XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Estudio de la bifurcación de ciclos límite a partir de un gráfico mediante el inverso de factor integrante.

Isaac A. García[1], Héctor Giacomini[2] y Maite Grau[1]

[1] *Departament de Matemàtica. Universitat de Lleida. Avda. Jaume II, 69. 25001 Lleida.*
E-mails: garcia@matematica.udl.cat, mtgrau@matematica.udl.cat.
[2] *Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique. C.N.R.S. UMR 6083. Faculté des Sciences et Techniques. Université de Tours. Parc de Grandmont 37200 Tours (Francia)*
E-mail: giacomini@phys.univ-tours.fr.

Palabras clave: inverso de factor integrante, ciclo límite, gráfico monodrómico, bifurcaciones.

Resumen

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar el número máximo de ciclos límite que pueden bifurcar a partir de un gráfico monodrómico de un sistema diferencial autónomo en el plano con inverso de factor integrante. Demostramos que la multiplicidad de anulación del inverso de factor integrante en el gráfico da una cota superior para el número máximo de ciclos límite que pueden bifurcar del gráfico dentro de las perturbaciones uniparamétricas y analíticas que poseen un inverso de factor integrante. Además, definimos la noción de inverso de factor integrante hasta orden ℓ que nos permte seguir los ciclos límite bifurcados. Estudiamos varios ejemplos de sistemas en el plano que ilustran este resultado.

1. Resultados principales

Consideramos un sistema diferencial autónomo de la forma:

$$\dot{x} = P_0(x,y) \ , \ \dot{y} = Q_0(x,y) \ , \tag{1}$$

donde $P_0(x,y)$ y $Q_0(x,y)$ son funciones analíticas definidas en un abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$. El punto denota la derivación de las variables dependientes x e y respecto de la variable real independiente t.

Recordemos que un gráfico del sistema (1) está formado por un número finito de puntos singulares conectados por órbitas regulares (es decir, separatrices sin puntos singulares) del sistema. Por ejemplo, un gráfico puede estar formado por un sólo punto singular con una órbita homoclínica; este gráfico se llama lazo homoclínico.

Los gráficos pueden tener asociada una aplicación de retorno de Poincaré, es decir, puede existir un entorno del gráfico, quizá sólo en su interior o sólo en su exterior, en el que dada una sección transversal cualquiera en este entorno, toda órbita con punto inicial en esta sección vuelva a cortarla tras un tiempo finito t, positivo o negativo. Los *gráficos monodrómicos* son aquellos que tienen una aplicación de retorno de Poincaré asociada. En este trabajo siempre consideramos gráficos monodrómicos cuya aplicación de retorno de Poincaré no es la identidad.

Además, en este trabajo sólo consideramos gráficos compactos. De hecho los mismos resultados se pueden considerar para gráficos con algún punto en el ecuador de la compactificación de Poincaré, pero siempre supondremos que la carta afín en la que trabajamos contiene completamente el gráfico considerado.

Consideremos un sistema (1) con un gráfico monodrómico y compacto, que denotaremos por Γ_0, y consideremos una perturbación uniparamétrica y analítica de (1). Decimos que un ciclo límite del sistema perturbado bifurca de Γ_0 si éste tiende a Γ_0 al hacer tender el parámetro al valor correspondiente a (1). Nos interesa estudiar el número máximo de ciclos límite que bifurcan de Γ_0, para una perturbación uniparamétrica y analítica cualquiera de (1).

Este problema ha sido abordado mediante distintas técnicas que, en general, consisten en estudiar la aplicación de retorno de Poincaré del sistema (1) y la del perturbado y determinar cómo estas aplicaciones se relacionan en función del parámetro de perturbación. Los siguientes trabajos y libros describen y resumen muchas de estas técnicas [1, 2, 7, 8]. Nuestra forma de abordar el problema consiste en usar la función inverso de factor integrante y su conjunto de anulación.

Una función $V_0 : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ no idénticamente nula y de clase $\mathcal{C}^1$ que satisface la ecuación en derivadas parciales siguiente:

$$P_0(x,y)\,\frac{\partial V_0}{\partial x} + Q_0(x,y)\,\frac{\partial V_0}{\partial y} = \left(\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial y}\right) V_0(x,y),$$

es un *inverso de factor integrante* del sistema (1). En nuestro trabajo siempre suponemos que el campo (1) tiene un inverso de factor integrante analítico definido en un entorno de Γ_0. Un primer resultado es el siguiente:

Proposición 1 *Consideremos el sistema analítico* (1) *con un gráfico monodrómico* Γ_0 *cuya aplicación de retorno de Poincaré asociada no es la identidad y sea* V_0 *un inverso de factor integrante definido en un entorno de* Γ_0. *Entonces* V_0 *es único, módulo una constante multiplicativa.*

La demostración de este resultado se basa en que no puede existir una integral primera del sistema (1) bien definida en un entorno del gráfico Γ_0 considerado, dado su caracter monodrómico, y en que el cociente de dos funciones inverso de factor integrante distintas da lugar a una integral primera para el sistema (1)

El conjunto de anulación de un inverso de factor integrante asociado a un sistema (1), que denotamos por $V_0^{-1}(0) := \{p \in \mathcal{U} \,|\, V_0(p) = 0\}$, está formado por órbitas del sistema (1) y suele contener aquellas órbitas que determinan la dinámica del sistema: puntos singulares, ciclos límite y gráficos.

- En [5] se demuestra que si existe un inverso de factor integrante definido en un entorno de un ciclo límite, entonces éste está contenido en $V_0^{-1}(0)$.
- En [3] se demuestra que si p_0 es un punto de silla hiperbólico del sistema (1), V_0 es un inverso de factor integrante definido en un entorno de p_0 y $V_0(p_0) = 0$, entonces V_0 se anula en las cuatro separatrices de p_0. Notamos que este resultado no es cierto, en general, para puntos singulares no hiperbólicos.
- En cuanto a gráficos, el resultado más general hasta el momento aparece en [4] donde se demuestra que si el sistema (1) tiene un inverso de factor integrante analítico definido en un entorno de un gráfico Γ_0 monodrómico, compacto y cuya aplicación de retorno no es la identidad, entonces $\Gamma_0 \subseteq V_0^{-1}(0)$. En el trabajo [4] también se establece el resultado anterior suavizando la regularidad de la función inverso de factor integrante.

Bajo las hipótesis de este trabajo, deducimos que el inverso de factor integrante se anula en el gráfico considerado y nos preguntamos sobre la información que nos aporta la multiplicidad de anulación, que definimos formalmente como sigue.

Sean $(\phi_i(s), \psi_i(s))$, con $s \in \mathcal{I}_i \subseteq \mathbb{R}$ e $i = 1, 2, \ldots, k$, parametrizaciones de cada una de las órbitas regulares que forman el gráfico Γ_0. Dado un punto (x, y) en un entorno suficientemente pequeño de una órbita $(\phi_i(s), \psi_i(s))$, siempre podemos encontrar valores de s y n que realicen el siguiente cambio de variables: $x = \phi_i(s)+n\psi_i'(s)$, $y = \psi_i(s)-n\phi_i'(s)$. Notemos que la variable n considerada mide la distancia perpendicular a Γ_0. Si se satisface que

$$V_0\left(\phi_i(s) + n\psi_i'(s), \psi_i(s) - n\phi_i'(s)\right) \;=\; n^{m_i}\, v_i(s) \;+\; \mathcal{O}(n^{m+1}),$$

donde m_i es un entero, $m_i \geq 1$, y la función $v_i(s)$ no es idénticamente nula para ningún $i = 1, 2, \ldots, k$, decimos que V_0 tiene *multiplicidad* $m = \text{mín}_{i=1,\ldots,k}(m_i)$ en el gráfico Γ_0.

Como consecuencia de la Proposición 1, tenemos que la multiplicidad de anulación del inverso de factor integrante en Γ_0 está bien definida.

Consideremos una perturbación uniparamétrica y analítica de (1):

$$\dot{x} \;=\; P(x, y, \varepsilon) \;=\; \sum_{i\geq 0} P_i(x, y)\, \varepsilon^i, \quad \dot{y} \;=\; Q(x, y, \varepsilon) \;=\; \sum_{i\geq 0} Q_i(x, y)\, \varepsilon^i \tag{2}$$

donde $P(x, y, \varepsilon)$ y $Q(x, y, \varepsilon)$ son funciones analíticas en el mismo entorno $\mathcal{U}$ de Γ_0 que el sistema (1), y son analíticas en el parámetro real ε para valores de $|\varepsilon|$ suficientemente pequeños. Denotamos por $\mathcal{I}$ el intervalo real entorno de 0 donde toma valores el parámetro ε. Nuestro objetivo es determinar el número máximo de ciclos límite Γ_ε del sistema (2) que bifurcan de Γ_0, es decir, los ciclos límite Γ_ε que tienden a Γ_0 cuando $\varepsilon \to 0^+$ o bien $\varepsilon \to 0^-$. Bajo la hipótesis que el sistema (2) también posee un inverso de factor integrante, demostramos el siguiente resultado:

Teorema 2 *Consideremos el sistema analítico* (1) *con un gráfico monodrómico y compacto* Γ_0 *cuya aplicación de retorno de Poincaré asociada no es la identidad y sea* V_0 *un* *inverso de factor integrante definido en un entorno de* Γ_0 *y cuya multiplicidad de anulación en* Γ_0 *es* m*. Consideremos una perturbación uniparamétrica y analítica de la forma* (2) *y sea* M *el número de ciclos límite* Γ_ε *de* (2) *que bifurcan de* Γ_0*. Supongamos que existe un inverso de factor integrante* $V_\varepsilon(x,y)$ *para el sistema* (2) *definido en un entorno de* Γ_0 *para* $|\varepsilon|$ *suficientemente pequeño. Entonces,* $M \leq m$*.*

La demostración de este teorema se basa en que la función V_ε debe anularse sobre cualquier ciclo límite Γ_ε de (2), como se demostró en [5]. Como V_0 es único, por la Proposición 1, tenemos que V_ε coincide con V_0 cuando ε tiende a 0 y aplicando el Teorema de Preparación de Weierstrass se consigue la demostración del resultado.

Como consecuencia de este teorema, sabemos que la multiplicidad de anulación m del inverso de factor integrante V_0 en Γ_0, da una cota superior para el número máximo de ciclos límite que pueden bifurcar de un gráfico Γ_0, es decir para la ciclicidad de Γ_0, dentro de la familia de los sistemas analíticos de la forma (2) y que poseen inversos de factor integrante.

Sin embargo la existencia de V_ε no está garantizada. Consideremos, por ejemplo, un sistema (1) con un lazo homoclínico Γ_0 cuyo punto singular es una silla hiperbólica p_0. Supongamos que perturbamos el sistema de forma que este punto singular deviene un punto singular p_ε del tipo silla hiperbólica fuerte (es decir, con autovalores asociados $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ y $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$) y ademas el lazo homoclínico Γ_0 se rompe y bifurca un ciclo límite. Este fenómeno de bifurcación se describe, por ejemplo, en [1, 7]. En este caso, no puede existir un inverso de factor integrante V_ε analítico definido en un entorno de Γ_0 que contenga a p_ε para el sistema perturbado. Si existiera, por ser p_ε un punto singular fuerte tendriamos que $V_\varepsilon(p_\varepsilon) = 0$ y por el resultado de [3], V_ε se anularia también en sus cuatro separatrices. Sin embargo, al menos una de estas separatrices espirala hacia el ciclo límite generado, en contradicción con que V_ε es una función analítica.

Si bien la existencia de la V_ε para el sistema (2) en un entorno del gráfico Γ_0 implica limitaciones sobre el tipo de sistemas que se pueden tratar, nuestros resultados nos permiten tratar casos muy difíciles sobre los cuales los métodos habituales no dan respuesta.

En lugar de suponer que el sistema perturbado (2) tiene un inverso de factor integrante V_ε, vamos a considerar sistemas (2) que tengan un inverso de factor integrante *hasta orden* ℓ *en* ε. Sólo consideramos valores de ℓ enteros y tales que $\ell \geq 0$.

Decimos que la función $V : \mathcal{U} \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ es un inverso de factor integrante hasta orden ℓ in ε si V es una función analítica en $\mathcal{U} \times \mathcal{I}$, $V(p,0)$ no es localmente nula para ningun $p \in \mathcal{U}$ y

$$P\,\frac{\partial V}{\partial x} + Q\,\frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) V \;=\; \mathcal{O}(\varepsilon^{\ell+1}).$$

Siguiendo la idea de la demostración descrita en [5], podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3 *Consideremos el sistema analítico* (1) *con un gráfico monodrómico y compacto* Γ_0 *cuya aplicación de retorno de Poincaré asociada no es la identidad. Consideremos una perturbación uniparamétrica y analítica de la forma* (2) *y sea* Γ_ε*, con* $\varepsilon \neq 0$*, una familia de ciclos límite asociada al sistema* (2)*, contenida en* $\mathcal{U}$ *y que bifurcan de* Γ_0*.*

Supongamos que el sistema (2) *tiene un inverso de factor integrante hasta orden* ℓ *en* ε *definido en* $\mathcal{U}$*, que denotamos por* $V(p, \varepsilon)$*. Entonces, para cualquier punto* $q_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon$ *se tiene que* $V(q_\varepsilon, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\ell+1})$.

La demostración de este teorema es por contradicción. Si la anulación de $V(q_\varepsilon, \varepsilon)$ fuera de orden menor que $\ell + 1$ en ε podriamos construir una integral primera hasta orden ℓ para el sistema (2) en un entorno de Γ_0 . El límite de esta función cuando $\varepsilon \to 0$ daría lugar a una integral primera para el sistema no perturbado (1) definida en un entorno de Γ_0. Pero no puede existir una integral primera definida en un entorno de un gráfico monodrómico cuya aplicación de Poincaré asociada no es la identidad.

Este resultado nos permite seguir los ciclos límite que bifurcan de Γ_0 cuando el sistema perturbado posee un inverso de factor integrante hasta orden ℓ, con $\ell \geq 1$.

2. Ejemplos

En esta sección describimos algunos ejemplos que ilustran nuestros resultados.

Ejemplo 1. Consideremos una función analítica $f(x, y)$ definida en un entorno del origen tal que $f(0, 0) \neq 0$, y sea m un entero positivo cualquiera. El sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1(x^2 + y^2)\tfrac{\partial f}{\partial y} - f^{m-1}(x, y)\left((a_4 x + a_2 y)f(x, y) + a_3(x^2 + y^2)\tfrac{\partial f}{\partial y}\right), \\ \dot{y} &= -a_1(x^2 + y^2)\tfrac{\partial f}{\partial x} + f^{m-1}(x, y)\left((a_2 x - a_4 y)f(x, y) + a_3(x^2 + y^2)\tfrac{\partial f}{\partial x}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, admite un inverso de factor integrante de la forma $V_0(x, y) = (x^2 + y^2)f^m(x, y)$. Notemos que $f(x, y) = 0$ es una curva invariante del sistema (3) con cofactor asociado $K(x, y) = f^{m-1}(x, y)\left((a_2 x - a_4 y)\partial f(x, y)/\partial y - (a_4 x + a_2 y)\partial f(x, y)/\partial x\right)$. Si $f(x, y)$ es un polinomio, tenemos un inverso de factor integrante analítico en todo $\mathbb{R}^2$.

Observamos que el sistema (3) siempre tiene el origen como punto singular con valores propios $\lambda_\pm = (-a_4 \pm i a_2)f^m(0, 0)$ donde $i^2 = -1$. Suponemos que $a_2\, a_4 \neq 0$ de forma que el origen sea un foco fuerte.

Vamos a suponer que la función analítica f es tal que el sistema (3) no tiene un continuo de puntos críticos en la curva invariante $f = 0$.

Sea $p \neq (0, 0)$ un punto singular del sistema tal que $f(p) = 0$. Si $m > 1$ y $a_1 \neq 0$ o bien $m = 1$ y $a_1 \neq a_3$ se tiene que $\partial f(x, y)/\partial x|_p = \partial f(x, y)/\partial y|_p = 0$ por lo que p es también un punto crítico de la curva invariante $f = 0$. En el caso que la matriz Hessiana associada a f en p tenga determinante distinto de cero, se puede demostrar que p es una silla hiperbólica del sistema.

Lazo homoclínico: Si tomamos $f(x, y) = -1 + x + x^2 - x^3 + y^2$ y $a_1 = a_2 = a_4 = 1$, la familia 1–paramétrica de sistemas (3) tiene un lazo homoclínico $\Gamma_0 \subset \{f = 0\}$ que pasa por la silla hiperbólica débil $(1, 0)$ cuando $m > 1$ o bien $m = 1$ y $a_3 \neq 1$. Bajo estas hipótesis tenemos que Γ_0 no contiene ningún punto singular del sistema excepto la silla hiperbólica, luego es un gráfico monodrómico y compacto. Notamos que Γ_0 rodea al origen, que es un foco, y por el resultado demostrado en [4], la frontera de la región focal está contenida en $V_0^{-1}(0)$. Luego, esta frontera es Γ_0 y tenemos que la aplicación de Poincaré asociada Γ_0 no es la identidad. Tenemos un ejemplo al que aplicar nuestros resultados.

Gráfico monodrómico con dos sillas: De la misma forma, si tomamos $f(x,y) = (y - x^2+1)(y+x^2-1)$, $a_1 = a_2 = a_4 = 1$ y $a_3 = 2$, el sistema (3) muestra un gráfico $\Gamma_0 \subset \{f = 0\}$ que pasa por las dos sillas hiperbólicas débiles $(\pm 1, 0)$, que es monodrómico, compacto y cuya aplicación de Poincaré asociada no sea la identidad.

Gráfico monodrómico con tres sillas: Tomando $f(x,y) = (y-x+1)(y+x+1)(y-1)$ y $a_1 = a_2 = a_4 = 1$, la familia 1–paramétrica (3) tiene un gráfico $\Gamma_0 \subset \{f = 0\}$ que pasa por las sillas hiperbólicas débiles $(\pm 2, 1)$ y $(0, -1)$ para $m > 1$ o bien $m = 1$ y $a_3 \neq 1$. Tenemos un ejemplo de gráfico monodrómico y compacto con tres sillas. De forma análoga y para distintas elecciones de $f(x,y)$ se pueden construir ejemplos de gráficos monodrómicos y compactos con un número cualquiera de sillas y a los que podemos aplicar nuestros resultados.

Ejemplo 2. El siguiente ejemplo de sistema en el plano:

$$\dot{x} \;=\; -2y, \quad \dot{y} \;=\; -2x + 3x^2, \tag{4}$$

muestra el lazo homoclínico Γ_0 contenido en la curva algebraica invariante $f = 0$ con $f(x,y) := y^2 - x^2 + x^3$. Este lazo homoclínico es un gráfico monodrómico y compacto, pero cuya aplicación de Poincaré asociada es la identidad, puesto que el sistema es Hamiltoniano con $H = f$. Además de la silla hiperbólica en el origen, este sistema posee un punto singular tipo centro en el punto de coordenadas $(2/3, 0)$ y ningún otro punto singular en el plano afín. Notamos que cualquier función de la forma $V_0 = f(x,y)^m$, con $m \in \mathbb{R}$, es un inverso de factor integrante. Luego, no podemos definir de manera unívoca la multiplicidad de anulación de V_0 en el gráfico homoclínico y no podemos aplicar nuestros resultados.

Notamos que para cualquier valor de $m \in \mathbb{Z}$ con $m \geq 0$, existen perturbaciones del sistema (4) con al menos m ciclos límite que bifurcan del lazo homoclínico considerado. Por ejemplo, fijemos un valor de m natural cualquiera y sea ε un real no nulo con $|\varepsilon|$ suficientemente pequeño. Tomamos $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, distintos dos a dos y tales que $0 < a_i\varepsilon < 4/27$. Para cada i se tiene que la curva $f_i = 0$ con $f_i := f + a_i\varepsilon$ tiene un óvalo tal que el punto $(2/3, 0)$ está en la región interior definida por el óvalo y el punto $(0,0)$ está en la región exterior. Además, si $a_i\varepsilon < a_j\varepsilon$, el óvalo definido por la curva $f_i = 0$ contiene al óvalo $f_j = 0$ en la región interior. El siguiente sistema:

$$\dot{x} \;=\; -2y, \quad \dot{y} \;=\; -2x + 3x^2 + \varepsilon y \prod_{i=1}^{m} (f + a_i\varepsilon),$$

es una perturbación del sistema (4) y tiene cada uno de los óvalos descritos por las curvas $f_i = 0$ como órbita periódica. Tras cálculos simples y suponiendo que $|\varepsilon|$ es suficientemente pequeño y no nulo, se muestra que los únicos puntos singulares del sistema perturbado son el $(0,0)$, que es una silla hiperbólica, y el $(2/3, 0)$ que deviene un foco fuerte. Se puede comprobar también que cada óvalo dado por $f_i = 0$ es un ciclo límite hiperbólico del sistema perturbado que bifurca del lazo homoclínico Γ_0. Tenemos, de esta forma, que el sistema perturbado considerado tiene al menos m ciclos límite que bifurcan de Γ_0.

Este ejemplo muestra que en sistemas con gráficos monodrómicos y compactos cuya aplicación de Poincaré es la identidad, no hay una cota del número máximo de ciclos límite que bifurcan del gráfico. Es por este motivo que, con el objetivo de hallar una cota del número máximo de ciclos límite que bifurcan de un gráfico monodrómico, no es restrictivo suponer que su aplicación de Poincaré asociada no es la identidad. Sólo cuando la aplicación de Poincaré asociada no es la identidad, se puede definir de manera unívoca la multiplicidad del inverso de factor integrante en el gráfico, en caso de que exista.

Ejemplo 3. En este ejemplo pretendemos mostrar la existencia de un ciclo límite para un perturbación del sistema inicial si conocemos un inverso de factor integrante a orden uno para el sistema perturbado.

Consideremos la curva algebraica dada por $f(x,y) = 0$ con $f(x,y) := 27y^2 - (1-x)(8+x)^2$. Definimos $V_0(x,y) := (x^2+y^2)f(x,y)$ y tenemos que el sistema:

$$\dot{x} = \frac{\partial V_0}{\partial y} + xf(x,y), \quad \dot{y} = -\frac{\partial V_0}{\partial x} + yf(x,y) \tag{5}$$

posee un lazo homoclínico en la silla de coordenadas $(-8,0)$. Este lazo homoclínico, que denotamos por Γ_0, está contenido en la curva algebraica $f(x,y)=0$. Se puede demostrar que este lazo homoclínico es repulsor en su región interior, luego su aplicación de retorno asociada no es la identidad. También se puede probar que en la región interior hay otros tres puntos singulares: un foco fuerte asintóticamente estable en el origen de coordenadas, un punto tipo centro y un punto tipo silla que posee un lazo homoclínico que rodea el anillo de periodo del centro mencionado. Sin embargo, nos interesamos solamente en las propiedades de bifurcación del lazo homoclínico Γ_0. Notamos que $V_0(x,y)$ es un inverso de factor integrante para el sistema (5), luego la multiplicidad de anulación en Γ_0 es 1. Tenemos, de esta forma, acotado el número máximo de ciclos límite que pueden bifurcar de Γ_0 bajo una perturbación analítica y 1–paramétrica de (5) que tenga un inverso de factor integrante hasta orden 1 en ε. De hecho, usando los resultados descritos en [6], se puede comprobar que el número máximo de ciclos límite que bifurcan de Γ_0 para una perturbación analítica y multiparamétrica del sistema (5) es 2 y que esta cota es alcanzable.

Consideremos la siguiente perturbación uniparamétrica y polinomial del sistema (5):

$$\dot{x} = \frac{\partial V_0}{\partial y} + xf(x,y) + \varepsilon P_1(x,y), \quad \dot{y} = -\frac{\partial V_0}{\partial x} + yf(x,y) + \varepsilon Q_1(x,y), \tag{6}$$

con $P_1(x,y) = 1 - 3x/4 + 39x^2/64 - x^3/64 - 8y/15 + 2xy/5 + x^2y/8 + x^3y/120 - 27y^2/64 + 9y^3/40$, $Q_1(x,y) = -2 + 53x/15 - 61x^2/40 - x^4/120 + 27xy/32 - 9xy^2/40$. Es fácil comprobar que la función $V(x,y,\varepsilon) := V_0(x,y) + \varepsilon V_1(x,y)$, con $V_1(x,y) := 2x - 3x^2/2 + 3x^3/8 - x^4/32$, es un inverso de factor integrante hasta orden 1 en ε para el sistema perturbado (6). Debido al resultado descrito en el Teorema 3, fijado un valor de ε con $|\varepsilon|$ suficientemente pequeño, tenemos que los óvalos de la curva $V(x,y,\varepsilon) = 0$ que bifurquen del óvalo de $f(x,y) = 0$, son los ciclos límite del sistema (6) que bifurcan de Γ_0 a orden $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Todos los puntos del óvalo $f(x,y) = 0$ son regulares excepto el $(-8,0)$, luego cualquier perturbación de este óvalo, y en particular la curva $V(x,y,\varepsilon) = 0$, puede dejar de ser una curva cerrada sólo cerca de este punto. Notamos que cerca de este punto la curva $V(x,y,\varepsilon) = 0$ se comporta como la hipérbola $-432\varepsilon + 162\varepsilon(x+8) - (576 + 45\varepsilon/2)(x+8)^2 + 1728y^2 = 0$ y comprobamos que esta hipérbola corta el eje $y = 0$ en dos puntos cuando $\varepsilon < 0$ y no lo corta cuando $\varepsilon > 0$. Este análisis algebraico nos demuestra que el sistema (6) posee un ciclo límite que bifurca de

Γ_0 cuando $\varepsilon < 0$ y ninguno cuando $\varepsilon > 0$, para valores de $|\varepsilon|$ suficientemente pequeños.

Ejemplo 4. Consideremos la familia uniparamétrica de curvas algebraicas $f_\varepsilon(x, y) = 0$ con $f_\varepsilon(x, y) := y^2+x^3-x^2-\varepsilon$ y definimos $V_\varepsilon(x, y) := \left((x-2/3)^2 + y^2\right) f_\varepsilon(x, y)$. La función $V_\varepsilon(x, y)$ es, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, un inverso de factor integrante del sistema:

$$\dot{x} = 9\,\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial y} - 6(2-3x)\, f_\varepsilon(x, y), \quad \dot{y} = -9\,\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x} + 18y\, f_\varepsilon(x, y). \tag{7}$$

Se puede comprobar que para $\varepsilon = 0$, el sistema posee un lazo homoclínico en la silla de coordenadas $(0, 0)$. Denotamos por Γ_0 este gráfico y se puede ver que es repulsor en la región interior y está contenido en la curva algebraica $f_0(x, y) = 0$. Tenemos que $V_0(x, y)$ es un inverso de factor integrante del sistema con $\varepsilon = 0$ cuya multiplicidad de anulación en Γ_0 es 1. Tenemos así acotado el número máximo de ciclos límite que pueden bifurcar de Γ_0 en una perturbación del sistema $(7)_{\varepsilon=0}$ uniparamétrica, analítica y con inverso de factor integrante. Como en el ejemplo anterior, la función $V_\varepsilon(x, y)$ nos permite seguir los ciclos límite del sistema (7) que bifurcan de Γ_0. Es fácil ver que el sistema (7) sólo posee un ciclo límite que bifurca de Γ_0 para valores de ε negativos y con $|\varepsilon|$ suficientemente pequeño. De hecho, el resultado de [5] nos permite comprobar que el ciclo límite bifurca de Γ_0 con $\varepsilon < 0$, decrece al decrecer ε rodeando el punto singular foco $(2/3, 0)$, hasta que el parámetro alcanza el valor $\varepsilon = -4/27$, en el que $(2/3, 0)$ deviene un punto singular degenerado.

Agradecimientos

Los tres autores están parcialmente financiados por un proyecto del DGICYT con número de referéncia MTM2005-06098-C02-02.

Referencias

[1] A.A. Andronov, et al. *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*, John Wiley & Sons, New York, 1973.

[2] L.A. Cherkas, *Structure of a succesor function in the neighborhood of a separatrix of a perturbed analytic autonomous system in the plane*, Translated from Differentsial'nye Uravneniya **17** (1981), 469–478.

[3] L.R. Berrone and H. Giacomini, *On the vanishing set of inverse integrating factors*, Qual. Th. Dyn. Systems **1** (2000), 211–230.

[4] I.A. García and D.S. Shafer, *Integral invariants and limit sets of planar vector fields*, J. Differential Equations **217** (2005), 363–376.

[5] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano, *On the nonexistence, existence, and uniqueness of limit cycles*, Nonlinearity **9** (1996), 501–516.

[6] L.M. Perko, *Homoclinic loop and multiple limit cycle bifurcation surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 101–130.

[7] R. Roussarie, *On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields*, Bol. Soc. Bras. Mat. **17** (1986), 67–101.

[8] R. Roussarie, *Bifurcations of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem*, Progress in Mathematics Vol 164, Birkhäuser Verlag, 1998.