

## Soluciones metaestables para un modelo de campos de fase con más de dos fases

A. JIMÉNEZ-CASAS<sup>1</sup>, M. CASTRO<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Dpto. Grupo Dinámica No Lineal, Universidad Pontificia Comillas de Madrid, Alberto Aguilera  
23-28015 Madrid. E-mails: [ajimenez@rec.upcomillas.es](mailto:ajimenez@rec.upcomillas.es), [mario@upcomillas.es](mailto:mario@upcomillas.es).

**Palabras clave:** campo de fase, metaestabilidad, espesor de interfase

### Resumen

Consideramos una generalización del modelo de campos de fase semilineal [11], usando una función de densidad más general. Esa función de densidad describe la separación de mezclas con tres o más componentes, en lugar de las mezclas binarias de los modelos anteriores. Probamos la existencia de soluciones metaestables, es decir que evolucionan muy lentamente en el tiempo.

## 1. Introducción

En el caso unidimensional el modelo de campos de fase es el sistema parabólico semilineal dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tau \varphi_t & = \xi^2 \varphi_{xx} - \frac{1}{2}(\varphi^3 - \varphi) + 2u, & x \in (a, b) \\ u_t + \frac{l}{2} \varphi_t & = k u_{xx}, & x \in (a, b) \\ \varphi'(a) & = \varphi'(b) = 0 \\ u'(a) & = u'(b) = 0 \\ \varphi(0, x) & = \varphi_0(x) \in H^1(a, b) \\ u(0, x) & = u_0(x) \in L^2(a, b) \end{array} \right. \quad (1)$$

Aquí  $u(t, x)$  representa típicamente la temperatura de un punto  $x$  en el instante de tiempo  $t$  de una sustancia que puede aparecer en dos fases diferentes, (por ejemplo sólido-líquido) y  $\varphi(t, x)$  es la función campo de fase, que representa una media local de la fase. Las constantes positivas  $l$  y  $k$  están asociadas al calor latente y a la difusividad, mientras que  $\tau$  y  $\xi$  (espesor de la interfase) son parámetros positivos asociados al tiempo y a la longitud de escala [2],[3], [4].

Los modelos de campos de fase pueden describir también la densidad de una colonia de bacterias o la masa de crecimiento de un tumor así como la difusión de la densidad de nutriente. Finalmente  $u(t, x)$  es también la concentración, del punto  $x$  en el instante de tiempo  $t$ , de una de las componentes de la mezcla.

En este trabajo consideramos las dinámicas de la separación y colapso de mezclas de tres o más componentes, para lo cual consideramos una función de densidad  $G'(\varphi)$  en lugar de la función  $\frac{1}{2}(\varphi^3 - \varphi)$ , verificando:

1.-  $G \geq 0$  con  $G \in \mathcal{C}^3$

2.-  $G$  tiene solamente un número finito de ceros,  $G^{-1}(0) = \{z_1, \dots, z_m\}$  (los cuales se corresponden con los estados de las fases del sistema).

3.-  $G''(z_i) > 0, i = 1, \dots, m$  (estos puntos están asociados a mínimos de  $G$ .)

De esta forma, si consideramos la función de entalpía  $v = u + \frac{l}{2}\varphi$ , el objetivo es el estudio del comportamiento de las soluciones  $(\varphi^\xi, v^\xi)$  del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau\varphi_t = \xi^2\varphi_{xx} - G'(\varphi) - l\varphi + 2v \quad , \quad x \in (a, b) \\ v_t = kv_{xx} - \frac{kl}{2}\varphi_{xx} \quad , \quad x \in (a, b) \\ \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0 \\ v'(a) = v'(b) = 0 \\ \varphi^\xi(0, x) = \varphi_0^\xi(x) \in H^1(a, b) \\ v^\xi(0, x) = v_0^\xi(x) \in L^2(a, b) \end{array} \right. \quad (2)$$

cuando  $\xi \sim 0$ .

## 2. Resultados Previos

En esta sección consideramos un funcional de Lyapunov del sistema (2) y escribimos dicho funcional de forma que una parte del mismo es una expresión que depende solamente de  $\varphi$ , similar al funcional de energía usado en [9]. De esta forma podemos aplicar algunos lemas técnicos que han sido probados en [9].

**Lema 1** *El funcional de energía definido por*

$$F_\xi(\varphi, v) = \int_a^b \left[ \frac{\xi^2}{2}\varphi_x^2 + G(\varphi) \right] dx + \frac{l}{2} \int_a^b \left( \frac{2}{l}v - \varphi \right)^2 dx \quad (3)$$

es un funcional de Lyapunov para el sistema (2) en  $H^1(a, b) \times L^2(a, b)$ . En particular tenemos que

$$\frac{d}{dt} F_\xi(\varphi^\xi, v^\xi) + (\tau \|\varphi_t^\xi\|^2 + d \| [(-\Delta)^{-1}v_t^\xi] \|^2) = 0 \quad (4)$$

con  $d = \frac{4}{kl} > 0$ .

**Demostración:** Es suficiente con multiplicar en  $L^2(a, b)$  la primera ecuación en (2) por  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  y la segunda por  $\frac{4}{kl}(-\frac{\partial}{\partial x^2})^{-1}v_t$ , e integrar por partes. Manipulando adecuadamente las expresiones de forma similar a la expuesta en [11] obtenemos (4).  $\square$

Observamos que el funcional de Lyapunov satisface:

1.-  $F_\xi(\varphi, v) \geq 0$ .

2.- El mínimo de  $F_\xi$  se alcanza en los puntos donde  $F_\xi$  es cero, i.e.  $(z_i, \frac{1}{2}z_i), i = 1, \dots, m$  con  $\xi \geq 0$ . (puntos de equilibrio estable).

3.-  $F_\xi$  toma valores muy pequeños de energía con  $\xi \ll 1$ , para un conjunto "grande" de funciones. Este conjunto contiene funciones no constantes, en particular contiene a las funciones  $(\varphi, v)$  donde  $\varphi \sim z_i$  con valores grandes de gradiente en intervalos pequeños, y  $v \sim \frac{1}{2}\varphi$ .

De esta forma, podemos buscar soluciones metaestables no constantes para valores pequeños de  $\xi$ . Para ello basta con considerar datos iniciales en la región donde el funcional  $F_\xi(\varphi, v)$  toma valores pequeños  $h(\xi)$ , para  $\xi \ll 1$ . Teniendo en cuenta ahora que,

$$0 \leq F_\xi(\varphi^\xi(t, x), v^\xi(t, x)) \leq F_\xi(\varphi^\xi(0, x), v^\xi(0, x)) \leq h(\xi)$$

para  $t \geq 0$ . Si consideramos datos iniciales en esa región, como tenemos poca energía para disipar las soluciones correspondientes tienen una evolución lenta en el tiempo.

**Definición de función  $N, m$ -transición**

Una  $N, m$ -step función con puntos de transición,  $y_j, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , denotada por  $\varphi^0 : [a, b] \rightarrow \{z_i, i = 1, \dots, m\}$ , es una función que toma diferentes valores  $z_i$ , i.e

$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{N+1} z_i \mathcal{X}_{I_i}$  donde  $\mathcal{X}$  denota la función característica del conjunto, con  $I_i \cap I_j = \emptyset$  si  $i \neq j$  y  $\bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 \dots \cup \bar{I}_{N+1} = [a, b]$  y  $(\partial(I_1) \cup \partial(I_2) \cup \dots \cup \partial(I_{N+1})) \cap (a, b) = \{y_j, j = 1, \dots, N\}$ . Donde en el caso de  $N > m - 1$  consideramos  $z_{m+r} = z_r$  para  $r = 1, 2, N + 1 - m$ . Una función  $N, m$ -transición es una función en  $H^1(a, b)$ , próxima a una  $N, m$ -step función en  $L^1(a, b)$ .

El objetivo, es buscar soluciones que partiendo de una estructura próxima a una función de este tipo conserve esa misma estructura durante un intervalo de tiempo que tiende a infinito cuando el espesor de la interfase,  $\xi$ , tiende a cero. Para ello vamos a utilizar la estructura del funcional de Lyapunov asociado al sistema.

No es difícil ver que si intentamos encontrar una familia de datos iniciales  $(\varphi_0^\xi, v_0^\xi)$  tales que  $\liminf_{\xi \rightarrow 0} F_\xi(\varphi_0^\xi, v_0^\xi)$  es muy pequeño, de orden  $O(\xi^2)$ , entonces cualquier solución cuando  $\xi$  tiende a cero se acercan necesariamente a un punto de equilibrio, es decir  $\varphi^\xi$  se acerca a un valor constante  $z_i$  y  $v^\xi$  se acerca a  $\frac{1}{2}z_i$ . Sin embargo el siguiente lema, probado en [1, 9] para dos fases diferentes, nos permite concluir que si consideramos valores del orden de  $O(\xi)$ , podemos incluir un conjunto de funciones  $(\varphi_0^\xi, v_0^\xi)$ , que sin ser puntos de equilibrio (funciones denominadas de transición) mantienen su estructura inicial durante un intervalo de tiempo que tiende a infinito (soluciones metaestables). Por esta razón usamos el funcional de energía reescalado  $V_\xi = \frac{1}{\xi}F_\xi$ , que podemos reescribir como  $V_\xi(\varphi, v) = E_\xi(\varphi) + \frac{1}{2\xi} \int_a^b (\frac{2}{\xi}v - \varphi)^2 dx$ , con

$$E_\xi(\varphi) = \int_a^b [\frac{\xi}{2}\varphi_x^2 + \frac{1}{\xi}G(\varphi)] dx. \tag{5}$$

**Lema 2** Si  $\{\varphi^\xi\} \subset H^1(a, b)$ , tal que  $\varphi^\xi \rightarrow \varphi^0$  en  $L^1(a, b)$ , cuando  $\xi \rightarrow 0$ , con  $\varphi^0$  una función  $N, m$ -escalera. Entonces,  $\liminf_{\xi \rightarrow 0^+} E_\xi[\varphi^\xi] \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N H(z_i + 1) - H(z_i) = C(N, m)$  con  $H(s) = \int_0^s G(r) dr$ .

**Demostración:** El lema de Egorov, nos dice que dado  $\delta > 0$  existe  $A \subset (a, b)$  con  $|(a, b) \setminus A| \leq \delta$  tal que  $\varphi^\xi \rightarrow \varphi^0$  uniformemente eb  $A$ . De esta forma, podemos considerar

$N$ -intervalos  $(a_i, b_i), i \in \{1, 2, \dots, N\}$  conteniendo a los puntos de transición tales que

$$\varphi^\xi(a_i) \longrightarrow \varphi^0(a_i) = z_i, \text{ y } \varphi^\xi(b_i) \longrightarrow \varphi^0(b_i) = z_{i+1}.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$E_\xi(\varphi^\xi) = \int_a^b \left[ \frac{\xi}{2} |(\varphi^\xi)_x|^2 + G(\varphi^\xi) \right] dx \geq \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\xi}{2} \int_{a_i}^{b_i} |(\varphi^\xi)_x|^2 + G(\varphi^\xi) \right].$$

Ahora, por la desigualdad de Young, obtenemos que

$$\int_{a_i}^{b_i} \xi |(\varphi^\xi)_x|^2 + \frac{1}{\xi} \int_{a_i}^{b_i} |G(\varphi^\xi)|^2 \geq \frac{1}{2} \int_{a_i}^{b_i} (\varphi^\xi)_x G(\varphi^\xi) = \frac{1}{2} \int_{a_i}^{b_i} (H(\varphi^\xi))_x.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que  $\int_{a_i}^{b_i} (H(\varphi^\xi))_x = H(\varphi^\xi(b_i)) - H(\varphi^\xi(a_i)) = H(z_{i+1}) - H(z_i)$  concluimos.  $\square$

### 3. Evolución de dos o más fases

En adelante consideraremos  $\varphi^0$  una  $N, m$ -escalera función i.e.  $y_j, j = 1, \dots, N$  son puntos de transición y  $r$  es tal que  $(y_j - r, y_j + r) \subset (a, b)$  son disjuntos, con  $C \leq r$  una constante positiva.

#### 3.1. Evolución lenta cuando $\tau$ es independiente del espesor de la interfase $\xi$

En esta sección veremos que si consideramos una escala de tiempo de longitud  $T$  con  $T \geq Me^{\frac{C}{\xi}}$ , para toda constante positiva  $M$ , entonces la estructura inicial de  $N, m$ -transición, se mantiene para el sistema general (2), cuando  $\tau$  es independiente de  $\xi$ .

**Teorema 1** *Supongamos una familia de datos iniciales  $(\varphi_0^\xi(x), v_0^\xi(x))$  satisfaciendo:*

- i)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi_0^\xi(x) = \varphi^0(x)$  en  $L^1(\Omega)$ .
- ii)  $E_\xi[\varphi_0^\xi] \leq C(N, m) + \frac{1}{2}h(\xi)$ , con  $\xi h(\xi) \rightarrow 0$  cuando  $\xi \rightarrow 0$ .
- iii)  $\int_a^b \left| \frac{2}{\xi} v_0^\xi - \varphi_0^\xi \right|^2 dx \leq \xi h(\xi)$ .

*Entonces, para todo  $M > 0$  tenemos que*

- i)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{\{0 \leq t \leq \frac{M}{g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}}\}} \|\varphi^\xi(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0$ .
- ii)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{\{0 \leq t \leq \frac{M}{g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}}\}} \|\frac{2}{\xi} v^\xi(t) - \varphi^\xi(t)\|_{L^2} = 0$ .
- iii)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{\{0 \leq t \leq \frac{M}{g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}}\}} \|\frac{2}{\xi} v^\xi(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0$ .

*En particular, si  $h(\xi) = ke^{-\frac{C}{\xi}}$  para algún  $k$ , entonces*

- iv)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq Me^{\frac{C}{\xi}}} \|\varphi^\xi(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0$ .
- v)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq Me^{\frac{C}{\xi}}} \|\frac{2}{\xi} v^\xi(t) - \varphi^\xi(t)\|_{L^2} = 0$ .
- vi)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq Me^{\frac{C}{\xi}}} \|\frac{2}{\xi} v^\xi(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0$ .

**Demostración:** Hemos de recorrer varias etapas siguiendo el procedimiento en [11, 13]:

1ª Etapa. Probaremos que existen  $C_1, C_2$  constantes positivas independientes de  $\xi$ , tales que la solución  $(\varphi^\xi, v^\xi)$  satisfice

$$\int_0^T \int_a^b [(\varphi_t^\xi)^2 + |(-\Delta)^{-1}(v_t^\xi)|^2] dxdt \leq C_1(\xi h(\xi) + \xi e^{-\frac{C}{\xi}})$$

para  $\xi$  suficientemente pequeño, y elegimos  $T$  tal que  $T \geq \frac{C_2}{C_1(\xi h(\xi) + \xi e^{-\frac{C}{\xi}})}$ .

En particular si  $h(\xi) = C_3 e^{-\frac{C}{\xi}}$ , entonces  $T \geq C_4 e^{\frac{C}{\xi}}$ ,  $C_i > 0, i = 3, 4$ .

En efecto, si consideramos  $\delta$  pequeño, usando el lema 2 junto con la continuidad del semigrupo asociado a las soluciones del sistema (2), para  $\xi \leq \xi_0$  fijado, existe  $T = T(\xi) > 0$ , dependiendo del dato inicial, y existe  $C_1^* > 0$  constante tal que

1.-  $\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi^0| \leq \delta$  para todo  $0 \leq t \leq T(\xi)$  con

2.-  $E_\xi[\varphi^\xi](t) \geq C(N, m) - C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}}$  para todo  $0 \leq t \leq T(\xi)$ .

Teniendo en cuenta que  $G$  is positiva, tenemos que para todo  $0 \leq t \leq T(\xi)$

$$C(N, m) - C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}} \leq E_\xi[\varphi^\xi](t) \leq V_\xi[\varphi^\xi, v^\xi](t) \leq V_\xi[\varphi_0^\xi, v_0^\xi]. \quad (6)$$

Usando, ahora que  $V_\xi[\varphi_0^\xi, v_0^\xi] = E_\xi[\varphi_0^\xi] + \frac{1}{2\xi} \int_a^b (\tau v_0^\xi - \varphi_0^\xi)^2 \leq C(N, m) + h(\xi)$ , obtenemos que para todo  $0 \leq t \leq T(\xi)$

$$V_\xi[\varphi_0^\xi, v_0^\xi] - V_\xi[\varphi^\xi, v^\xi](t) \leq h(\xi) + C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}}. \quad (7)$$

Observamos que (7) nos dice que la variación de energía en  $0 \leq t \leq T(\xi)$  es muy pequeño.

Además, de (4), obtenemos que  $\frac{dV_\xi(\varphi^\xi, v^\xi)}{dt} = -\xi^{-1}(\tau \|\varphi_t^\xi\|^2 + d \| [(-\Delta)^{-1} v_t^\xi ] \|^2)$  con  $d = \frac{4}{kl} > 0$ , de esta forma integrando de 0 a  $t \leq T(\xi)$ , se tiene que

$$V_\xi[\varphi_0^\xi, v_0^\xi] - V_\xi[\varphi^\xi, v^\xi](t) = \xi^{-1} \int_0^t \int_a^b \left( \tau (\varphi_t^\xi)^2 + d [(-\Delta)^{-1} v_t^\xi]^2 \right).$$

Usando esto junto con (7) obtenemos  $\xi^{-1} \int_0^t \int_a^b \left( \tau (\varphi_t^\xi)^2 + d [(-\Delta)^{-1} v_t^\xi]^2 \right) \leq g(\xi) + C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}}$  i.e.

$$\int_0^t \int_a^b \left( (\varphi_t^\xi)^2 + [(-\Delta)^{-1} v_t^\xi]^2 \right) \leq C_1(\xi g(\xi) + \xi e^{-\frac{C}{\xi}}), \quad (8)$$

con  $C_1 = \frac{\max\{C_1^*, 1\}}{\min\{\tau, d\}}$ .

Observamos que (7) y (8) siguen siendo ciertos mientras  $\int_a^b |\varphi^\xi(s) - \varphi^0| \leq \delta$  for  $0 \leq s \leq t$ .

Finalmente, basta con trabajar como en [], para probar que es posible tomar  $T = T(\xi) \geq \frac{C_2}{C_1(\xi h(\xi) + \xi e^{-\frac{C}{\xi}})}$  con  $C_2 > 0$  independiente del dato inicial.

En efecto, si  $\int_0^\infty \int_a^b |\varphi_t^\xi| \leq \frac{1}{2}\delta$  entonces la demostración ha terminado, ya que para todo  $t \geq 0$  tenemos que

$$\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi^0| \leq \int_0^t \int_a^b |\varphi_t^\xi| + \int_a^b |\varphi_0^\xi - \varphi^0| \leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta \quad (9)$$

y (7), (8) son ciertos para todo  $t$ .

Por otra parte, si  $\int_0^\infty \int_a^b |\varphi_t^\xi| > \frac{1}{2}\delta$ , entonces existe  $T(\xi) > 0$ , todavía dependiendo del dato inicial, tal que

$$\frac{1}{2}\delta = \int_0^{T(\xi)} \int_a^b |\varphi_t^\xi|$$

y como en (9), tenemos que  $\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi^0| \leq \delta$  para todo  $t \in [0, T(\xi)]$ . De esta forma (8) es cierto para todo  $t \in [0, T(\xi)]$ . Aplicando ahora la desigualdad de Holder, se tiene que

$$\frac{1}{2}\delta \leq \left( \int_0^{T(\xi)} \int_a^b |\varphi_t^\xi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (T(\xi))^{\frac{1}{2}} (b-a)^{\frac{1}{2}} \leq \xi^{\frac{1}{2}} [C_1(h(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}})]^{\frac{1}{2}} T(\xi)^{\frac{1}{2}} (b-a)^{\frac{1}{2}}$$

y por tanto  $T(\xi) \geq \frac{C_2}{C_1(\xi h(\xi) + \xi e^{-\frac{C}{\xi}})}$  with  $C_2 = \frac{\delta^2}{4(b-a)}$  con lo que el segundo miembro es independiente del dato inicial. El resto es inmediato.

2ª Etapa.-De las etapas anteriores tenemos que

$$\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi_0^\xi| dx \leq \int_a^b \int_0^t |\varphi_s^\xi| dx ds \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} [C_1 \xi (h(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}})]^{\frac{1}{2}}.$$

De esta forma para  $t \leq T(\xi)$  se tiene que  $\|\varphi^\xi(t) - \varphi_0^\xi\|_{L^1} \leq C_2 [T(\xi) \xi (h(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}})]^{\frac{1}{2}}$  con  $C_2 = (C_1(b-a))^{\frac{1}{2}}$ . Por lo tanto tomando  $T(\xi)$  como en la 1ª etapa y tal que  $T(\xi) \xi (h(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}) \rightarrow 0$  si  $\xi \rightarrow 0$ , por ejemplo,  $T(\xi) = \frac{M}{h(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}}$ , obtenemos que

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T(\xi)} \|\varphi^\xi(t) - \varphi_0^\xi\|_{L^1} = 0.$$

Usando ahora que  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \|\varphi_0^\xi - \varphi^0\|_{L^1} = 0$  concluimos.

ii) Con  $T(\xi)$  como en i) y usando ahora (5) y la hipótesis sobre  $(\varphi_0^\xi, v_0^\xi)$ , obtenemos

$$V_\xi(\varphi^\xi, v^\xi)(t) = E_\xi(\varphi^\xi)(t) + \frac{l}{2\xi} \int_a^b \left( \frac{2}{l} v^\xi - \varphi^\xi \right)^2(t) \leq V_\xi(\varphi_0^\xi, v_0^\xi) \leq C(N, m) + h(\xi),$$

de esta forma, usando el Lema 2 junto con las etapas anteriores, obtenemos

$$\frac{1}{2\xi} \int_a^b \left| \frac{2}{l} v^\xi - \varphi^\xi \right|^2 \leq C(N, m) + h(\xi) - E_\xi(\varphi^\xi)(t) \leq h(\xi) + C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}}$$

con  $C_1^*$  constante positiva que no depende de  $\xi$  ni de  $t$ . Por lo tanto, se tiene que

$$\sup_{t \in [0, T(\xi)]} \left\| \frac{2}{l} v^\xi(t) - \varphi^\xi(t) \right\|_{L^2} \leq C_3 \xi (h(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}) \quad (10)$$

para una constante positiva  $C_3$  independiente de  $\xi$  y  $t$ , lo que concluye la demostración .

iii) Observamos que  $\left\| \frac{2}{l} v^\xi(t) - \varphi_0^\xi \right\|_{L^1} \leq \left\| \left( \frac{2}{l} v^\xi - \varphi^\xi \right)(t) \right\|_{L^1} + \|\varphi^\xi(t) - \varphi_0^\xi\|_{L^1}$  y aplicando la desigualdad de Holder junto con ii) obtenemos el resultado.  $\square$

### 3.2. Evolución lenta cuando $\tau = \tau(\xi)$

En esta sección estudiamos el caso en el que  $\tau = \xi^2$  con  $\xi$ , espesor de la interfase, tendiendo a cero. En este caso, consideramos datos iniciales  $\varphi_0$  muy cerca de la estructura de  $N, m$  – transición. Es decir, suponemos que  $E_\xi[\varphi_0^\xi] \leq C(N, m) + \frac{1}{2}h(\xi)$ , con  $h(\xi)$  tal que  $\xi^{-1}h(\xi) \rightarrow 0$  as  $\xi \rightarrow 0$ . Probamos que la estructura inicial de  $N, m$  – transición se conserva para la solución durante una escala de tiempo de longitud  $T$  con  $T \geq M\xi^{1+\delta}e^{C/\xi}$ , para cualesquiera constantes positivas  $M, \delta$ , (en lugar de  $T \geq Me^{\frac{C}{\xi}}$ ). De esta forma, en este caso probamos que la solución conserva su estructura durante un intervalo de tiempo más pequeño que en el caso anterior (ver [12]).

**Teorema 2** *Suponemos que el dato inicial  $(\varphi_0^\xi(x), v_0^\xi(x))$  satisface:*

- i)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi_0^\xi(x) = \varphi^0(x)$  en  $L^1(\Omega)$ .
- ii)  $E_\xi[\varphi_0^\xi] \leq NC_0 + \frac{1}{2}g(\xi)$ , con  $\xi^{-1}g(\xi) \rightarrow 0$  cuando  $\xi \rightarrow 0$ .
- iii)  $\frac{2c}{T} \int_a^b |v_0^\xi - \frac{1}{2}h(\varphi_0^\xi)|^2 dx \leq \xi g(\xi)$ .

*Entonces, para  $M > 0, \delta > 0$  tenemos que*

- i)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{\{0 \leq t \leq \frac{M\xi^{1+\delta}}{g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}}\}} \|\varphi^\xi(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0$ .
- ii)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{\{0 \leq t \leq \frac{M\xi^{1+\delta}}{g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}}\}} \|v^\xi(t) - \frac{1}{2}h(\varphi^\xi(t))\|_{L^2} = 0$ .

*En particular, si  $g(\xi) = ke^{-\frac{C}{\xi}}$  para algún  $k$ , entonces*

- iv)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq M\xi^{1+\delta}e^{\frac{C}{\xi}}} \|\varphi^\xi(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0$ .
- v)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq M\xi^{1+\delta}e^{\frac{C}{\xi}}} \|v^\xi(t) - \frac{1}{2}h(\varphi^\xi(t))\|_{L^2} = 0$ .

**Demostración:** Basta con usar de nuevo el lema anterior para esta función general de densidad y trabajar como en el caso anterior (ver [11, 12, 13]).  $\square$

### Agradecimientos

Financiado parcialmente por los Proyectos MTM2006-08262 y MEC FIS2006-12253-C06-06, Spain.

### Referencias

- [1] L.Bronsard, R.V. Kohn, “On the slowness of Phase boundary motion in one space dimension”, Com. on Pure and Appl. Math. **43**, 987-997, (1990).
- [2] G.Caginalp, “The dynamics of a conserved Phase Field system: Stefan-like, Hele-Shaw, and Cahn-Hilliard models as asymptotic limits”, IMA J. of Appl. Math. **44**, 77-94, (1990).
- [3] G.Caginalp, “Phase Field models and sharp interface limits: some differences in subtle situations”, Rocky Mountain J. Math., **21**, **2**, 603-616, (1991).
- [4] G.Caginalp, P.C.Fife, “Dynamics of layered interfaces arising from Phase boundaries”, SIAM.J. Appl. Math. **48**, **3**, 506-518, (1988).
- [5] J.Carr, R.L.Pego, “Metastable patterns in solutions of  $u_t = \epsilon^2 u_{xx} - f(u)$ ”, Comm.Pure Appl. Math. **42**, 523-579, (1989).
- [6] J.Carr, R.Pego, “Invariant manifolds for metastable patterns in  $u_t = \epsilon^2 u_{xx} - f(u)$ ”, Proceeding of the Royal Society of Edimburgh, **116A**, 133-160, (1990).

- [7] M. Castro, "Phase-field approach to heterogeneous nucleation", *Phys. Rev. B* **67**, 035412 (2003).
- [8] G. Fusco, J.K. Hale, "Slow-motion manifolds, dormant instability, and singular perturbations". *J. Dynamics Differential Equations.*, **1, 1**, 75-94 (1989).
- [9] C.P. Grant, "Slow motion in one-dimensional Cahn-Morral systems", *SIAM J. Math. Anal.*, **26**, 1, 21-34, (1995).
- [10] A. Jiménez-Casas, "Dinámica en dimensión finita: Modelos de campos de fase y un termosifón cerrado," Ph. D. Thesis, U.C.M., (1996).
- [11] A. Jiménez-Casas, A. Rodríguez-Bernal, "Linear stability analysis and metastable solutions for a phase-field model," *Proceeding of the Royal Society of Edimburgh*, **129A**, 571-600, (1999).
- [12] A. Jiménez-Casas, "Metastable solutions for the thin-interface limit of a phase-field model", *Nonlinear analysis* 63, e963-e970,(2005).
- [13] A. Jiménez-Casas, M.Castro, "Slow motion for a phase-field model", aceptado para publicación.
- [14] L. Modica, "The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **98**, 123-142, (1987).