

Resolución numérica de problemas evolutivos semilineales sobre dominios irregulares mediante métodos miméticos paralelizables

L. PORTERO, A. ARRARÁS, J.C. JORGE

Dpto. de Ingeniería Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra, Campus de Arrosadía s/n, 31006 Pamplona. E-mails: {laura.portero, andres.arraras, jcjorge}@unavarra.es.

Palabras clave: Descomposición de Dominios, Mallado Rectangular Lógico, Método Linealmente Implícito, Método de Operador-Soporte, Método de Pasos Fraccionarios.

Resumen

Este artículo versa sobre la resolución numérica eficiente de problemas parabólicos semilineales que describen fenómenos de flujo en medios porosos anisótropos. Para la integración en tiempo de tales problemas, proponemos usar un método de pasos fraccionarios linealmente implícito que considere particiones del operador y el término fuente relacionadas con una descomposición del dominio de flujo. La familia de problemas elípticos así obtenida se discretiza en espacio por medio de la técnica del operador-soporte con lo que obtenemos un esquema en diferencias finitas centrado en celdas sobre un mallado rectangular lógico. Debido a las particiones elegidas para el operador y el término fuente, el esquema totalmente discreto resultante involucra conjuntos de sistemas lineales desacoplados que pueden ser resueltos en paralelo. Finalmente, mostramos un ensayo numérico con el fin de ilustrar el comportamiento incondicionalmente convergente del método.

1. Introducción

El movimiento de agua a través de un medio poroso no expansivo puede modelizarse mediante la ecuación de Richards (véase [4, 2]). Considerando un medio anisótropo sujeto a condiciones isoterma, dicha ecuación admite la siguiente formulación simplificada

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{div}(K(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \psi(\mathbf{x}, t)) + g(\psi(\mathbf{x}, t)) + f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (1)$$

a la que añadiremos condiciones iniciales y de contorno adecuadas para que el problema esté bien planteado. Se asume que el dominio de flujo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto y

acotado, ψ denota la presión capilar, $K(\mathbf{x})$ es un tensor simétrico y definido positivo de la forma

$$K(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} K^{11}(\mathbf{x}) & K^{12}(\mathbf{x}) \\ K^{12}(\mathbf{x}) & K^{22}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

que modeliza la conductividad hidráulica, $g(\psi)$ es una función no lineal suave que describe la absorción radicular (véase [9]) y f es un término fuente/sumidero.

En este trabajo proponemos una técnica eficiente para la resolución numérica de (1) que consta de dos procesos de discretización. En primer lugar, introducimos en la sección 2 la familia de métodos Runge-Kutta de pasos fraccionarios linealmente implícitos que usamos como integradores temporales. Tal y como allí se explica, las particiones necesarias para el término fuente y para el operador diferencial elíptico están subordinadas a una descomposición de Ω en un conjunto de subdominios solapados. A continuación, la sección 3 aborda la discretización en espacio que consiste en un esquema de diferencias finitas centrado en celdas deducido a partir del método de operador-soporte. Estos nuevos algoritmos se formulan para mallados rectangulares lógicos que aparecen de forma natural en la descripción de ciertas geometrías, por ejemplo, aquellas relacionadas con problemas de flujo en medios porosos estratificados. En la última sección incluimos un experimento numérico que ilustra el comportamiento del método propuesto.

2. Semidiscretización en tiempo

Consideremos Ω descompuesto como la unión de m subdominios solapados que a su vez se subdividen en un cierto número de componentes conexas disjuntas, es decir,

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i, \text{ donde } \Omega_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} \Omega_{ij} \text{ tal que } \Omega_{ij} \cap \Omega_{ik} = \emptyset \text{ if } j \neq k.$$

Asociada a esta descomposición, construimos una partición de la unidad suave formada por m funciones $\{\rho_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^m$, donde cada $\rho_i : \Omega \rightarrow [0, 1]$ viene definida como sigue:

$$\rho_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_i, \\ h_i(\mathbf{x}), & \text{si } \mathbf{x} \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\Omega_i \cap \Omega_j), \\ 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_i \setminus \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\Omega_i \cap \Omega_j), \end{cases}$$

siendo $0 \leq h_i(\mathbf{x}) \leq 1$ y $\sum_{i=1}^m h_i(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\Omega_i \cap \Omega_j)$.

Usando esta partición de la unidad, definimos las siguientes particiones para el operador

diferencial $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{div}(K(\mathbf{x}) \mathbf{grad})$ y la función $f(\mathbf{x}, t)$ (véase [3])

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i(\mathbf{x}), \quad \text{donde } \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{div}(K_i(\mathbf{x}) \mathbf{grad}) \text{ y } K_i(\mathbf{x}) \equiv \rho_i(\mathbf{x})K(\mathbf{x}), \\ f(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{x}, t), \quad \text{donde } f_i(\mathbf{x}, t) \equiv \rho_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Un método Runge-Kutta de pasos fraccionarios linealmente implícito con m niveles y s etapas internas (véase [1]), combinado con las particiones dadas por (2), reduce el problema parabólico semilineal de origen (1) al siguiente conjunto de problemas elípticos lineales, uno por etapa interna:

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_n^k(\mathbf{x}) &= \psi_n(\mathbf{x}) + \tau \sum_{\ell=1}^k a_{k\ell}^{i_\ell} \left(\mathbf{A}_{i_\ell}(\mathbf{x}) \psi_n^\ell(\mathbf{x}) + f_{i_\ell}(\mathbf{x}, t_n + c_\ell \tau) \right) \\ &\quad + \tau \sum_{\ell=1}^{k-1} a_{k\ell}^{m+1} g(\psi_n^\ell(\mathbf{x})), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, s, \\ \psi_{n+1}(\mathbf{x}) &= \psi_n(\mathbf{x}) + \tau \sum_{\ell=1}^s b_\ell^{i_\ell} \left(\mathbf{A}_{i_\ell}(\mathbf{x}) \psi_n^\ell(\mathbf{x}) + f_{i_\ell}(\mathbf{x}, t_n + c_\ell \tau) \right) + \tau \sum_{\ell=1}^s b_\ell^{m+1} g(\psi_n^\ell(\mathbf{x})), \end{aligned} \right. \quad (3)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots, N_T$, siendo $N_T \equiv [T/\tau] - 1$, e $i_\ell \in \{1, 2, \dots, m\}$ para todo $\ell = 1, 2, \dots, s$. La solución semidiscreta $\psi_{n+1}(\mathbf{x})$ aproxima a $\psi(\mathbf{x}, t_{n+1})$, para $t_{n+1} = (n+1)\tau$, donde τ denota el paso en tiempo constante. Finalmente, los coeficientes $a_{k\ell}^i$, b_k^i y c_k , para $1 \leq \ell \leq k \leq s$ e $i \in \{1, 2, \dots, m+1\}$, dependen del método elegido.

Notar que el uso de un método linealmente implícito conlleva un tratamiento explícito de la función no lineal $g(\psi)$ y, por ello, los problemas elípticos que aparecen en (3) son lineales. Por otro lado, la elección de un método de pasos fraccionarios hace que sólo una parte $A_i(\mathbf{x})$ del operador $A(\mathbf{x})$ actúe implícitamente en cada etapa interna.

3. Discretización espacial y esquema totalmente discreto

A continuación aplicaremos una discretización espacial de tipo diferencias finitas basada en el método de operador-soporte sobre el esquema semidiscreto (3) con el fin de llegar a un esquema totalmente discreto. El método de operador-soporte, inicialmente propuesto en [5] y posteriormente desarrollado en [6], proporciona una metodología para la construcción de análogos discretos de los operadores diferenciales de primer orden divergencia y gradiente.

En primer lugar discretizamos Ω por medio de un mallado rectangular lógico Ω_h , donde h denota el grosor de dicho mallado. La estructura de Ω_h es la siguiente: dados N_x y N_y dos enteros positivos, el nodo (i, j) viene dado por sus coordenadas $(\tilde{x}_{i,j}, \tilde{y}_{i,j})$, para $1 \leq i \leq N_x$ y $1 \leq j \leq N_y$. Además, llamaremos celda (i, j) al cuadrilátero definido por los nodos (i, j) , $(i+1, j)$, $(i, j+1)$ y $(i+1, j+1)$ cuyo centro viene dado por las coordenadas $(x_{i,j}, y_{i,j})$, que se calculan como sigue

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= 0,25 (\tilde{x}_{i,j} + \tilde{x}_{i+1,j} + \tilde{x}_{i,j+1} + \tilde{x}_{i+1,j+1}), \\ y_{i,j} &= 0,25 (\tilde{y}_{i,j} + \tilde{y}_{i+1,j} + \tilde{y}_{i,j+1} + \tilde{y}_{i+1,j+1}), \end{aligned}$$

para $i \in \{1, 2, \dots, N_x - 1\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, N_y - 1\}$.

En este contexto, el método de operador-soporte considera aproximaciones en los centros de las celdas para las funciones escalares $\psi_n(\mathbf{x})$, $\psi_n^k(\mathbf{x})$, $g(\psi_n^k(\mathbf{x}))$ y $f_i(\mathbf{x}, t_n)$ dadas por $\psi_{n,h}$, $\psi_{n,h}^k$, $g_h(\psi_{n,h}^k)$ y $f_{i,h}(t_n)$, respectivamente, donde $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ e $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Por otro lado, considera discretizaciones nodales para funciones vectoriales genéricas $\mathbf{w}_n(\mathbf{x}) \equiv (w_n^x(\mathbf{x}), w_n^y(\mathbf{x}))$ que denotaremos con $\tilde{\mathbf{w}}_{n,h} \equiv (\tilde{w}_{n,h}^x, \tilde{w}_{n,h}^y)$.

Tal y como se describe en [8], es natural tomar la divergencia como el *operador primario* de primer orden. Basándonos en la definición invariante de la divergencia, podemos deducir un análogo discreto de la divergencia que llamaremos

$$\mathbf{div}_h : \begin{array}{ccc} \tilde{V}_h \times \tilde{V}_h & \rightarrow & V_h \\ \tilde{\mathbf{v}}_h & \hookrightarrow & \mathbf{div}_h \tilde{\mathbf{v}}_h, \end{array}$$

donde $\tilde{\mathbf{v}}_h \equiv (\tilde{v}_h^x, \tilde{v}_h^y)$. Se tiene que \tilde{V}_h y V_h son espacios finito dimensionales de funciones discretas definidas en los nodos y en los centros de las celdas de Ω_h , respectivamente. Así, la divergencia discreta de un vector discreto $\tilde{\mathbf{w}}_{n,h}$ admite la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} (\mathbf{div}_h \tilde{\mathbf{w}}_{n,h})_{i,j} &= \frac{1}{2\sigma_{i,j}} (((\tilde{w}_{n,h}^x)_{i+1,j+1} - (\tilde{w}_{n,h}^x)_{i,j})(\tilde{y}_{i,j+1} - \tilde{y}_{i+1,j}) \\ &\quad - ((\tilde{w}_{n,h}^x)_{i,j+1} - (\tilde{w}_{n,h}^x)_{i+1,j})(\tilde{y}_{i+1,j+1} - \tilde{y}_{i,j}) \\ &\quad - ((\tilde{w}_{n,h}^y)_{i+1,j+1} - (\tilde{w}_{n,h}^y)_{i,j})(\tilde{x}_{i,j+1} - \tilde{x}_{i+1,j}) \\ &\quad - ((\tilde{w}_{n,h}^y)_{i,j+1} - (\tilde{w}_{n,h}^y)_{i+1,j})(\tilde{x}_{i+1,j+1} - \tilde{x}_{i,j})), \end{aligned} \quad (4)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, N_x - 1$ y $j = 1, 2, \dots, N_y - 1$, donde $\sigma_{i,j}$ es el área de la celda (i, j) y $(\tilde{w}_{n,h}^z)_{i,j}$ denota la componente $((i-1)(N_y-1)+j)$ de $\tilde{w}_{n,h}^z$ que aproxima a $w_n^z(\tilde{x}_{i,j}, \tilde{y}_{i,j})$, para $z = x, y$. Asimismo, considerando una versión discreta del teorema de Gauss junto con la expresión de \mathbf{div}_h , se construye el *operador secundario* \mathbf{grad}_h como el análogo discreto de \mathbf{grad}

$$\mathbf{grad}_h : \begin{array}{ccc} V_h & \rightarrow & \tilde{V}_h \times \tilde{V}_h \\ u_h & \hookrightarrow & \mathbf{grad}_h u_h. \end{array}$$

Las componentes del gradiente discreto, actuando sobre la función discreta $\psi_{n,h}$, quedan definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\mathbf{grad}_h^x \psi_{n,h})_{i,j} &= \frac{1}{2\eta_{i,j}} ((\tilde{y}_{i,j+1} - \tilde{y}_{i+1,j})(\psi_{n,h})_{i,j} + (\tilde{y}_{i-1,j} - \tilde{y}_{i,j+1})(\psi_{n,h})_{i-1,j} \\ &\quad + (\tilde{y}_{i+1,j} - \tilde{y}_{i,j-1})(\psi_{n,h})_{i,j-1} + (\tilde{y}_{i,j-1} - \tilde{y}_{i-1,j})(\psi_{n,h})_{i-1,j-1}), \\ (\mathbf{grad}_h^y \psi_{n,h})_{i,j} &= \frac{1}{2\eta_{i,j}} ((\tilde{x}_{i,j+1} - \tilde{x}_{i+1,j})(\psi_{n,h})_{i,j} + (\tilde{x}_{i-1,j} - \tilde{x}_{i,j+1})(\psi_{n,h})_{i-1,j} \\ &\quad + (\tilde{x}_{i+1,j} - \tilde{x}_{i,j-1})(\psi_{n,h})_{i,j-1} + (\tilde{x}_{i,j-1} - \tilde{x}_{i-1,j})(\psi_{n,h})_{i-1,j-1}), \end{aligned} \quad (5)$$

para $i = 2, \dots, N_x - 1$ y $j = 2, \dots, N_y - 1$, donde $\eta_{i,j} = 0,25(\sigma_{i,j} + \sigma_{i-1,j} + \sigma_{i,j-1} + \sigma_{i-1,j-1})$ y $(\psi_{n,h})_{i,j}$ es la componente $((i-1)(N_y-1)+j)$ de $\psi_{n,h}$ que aproxima a $\psi_n(x_{i,j}, y_{i,j})$. Es facil ver que las ecuaciones (5) se pueden extender a $i \in \{1, N_x\}$, $j \in \{1, N_y\}$ si introducimos los siguientes nodos ficticios

$$\begin{array}{cccc} \tilde{x}_{i,0} = \tilde{x}_{i,1}, & \tilde{y}_{i,0} = \tilde{y}_{i,1}, & \tilde{x}_{i,N_y+1} = \tilde{x}_{i,N_y}, & \tilde{y}_{i,N_y+1} = \tilde{y}_{i,N_y}, \\ \tilde{x}_{0,j} = \tilde{x}_{1,j}, & \tilde{y}_{0,j} = \tilde{y}_{1,j}, & \tilde{x}_{N_x+1,j} = \tilde{x}_{N_x,j}, & \tilde{y}_{N_x+1,j} = \tilde{y}_{N_x,j}, \end{array}$$

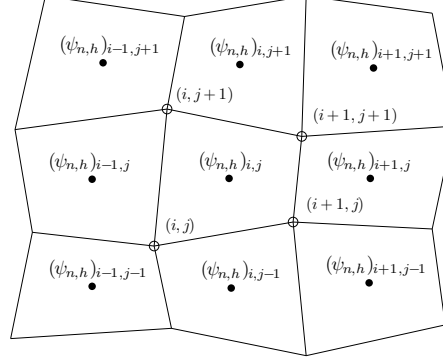


Figura 1: Molécula computacional de nueve puntos correspondiente a $(\mathbf{div}_h(\tilde{K}_h \mathbf{grad}_h \psi_{n,h}))_{i,j}$.

para $i \in \{1, 2, \dots, N_x\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, N_y\}$, así como las evaluaciones de las condición de contorno Dirichlet $\psi_D(\mathbf{x}, t)$ en los puntos medios de los segmentos de la frontera, es decir,

$$(\psi_{n,h})_{0,j} = \psi_D(\hat{x}_{1,j}, \hat{y}_{1,j}, t_n), \quad (\psi_{n,h})_{N_x,j} = \psi_D(\hat{x}_{N_x,j}, \hat{y}_{N_x,j}, t_n),$$

donde $\hat{x}_{1,j} = 0,5(\tilde{x}_{1,j} + \tilde{x}_{1,j+1})$, $\hat{y}_{1,j} = 0,5(\tilde{y}_{1,j} + \tilde{y}_{1,j+1})$, $\hat{x}_{N_x,j} = 0,5(\tilde{x}_{N_x,j} + \tilde{x}_{N_x,j+1})$ y $\hat{y}_{N_x,j} = 0,5(\tilde{y}_{N_x,j} + \tilde{y}_{N_x,j+1})$, para $j \in \{1, 2, \dots, N_y - 1\}$, y

$$(\psi_{n,h})_{i,0} = \psi_D(\hat{x}_{i,1}, \hat{y}_{i,1}, t_n), \quad (\psi_{n,h})_{i,N_y} = \psi_D(\hat{x}_{i,N_y}, \hat{y}_{i,N_y}, t_n),$$

donde $\hat{x}_{i,1} = 0,5(\tilde{x}_{i,1} + \tilde{x}_{i+1,1})$, $\hat{y}_{i,1} = 0,5(\tilde{y}_{i,1} + \tilde{y}_{i+1,1})$, $\hat{x}_{i,N_y} = 0,5(\tilde{x}_{i,N_y} + \tilde{x}_{i+1,N_y})$ y $\hat{y}_{i,N_y} = 0,5(\tilde{y}_{i,N_y} + \tilde{y}_{i+1,N_y})$, para $i \in \{1, 2, \dots, N_x - 1\}$.

A continuación, considerando las ecuaciones (5) junto con las evaluaciones nodales de las componentes de $K(\mathbf{x})$ a las que denotaremos por $(\tilde{K}_h^{11})_{i,j}$, $(\tilde{K}_h^{12})_{i,j}$ y $(\tilde{K}_h^{22})_{i,j}$, obtenemos la siguiente discretización espacial para $\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{grad}\psi_n(\mathbf{x})$

$$(\tilde{K}_h \mathbf{grad}_h \psi_{n,h})_{i,j} = \begin{pmatrix} (\tilde{K}_h^{11})_{i,j} (\mathbf{grad}_h^x \psi_{n,h})_{i,j} + (\tilde{K}_h^{12})_{i,j} (\mathbf{grad}_h^y \psi_{n,h})_{i,j} \\ (\tilde{K}_h^{12})_{i,j} (\mathbf{grad}_h^x \psi_{n,h})_{i,j} + (\tilde{K}_h^{22})_{i,j} (\mathbf{grad}_h^y \psi_{n,h})_{i,j} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Finalmente, usando (4)-(6), es inmediato obtener discretizaciones para los operadores elípticos de segundo orden $\mathbf{A}_i(\mathbf{x})$ a las que denotaremos por $\mathbf{A}_{i,h} \equiv \mathbf{div}_h(K_{i,h} \mathbf{grad}_h)$, donde $i = 1, 2, \dots, m$. En particular se tiene que la molécula computacional de $(\mathbf{div}_h(\tilde{K}_{i,h} \mathbf{grad}_h \psi_{n,h}))_{i,j}$ involucra aproximaciones de la incógnita ψ en los centros de nueve celdas: $(\psi_{n,h})_{i-1,j-1}$, $(\psi_{n,h})_{i,j-1}$, $(\psi_{n,h})_{i+1,j-1}$, $(\psi_{n,h})_{i-1,j}$, $(\psi_{n,h})_{i,j}$, $(\psi_{n,h})_{i+1,j}$, $(\psi_{n,h})_{i-1,j+1}$, $(\psi_{n,h})_{i,j+1}$ y $(\psi_{n,h})_{i+1,j+1}$, así como evaluaciones de las componentes de K en los nodos (i,j) , $(i+1,j)$, $(i,j+1)$ y $(i+1,j+1)$ (véase figura 1).

En este contexto, el esquema totalmente discreto admite la siguiente formulación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{n,h}^k = \psi_{n,h} + \tau \sum_{\ell=1}^k a_{k\ell}^{i_\ell} \left(\mathbf{A}_{i_\ell,h} \psi_{n,h}^\ell + f_{i_\ell,h}(t_n + c_\ell \tau) \right) \\ \quad + \tau \sum_{\ell=1}^{k-1} a_{k\ell}^{m+1} g_h(\psi_{n,h}^\ell), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, s, \\ \psi_{n+1,h} = \psi_{n,h} + \tau \sum_{\ell=1}^s b_\ell^{i_\ell} \left(\mathbf{A}_{i_\ell,h} \psi_{n,h}^\ell + f_{i_\ell,h}(t_n + c_\ell \tau) \right) + \tau \sum_{\ell=1}^s b_\ell^{m+1} g_h(\psi_{n,h}^\ell), \end{array} \right. \quad (7)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N_T$, donde $i_\ell \in \{1, 2, \dots, m\}$ para todo $\ell = 1, 2, \dots, s$.

Teniendo en cuenta el tipo de partición (2) considerada en la sección anterior, el sistema lineal obtenido para cada etapa interna involucra únicamente a las incógnitas que se encuentran en uno de los subdominios $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$. Además, como cada subdominio Ω_i consta de m_i componentes conexas disjuntas, este sistema es en realidad un conjunto de m_i subsistemas desacoplados cuya resolución puede llevarse a cabo en paralelo. Notar que, a diferencia de los métodos clásicos de descomposición de dominios, esta técnica no precisa de ningún proceso iterativo para el ajuste de las condiciones de contorno ficticias en las nuevas fronteras de los subdominios (p.ej., iteraciones de Schwarz).

4. Experimento numérico

En esta sección estudiamos el comportamiento del algoritmo numérico propuesto sobre mallas pseudo-aleatorias. Un estudio similar aparece en [7] donde se usa el método de Euler implícito clásico junto con la técnica de operador-soporte para la resolución de una clase de problemas parabólicos lineales más sencillos.

Consideremos una ecuación del tipo (1) planteada sobre $\Omega \times (0, T] \equiv (0, 1)^2 \times (0, 0.01]$. El tensor $K(\mathbf{x})$ se define como $K(\mathbf{x}) = R(\theta)D(\mathbf{x})R(\theta)^T$, donde $R(\theta)$ es una matriz de rotación 2×2 con ángulo $\theta = 5\pi/12$ y $D(\mathbf{x}) = \text{diag}(1 + 2x^2 + y^2, 1 + x^2 + 2y^2)$. La función no lineal $g(\psi) = 1/(1 + \psi^3)$ es la función de absorción de agua correspondiente al modelo de infiltración en suelos de Van Genuchten. Por último, tanto la función f como la condición inicial y la condición de contorno Dirichlet se definen de tal forma que $\psi(x, y, t) = e^{-2\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ es la solución exacta del problema.

Consideramos una descomposición de Ω en $m = 4$ subdominios solapados, cada uno de los cuales formado por $m_i = 4$ componentes conexas disjuntas, para $i = 1, 2, 3, 4$ (véase figura 2, dibujo central). Las funciones definidas a trozos $\{\rho_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^4$ asociadas a dicha partición vienen dadas, en las zonas de solapamiento de subdominios, por ciertas funciones exponenciales que nos permiten obtener una partición de la unidad \mathcal{C}^∞ (véase figura 2, dibujos de las esquinas).

A continuación usamos una variante linealmente implícita del método de Euler implícito fraccionario con cuatro niveles ($m = 4$) y cuatro etapas internas ($s = 4$) para la integración en tiempo del problema (1). El esquema semidiscreto resultante es

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_n^k(\mathbf{x}) = \psi_n(\mathbf{x}) + \tau \sum_{\ell=1}^k \left(\mathbf{A}_\ell(\mathbf{x}) \psi_n^\ell(\mathbf{x}) + f_\ell(\mathbf{x}, t_{n+1}) \right) + \tau g(\psi_n(\mathbf{x})), \quad \text{para } k = 1, 2, 3, 4, \\ \psi_{n+1}(\mathbf{x}) = \psi_n^4(\mathbf{x}), \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, N_T. \end{array} \right.$$

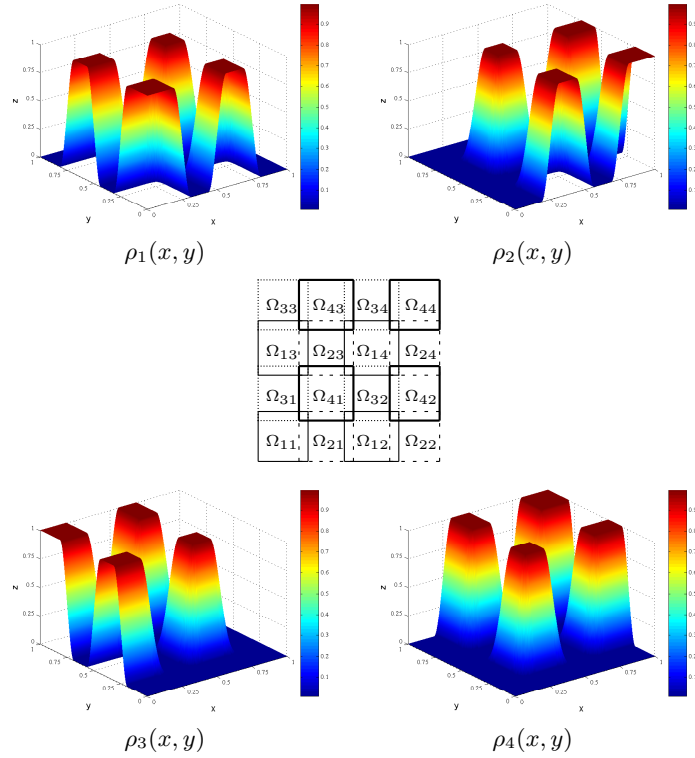


Figura 2: Descomposición de Ω en $m = 4$ subdominios solapados (dibujo central) y funciones $\rho_i(x, y)$ correspondientes, para $i = 1, 2, 3, 4$ (dibujos de las esquinas).

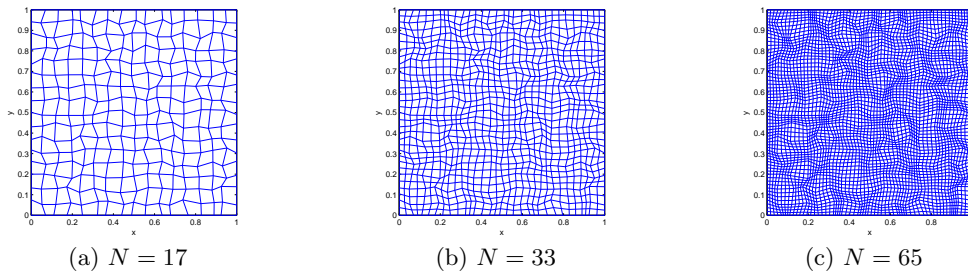


Figura 3: Mallas rectangulares lógicas usadas en el ensayo numérico.

La discretización espacial empleada a continuación está basada en el método de diferencias finitas descrito en la sección 3. Para esto, el dominio de flujo Ω se discretiza por medio de una malla rectangular lógica pseudo-aleatoria $\Omega_N \equiv \{(x_{i,j}, y_{i,j})\}_{i,j=1}^N$ con coordenadas $x_{i,j} = (i - 1)h - 0,25h + 0,5hR_x$ e $y_{i,j} = (j - 1)h - 0,25h + 0,5hR_y$, donde $h = 1/(N - 1)$ y R_x, R_y son números aleatorios generados en el intervalo $(0, 1)$. La figura 3(a) muestra un ejemplo de este tipo de mallas para $N = 17$. Con el fin de estudiar el comportamiento asintótico del error, hemos refinado sucesivamente la malla pseudo-aleatoria original usando el siguiente procedimiento: partiendo de una malla dada, añadimos los segmentos que conectan, en cada celda, los puntos medios de sus lados opuestos. Las figuras 3(b) y 3(c) muestran los dos primeros refinamientos para la malla de la figura 3(a).

Hemos incluido dos tablas que contienen los errores globales (fila superior) y los órdenes numéricos de convergencia (fila inferior) obtenidos para distintos valores de N y τ al usar la norma del máximo en tiempo y la norma L^2 en espacio. Se aprecia que el método muestra convergencia incondicional de primer orden en tiempo (véase tabla 1) y segundo orden en espacio (véase tabla 2).

Tabla 1: Errores globales y órdenes numéricos de convergencia en tiempo para $N = 129$ y $\tau_0 = 10^{-3}$.

τ	τ_0	$\tau_0/2$	$\tau_0/4$	$\tau_0/8$	$\tau_0/16$	$\tau_0/32$
$\ \cdot \ _{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$	$3,430E - 2$	$2,066E - 2$	$1,178E - 2$	$6,497E - 3$	$3,498E - 3$	$1,847E - 3$
p_2	0,7315	0,8103	0,8582	0,8932	0,9213	–

Tabla 2: Errores globales y órdenes numéricos de convergencia en espacio para $\tau = 10^{-7}$.

N	17	33	65	129	257
$\ \cdot \ _{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$	$4,639E - 3$	$1,911E - 3$	$4,650E - 4$	$1,158E - 4$	$2,893E - 5$
p_2	1,2795	2,0390	2,0056	2,0010	–

Referencias

- [1] B. Bujanda, J.C. Jorge. *Stability results for linearly implicit fractional step discretizations of non-linear time dependent parabolic problems*. Appl. Numer. Math., 56 (2006), 1061–1076.
- [2] M.A. Celia, E.T. Bouloutas, R.L. Zarba. *A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation*. Water Resour. Res., 26 (1990), 1483–1496.
- [3] L. Portero, B. Bujanda, J.C. Jorge. *A combined fractional step domain decomposition method for the numerical integration of parabolic problems*. Lecture Notes in Comput. Sci., 3019 (2004), 1034–1041.
- [4] L.A. Richards. *Capillary conduction of liquids through porous mediums*, Physics, 5 (1931), 318–333.
- [5] A. Samarskiĭ, V. Tishkin, A. Favorskiĭ, M. Shashkov. *Operational finite-difference schemes*. Differ. Equ., 17 (1981), 854–862.
- [6] M. Shashkov. *Conservative Finite-Difference Methods on General Grids*. CRC Press: Boca Raton, FL, 1996.
- [7] M. Shashkov, S. Steinberg. *Solving diffusion equations with rough coefficients in rough grids*. J. Comput. Phys., 129 (1996), 383–405.
- [8] M. Shashkov, S. Steinberg. *The numerical solution of diffusion problems in strongly heterogeneous non-isotropic materials*. J. Comput. Phys., 132 (1997), 130–148.
- [9] J. Šimůnek, J.W. Hopmans, J.A. Vrugt, M.T. van Wijt. *One-, two- and three-dimensional root water uptake functions for transient modeling*. Water Resour. Res., 37 (2001), 2457–2470.