XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Existencia de solución para un modelo termoeléctrico con conductividad térmica una función de Caratheodory

A. Bermúdez[1], R. Muñoz-Sola[1], F. Pena[1]

[1] *Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Santiago de Compostela, Campus Sur s/n, 15872 Santiago de Compostela. E-mails:* `mabermud@usc.es`, `rafams@usc.es`, `fpena@usc.es`.

Palabras clave: Sistema parabólico no lineal, existencia de solución, modelo termoeléctrico, problema de Stefan

Resumen

En esta contribución presentamos un resultado de existencia de solución para un sistema no lineal de ecuaciones en derivadas parciales parabólicas. El modelo deriva de las ecuaciones de Maxwell en conductores para corrientes de baja frecuencia para el campo magnético, acopladas con un problema de Stefan para la temperatura. Este sistema ya fue considerado por los autores en [4], pero sus limitaciones impedían considerar tanto materiales con varios cambios de estado como con conductividad térmica dependiente de la temperatura. Para obtener el nuevo resultado de existencia, se parte del sistema truncado y se considera una semidiscretización en tiempo totalmente implícita. El problema térmico semidiscreto puede reescribirse como una inecuación variacional de segunda especie. Se obtienen estimaciones de la solución del problema truncado independientes del parámetro de truncamiento mediante una técnica que adapta el método de [5] al caso de materiales con varios cambios de estado.

1. Introducción

En este trabajo consideramos el siguiente sistema no lineal de ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico, planteadas en un dominio de $\mathbb{R}^3$:

$$\partial_t(\mu(x)\mathbf{h}) + \nabla\times\left(\frac{1}{\sigma(x,\theta)}\nabla\times\mathbf{h}\right) = \mathbf{0} \text{ en } \Omega\times]0,T[, \tag{1}$$

$$\partial_t e - \nabla\cdot(k(x,\theta)\nabla\theta) = \frac{1}{\sigma(x,\theta)}|\nabla\times\mathbf{h}|^2 \text{ en } \Omega\times]0,T[, \tag{2}$$

donde la entalpía e viene dada por

$$e(x,t) \in g(x,\theta(x,t)) \text{ c.p.d. en } \Omega\times]0,T[. \tag{3}$$

Este sistema aparece cuando se modela la transferencia de calor en problemas donde la dependencia térmica de la conductividad eléctrica y el efecto Joule son importantes. La ecuación (1) es la formulación del modelo de "eddy current" en el dominio del tiempo. Se obtiene de las ecuaciones para el electromagnetismo de Maxwell despreciando el término del desplazamiento eléctrico en la ley de Ampère. La ecuación (2) es la ley de transferencia del calor en la que la fuente de calor es debida al efecto Joule. La entalpía dada por (3) puede ser una función multivaluada y modelar así cambios de estado.

Una primera dificultad es la presencia del operador multívoco $g(x,\cdot)$. Diversos autores han estudiado en [2], [3] y [7] ecuaciones parabólicas no lineales que generalizan nuestra ecuación térmica aisladamente. En particular, Grange-Mignot [10] considera una ecuación del tipo $\mathrm{d}(Bu)/\mathrm{d}t + Au = f$, siendo A y B subgradientes de funciones continuas convexas.

En segundo lugar, el término fuente de la ecuación térmica solo está en $L^1(\Omega\times]0,T[)$ ya que el espacio natural para la solución $\mathbf{h}$ es $L^2(0,T;\mathbf{H}(\mathbf{curl}:\Omega))$. Esto obliga a truncar el término fuente y obtener estimaciones para la solución del problema truncado. Aunque en [1], [3] y [8], se considera un término fuente suficientemente general para englobar nuestro caso, su operador B es unívoco e independiente de x.

En tercer lugar, la presencia de varios materiales impide emplear la transformación de Kirchoff para transformar el problema térmico en uno más simple.

Por último, el acoplamiento del problema electromagnético y el térmico origina nuevas dificultades (los trabajos anteriormente citados no consideran el sistema acoplado). Los autores probamos en [4] un resultado de existencia de solución para el sistema acoplado (1)–(3) cuando la conductividad térmica k solo depende del punto x. Dicho resultado pasaba por demostrar la existencia para el sistema truncado a través del teorema de punto fijo de Schauder, lo que requería la unicidad de solución del problema térmico (véase [7]). Esto impedía considerar una conductividad térmica dependiente de la temperatura y el punto.

En esta contribución presentamos un resultado de existencia que parte de un nuevo enfoque. Para el sistema truncado se considera una semidiscretización en tiempo totalmente implícita. Así, el problema térmico puede reescribirse como una inecuación variacional de segunda especie, para la cual hay existencia y unicidad de solución.

Para obtener estimaciones de la solución del sistema acoplado y truncado independientes del parámetro de truncamiento, usamos la adaptación del método de [5] hecha en [4] para el caso en que $g(x,\cdot)$ es maximal monótono y constante por subdominios.

Este nuevo resultado es válido también cuando la entalpía tiene varios cambios de estado. La dificultad aparece a la hora de probar la convergencia puntual de la temperatura en el parámetro de truncamiento. Se dispone tanto de estimaciones para la temperatura y su gradiente espacial como para la derivada temporal de la entalpía, pero ésta no es función unívoca de la temperatura. Esto impide combinar las estimaciones para aplicar los teoremas de compacidad usuales en ecuaciones parabólicas. En [4] desarrollamos una técnica que permite soslayar esta dificultad cuando $g(x,\cdot)$ es constante por subdominios y tiene a lo sumo un solo salto. En esta contribución hemos extendido dicha técnica al caso en que $g(x,\cdot)$ tiene un número finito de saltos.

2. Planteamiento del problema

Tomamos como Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$ con frontera Γ Lipschitz. Denotamos $Q_T = \Omega\times]0,T[$. Para poder trabajar con varios materiales, suponemos que $\overline{\Omega}$ se puede descomponer como $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^{N}\overline{\Omega}_i$ donde los subdominios $\Omega_i,\ i = 1,\ldots,N$, son disjuntos y tienen frontera Lipschitz. Cada Ω_i es la parte de Ω ocupada por el material i-ésimo.

2.1. Hipótesis sobre los coeficientes

Pretendemos modelar un medio con varios materiales: tomamos una función $\mu : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ medible y constantes $\mu_*,\ \mu^*$ tales que

$$0 < \mu_* \leq \mu(x) \leq \mu^* \text{ c.p.d. en } \Omega. \tag{4}$$

Nos interesa que las conductividades térmica y eléctrica de los materiales dependan de la temperatura y estén acotadas por valores positivos: tomamos funciones de Carathéodory $k, \sigma : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y constantes $k_*,\ k^*, \sigma_*,\ \sigma^*$ tales que

$$0 < k_* \leq k(x,s) \leq k^* \quad \forall s \in \mathbb{R},\ \text{c.p.d. en } \Omega. \tag{5}$$

$$0 < \sigma_* \leq \sigma(x,s) \leq \sigma^* \quad \forall s \in \mathbb{R},\ \text{c.p.d. en } \Omega. \tag{6}$$

La mejora con respecto a [4] consiste en que la conductividad térmica puede depender simultáneamente de la temperatura y del material.

2.2. Hipótesis sobre la entalpía

Para el material i-ésimo, supondremos que la entalpía viene expresada por el operador g_i que permite varios cambios de estado. En concreto, para cada $i = 1,\ldots,N$, supondremos que g_i es un operador maximal monótono con $D(g_i) = \mathbb{R}$ y $R(g_i) = \mathbb{R}$.

Consideremos los puntos (no nulos) $\theta_{i,1} < \theta_{i,2} < \ldots < \theta_{i,D_i}$ de posibles discontinuidades de g_i. Supondremos que: **a)** las restricciones $g_{i|(-\infty,\ \theta_{i,1})},\ g_{i|(\theta_{i,j},\ \theta_{i,j+1})}$ para $j = 1,\ldots,D_i - 1$ y $g_{i|(\theta_{i,D_i},\ +\infty)}$ son Lipschitzianas; **b)** $g_i(0) = 0$ y **c)** la inversa $j_i = (g_i)^{-1}$ es univaluada y Lipschitziana.

Bajo estas hipótesis, definimos el operador sobre todo el dominio mediante $g(x,\cdot) = g_i,\ \forall x \in \Omega_i$. Además, definimos el operador (multivaluado) para la entalpía en $L^2(\Omega)$ por

$$e \in G(\theta) \text{ si y solo si } e(x) \in g(x,\theta(x)) \text{ c.p.d. en } \Omega.$$

2.3. Hipótesis sobre las condiciones iniciales y de frontera

Supondremos que la frontera Γ se divide en dos partes, Γ_C y Γ_D medibles y disjuntas, para considerar dos tipos de condiciones de contorno para el problema electromagnético:

$$\mathbf{h} \times \mathbf{n} = \mathbf{f} \qquad \text{sobre } \Gamma_D\times]0,T[, \tag{7}$$

$$(\nabla \times \mathbf{h}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \qquad \text{sobre } \Gamma_C\times]0,T[, \tag{8}$$

El espacio natural para el problema electromagnético es

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}(\mathbf{curl} : \Omega) = \left\{\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \times \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\right\}$$

siendo $\mathbf{L}^2(\Omega) = [L^2(\Omega)]^3$. Las funciones de $\mathbf{V}$ con condición Dirichlet nula en Γ_D pertenecen al espacio

$$\mathbf{V}_0 = \left\{ \mathbf{f} \in \mathbf{V} : \; \mathbf{f} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ en } [H_{00}^{-1/2}(\Gamma_D)]^3 \right\}$$

Respecto al dato $\mathbf{f}$ de la condición Dirichlet electromagnética, supondremos que existe un campo $\mathbf{h_f} \in L^2(0,T;\mathbf{V}) \cap \mathcal{C}^0\big([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)\big)$, con $\partial_t(\mu \mathbf{h_f}) \in L^2(0,T;\mathbf{V}_0')$ tal que

$$\mathbf{h_f} \times \mathbf{n} = \mathbf{f} \text{ in } L^2\big(0,T;[H_{00}^{-1/2}(\Gamma_D)]^3\big). \tag{9}$$

En el problema térmico, tomamos una condición Dirichlet nula sobre toda la frontera.

Las condiciones iniciales serán

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega), \qquad e(0) = e_0 \in L^1(\Omega). \tag{10}$$

3. El problema débil, el truncado y el semidiscretizado

Usando una fórmula de Green obtenemos el siguiente **problema débil acoplado**: *Hallar* $\mathbf{h} \in L^2(0,T;\mathbf{V})$*,* $\theta \in L^a(0,T;W_0^{1,a}(\Omega))$ *y* $e \in L^a(Q_T)$*, con* $a \in (1,\infty)$*, tales que:*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_\Omega \mu \mathbf{h}\cdot\mathbf{v} + \int_\Omega \frac{1}{\sigma(\theta)}(\nabla\times\mathbf{h})\cdot(\nabla\times\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V_0}, \\ \mathbf{h}\times\mathbf{n} = \mathbf{f} \;\; \textit{en } L^2\big(0,T;[H_{00}^{-1/2}(\Gamma_D)]^3\big), \\ \mathbf{h}(0) = \mathbf{h}_0 \;\; \textit{en} \;\; \mathbf{L}^2(\Omega), \end{cases} \tag{$\mathbf{E}$}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_\Omega e\, w + \int_\Omega k(\theta)\nabla\theta\cdot\nabla w = \int_\Omega \frac{1}{\sigma(\theta)}|\nabla\times\mathbf{h}|^2\, w \quad \forall w \in W_0^{1,a'}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega), \\ e(t) \in G(\theta(t)) \;\; \textit{c.p.d. en } [0,T] \\ e(0) = e_0 \;\; \textit{en} \;\; W^{-1,s}(\Omega), \quad \textit{con } s \in (1,\tfrac{3}{2}), \;\; s \le a. \end{cases} \tag{$\mathbf{T}$}$$

El término debido al efecto Joule pertenece al espacio no reflexivo $L^1(Q_T)$. Para soslayar esta dificultad, tomamos la función de truncamiento $\mathcal{T}_M(s) = \text{máx}(-M, \text{mín}(s,M))$.

Para cada $M \in \mathbb{N}$, el **problema truncado** ($\mathbf{E_M}$, $\mathbf{T_M}$) se obtiene de ($\mathbf{E}$, $\mathbf{T}$) buscando la temperatura $\theta_M \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, la entalpía $e_M \in H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(Q_T)$, el campo magnético $\mathbf{h}_M \in L^2(0,T;\mathbf{V})$ y

- cambiando la fuente de calor térmica, en $L^1(Q_T)$, por $\frac{1}{\sigma(\theta)}\mathcal{T}_M(|\nabla\times\mathbf{h}|^2) \in L^\infty(Q_T)$,
- tomando la función test $w \in H_0^1(\Omega)$ y
- cambiando la condición inicial, $e_0 \in L^1(\Omega)$, por una función $e_0^M \in L^\infty(\Omega)$ con $e_0^M \in G(\theta_0^M)$ y $\theta_0^M \in H_0^1(\Omega)$, tal que $\lim\limits_{M\to+\infty} e_0^M = e_0$ en $L^1(\Omega)$.

Nos interesa discretizar en tiempo el sistema acoplado para abordar su estudio. Tomamos un intervalo temporal $[0,T]$ y una partición $\Pi = \{t_0,\ldots,t_N\}$ con paso Δt. Para cada $n = 0,\ldots,N-1$, el **problema acoplado truncado y semidiscretizado en tiempo** se define como sigue:

Hallar $\mathbf{h}_M^{n+1} \in \mathbf{V}$, $\theta_M^{n+1} \in H_0^1(\Omega))$ *y* $e_M^{n+1} \in L^2(\Omega)$, *tales que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_\Omega \mu(\mathbf{h}_M^{n+1} - \mathbf{h}_M^n)\cdot\mathbf{v} + \int_\Omega \frac{1}{\sigma(\theta_M^{n+1})}(\nabla\times\mathbf{h}_M^{n+1})\cdot(\nabla\times\mathbf{v}) = 0 \ \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V_0}, \\ \mathbf{h}_M^{n+1}\times\mathbf{n} = \mathbf{f}^{n+1} \ \textit{en}\ [H_{00}^{-1/2}(\Gamma_D)]^3, \end{array}\right. \qquad (\mathbf{E}_{M,\Delta t})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_\Omega (e_M^{n+1} - e_M^n)\, w + \int_\Omega k(\theta_M^{n+1})\nabla\theta_M^{n+1}\cdot\nabla w = \\ \qquad\qquad\qquad \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{\sigma(\theta_M^{n+1})}\mathcal{T}_M(|\nabla\times\mathbf{h}_M^{n+1}|^2)\, w \quad \forall w\in H_0^1(\Omega), \\ e_M^{n+1}\in G(\theta_M^{n+1}). \end{array}\right. \qquad (\mathbf{T}_{M,\Delta t})$$

El dato Dirichlet se define como $\mathbf{f}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathbf{f}$ (integral de Bochner en $[H_{00}^{-1/2}(\Gamma_D)]^3$). Los valores iniciales se toman como $\mathbf{h}_M^0 = \mathbf{h}_0$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ y $e_M^0 = e_0^M$ en $L^\infty(\Omega)$.

4. Existencia de solución para el problema truncado y semidiscretizado

A lo largo de esta sección tomamos un valor para $M\in\mathbb{N}$, $\Delta t > 0$ y $n\in\{0,\dots,N-1\}$ fijos. Definimos la función $\mathbf{S}_1 : \gamma\in L^1(\Omega)\mapsto \mathbf{h}_\gamma \in\mathbf{V}$ solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_\Omega \mu(\mathbf{h}_\gamma - \mathbf{h}_M^n)\cdot\mathbf{v} + \int_\Omega \frac{1}{\sigma(\gamma)}(\nabla\times\mathbf{h}_\gamma)\cdot(\nabla\times\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V_0}, \\ \mathbf{h}_\gamma\times\mathbf{n} = \mathbf{f}^{n+1} \text{ en } [H_{00}^{-1/2}(\Gamma_D)]^3, \end{array}\right. \qquad (\mathbf{E}_{M,\Delta t}(\gamma))$$

Definimos las funciones $S_2 : \gamma\in L^1(\Omega)\mapsto\theta_\gamma\in H_0^1(\Omega)$ y $S_3 : \gamma\in L^1(\Omega)\mapsto e_\gamma\in L^2(\Omega)$ como las soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_\Omega (e_\gamma - e_M^n)\, w + \int_\Omega k(\gamma)\nabla\theta_\gamma\cdot\nabla w = \\ \qquad\qquad\qquad \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{\sigma(\gamma)}\mathcal{T}_M(|\nabla\times\mathbf{S}_1(\gamma)|^2)\, w \quad \forall w\in H_0^1(\Omega), \\ e_\gamma\in G(\theta_\gamma). \end{array}\right. \qquad (\mathbf{T}_{M,\Delta t}(\gamma))$$

Dada $\gamma\in L^1(\Omega)$, se tienen los siguientes resultados:

Lema 1 *El problema* $(\mathbf{E}_{M,\Delta t}(\gamma))$ *tiene una única solución en* $\mathbf{V}$.

Basta con escribir un problema con condición de contorno homogénea en la variable $\tilde{\mathbf{h}}_\gamma = \mathbf{h}_\gamma - \mathbf{h}_{\mathbf{f}}^{n+1}$, siendo $\mathbf{h}_{\mathbf{f}}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathbf{h}_{\mathbf{f}}$, y aplicar el lema de Lax-Milgram.

Lema 2 *El problema* $(\mathbf{T}_{M,\Delta t}(\gamma))$ *tiene una única solución en* $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

Como G es la subdiferencial de una función convexa y continua $\Phi : L^2(\Omega)\mapsto\mathbb{R}$ (véase [4]), el problema $(\mathbf{T}_{M,\Delta t}(\gamma))$ equivale a hallar $\theta_\gamma\in H_0^1(\Omega)$ solución de la inecuación variacional de segunda especie,

$$\int_\Omega k(\gamma)\nabla\theta_\gamma\cdot\nabla(w-\theta_\gamma) + \frac{1}{\Delta t}\left(\Phi(i(w)) - \Phi(i(\theta_\gamma))\right) \geq$$
$$\frac{1}{\Delta t}\int_\Omega e_M^n(w-\theta_\gamma) + \int_\Omega \frac{1}{\sigma(\gamma)}\mathcal{T}_M(|\nabla\times\mathbf{S}_1(\gamma)|^2)(w-\theta_\gamma) \quad \forall w\in H_0^1(\Omega).$$

donde i es la inclusión de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$. Aplicando el teorema I.4.1 de [9] deducimos la existencia de solución única.

Lema 3 *El conjunto* $\mathbf{S}_1(L^1(\Omega))$ *está acotado en* $\mathbf{V}$ *y* $\mathbf{S}_1 : L^1(\Omega) \mapsto \mathbf{V}$ *es continua.*

Lema 4 *El conjunto* $S_2(L^1(\Omega))$ *está acotado en* $H_0^1(\Omega)$ *e* $i \circ S_2$ *es continua de* $L^1(\Omega)$ *en* $L^2(\Omega)$.

El estudio de la continuidad de S_2 presenta la dificultad de pasar al límite en el término $\int_\Omega k(\gamma)\nabla\theta_\gamma \cdot \nabla(w - \theta_\gamma)$ de la inecuación variacional. Por este motivo, usamos un truco análogo al de Minty para obtener una inecuación equivalente donde se ha sustituido el término anterior por $\int_\Omega k(\gamma)\nabla w \cdot \nabla(w - \theta_\gamma)$.

Lema 5 *El problema acoplado truncado y semidiscretizado* $(\mathbf{E}_{M,\Delta t})$–$(\mathbf{T}_{M,\Delta t})$ *tiene al menos una solución.*

Gracias al teorema de punto fijo de Schauder, la aplicación $i \circ S_2 : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ tiene un punto fijo θ_M^{n+1}. La solución del problema es la terna $(\mathbf{S}_1(\theta_M^{n+1}), S_2(\theta_M^{n+1}), S_3(\theta_M^{n+1}))$.

5. Estimaciones a priori para el problema truncado y semidiscretizado

En esta sección obtendremos estimaciones a priori para la solución $(\mathbf{E}_{M,\Delta t})$–$(\mathbf{T}_{M,\Delta t})$ que nos permitan pasar al límite en el parámetro Δt. Las estimaciones para la parte electromagnética se escribirán para $\tilde{\mathbf{h}}_M^{n+1} = \mathbf{h}_M^{n+1} - \mathbf{h}_\mathbf{f}^{n+1}$, ya que cumple la condición Dirichlet homogénea.

Lema 6 *Para* $0 < \Delta t < \mu_*\sigma^*$, *se tiene que* $\max\limits_{0\le n\le N} \|\tilde{\mathbf{h}}_M^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C(T)$,

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla \times \tilde{\mathbf{h}}_M^{n+1}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C(T) \quad y \quad \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left\| \frac{\mu(\tilde{\mathbf{h}}_M^{n+1} - \tilde{\mathbf{h}}_M^n)}{\Delta t} \right\|^2_{\mathbf{V}_0'} \le C(T).$$

Estas acotaciones se obtienen de forma estándar usando un lema de Gronwall discreto.

Lema 7 *Se tienen las siguientes acotaciones, siendo* $C_M(T)$ *una constante dependiente de* M *y* T *e independiente de* Δt:

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\nabla\theta_M^{n+1}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C_M(T), \qquad \max_{0\le n\le N} \|e_M^n\|_{L^2(\Omega)} \le C_M(T),$$
$$\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|e_M^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_M(T), \qquad \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left\| \frac{e_M^{n+1} - e_M^n}{\Delta t} \right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \le C_M(T).$$

Para las acotaciones de la temperatura usamos que G es una subdiferencial y para las de la entalpía las propiedades de g_i y la forma fuerte de $(\mathbf{T}_{M,\Delta t}(\gamma))$.

6. Existencia de solución del problema acoplado truncado

En esta sección esbozaremos la construcción de una solución del problema ($\mathbf{E_M}$, $\mathbf{T_M}$) mediante paso al límite cuando Δt tiende a cero.

Definimos las funciones $\pi_{\Delta t}\tilde{\mathbf{h}}_M :]0,T] \mapsto \mathbf{V}_0$, $\pi_{\Delta t}\theta_M :]0,T] \mapsto H_0^1(\Omega)$ y $\pi_{\Delta t}e_M :]0,T] \mapsto L^2(\Omega)$ mediante

$$\pi_{\Delta t}\tilde{\mathbf{h}}_M(t) = \tilde{\mathbf{h}}_M^{n+1},\ \pi_{\Delta t}\theta_M(t) = \theta_M^{n+1},\ \pi_{\Delta t}e_M(t) = e_M^{n+1},\ \text{para } t_n < t \le t_{n+1}$$

y las funciones $\Lambda_{\Delta t}\tilde{\mathbf{h}}_M : [0,T] \mapsto \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\Lambda_{\Delta t}e_M : [0,T] \mapsto L^2(\Omega)$ mediante

$$\Lambda_{\Delta t}\tilde{\mathbf{h}}_M(t) = \tilde{\mathbf{h}}_M^n + \frac{t-t_n}{\Delta t}(\tilde{\mathbf{h}}_M^{n+1} - \tilde{\mathbf{h}}_M^n),\ \Lambda_{\Delta t}e_M(t) = e_M^n + \frac{t-t_n}{\Delta t}(e_M^{n+1} - e_M^n) \text{ para } t_n \le t \le t_{n+1}.$$

Usando las acotaciones anteriores y el lema de Aubin-Lions se deduce que existe una sucesión pasos de tiempo Δt_k que tiende a cero de forma que las sucesiones de funciones, que seguimos denotando por $\pi_{\Delta t}\tilde{\mathbf{h}}_M$, $\pi_{\Delta t}\theta_M$, $\pi_{\Delta t}e_M$, $\Lambda_{\Delta t}\tilde{\mathbf{h}}_M$, $\Lambda_{\Delta t}e_M$, convergen a unas funciones $\tilde{\mathbf{h}}_M \in L^2(0,T;\mathbf{V}_0) \cap L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, $\theta_M \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $e_M \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ en las siguientes topologías:

$$\pi_{\Delta t}\tilde{\mathbf{h}}_M \rightharpoonup \tilde{\mathbf{h}}_M \text{ en } L^2(0,T;\mathbf{V}_0) \text{ débil,} \tag{11}$$
$$\mu\Lambda_{\Delta t}\tilde{\mathbf{h}}_M \rightharpoonup \mu\tilde{\mathbf{h}}_M \text{ en } H^1(0,T;\mathbf{V}_0') \text{ débil,} \tag{12}$$
$$\pi_{\Delta t}\theta_M \rightharpoonup \theta_M \text{ en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ débil,} \tag{13}$$
$$\pi_{\Delta t}e_M \to e_M \text{ en } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \text{ fuerte,} \tag{14}$$
$$\Lambda_{\Delta t}e_M \to e_M \text{ en } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \text{ fuerte,} \tag{15}$$
$$\Lambda_{\Delta t}e_M \rightharpoonup e_M \text{ en } H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \text{ débil y en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ débil.} \tag{16}$$

Las convergencias (13) y (14) permiten pasar al límite en el operador maximal monótono G y, junto con la fuerte monotonía de G, implican la convergencia

$$\pi_{\Delta t}\theta_M \to \theta_M \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ fuerte.} \tag{17}$$

En lo sucesivo escribiremos $\Delta t \to 0$ en vez de $\Delta t_k \to 0$. Veamos cómo pasar al límite en tiempo en el problema ($\mathbf{E}_{M,\Delta t}$). Se comprueba que la función $\mathbf{h}_M = \tilde{\mathbf{h}}_M + \mathbf{h}_f$ está en $L^2(0,T;\mathbf{V}) \cap C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))$ y que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu\mathbf{h}_M) \in L^2(0,T;\mathbf{V}_0')$. La función $\mathbf{h}_M$ satisface la condición Dirichlet (7) y, gracias a (12), la condición inicial de ($\mathbf{E_M}$).

Para pasar al límite en la formulación débil de ($\mathbf{E}_{M,\Delta t}$), se toman funciones arbitratrias $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$, $\phi \in \mathcal{D}(]0,T])$ y se toma $\Delta t\phi(t_{n+1})\mathbf{v}$ como función test. Se suma en n y se utilizan las ecuaciones (11), (12), (17) y la regularidad del dato $\mathbf{h_f}$.

Para pasar al límite en ($\mathbf{T}_{M,\Delta t}$), debido a la no linealidad del término fuente, se precisa

$$\nabla \times \pi_{\Delta t}\tilde{\mathbf{h}}_M \to \nabla \times \tilde{\mathbf{h}}_M \text{ en } L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ fuerte.} \tag{18}$$

Esta convergencia se demuestra de forma parecida a la demostración de la convergencia fuerte de la aproximación de Galerkin (ver [6, Cap. XVIII]). Tras utilizar las convergencias (13), (16), (17), (18) y la regularidad de $\mathbf{h_f}$, podemos afirmar la convergencia de la parte térmica. Por tanto, $(\mathbf{h}_M, \theta_M, e_M)$ es una solución de ($\mathbf{E}_{M,\Delta t}$)–($\mathbf{T}_{M,\Delta t}$).

7. Existencia de solución para el problema débil acoplado

Se siguen los pasos de [4] para obtener estimaciones independientes de M para la solución de $(\mathbf{E_M})$–$(\mathbf{T_M})$. En el citado artículo se obtiene la convergencia puntual de θ_M construyendo, para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, dos pares de funciones (q_k, p_k), $k = 1, 2$, con $q_k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ convexa y p_k Lipschitziana, de manera que

$$q_k(e_M) = p_k(\theta_M) \;\; \text{c.p.d. en} \;\; \Omega_i \times (0, T)$$

Usando las estimaciones independientes de M se prueba que $p_k(\theta_M)$ está acotado en $L^a(0, T; W^{1,a}(\Omega_i))$. Además, $\partial_t q_k(e_M)$ está acotado en $L^1(0, T; W^{-1,a}(\Omega_i))$, con $a \in (1, 5/4)$. De lo que se deduce que $p_k(\theta_M)$ converge puntualmente. En [4] se divide $\mathbb{R}$ en dos intervalos I_1 e I_2 y, para cada $I_k, k = 1, 2$, se construye un par (q_k, p_k) en las condiciones anteriores y que además cumple que

$$p_{k\,|I_k} \text{ es una biyección continua de } I_k \text{ sobre } p_k(\mathbb{R}) \text{ y } \left(p_{k\,|I_k}\right)^{-1} \circ p_k = \mathcal{T}_{I_k}, \qquad (19)$$

siendo $\mathcal{T}_{I_k}$ la proyección sobre I_k, de lo que se deduce la convergencia puntual de θ_M.

Los autores han conseguido extender esta demostración al caso de que la entalpía tenga varios puntos de discontinuidad, $\theta_{i,1} < \theta_{i,2} < \ldots < \theta_{i,D_i}$. Esta extensión consiste en construir para cada uno de los intervalos I_k de $\mathbb{R}$ delimitados por $\theta_{i,j}$, $j = 1, ..., D_i$ y 0, un par (q_k, p_k) que cumple (19).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el MCyT (proyecto DPI2003-01316).

Referencias

[1] Abergel, F., Decarreau, A. y Rakotoson, J. M., *Study of a nonlinear elliptic-parabolic equation with measures as data: existence regularity and behaviour near a singularity*, Nonlinear Anal., 26, 11, (1996),1869–1887.

[2] Blanchard, D. y Francfort, G. A., *Study of a doubly nonlinear heat equation with no growth assumptions on the parabolic term*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 19, 5, (1988), 1032–1056.

[3] Blanchard, D. y Francfort, G. A., *A few results on a class of degenerate parabolic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 18, 2, (1991), 213–249.

[4] Bermúdez, A., Muñoz-Sola, R. y Pena, F., *A nonlinear partial differential system arising in thermoelectricity*. European J. Appl. Math., 16, 6, (2005), 683–712.

[5] Boccardo, L. y Gallouët, T., *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*. Journal of Functional Analysis, 87, 1, (1989), 149–169.

[6] Dautray, R. y Lions, J.-L., Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. *Masson*, Paris, 1985.

[7] DiBenedetto, E. y Showalter, R. E. *Implicit degenerate evolution equations and applications*. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 12, 5, (1982), 731–751.

[8] Decarreau, A. y Rakotoson, J.-M., *Nonlinear elliptic-parabolic equations with L^1-data*, Appl. Anal., 47, 1, (1992), 25–38.

[9] Glowinski, R., *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[10] Grange, O. y Mignot, F., *Sur la résolution d'une équation et d'une inéquation paraboliques non linéaires*. J. Functional Analysis, 11, (1972), 77–92.