

Los elementos finitos de alto orden (hp-FEM) como método de cálculo en problemas de estabilidad fluidodinámica.

MAITE PEÑA ALCARÁZ¹, LEO M. GONZÁLEZ², VASSILIS THEOFILIS³

¹ ETS de Ingeniería ICAI, Universidad Pontificia Comillas de Madrid, Alberto Aguilera 23, 28015 Madrid. E-mail: maitepalcaraz@hotmail.com.

² Dpto. de Enseñanzas Básicas de la Ingeniería Naval, ETSIN-UPM, Arco de la Victoria s/n, 28040 Madrid. E-mail: leo.gonzalez@upm.es.

³ ETS Ingenieros Aeronáuticos, Univ. Politécnica de Madrid, Plaza Cardenal Cisneros 3, 28040 Madrid. E-mail: vassilis@torroja.dmt.upm.es.

Palabras clave: Bi-Global instability, high order methods, hp-FEM

Resumen

En los problemas de estabilidad BiGlobal en un contexto fluidodinámico se han encontrado un cierto tipo de condicionantes que todo buen método numérico debe ser capaz de satisfacer. Por un lado y como condición más indispensable, se encuentra la libertad geométrica, es decir, el método debe ser capaz de discretizar cualquier dominio espacial de forma que no quede sujeto a formas simples o fácilmente transformables a éstas. En segundo lugar se desea que las condiciones de contorno necesarias en los clásicos problemas de Mecánica de Fluidos sean fácilmente implementables. Por último que el orden del método elegido en la resolución del problema sea fácilmente variable en función de la precisión exigida. En este contexto se conoce que la precisión necesaria crece a través de un parámetro que no es otro que el número de Reynolds del problema, y por tanto es muy ventajoso que no se sea el tamaño de la malla el único grado de libertad para mejorar la precisión del cálculo, ver [2] y [3]. Con todos estos condicionantes se ha construido un código basado en elementos finitos de alto orden (hp-FEM) que ha sido aplicado al cálculo de los valores propios y los modos propios de algunos problemas clásicos de la Mecánica de Fluidos como son el movimiento de fluidos en un conductos.

En los casos aquí presentados, hemos aplicado el método de Arnoldi para el cálculo del espectro y los modos propios en los problemas de autovalores generalizados que aparecen. Como resultados del trabajo se muestran el cálculo del flujo base de una tubería rectangular y el posterior análisis de estabilidad BiGlobal de dicho flujo base. Los resultados han sido coherentes y en buena consonancia con los obtenidos mediante otros métodos en la literatura clásica, ver [1].

1. Introducción

La descripción clásica de la teoría de estabilidad BiGlobal se basa en una perturbación lineal de las ecuaciones de Navier-Stokes alrededor de un flujo base $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$, el cual es una solución particular de las mismas. El cálculo de esta solución particular $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ se ha obtenido resolviendo simplificaciones bidimensionales o unidimensionales de las ecuaciones de Navier-Stokes mediante una discretización de alto orden hp-FEM. Una vez se ha calculado el flujo base se ha linealizado el problema entorno a dicha solución mediante el ansatz:

$$u_i(x, y, z, t) = \bar{U}_i(x, y) + \epsilon \hat{u}_i(x, y) e^{i\omega t} e^{i\beta z} \quad (1)$$

$$p(x, y, z, t) = \bar{P}(x, y) + \epsilon \hat{p}(x, y) e^{i\omega t} e^{i\beta z} \quad (2)$$

Considerando $\epsilon \ll 1$, tenemos que (\hat{u}_i, \hat{p}) representan las amplitudes de la perturbación, el número complejo ω contiene como parte imaginaria la tasa de crecimiento y como parte real la frecuencia de dicha perturbación, por último $\beta = \frac{2\pi}{L_z}$ y L_z son el número de onda y la longitud de onda de la perturbación, respectivamente. Al introducir este ansatz en las ecuaciones de Navier-Stokes y considerar el flujo base como una solución particular se llega a un problema de autovalores generalizado del tipo:

$$A \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{p} \end{pmatrix} = -\omega B \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{p} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Donde el operador complejo y no simétrico A se define como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} & a_{22} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x} & \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} & a_{33} & i\beta \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & i\beta & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

$$a_{ii} = \left\{ \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \beta^2 \right) + i\beta \bar{u}_3 \right\}, \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

y no se considerará el convenio de índices repetidos de Einstein para la ecuación (5). Por otro lado el operador real simétrico B se define como:

$$B = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

donde M representa la clásica matriz de masas de elementos finitos.

En la ecuación (3) el valor propio viene dado por ω y el autovector $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p})$ contiene las amplitudes de las perturbaciones.

La resolución directa del problema de autovalores generalizado mediante un método tipo QZ implicaría un coste computacional excesivo para matrices A y B de gran dimensión, es por ello que la metodología escogida para la resolución de este tipo de problemas ha sido un método iterativo basado en la creación de un subespacio de Krylov conocido como método de Arnoldi. Para ello en cada iteración se ha resuelto un problema lineal que implicaba a la matriz A como matriz de coeficientes y que por tanto obligaba a una descomposición LU de la misma al principio del cálculo.

2. Discretización espacial del problema. Elementos finitos de alto orden: hp-FEM

La resolución numérica del problema de autovalores generalizado descrito anteriormente, requiere una discretización espacial que se hará mediante el uso de una base de funciones, $\Phi_q(x)$. Algunas versiones de este tipo de cálculos y discretizaciones cuando las funciones base son lagrangianas, nodales y de bajo orden se puede ver en [1]. De cualquier modo la experiencia con funciones de bajo orden muestra que para resolver estructuras a números de Reynolds moderados se requiere de mallas muy finas con el consecuente consumo de memoria y tiempo de computación.

En el presente trabajo se propone una discretización modal de alto orden basada en polinomios de Legendre $L_p(x)$. El hecho de que sea modal implica que el valor de los coeficientes de la expansión no tiene interpretación física, por otro lado sabemos que las expansiones modales tienen estructura jerárquica, lo que implica que un conjunto de funciones hasta orden $P - 1$ está incluida en una expansión de orden P . Una de las propiedades fundamentales de este tipo de expansiones es la ortogonalidad, que junto con el hecho de poseer estructura jerárquica da lugar a matrices bien condicionadas [2].

Para problemas como los aquí presentados que implican un segundo orden de diferenciación basta con garantizar que la solución se halla en H^1 . Típicamente, el método de los elementos finitos resuelve este problema mediante la imposición de una condición de continuidad C^0 entre elementos vecinos, ello implica que las expansiones globales son continuas en todo el dominio mientras que la continuidad en la derivada se consigue con la convergencia, ver [2].

En un intervalo estándar $\Omega = \{\xi | -1 \leq \xi \leq 1\}$ una expansión modal de orden p se denota $\psi_p(x)$ y se define como

$$\psi_p(\xi) = \begin{cases} \frac{1 - \xi}{2} & p = 0 \\ \left[\frac{1 - \xi}{2} \right] \left[\frac{1 + \xi}{2} \right] L_{p-1}(\xi) & 0 < p < P \\ \frac{1 + \xi}{2} & p = P \end{cases} \quad (7)$$

En caso de tener elementos que no coinciden con el elemento estándar $[-1, 1]$, será posi-

ble transformarlos a dicho intervalo mediante una transformación lineal. Por lo tanto únicamente definiremos nuestras funciones base para el intervalo estándar. Del mismo modo también es necesario señalar que dado que los elementos finitos requieren una formulación tipo Galerkin es necesario elegir un método de integración numérica que en éste caso será el de Gauss. Para una situación multidimensional se puede generalizar esta metodología, y más concretamente en un caso bidimensional la discretización se puede realizar tanto mediante elementos de tipo triangular o de tipo cuadrilátero. De este modo las funciones base se pueden expandir a más dimensiones mediante un producto tensorial de funciones base unidimensionales $\psi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \psi_p(\xi_1)\psi_q(\xi_2)$.

En el caso de un cuadrilátero estándar, las coordenadas cartesianas (ξ_1, ξ_2) quedan definidas mediante contornos constantes $\mathcal{Q}^2 = \{(\xi_1, \xi_2) | -1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}$.

Por el contrario, para un elemento triangular estándar, donde hay una dependencia entre las coordenadas cartesianas (ξ_1, ξ_2) a la hora de definir el dominio, es decir $\mathcal{T}^2 = \{(\xi_1, \xi_2) | -1 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_1 + \xi_2 \leq 0\}$. Un conjunto de funciones base definidas en elementos triangulares ha sido desarrollada por Karniadakis & Sherwin [2], presentando la ventaja de poseer un sistema de coordenadas en el que no hay dependencia entre las coordenadas para la definición del dominio. La gran ventaja de ello es la posibilidad de realizar expansiones multidimensionales mediante productos tensoriales de las elaboradas en una dimension.

La forma de trabajar con elementos triangulares que aquí se propone, ver [2], se basa en una transformación de coordenadas, mediante el cambio:

$$\eta_1 = 2\frac{1 + \xi_1}{1 - \xi_2} - 1, \quad \eta_2 = \xi_2. \quad (8)$$

Por lo tanto, un paso necesario para realizar un cálculo mediante elementos finitos hp -FEM requiere de diversas transformaciones de los elementos geométricos a los elementos estándar $[-1, 1]$ en el caso 1-D, \mathcal{Q}^2 para el caso 2-D y elementos tipo cuadriláteros y \mathcal{T}^2 para el caso 2-D y elementos tipo triangular.

2.1. Estudio de la Forma de las Matrices de Masas y Rigidez

A consecuencia de la ortogonalidad de los polinomios de Legendre $L_{p-1}(\xi)$ las matrices de masas y rigidez son, respectivamente, tri- y penta- diagonales. Este tipo de discretización mediante elementos finitos tipo hp -FEM presenta en este sentido una gran ventaja frente a discretizaciones tipo espectral Chebyshev, dado que en este último caso la matriz de rigidez es densa.

Se consideran las funciones definidas por la ecuación (7), y se definen las matrices simétricas $M = \{M_{ij}\}_{i,j=0,\dots,P}$ y $R = \{R_{ij}\}_{i,j=0,\dots,P}$ donde

$$M_{ij} = \int_{-1}^1 \psi_i \psi_j d\xi \quad R_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d\xi$$

Se consideran conocidas las siguientes propiedades de los polinomios de Legendre:

$$\int_{-1}^1 L_p L_q d\xi = \frac{2}{2p+1} \delta_{p,q}, \quad (9)$$

$$(k+1)L_{k+1}(\xi) = (2k+1)\xi L_k(\xi) - kL_{k-1}(\xi), \quad (10)$$

$$(2k+1)L_k(\xi) = L'_{k+1}(\xi) - L'_{k-1}(\xi), \quad (11)$$

$$gr(L_k) = k \quad (12)$$

siendo $gr(p)$ el grado del polinomio $p(\xi)$ y se denotará $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ con f' o $f'(\xi)$.

Por otro lado se sabe que si $L_p(\xi)$ es el polinomio de Legendre de orden p , entonces será un polinomio par si p es par e impar si p es impar. Del mismo modo si $L_p(\xi)$ es un polinomio par, entonces $L'_p(\xi)$ es impar o viceversa.

Teorema. $M_{ij} = 0$ si $i+j$ es impar, con $i, j \neq 0, P$

Demostración. Si $i+j$ es impar, i será impar o j será impar. Se puede suponer por simetría en el razonamiento que i es impar y j par. Se tiene que

$$M_{ij} = M_{2i'-1, 2j'} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1-\xi^2}{4} \right)^2 L_{2i'} L_{2j'-1} d\xi = 0$$

por ser producto de dos funciones pares y una impar, y por tanto ser una función impar integrada entre -1 y 1 , por lo que la integral se anula.

Teorema. $R_{ij} = 0$ si $i+j$ es impar, con $i, j \neq 0, P$

Demostración. Si $i, j \neq 0, P$, $\psi_k(\xi) = \frac{1-\xi^2}{2} L_{k-1}(\xi)$ con $k = i, j$ por lo que es inmediato que si k es impar, entonces ψ_k es impar y viceversa. Por tanto ψ'_k será par si y sólo si k lo es y será impar en caso contrario. Por tanto un razonamiento análogo al anterior permite concluir que si $i+j$ es impar, también lo será el producto $\psi_i \psi_j$ y por tanto la integral se anulará.

Puesto que $\psi'_0 = \frac{1}{2}$ y $\psi'_P = -\frac{1}{2}$ se obtiene de forma inmediata que $R_{i0} = R_{iP} = 0$ si i es impar.

Para el cálculo de las matrices de masas y rigidez a partir del grado de los polinomios, tenemos la siguiente proposición:

Proposición. Para cualquier polinomio de Legendre $L_p(\xi)$ se tiene que

$$\int_{-1}^1 L_p(\xi) p(\xi) d\xi = 0$$

si $p(\xi)$ es un polinomio de grado $g < p$.

Demostración.

Si $p(\xi)$ es un polinomio de grado menor que p entonces $p(\xi)$ se puede expresar como combinación lineal de polinomios de Legendre de grado estrictamente menor que p . Por tanto $p(\xi) = \sum \alpha_i L_i(\xi)$ y ello implica que

$$\int_{-1}^1 L_p p(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \sum \alpha_i L_i L_p d\xi = \sum \alpha_i \int_{-1}^1 L_i L_p d\xi = \sum \alpha_i \delta_{i,p} \frac{2}{2p+1} = 0$$

Teorema. $\int_{-1}^1 \psi_i \psi_j d\xi = 0$ si $|i - j| > 4$, $i, j \neq 0, P$

Demostración.

Se puede suponer sin pérdida de la generalidad que $i \geq j$. Entonces

$$\int_{-1}^1 \psi_i \psi_j d\xi = \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - \xi^2}{2} \right)^2 L_{j-1} L_{i-1} d\xi = \int_{-1}^1 p(\xi) L_{i-1} d\xi$$

donde $p(\xi)$ es un polinomio de grado $j - 1 + 4 = j - 3$. Por tanto si $i - j > 4$ la prueba se acaba utilizando el resultado de la proposición anterior.

En el caso particular en que i o j sean igual a 0 o P se obtiene el siguiente resultado cuya demostración de este teorema es análoga a la del teorema anterior:

$$\int_{-1}^1 \psi_0 \psi_j d\xi = \int_{-1}^1 \psi_P \psi_j d\xi = 0 \quad \text{si } j > 4, j \neq 0, P$$

Ahora se ha terminado el análisis de todos los términos de la matriz de masas exceptuando la diagonal principal, dos diagonales secundarias a distancia 2 y 4 y algunos términos dispersos como $i = 0, P$. Para terminar un simple cálculo permite asegurar que en general ningún otro término de la matriz ha de ser nulo.

Para la matriz de rigidez el razonamiento es muy parecido, basta considerar el siguiente:

Teorema. $\int_{-1}^1 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d\xi = \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} \psi_j d\xi \quad \forall i, j \neq 0, P$

Demostración.

Basta integrar por partes sabiendo que la función $\psi_i(-1) = \psi_i(1) = 0$.

Una vez que se tiene este resultado, la forma de la matriz de rigidez se obtiene de forma inmediata.

Teorema. $\int_{-1}^1 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d\xi = 0$ si $i, j \neq 0, P$ y se cumple que $i > j + 2$ o viceversa.

Demostración.

Usando que la integral del corolario es igual $\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} \psi_i d\xi$ y sabiendo que $\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} \psi_i = L_{i-1} p(\xi)$ donde el grado de $p(\xi)$ es $j + 1$, con lo que si $i - 1 > j + 1$ la integral será nula como ya se ha probado.

Por último, falta analizar la forma de los términos de la matriz de rigidez cuando alguno de los índices es igual a 0, P . En estos casos se cumple el siguiente resultado:

Teorema. $\int_{-1}^1 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d\xi = 0 \quad \forall j \neq 0, P, i = 0, P$

Demostración.

Basta realizar un simple cálculo para comprobar que $|\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi}| = \frac{1}{2}$, por lo que la integral, queda como: $\int_{-1}^1 \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d\xi = k \cdot (\psi_j(1) - \psi_j(-1)) = 0$.

Por tanto, los únicos elementos no nulos de la matriz de rigidez $R_{i,j}$ son aquellos donde $|(i - j)| \leq 2$, con i, j ambos pares o impares si $i, j \neq 0, P$ y $R_{0,0}, R_{0,P}, R_{P,0}, R_{P,P}$.

Como resumen, en las dos siguientes matrices se ha dibujado la forma de los elementos no nulos de M y R :

h	p	ω_r	ω_i	h	p	ω_r	ω_i
1	8	0.5991425642	-0.1490564284	2	4	0.5982952805	-0.1374149414
1	12	0.5941967173	-0.1404610035	2	8	0.5941884517	-0.1405027982
1	16	0.5941885536	-0.1405012852	4	4	0.5941712455	-0.1404787289
1	20	0.5941885590	-0.1405012304	4	8	0.5941885554	-0.1405012287

Tabla 1: Autovalor menos estable en el caso de una tubería cuadrada $A = 1$ a $Re = 100, \beta = 1$, para diferentes valores de h y p . El valor de referencia para estos parámetros [4, 5] es $\omega = 0.594177 - 0.140507 i$.

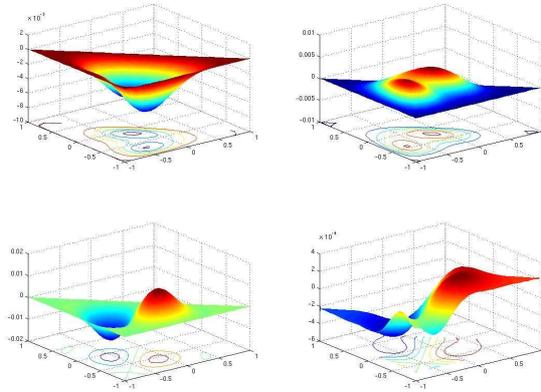


Figura 1: Componentes de la velocidad y presión del primer modo propio obtenido en un conducto triangular. Parte superior izquierda \hat{u} , superior derecha \hat{v} , inferior derecha \hat{w} , inferior izquierda \hat{p}

Agradecimientos

Este trabajo ha sido llevado a cabo gracias al proyecto concedido por el Ministerio de Educación y Ciencia TRA2005-08983/TAIR cuyo investigador principal es D.Rafael Gómez Blanco.

Referencias

- [1] L.González, V.Theofilis, Rafael Gómez Blanco. *Finite-element numerical methods for viscous incompressible BiGlobal linear instability analysis on unstructured meshes*. AIAA Journal 2007, vol.45 no.4 (840-854)
- [2] G.E.Karniadakis, S. Sherwin, *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*, Oxford Science Publications, 2005.
- [3] Ch. Schwab. *p and hp-Finite Element Methods. Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics*. Oxford Science Publications, 2004.
- [4] T. Tatsumi, T. Yoshimura. *Stability of the laminar flow in a rectangular duct*. J. Fluid. Mech. 1990, vol.212 (437-449).
- [5] V. Theofilis, P. W. Duck, J. Owen. *Viscous linear stability analysis of rectangular duct and cavity flows*. J. Fluid. Mech. 2004, vol.505 (249-286).