XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Una simplificación del método de Laplace y aplicaciones

J.L. López[1], P. J. Pagola[1], E. Pérez Sinusía[1]

[1] *Dpto. de Ingenieria Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra, Edf. Las Encinas, 31006 Pamplona. E-mails:* jl.lopez@unavarra.es, pedro.pagola@unavarra.es, ester.perez@unavarra.es

Palabras clave: Desarrollo asintótico, Método de Laplace, Función hipergeométrica de Gauss

Resumen

Multitud de funciones especiales de la física aparecen en problemas de mecánica cuántica como solución de ciertas ecuaciones diferenciales. Muchas de estas funciones admiten una representación integral de la forma $F(x) \equiv \int_a^b e^{-x\,f(t)}\,g(t)\,dt$, donde x representa algún parámetro físico de la teoría en consideración. La evaluación de estas integrales no resulta sencilla en general, pero en muchas ocasiones, ese parámetro x toma valores elevados. Por ello, resulta interesante disponer de métodos de evaluación aproximada de este tipo de integrales para valores grandes de la variable x.

El método más utilizado es el de Laplace. La principal dificultad en dicho método para la obtención de desarrollos asintóticos de este tipo de integrales la origina un cambio de variable. Para suavizar esto, proponemos una factorización del integrando que evita dicho cambio de variable, simplificando enormemente las operaciones.

Por un lado, el cálculo de los coeficientes del desarrollo asintótico es muy sencillo. Por otro lado, la secuencia asintótica obtenida con nuestro método es tan sencilla como en el método estándar de Laplace: funciones gamma completas o incompletas. Además, obtenemos una fórmula explícita para los coeficientes de dicho desarrollo, a diferencia de lo que sucede en el método de Laplace, donde rara vez es posible obtener fórmulas explícitas. Más todavía, mediante una reagrupación de términos podemos obtener fórmulas explícitas para los coeficientes del desarrollo de Laplace estándar.

1. Introducción

Consideremos integrales de la forma

$$F(x) \equiv \int_a^b e^{-xf(t)}g(t)dt, \tag{1}$$

donde (a,b) es un intervalo real finito ó infinito, x es un parámetro grande y $f(t)$ y $g(t)$ son funciones derivables en (a,b). Laplace hizo la observación de que la mayor contribución de (1) se obtiene de las cercanías de los puntos donde $f(t)$ tiene su valor mínimo. Basándonos en esta idea podemos conseguir un desarrollo asintótico , que puede obtenerse de la siguiente forma [[7], Chap. 2, Sec. 1],haciendo el cambio de varable $t \to u$ dado por $f(t) - f(t_0) = u^2$:

$$F(x) = e^{-xf(t_0)} \int_{\sqrt{f(a)-f(t_0)}}^{-\sqrt{f(b)-f(t_0)}} e^{-xu^2} \frac{g(t(u))}{f'(t(u))} 2u\, du, \tag{2}$$

Si la función $h(u) \equiv 2u \dfrac{g(t(u))}{f'(t(u))}$ tiene desarrollo de Taylor en $u_0 = 0$,

$$h(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n \tag{3}$$

podemos aplicar el Lema de Watson reemplazando (3) en la parte derecha de la integral(2) e intercambiando suma por integral [[7], Chap. 2,Theorem 1]:

$$F(x) \sim e^{-xf(t_0)} \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \Phi_n(x), \qquad x \to \infty \tag{4}$$

siendo c_n los coeficientes del desarrollo de Taylor de la función $h(u)$ en $u = 0$ y la secuencia asintótica $\Phi_n(x)$:

$$\Phi_n(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xu^2} u^{2n} du = \frac{\Gamma(n+1/2)}{x^{n+1/2}} \tag{5}$$

Tomando el primer término del desarrollo (4), aparece la conocida fórmula de Laplace:

$$F(x) \sim g(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{f''(t_0)x}} e^{-xf(t_0)}, \qquad x \to \infty. \tag{6}$$

Se puede observar que con el método estándar de Laplace, el cálculo de los $\Phi_n(x)$ es sencillo pero el cálculo de los coeficientes c_n es, en general, bastante complicado ya que la función $h(u)$ no está dada en forma explícita, sino que viene dada de forma implícita a través del cambio de variable $f(t) - f(t_0) = u^2$. En general, se pueden obtener pocos términos del desarrollo asintótico (4). En [4] proponemos una primera simplificación del método de Laplace, la cual simplifica el cálculo de los coeficientes c_n del desarrollo, pero por el contrario, complica el cálculo de la secuencia asintótica $\Phi_n(x)$. Demostramos que no es necesario el cambio de variable $f(t) - f(t_0) = u^2$ para obtener un desarrollo asintótico de (1) sino que es suficiente con desarrollar $g(t)$ en el punto crítico t_0 de $f(t)$ e intercambiar en (1) suma por integral:

Si $g(t)$ tiene desarrollo de Taylor en $t = t_0$: $\quad g(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n (t-t_0)^n$, entonces se reemplaza este desarrollo en (1) y se intercambia suma por integral, obteniendo

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n \tilde{\Phi}_n(x) \quad \text{si} \quad x \to \infty, \qquad \text{con} \qquad \tilde{\Phi}_n(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xf(t)}(t-t_0)^n dt. \tag{7}$$

Podemos observar que mientras con esta modificación del método de Laplace que proponemos en [4] se mejora el cálculo de los coeficientes g_n (frente a la dificultad de los c_n en el metodo estándar),también se paga el precio en el cálculo de la secuencia asintótica $\tilde{\Phi}_n(x)$ que ahora no tienen una forma universal como tenian los $\Phi_n(x)$ del método estándar (eran gammas de Euler), con lo cual la obtencion de una expresion explicita para ellos se complica. Aún así, esto ha permitido calcular algunos desarrollos asintóticos de la función Gamma [2] y de la funcion hipergeométrica de Gauss [3]. Lo que proponemos en este articulo es una 3ª manera de aplicar la idea original de Laplace que simplifique el calculo de los coeficientes c_n pero que no empeore el cálculo de la secuencia asintótica $\Phi_n(x)$.

2. El método de Laplace modificado

Subdividiendo el intervalo de integracion, si es necesario, podemos suponer que $f(t)$ tiene un único mínimo en $t = t_0$ en (a, b). Supongamos también que $f(t)$ y $g(t)$ tienen desarrollo de Taylor en t_0 con un mismo radio de convergencia r. Si $t_0 = a$ permitiremos tambien que $g(t)$ tenga un polo de orden $s \in (-1, 0]$. Distingamos dos casos:

- $f(t)$ tiene su mínimo en $t_0 \in (a, b)$. En este caso $f'(t_0) = f''(t_0) = \cdots = f^{(m-1)}(t_0) = 0$ y $f^{(m)}(t_0) > 0$ con m par.

- $f(t)$ tiene su mínimo en $t_0 = a$ ó $t_0 = b$. En este caso $f'(t_0) = f''(t_0) = \cdots = f^{(m-1)}(t_0) = 0$ y $f^{(m)}(t_0) > 0$ si $t_0 = a$ ó $f^{(m)}(t_0) < 0$ si $t_0 = b$.

En cualquier caso, consideremos la función $f_m(t) \equiv f(t) - f(t_0) - \dfrac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m$.

Las funciones $f_m(t)$ y $e^{-xf_m(t)} = e^{xf(t_0)} e^{-xf(t) + x\frac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m}$ tienen desarrollo de Taylor en $t = t_0$:

$$e^{-xf(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)(t-t_0)^n, \qquad |t-t_0| < r, \qquad e^{x\frac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\frac{f^{(m)}(t_0)}{m!} \right)^n (t-t_0)^{nm}.$$

La función $(t-a)^{-s} g(t)$ tiene desarrollo en $t = t_0$: $\quad g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n (t-t_0)^{n+s}, \quad |t-t_0| < r$, con $s \in (-1, 0]$ si $t_0 = a$ y $s = 0$ si $t_0 \in (a, b]$. Entonces,

$$h(t, x) \equiv e^{-xf_m(t)} g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)(t-t_0)^{n+s}, \qquad |t-t_0| < r, \tag{8}$$

$$\text{con} \quad a_n(x) = e^{xf(t_0)} \sum_{k=0}^{\lfloor n/m \rfloor} \frac{x^k}{k!} \left(\frac{f^{(m)}(t_0)}{m!} \right)^k \sum_{j=0}^{n-mk} A_j(x) B_{n-mk-j}. \tag{9}$$

Obsérvese que $a_n(x)$ son polinomios en x de grado como mucho n. Esta es un fórmula explícita para los coeficientes $a_n(x)$ del desarrollo de Taylor de $h(x,t)$ en t_0, aunque de aquí no se desprende de forma muy clara su comportamiento asintótico.

Hemos podido probar que $a_n(x) = \mathcal{O}(x^{[\frac{n}{p}]})$ siendo $p \geq m+1$ y tal que $f_m(t) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n, \quad |t-t_0| < r,$

Con estos preliminares podemos escribir la integral (1) de la forma:

$$F(x) = e^{-xf(t_0)} \int_a^b e^{-x\frac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m} h(t,x)dt. \tag{10}$$

La serie de Taylor en (8) converge absolutamente y uniformemente a la función $h(t,x)$ en el disco $| t - t_0 | < r$. Por tanto, si el intervalo (a,b) está contenido en este disco, podemos reemplazar esta expresión en (10) e intercambiar suma por integral:

$$F(x) = e^{-xf(t_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \Phi_n(x) \tag{11}$$

Ademas, sabemos por [2] el comportamiento asintótico de $\Phi_n(x)$:

$$\Phi_n(x) = \frac{\gamma + (-1)^n \beta}{m} \left| \frac{m!}{f^{(m)}(t_0)x} \right|^{(n+s+1)/m} \Gamma\left(\frac{n+s+1}{m}\right) + \text{términos exponencialmente pequeños,}$$

$$\text{con} \qquad \gamma = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad t_0 \in [a,b) \\ 0 & \text{if} \quad t_0 = b \end{cases}, \qquad \beta = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad t_0 \in (a,b] \\ 0 & \text{if} \quad t_0 = a \end{cases}$$

Podemos observar que $\Phi_n(x) = \mathcal{O}\left(x^{-(n+s+1)/m}\right)$ cuando $x \to \infty$ y por tanto, los términos del desarrollo (11) satisfacen $a_n(x)\Phi_n(x) = \mathcal{O}(x^{\lfloor n/p \rfloor - (n+s+1)/m})$. Entoces (11) es un desarrollo asintótico de la integral (1), pero no es un desarrollo asintótico genuino de Poincaré. Por ello, podemos agrupar los terminos de (11):

$$F(x) = e^{-xf(t_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x) \quad \text{con} \quad \Psi_n(x) \equiv \sum_{k=\lfloor (n-m)/(p-m) \rfloor}^{\lfloor n/(p-m) \rfloor} a_{n+mk}(x) \Phi_{n+mk}(x) \tag{12}$$

para que sea un desarrollo genuino de Poincaré, pues ahora $\Psi_n(x) = \mathcal{O}\left(x^{-(n+s+1)/m}\right)$.

Finalmente, si el intervalo de integración no está contenido en el disco $D = \{t, |t - t_0| < r\}$ de convergencia de la serie de Taylor de $(t-a)^{-s}h(t,x)$ at $t = t_0$, no podemos reemplazar dicha serie en (10) para obtener el desarrollo (11). Lo que ocurre en este caso es que la serie (11) no sería entonces convergente, pero si seguiría siendo asintótica. Para ver esto, basta con dividir el intervalo de integracion (a,b) en dos partes,una contenida en el disco D: $D_{in} \equiv (a,b) \bigcap D$ y su complementario no contenido en D: $D_{out} \equiv (a,b) \setminus D_{in}$. Podemos escribir (1) :

$$F(x) = \left\{ \int_{D_{in}} e^{-xf(t)} g(t)dt + \int_{D_{out}} e^{-xf(t)} g(t)dt. \right\} \tag{13}$$

Se puede probar que la integral sobre D_{out} es de orden $\mathcal{O}(1)$ cuando $x \to \infty$ y que es exponencialmente pequeña comparada con la integral sobre D_{in}. Ahora procedemos con la integral sobre D_{in} como hicimos en el caso del intervalo (a, b) cuando estaba contenido en D obteniendo de nuevo la fórmula (12).

Observación: Los términos $a_n(x)$ son polinomios de grado $[n/p]$. Entonces de (12) que la secuencia asintotica $\Phi_n(x)$ es suma de $[n/(p-m)] - [(n-m)/(p-m)] + 1$ potencias negativas de x. Por tanto, las series (11) ó (12) son reagrupamientos de la serie estándar de Laplace y vice-versa. Esto significa que los coeficientes de la serie estándar de Laplace pueden ser obtenidos de manera explícita de los coeficientes de (11) después de un apropiado reagrupamiento. Para ilustrar todo esto, mostramos el ejemplo de la función gamma $\Gamma(z)$, obteniendo una fórmula explícita para los coeficientes de la fórmula de Stirling.

3. Ejemplos

3.1. La funcion $\Gamma(x)$ para x grande

De [[7], p. 60, eq. (1.27)] tenemos

$$\Gamma(x+1) = e^{-x}x^{x+1}\int_{-1}^{\infty} e^{-xf(t)}\,dt, \qquad \text{with} \qquad f(t) = t - \log(1+t).$$

Esta integral tiene la forma (1) con la $f(t)$ anteriormente mencionada y $g(t) = 1$. Consideremos $x > 0$ grande. Las funciones $f(t)$ y $g(t)$ son derivables en $(-1, \infty)$. El único punto crítico t_0 de $f(t)$ es $t_0 = 0$. Tenemos $f(0) = 0$, $f''(0) = 1$ and $f'''(0) \neq 0$. Con la notación de la anterior sección tenemos $m = 2$ y $p = 3$.

La función $e^{-xf_2(t)}$ tiene desarrollo de Taylor en $t = 0$ (con $s = 0$):

$$e^{-xf_2(t)} = e^{xt^2/2}e^{-xt}(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)t^n.$$

De la ecuación (9):

$$\begin{aligned} a_n(x) =&(-1)^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{j=0}^{n-2k} \frac{x^{k+j}(-x)_{n-2k-j}}{2^k k! j!(n-2k-j)!} \\ =&(-1)^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \frac{x^k(-x)_{n-2k}}{2^k k!(n-2k)!}\,{}_1F_1(2k-n; 2k-n+1+x; x). \end{aligned} \tag{14}$$

Sabemos que $a_n(x)$ es un polinomio de grado $\lfloor n/3\rfloor$ en x. Para ver esto de forma explícita, escribamos:

$$(-x)_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n+m} S_n^{(m)}(-x)^m,$$

donde $S_n^{(m)}$ son los números de Stirling de primera clase [[1], eq. 24.1.3 (B)],y reemplazando esto en (14):

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{j=0}^{n-2k} \frac{x^{k+j}}{2^k k! j!(n-2k-j)!} \sum_{m=0}^{n-2k-j} (-1)^m S_{n-2k-j}^{(n-2k-j-m)}(-x)^{n-2k-j-m}.$$

Si intercambiamos el orden de las sumas en j y m y hacemos un cambio de variables de sumatorio $(j,m) \to (j,k+m)$ conseguimos

$$a_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} A_m^n x^m, \qquad \text{with} \qquad A_m^n \equiv \sum_{k=0}^{n-m} \sum_{j=0}^{m-k} \frac{(-1)^j S_{n-2k-j}^{(m-k-j)}}{2^k k! j! (n-2k-j)!}.$$

La secuencia asintótica $\Phi_n(x)$ queda

$$\Phi_n(x) = \frac{2^{(n-1)/2}}{x^{(n+1)/2}} \left[(1+(-1)^n)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) - (-1)^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}, \frac{x}{2}\right) \right].$$

Por tanto, salvo términos exponencialmente pequeños, $\Phi_{2n+1}(x) = 0$ y

$$\Phi_{2n}(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1/2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

De (12) obtenemos el siguiente desarrollo asintótico para la $\Gamma(x)$ para grandes valores de x :

$$\Gamma(x+1) \sim e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2n-2}^{2n} a_{2n+2k}(x) \frac{\Gamma(n+k+1/2)}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{2}{x}\right)^{n+k}. \tag{15}$$

Los términos $a_n(x)$ son polinomios de grado $\lfloor n/3 \rfloor$ en x y por tanto, este desarrolo es una reorganización de la fórmula de Stirling [[1], eq. 6.1.37]:

$$\Gamma(x+1) \sim e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x} \left[1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} + ... \right]$$

Agrupando las potencias de x con el mismo grado de (15) obtenemos una fórmula explicita para los coeficientes de la formula de Stirling :

$$\Gamma(x+1) \sim e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n},$$

with

$$c_n \equiv \sum_{m=0}^{2n} \frac{2^{n+m}\Gamma(n+m+1/2)}{\Gamma(1/2)} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k! 2^k} \sum_{j=0}^{m-k} \frac{(-1)^j S_{2n+2m-2k-j}^{(m-k-j)}}{j!(2n+2m-2k-j)!}.$$

3.2. La funcion hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a,b,c;z)$ para b y c grandes

La función hipergeométrica de Gauss puede ser escrita de la forma [[6],p.110,eq(5.4)]

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a}\, dt, \qquad \Re c > \Re b > 0.$$

Definimos $x = b-1$ y $\alpha = (c-b-1)/(b-1)$. Entonces, esta integral podemos escribirla de la forma (1):

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 e^{-xf(t)} g(t)\, dt,$$

$$\text{con} \qquad f(t) = -\log t - \alpha\log(1-t) \qquad \text{y} \qquad g(t) = (1-zt)^{-a}.$$

Consideremos $\alpha > 0$ fija y $x > 0$ grande, lo cual significa que b y c son grandes y del mismo orden, con $c > b$. Las funciones $f(t)$ y $g(t)$ son derivables en $(0,1)$ para todo $z \in \mathbb{C}\setminus[1,\infty)$. El único punto crítico t_0 de $f(t)$ es

$$t_0 = \frac{1}{\alpha+1} \in (0,1).$$

Las funciones $e^{-xf(t)}$ y $g(t)$ tienen desarrollo de Taylor en $t = t_0$ (con $s = 0$):

$$\begin{aligned} e^{-xf(t)} =& e^{-xf(t_0)}\left(1+\frac{t-t_0}{t_0}\right)^x\left(1+\frac{t-t_0}{t_0-1}\right)^{\alpha x} = \\ & e^{-xf(t_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\alpha+1)^n\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j(-x)_j(-\alpha x)_{n-j}}{j!(n-j)!\alpha^{n-j}}\right](t-t_0)^n, \end{aligned} \tag{16}$$

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n\left[1-\frac{z}{\alpha+1}\right]^{-a-n}\left(t-\frac{1}{\alpha+1}\right)^n, \qquad \left|t-\frac{1}{\alpha+1}\right| < r,$$

donde el radio de convergencia común a ambas funciones r depende de α y z. Tenemos $f(t_0) = -\alpha\log\alpha + (\alpha+1)\log(\alpha+1)$, $f''(t_0) = (\alpha+1)^3/\alpha$ y $f'''(t_0) \neq 0$. Con la notación de la sección anterior, tenemos $m = 2$ and $p = 3$. La ecuación (9) queda:

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{j=0}^{n-2k}\sum_{l=0}^{j}\frac{x^k(-x)_l(-\alpha x)_{j-l}(\alpha+1)^{k+a+n}(\alpha+1-z)^{j+2k-a-n}(a)_{n-2k-j}}{(-1)^l l!k!(j-l)!(n-2k-j)!2^k\alpha^{k+j-l}z^{2k+j-n}}. \tag{17}$$

La secuencia asintótica $\Phi_n(x)$ es

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) =& \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{(\alpha+1)^3x}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left\{\gamma\left(\frac{n+1}{2},\frac{(\alpha+1)^3\alpha}{2}x\right)+(-1)^n\gamma\left(\frac{n+1}{2},\frac{(\alpha+1)}{2\alpha}x\right)\right\} \sim \\ & \left(\frac{2\alpha}{(\alpha+1)^3x}\right)^{(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, de (12) obtenemos este desarrollo asintótico de ${}_2F_1(a,b;c;z)$ para b y c grandes

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;z) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{\alpha^{\alpha x}}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)x}}\sum_{n=0}^{\infty}&\left[\sum_{k=\mathrm{Max}\{2n-2,0\}}^{2n}a_{2n+2k}(x)\times\right. \\ & \left.\left(\frac{2\alpha}{(\alpha+1)^3x}\right)^{n+k+1/2}\Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right)\right], \end{aligned} \tag{18}$$

con $x = b-1$, $\alpha = (c-b-1)/(b-1)$ y $a_k(x)$ dados en (17). La expresión entre corchetes es $\Psi_n(x)$. Los primeros términos del desarrollo son:

$$
{}_2F_1(a,b;c;z) \sim \frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{(c-b-1)^{c-b-1/2}}{(c-2)^{c-1/2}} (b-1)^{b-1/2} \left(\frac{c-2}{z-bz+c-2} \right)^a \times
\left\{ 1 + \left[\frac{(a)_2 z^2 b(c-b)}{2(c-bz)^2} + \left(\frac{3(3b^2+c^2-3bc)}{4b(b-c)} + \frac{az(2b-c)}{(zb-c)} \right) + \frac{5(4b^4c-8b^3c^2+5b^2c^3-bc^4)}{6b^2c(b-c)^2} \right] \frac{1}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right) \right\}.
$$

Agradecimientos

Agradecer a la *Dirección General de Ciencia y Tecnología* (REF.MTM2004-05221) que gracias a su financiación, ha sido posible la realización de este trabajo.

Referencias

[1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, *Dover, New York, 1970.*

[2] C. Ferreira, J.L. López and Ester Pérez Sinusía, *The incomplete gamma functions for large values of their variables. Accepted for poblication in Adv.Appl.Math*

[3] C. Ferreira, J.L. López and Ester Pérez Sinusía, *The Gauss hypergeometric function $F(a,b,c;z)$ for large b and c, J.Comput.Appl.Math, 197(2006) 568-577*

[4] C. Ferreira, J.L. López, P. Pagola and Ester Pérez Sinusía, *The Laplace's and steepest descents methods revisited Int. Math. J. 2(7) (2007) 297-314.*

[5] R.B.Paris, *A uniform asymptotic expansion for the incomplete gamma function*, *J.Comput.Appl.Math, 148(2002) 323-339*

[6] N.M.Temme *Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics. Wiley and Sons, New York, (1996)*

[7] R. Wong, *Asymptotic Approximations of Integrals*, *Academic Press, New York, (1989).*