinomios de manera que se alcanza el grado óptimo de precisión. Obtenemos las expresiones siguientes:

$$IS_0 = \frac{13}{12}(P_j)^2 + \frac{1}{4}\left(2z_{j+\frac{1}{2}} - 2z_{j-\frac{1}{2}} + P_j\right)^2 \quad (22)$$

$$IS_1 = \frac{13}{12}\left(z_{j-\frac{1}{2}} - 2z_{j+\frac{1}{2}} + z_{j+\frac{3}{2}}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(z_{j-\frac{1}{2}} - z_{j+\frac{3}{2}}\right)^2 \quad (23)$$

$$IS_2 = \frac{13}{12}(P_{j+1})^2 + \frac{1}{4}\left(2z_{j+\frac{3}{2}} - 2z_{j+\frac{1}{2}} - P_{j+1}\right)^2 \quad (24)$$

Para  $u^-(x_j)$  se obtiene una expresión similar para el polinomio asociado en  $I_{j-1}$ ,

$$u^-(x_j) = w_0 \cdot p_{j-1}^P(x_j) + w_1 \cdot p_{j-\frac{1}{2}}(x_j) + w_2 \cdot p_j^P(x_j) \quad (25)$$

con  $C_0 = 0,2$ ,  $C_1 = 0,2$  y  $C_2 = 0,6$  como pesos óptimos.

Una expresión reducida de estas parábolas evaluadas en  $x = x_j$  es,

$$p_{j-1}^P(x_j) = z_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}d_{j-1} + \frac{1}{3}P_{j-1} \quad (26)$$

$$p_{j-\frac{1}{2}}(x_j) = z_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}d_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}D_{j-\frac{1}{2}} \quad (27)$$

$$p_j^P(x_j) = z_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}d_j - \frac{1}{6}P_j \quad (28)$$

El método que resulta es un método Weighted Power ENO de quinto orden de precisión para  $p \geq 3$  como se demuestra en [12].

En [12] se demuestra que el valor óptimo de  $p$  para la aproximación de leyes de conservación hiperbólicas donde se desarrollan discontinuidades en tiempo finito de manera que el esquema sea de variación total local acotada ha de ser  $p = 3$ .

En [13] se estudia aplicar los métodos Weighted PowerENO para la aproximación de las soluciones de viscosidad de Hamilton-Jacobi utilizando limitadores  $\text{power}_p$  más débiles con  $p > 3$ . En particular se propone la media aritmética (límite infinito de las medias  $\text{power}_p$ ) en lugar de los limitadores  $\text{power}_3$  utilizados para leyes de conservación. El método, al que se denomina Weighted Power $_{\infty}$  ENO, es útil para la aproximación de soluciones de viscosidad de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi ([13]) ya que estas soluciones son continuas con derivadas discontinuas y el procedimiento de reconstrucción se aplica a diferencias divididas de primer orden.

### 3. Reinicialización de funciones de conjuntos de nivel

Para ciertas curvas en  $R^2$  no existe expresión analítica explícita de su función distancia.

En esta sección aproximamos con alta precisión la función distancia euclídea signada de diferentes curvas sencillas. El cálculo de la función distancia se realiza aproximando la solución de viscosidad de la ecuación de reinicialización tomando como dato inicial una perturbación de dicha función.

La ecuación de reinicialización de los conjuntos de nivel es de la forma

$$\phi_t + \text{sign}(\phi_0) \left[ \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} - 1 \right] = 0, \quad \phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y) \quad (29)$$

cuyo dato inicial es una función  $\phi_0(x, y)$  que tiene como curva de nivel cero la curva de  $R^2$  para la que deseamos calcular la función distancia. La función  $\text{sign}(\phi_0)$  representa la regularización de la función signo

$$\text{sign}(\phi_0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + \epsilon}}, \quad \epsilon = O(\Delta x) \quad (30)$$

El problema de valores iniciales (29) tiene como solución estacionaria la función distancia signada a la curva dada.

Resolvemos (29) usando el Hamiltoniano numérico de Osher-Sethian a primer y quinto orden (Weighted Power $_{\infty}$  ENO) para diferentes datos iniciales. Comparamos la precisión de los métodos calculando los errores globales en norma  $L^{\infty}$  con diferentes mallas computacionales. Los resultados se muestran en tablas donde se aprecia una mejora considerable en la reducción del error para los cálculos realizados a quinto orden.

#### 3.1. Experimento 1. Función distancia regular

Elegimos la función  $\phi_0$  como la función distancia signada a la circunferencia de centro el origen y radio  $\frac{1}{2}$  perturbada en las direcciones radial y angular:

$$\phi_0(x, y) = \begin{cases} d + \delta & |d| \leq \epsilon \\ d & \text{en otro caso} \end{cases}$$

N	Primer orden	Weighted Power $_{\infty}$
100	$3.85 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$
200	$2.43 \cdot 10^{-3}$	$4.51 \cdot 10^{-7}$

Tabla 1: Errores globales en norma  $L^{\infty}$  para la función distancia de la circunferencia

N	Primer orden	Weighted Power $_{\infty}$
100	$8.10 \cdot 10^{-1}$	$2.17 \cdot 10^{-2}$
200	$1.03 \cdot 10^{-1}$	$7.61 \cdot 10^{-3}$

Tabla 2: Errores globales en norma  $L^{\infty}$  para la función distancia de la lemniscata

donde  $d = \sqrt{x^2 + y^2} - 0,5$ ,  $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{|x|})$ ,  $\epsilon = 0,2$  y  $\delta = \frac{\epsilon}{16\pi} \sin\left(\frac{4\pi d \sin 5\theta}{\epsilon}\right)$

Realizamos el cálculo en el dominio  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  utilizando las mallas computacionales  $100 \times 100$ ,  $200 \times 200$  con una restricción CFL de 0,6 y 256 y 1024 iteraciones respectivamente.

Los errores en norma  $L^{\infty}$  para cada uno de los métodos se presentan en la Tabla 1.

### 3.2. Experimento 2. Función distancia con discontinuidades en derivada

Consideramos la restauración de una función distancia no regular. Elegimos  $\phi_0$  como la función distancia a la lemniscata

$$a^4 = [(x - a)^2 + y^2][(x + a)^2 + y^2] \quad (31)$$

con  $a = 0,5$  y añadiendo una perturbación en dirección radial y angular

$$\phi_0(x, y) = \begin{cases} d + 3\delta & |d| \leq \epsilon \\ d & \text{en otro caso} \end{cases}$$

definida en  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  donde  $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{|x|})$ ,  $\epsilon = 0,2$  y  $\delta = \frac{\epsilon}{16\pi} \sin\left(\frac{4\pi d \sin 5\theta}{\epsilon}\right)$ . Calculamos la función distancia  $d$  de la lemniscata aproximando la evolución de la ecuación (29) al estado estacionario tomando como dato inicial la función

$$D(x, y) = \sqrt{[(x - a)^2 + y^2][(x + a)^2 + y^2]} - a^2 \quad (32)$$

Realizamos el cálculo utilizando las mallas computacionales  $100 \times 100$ ,  $200 \times 200$  con una restricción CFL de 0,6 y 256 y 1024 iteraciones respectivamente. Se toma como referencia la solución para la malla computacional  $400 \times 400$ .

Los errores en norma  $L^{\infty}$  para cada uno de los métodos se presentan en la Tabla 2.

### 3.3. Experimento 3. Curva no regular con interior convexo

Consideramos la curva frontera de la bola de centro cero de radio  $\frac{1}{2}$  en la norma  $L^1$ ,  $\{(x, y) : |x| + |y| = \frac{1}{2}\}$ . Como dato inicial elegimos la función distancia signada en la norma  $L^1$

$$\phi_0(x, y) = |x| + |y| - \frac{1}{2} \quad (33)$$

N	Primer orden	Weighted Power $_{\infty}$
100	$2.03 \cdot 10^{-2}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$
200	$8.12 \cdot 10^{-3}$	$4.50 \cdot 10^{-4}$

Tabla 3: Errores globales en norma  $L^{\infty}$  para la función distancia de la bola de radio  $\frac{1}{2}$  en norma  $L^1$

Realizamos el cálculo en el dominio  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  utilizando las mallas computacionales  $100 \times 100$ ,  $200 \times 200$  con una restricción CFL de 0,6 y 256 y 1024 iteraciones respectivamente.

Los errores en norma  $L^{\infty}$  para cada uno de los métodos se presentan en la Tabla 3.

Los errores globales para las soluciones aproximadas de la lemniscata y la frontera de la bola en norma  $L^1$  son significativamente mayores que los correspondientes a la circunferencia debido a la presencia de discontinuidades en derivada.

## Referencias

- [1] I. -L. Chern, J. Glimm, O. McBryan, B. Plohr and S. Yaniv , *Front tracking for gas dynamics* J. Comput. Phys., 62,(1986), pp. 83–110.
- [2] Crandall, M. and Lions, P., *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 277, (1983), pp. 1–42.
- [3] Crandall, M. and Lions, P., *Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Math. Comput, 43, (1984), pp. 1–19.
- [4] Fedkiw, R, Aslam, T, Merriman, B. and Osher, S. , *A Non-oscillatory Eulerian Approach to Interfaces in Multimaterial Flows (the Ghost Fluid Method)* J. Comput. Phys., 152 ,(1999), pp. 457–492.
- [5] Hirt, C.W. and Nichols B.D. , *Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries* J. Comput. Phys., 39,(1981), pp. 201–225.
- [6] Jiang, G.S., and Peng, D., *Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Sci. Comput., 21,(2000), pp. 2126–2143.
- [7] Lin, C. T. and Tadmor, E., *High-resolution nonoscillatory central schemes for Hamilton-Jacobi Equations*, SIAM J. Sci. Comput., 21, (2000), pp 2163–2186.
- [8] Mulder, W., Osher, S.J. and Sethian, J. , *Computing interface motion in compressible gas dynamics* J. Comput. Phys., 100, (1992), pp. 209–228.
- [9] Osher, S.J. and Sethian, J. , *Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, J. Comput. Phys., 79, (1988), pp. 12–49.
- [10] Osher, S.J. and Shu, C.W. , *High-order essentially non-oscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Numer. Anal., 28, (1991), pp. 907–922.
- [11] Serna, S., *A class of extended limiters applied to Piecewise Hyperbolic methods*, SIAM Journal of Scientific Computing, v28 (1), 123-140, 2006.
- [12] Serna, S. and Marquina, A., *Power ENO Methods: A fifth order accurate Weighted Power ENO method*, J. Comput. Phys., 194, (2004), pp. 632–658.
- [13] Serna, S., Qian, J., *Fifth Order Weighted Power-ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations*, Journal of Scientific Computing, v29, 57-81, 2006.
- [14] Souganidis, P. E., *Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, J. Diff. Eqn., 59, (1985), pp 1–43.
- [15] Sussman, M. Smereka, P. and Osher, S., *A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow* J. Comput. Phys., 114, (1994), pp. 146–159.
- [16] Spiteri, R. J. and Ruuth, S. J., *A new class of optimal high order strong stability preserving time discretization methods*, SIAM J. Num. Anal., 40, (2002), pp 469-491.