XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–7)

Algunos resultados recientes en polinomios ortogonales de Sobolev

Juan J. Moreno Balcázar[1]

[1] *Dpto. Estadística y Matemática Aplicada e Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional, Universidad de Almería, CITE III, E-04120 Almería. E-mail:* balcazar@ual.es.

Palabras clave: Polinomios ortogonales, Ortogonalidad no estándar

Resumen

En este trabajo expondré algunos resultados recientes acerca de polinomios ortogonales con respecto a un producto escalar no estándar que involucra medidas de soporte no acotado.

1. Introducción

Consideremos el producto escalar no estándar

$$(p, q)_S = \int p(x)q(x)d\mu_0(x) + \lambda \int p'(x)q'(x)d\mu_1(x) , \quad \lambda \geq 0 \tag{1}$$

donde $\mu_i \ \ i = 0, 1$ son medidas con soporte en el eje real y $p, q \in \mathbb{P}$ donde $\mathbb{P}$ es el espacio de los polinomios con coeficientes reales. Claramente el producto escalar (1) **no** satisface la propiedad $(xp, q) = (p, xq)$, y de ahí, su denominación de no estándar ya que los polinomios ortogonales respecto a (1) **no** satisfacen las propiedades que para polinomios ortogonales sobre la recta real se deducen de ésta como, por ejemplo, el satisfacer una relación de recurrencia a tres términos. Los polinomios ortogonales con respecto a (1) se llaman polinomios ortogonales de Sobolev. El *apellido* Sobolev está motivado por la presencia de las derivadas en la segunda integral y suponiendo $\mathrm{sop}(\mu_i) = I \subseteq \mathbb{R}$ se puede construir el espacio de Hilbert, llamado espacio de Sobolev (ver [8]),

$$W^{1,2}_{\mu_0,\mu_1}(I) = \left\{ f : \, f \in L^2_{\mu_0}(I), f' \in L^2_{\mu_1}(I), ||f||^2_S := (f, f)_S < +\infty \right\} .$$

Estos polinomios han sido objeto de estudio fundamentalmente durante los últimos 30 años. Por tanto, existe una amplia literatura acerca de ellos (el lector interesado puede consultar los *surveys* [14], [15] y más recientemente para el caso de medidas de soporte no acotado [13]). Sin embargo, es posible enumerar grandes líneas donde todo está prácticamente por hacer, entre ellas podemos destacar:

- Establecer un esquema para los polinomios ortogonales de Sobolev análogo al esquema de Askey–Wilson para polinomios estándar (ver, por ejemplo, [10]). Entiéndase este *esquema de Sobolev* en la línea de encontrar relaciones límite entre las diversas familias de polinomios Sobolev análogas a las existentes en el esquema de Askey–Wilson, por ejemplo, los polinomios de Laguerre–Sobolev como límite de los polinomios de Δ–Meixner–Sobolev (ver [6]) que es la lógica generalización de la relación límite entre los polinomios clásicos de Meixner y de Laguerre. Por otra parte, cabe destacar que algunas de las familias del esquema de Askey–Wilson cuando tienen parámetros no estándar presentan ortogonalidad Sobolev (ver [1], [4], [5], [16] o, más recientemente, [9]), lo que puede hacer pensar en una extensión de este esquema.

- Prácticamente la totalidad de los resultados obtenidos acerca de las propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales respecto a (1) han sido hechas cuando λ es un parámetro fijo (ver [13], [14] y [15]). En este caso, la segunda medida μ_1 juega el papel principal en la ortogonalidad Sobolev debido a que la segunda integral introduce un factor n^2 cuando el producto escalar (1) es aplicado a polinomios mónicos. Por tanto, es lógico pensar en tomar una sucesión λ_n con ciertas propiedades de forma que el producto escalar

$$(p, q)_{\lambda_n} = \int p(x)q(x)d\mu_0(x) + \lambda_n \int p'(x)q'(x)d\mu_1(x),$$

  este *equilibrado*, o sea, ambas medidas jueguen un papel equivalente en la asintótica de los polinomios de Sobolev. El primer trabajo en esta dirección [2] consideró cómo *equilibrar (balancear)* el producto escalar de Sobolev cuando las medidas son de soporte acotado y bajo ciertas restricciones (pares coherentes de medidas). Aquí, se describirá parte de los resultados obtenidos para el caso no acotado en [3], que demostrarán las diferencias entre ambos casos. Sin embargo, no existe aún un método general que permita estudiar la asintótica fuerte de los polinomios de Sobolev (balanceados o no) cuando la intersección de los soportes de las medidas es vacía (soportes disjuntos) o incluso, en situaciones más *sencillas*, por ejemplo cuando una medida tiene soporte $\mathbb{R}^+$ y la otra $\mathbb{R}$. Hasta ahora las potentes técnicas de Riemann–Hilbert para estudiar polinomios ortogonales no han podido ser adaptadas al caso Sobolev.

- Recientemente se ha iniciado el estudio de polinomios ortogonales de Sobolev en varias variables con los trabajos [11] y [18]. El futuro se presenta prometedor en varias variables aunque también es cierto que queda mucho por hacer en una variable, como se acaba de comentar.

En este trabajo se describirán con brevedad algunos de los avances realizados en las dos primeras líneas descritas anteriormente.

2. Relación límite entre los polinomios de Δ–Meixner–Sobolev y los polinomios de Laguerre–Sobolev

En esta sección estableceremos una relación límite entre dos familias de polinomios de Sobolev, Δ–Meixner–Sobolev y Laguerre–Sobolev, que generaliza la existente para las familias clásicas de polinomios de Meixner y de Laguerre.

Los polinomios clásicos de Meixner $m_n^{(\beta,c)}(x)$ se definen como los polinomios ortogonales con respecto al producto escalar discreto:

$$(p,q)_M = \int p\, q\, d\mu(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(k)q(k)\frac{c^k(\beta)_k}{k!}\,, \quad 0 < c < 1, \quad \beta > 0\,, \tag{2}$$

donde

$$\mu(k) = \frac{c^k(\beta)_k}{k!}\,, \quad k = 0,1,2\ldots, \quad 0 < c < 1, \quad \beta > 0\,,$$

es la conocida distribución de Pascal[1]. Estableceremos

$$\frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{c}\right)^n$$

como coeficiente líder de estos polinomios.

Por otra parte, los polinomios clásicos de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ son ortogonales con respecto al producto escalar continuo:

$$(p,q)_L = \int_0^{+\infty} p(x)q(x)x^{\alpha}e^{-x}dx\,, \quad \alpha > -1\,. \tag{3}$$

Los consideraremos con coeficiente líder igual a $(-1)^n/n!$. Notar que la función peso $\dfrac{x^{\alpha}e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}$ con $\alpha > -1$ corresponde a la función de densidad de la distribución de probabilidad Gamma en $[0,+\infty)$.

Es bien conocida (ver, por ejemplo, [10]), la relación límite entre estas dos familias de polinomios, que con las normalizaciones escogidas queda como:

$$\lim_{c\uparrow 1} c^n m_n^{(\alpha+1,c)}\left(\frac{x}{1-c}\right) = L_n^{(\alpha)}(x)\,. \tag{4}$$

Ahora vamos a considerar una generalización de los anteriores productos escalares. Para generalizar (2) se considera el producto escalar Δ–Sobolev:

$$(p,q)_{SM} = \sum_{k=0}^{+\infty} p(k)q(k)\frac{c^k(\beta)_k}{k!} + \lambda\sum_{k=0}^{+\infty} \Delta p(k)\Delta q(k)\frac{c^k(\beta)_k}{k!}\,, \quad 0 < c < 1, \quad \beta > 0, \quad \lambda \geq 0\,. \tag{5}$$

Los polinomios $\{S_n^M\}$ ortogonales con respecto a (5) son llamados polinomios de Δ–Meixner–Sobolev y se normalizan con la condición de que $S_n^M(x)$ tenga el mismo coeficiente líder de $m_n^{(\beta,c)}(x)$, $n \geq 0$. Para generalizar (3) en el correspondiente espacio de

[1] Si se desea tener una distribución de probabilidad basta considerar $(1-c)^{\beta}\mu(k)$

Sobolev, se considera el producto escalar

$$(p,q)_{SL} = \int_0^{+\infty} p(x)\,q(x)\,x^{\alpha}\,e^{-x}dx + \tilde{\lambda}\int_0^{+\infty} p'(x)\,q'(x)\,x^{\alpha}\,e^{-x}dx\,, \quad \alpha > -1, \quad \tilde{\lambda} \geq 0\,. \tag{6}$$

Los polinomios $\{S_n^L\}$ ortogonales con respecto a (6) son llamados polinomios de Laguerre–Sobolev y el coeficiente líder de $S_n^L(x)$ con $n \geq 0$ es el mismo que el de $L_n^{(\alpha)}(x)$.

En [6] se probó una relación límite entre las familias de polinomios $\{S_n^M\}$ y $\{S_n^L\}$ que generaliza la existente (4) para familias clásicas. Hasta donde conocemos es la única relación límite entre familias de polinomios de Sobolev.

Teorema *Para los valores*

$$\beta = \alpha + 1 \quad y \quad \lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{(1-c)^2}\,,$$

se satisface

$$\lim_{c\uparrow 1} c^n S_n^M\left(\frac{x}{1-c}\right) = S_n^L(x)\,.$$

Esta relación límite nos conduce a que las propiedades algebraicas y asintóticas de los polinomios de Laguerre–Sobolev puedan ser deducidas de aquellas para los polinomios de Δ–Meixner–Sobolev.

Este resultado es un paso inicial en la idea de intentar establecer un esquema para los polinomios de Sobolev *similar* al de Askey–Wilson para los polinomios estándar.

3. Equilibrando o balanceando productos escalares de Sobolev

Tal y como se comentó en la Sección 1, si consideramos el producto escalar

$$(p,q)_S = \int p(x)q(x)d\mu_0(x) + \lambda\int p'(x)q'(x)d\mu_1(x)\,, \quad \lambda \geq 0\,,$$

la medida μ_1 juega el papel principal cuando se desea obtener propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales mónicos con respecto a este producto escalar ya que la segunda integral introduce un factor n^2. Para *equilibrar/balancear* esta situación, en [2] se introduce un producto escalar de Sobolev variante

$$(p,q)_{\lambda_n} = \int p(x)\,q(x)d\mu_0(x) + \lambda_n\int p'(x)\,q'(x)d\mu_1(x)\,, \tag{7}$$

donde $\{\lambda_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos con

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^2\lambda_n = L \in (0,+\infty)} \tag{8}$$

Considerando medidas de soporte acotado y en el ámbito de la coherencia, en [2] se obtienen resultados asintóticos donde queda reflejada la importancia de las dos medidas. En verdad, los autores de [2] también consideran los casos extremos $L = 0$ y $L = +\infty$ introduciendo algunas restricciones naturales sobre la sucesión $\{\lambda_n\}$, aunque en esas dos situaciones el producto escalar no queda equilibrado, sirven para recuperar resultados asintóticos ya conocidos para polinomios de Sobolev no balanceados.

En el caso no acotado, esto es, cuando las medidas μ_i, $i = 0, 1$, tienen soporte no acotado cabe preguntarse si el producto escalar se puede *equilibrar* de la misma forma que en el caso acotado. Si bien podría parecer que imponer (8) valdría para equilibrar el producto escalar (7), veremos que no es la elección correcta.

Consideramos $d\,\mu_i = W^2(x)\,dx$, $i = 0, 1$ con $W(x) = e^{-Q(x)}$ donde

$$Q : I = (-c, c) \to [0, +\infty)$$

es convexa, suave, par con $Q(c^-) = Q((-c)^+) = +\infty$ y $Q(x) = 0$ solamente para $x = 0$. Necesitaremos usar una herramienta habitual del caso no acotado: los números de *Mhaskar–Rakhmanov–Saff* a_n asociados con Q, que son las raíces positivas de la ecuación

$$n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 a_n t Q'\left(a_n t\right) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Entonces, haciendo uso de las desigualdades (ver [12])

$$\|W\,Q_n\|_{L_2([-a_{n+1},a_{n+1}])} \le \|W\,Q_n\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \sqrt{2}\,\|W\,Q_n\|_{L_2([-a_{n+1},a_{n+1}])}$$

podemos probar que para todo polinomio $Q_n(x) = x^n + \dots$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\langle Q_n, Q_n\rangle_{\lambda_n} \\
&\sim \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} Q_n^2(x)\,W^2(x)\,dx + \lambda_n \int_{-a_{n+1}}^{a_{n+1}} \left(Q_n'(x)\right)^2\,W^2(x)\,dx \\
&= a_{n+1}\left[\int_{-1}^{1} Q_n^2(a_{n+1}t)W^2(a_{n+1}t)dt + \lambda_n \int_{-1}^{1} \left(Q_n'(a_{n+1}t)\right)^2 W^2(a_{n+1}t)dt\right] \\
&= a_{n+1}^{2n+1}\left[\int_{-1}^{1} U_n^2(t)\,W^2(a_{n+1}t)\,dt + \frac{n^2\,\lambda_n}{a_{n+1}^2}\int_{-1}^{1} V_{n-1}^2(t)\,W^2(a_{n+1}t)\,dt\right],
\end{aligned}$$

donde U_n y V_{n-1} son polinomios mónicos de grado n y $n-1$, respectivamente. Por tanto, lo exigible para equilibrar el producto escalar (7) es:

(a)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\,\lambda_n}{a_{n+1}^2} = L \in (0, +\infty)} \tag{9}$$

(b) La extremalidad asintótica de la norma $L_2(W^2(a_{n+1}t), [-1, 1])$ para polinomios mónicos de grado n se comporte como la de grado $n-1$.

Notar que de (9) se deduce que en el caso no acotado la elección correcta para equilibrar el producto escalar no puede ser (8). Por otra parte, en [3] basándonos en resultados de Teoría de Potencial damos una condición suficiente para (b) que es

$$W^{1/n}(a_{n+1}t) \sim w(t), \quad \forall t \in (-1, 1)$$

donde w es una función peso continua admisible (ver [17]). Una de las cuestiones pendientes es poder hacer este estudio cuando se tienen dos medidas de soporte acotado distintas. Algún pequeño avance se hizo en [3] para pares coherentes simétricos de tipo Hermite aprovechando las particularidades de la medidas involucradas.

Un ejemplo de resultados asintóticos

Se considera el peso de Freud $W(x) = \exp(-x^4/2)$, también conocido en la literatura por peso de Nevai–Freud, entonces mediante el cálculo de los correspondientes números de Mhaskar–Rakhmanov–Saff se tiene que $a_n \sim n^{1/4}$. Por tanto,

$$n^2\,\lambda_n \sim a_{n+1}^2 \Rightarrow \lambda_n \sim n^{-3/2}\,.$$

Por otra parte,

$$W^{1/n}((n+1)^{1/4}t) \sim \exp(-t^4/2)\,,$$

que es un peso admisible.

Por tanto, estamos en condiciones de poder *equilibrar* el producto escalar (7) donde $d\mu_i(x) = W^2(x)dx$, $i = 0,1$. Denotamos por $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales estándar con respecto al $W^2(x)$ y por $\{S_{n,\lambda_n}\}$ la sucesión de polinomios de Sobolev ortogonales con respecto a (7) donde $d\mu_i(x) = W^2(x)dx$, $i = 0,1$. El siguiente resultado probado en [3] establece la asintótica relativa entre los polinomios de Sobolev y los polinomios de Freud.

Teorema. *Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión decreciente de números reales positivos tales que* $\lim_n n^{7/4}\,(\lambda_{n-2} - \lambda_n) = 0 = \lim_n n^{1/4}\left(\frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_n} - 1\right)$. *Si*

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\lambda_n = L \in [0,+\infty]\,,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n,\lambda_n}(z)}{P_n(z)} = \begin{cases} 1 & \textit{si } L = 0 \\ \dfrac{1}{1 - \left[\varphi\left(\frac{20\,L + 3\sqrt{3}}{12\,L}\right)\right]^{-1}} & \textit{si } 0 < L < +\infty \\ 3/2 & \textit{si } L = +\infty\,, \end{cases}$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, donde $\varphi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$.

En la demostración de este resultado se usan técnicas de variable compleja, espacios de Hardy y asintótica fuerte exterior de los polinomios $P_n(x)$.

Es conveniente hacer algunos comentarios al resultado obtenido:

(a) Realmente se *equilibra* el producto escalar (7) cuando $L \in (0,+\infty)$. En este caso, se puede considerar el producto escalar:

$$(P,Q)_{\lambda_n} = \int_{\mathbb{R}} P(x)\,Q(x)\,W^2(x)\,dx + \lambda_n \int_{\mathbb{R}} P'(x)\,Q'(x)\,[L\,W^2(x)]\,dx\,.$$

Si $\lambda_n = n^{-3/2}\,(1 + o(1))$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n,\lambda_n}}{P_n}$ depende de L, o sea, del cociente de los pesos y esto refleja que ambas medidas participan en la asintótica de los polinomios $S_{n,\lambda_n}(x)$.

(b) La elección $\lambda_n \equiv$ constante, que corresponde al caso **no** balanceado, es un caso particular de $L = +\infty$, y el teorema nos da el resultado asintótico obtenido en [7].

(c) Puesto que la asintótica fuerte exterior de los polinomios $P_n(x)$ es conocida, como corolario de este teorema tenemos la asintótica fuerte exterior de los polinomios de Sobolev $S_{n,\lambda_n}(x)$.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por Ministerio Educación y Ciencia (MTM2005–08648–C02–01) y la Junta de Andalucía (FQM229 y proyectos de excelencia FQM481 y P06–FQM–1735).

Referencias

[1] M. Alfaro, M. Álvarez de Morales y M.L. Rezola, *Orthogonality of the Jacobi polynomials with negative integer parameters*, J. Comput. Appl. Math. **145** (2002), 379–386.

[2] M. Alfaro, A. Martínez–Finkelshtein y M.L. Rezola, *Asymptotics properties of balanced extremal Sobolev polynomials: coherent case*, J. Approx. Theory **100** (1999), 44–59.

[3] M. Alfaro, J.J. Moreno–Balcázar, A. Peña y M.L. Rezola, *Sobolev orthogonal polynomials: balance and asymptotics*, Trans. Amer. Math. Soc. aceptado para publicación.

[4] M. Álvarez de Morales, T.E. Pérez y M.A. Piñar, *Sobolev orthogonality for the Gegenbauer polynomials* $\{C_n^{(-N+1/2)}\}_n \geq 0$, J. Comput. Appl. Math. **100** (1998), 111–120.

[5] M. Álvarez de Morales, T.E. Pérez, M.A. Piñar y A. Ronveaux, *Non-standard orthogonality for Meixner polynomials*, Electron. Trans. Numer. Anal. **9** (1999), 1–25

[6] I. Area, E. Godoy, F. Marcellán, y J.J. Moreno–Balcázar, Δ*–Sobolev orthogonal polynomials of Meixner type: asymptotics and limit relation*, J. Comput. Appl. Math., **178** (2005), 21–36.

[7] A. Cachafeiro, F. Marcellán y J.J. Moreno–Balcázar, *On asymptotic properties of Freud–Sobolev orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **125** (2003), 26–41.

[8] E.A. Cohen, *Zero distribution and behaviour of orthogonal polynomials in the Sobolev space* $W^{1,2}[-1,1]$, SIAM J. Math. Anal. **6** (1975), 105–116.

[9] R. Costas-Santos y J.F. Sánchez–Lara, *Extension of discrete classical orthogonal polynomials beyond the orthogonality*, pre–publicación.

[10] R. Koekoek y R.F. Swarttouw *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Delft University of Technology Faculty of Information Technology and Systems Department of Technical Mathematics and Informatics Report no. 98-17 (1998).
Web: http://fa.its.tudelft.nl/˜koekoek/askey/

[11] J.K. Lee y L.L. Littlejohn, *Sobolev orthogonal polynomials in two variables and second order partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **322** (2006), 1001–1017.

[12] E. Levin y D.S. Lubinsky, *Orthogonal Polynomials for Exponential Weights*, Springer–Verlag, Berlin, 2001.

[13] F. Marcellán y J.J. Moreno–Balcázar, *Asymptotics and zeros of Sobolev orthogonal polynomials on unbounded supports*, Acta Appl. Math. **94** (2006), 163–192.

[14] A. Martínez–Finkelshtein, *Asymptotic properties of Sobolev orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **99** (1998), 491–510.

[15] A. Martínez–Finkelshtein, *Analytic aspects of Sobolev orthogonal polynomials revisited*, J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 255–266.

[16] T.E. Pérez y M.A. Piñar, *On Sobolev orthogonality for the generalized Laguerre polynomials*, J. Approx. Theory **86** (1996), 278–285.

[17] H. Stalh y V. Totik, *General Orthogonal Polynomials*, Volume **43** of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[18] Y. Xu, *A family of Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball*, J. Approx. Theory **138** (2006), 232–241.