

Estudio asintótico de las vibraciones de un cuerpo con una masa concentrada en una superficie

D. GÓMEZ¹, M. LOBO¹, E. PÉREZ²

¹ Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria, Av. de los Castros s/n, 39005, Santander. E-mails: gomezdel@unican.es, miguel.lopez@unican.es.

² Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación, Universidad de Cantabria, Av. de los Castros s/n, 39005, Santander. E-mail: meperez@unican.es.

Palabras clave: masas concentradas, análisis espectral, bajas frecuencias, medias frecuencias, altas frecuencias

Resumen

El problema que aquí consideramos es un modelo matemático sobre las vibraciones de un cuerpo que contienen en su interior una región de pequeño espesor $O(\varepsilon)$ limitada por dos planos paralelos y en donde la densidad es de orden $O(\varepsilon^{-m})$ con $m > 1$. Fuera de dicha región, denominada *masa concentrada sobre una superficie*, la densidad es de orden $O(1)$. En [4] describimos el comportamiento asintótico, cuando ε tiende a cero, de los valores propios de orden $O(\varepsilon^{m-1})$ del problema espectral asociado, *bajas frecuencias*. Aquí, caracterizamos comportamientos límites de frecuencias propias de otros órdenes de magnitud más grandes, las denominadas *altas o medias frecuencias*.

1. Introducción y planteamiento del problema

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^3 con frontera lipschitziana $\partial\Omega$. Supondremos que Ω queda dividido en dos partes Ω_+ y Ω_- por la superficie γ , esto es, $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \gamma$. Para simplificar, supondremos que el plano $\{x_3 = 0\}$ corta a Ω y que $\gamma = \Omega \cap \{x_3 = 0\}$; también supondremos que Ω tiene forma cilíndrica en un entorno de la sección γ . Sea ε un pequeño parámetro estrictamente positivo que haremos tender a cero. Denotaremos por ω_ε el entorno de γ de espesor ε , esto es $\omega_\varepsilon = \Omega \cap \{|x_3| < \varepsilon\}$, y por Ω_ε el dominio $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$ (ver Figura 1). Denotaremos por $\bar{x} = (x_1, x_2)$ las dos primeras componentes de un punto genérico $x = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^3 .

Consideramos en Ω el problema de valores propios:

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon = \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon u^\varepsilon & \text{en } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

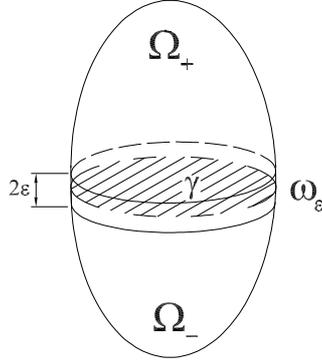


Figura 1: Configuración geométrica.

donde ρ_ε es la función densidad

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} p & \text{si } x \in \Omega_\varepsilon, \\ q\varepsilon^{-m} & \text{si } x \in \omega_\varepsilon, \end{cases}$$

con m un parámetro positivo, y p y q constantes positivas. Este problema está asociado con las vibraciones de un sistema compuesto por un cuerpo que contiene en su interior una región muy delgada donde la densidad es mucho mayor que en el resto, la denominada *masa concentrada sobre una superficie*.

La formulación variacional del problema (1) es: Hallar λ^ε y $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $u^\varepsilon \neq 0$, verificando

$$\int_{\Omega} \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = \lambda^\varepsilon \left[\int_{\Omega_\varepsilon} p u^\varepsilon v \, dx + \frac{1}{\varepsilon^m} \int_{\omega_\varepsilon} q u^\varepsilon v \, dx \right] \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2)$$

Para cada $\varepsilon > 0$ fijo, el problema (2) es un problema de valores propios estándar para un operador positivo, autoadjunto y con resolvente compacta. Sea

$$0 < \lambda_1^\varepsilon \leq \lambda_2^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_i^\varepsilon \leq \dots \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty,$$

la sucesión creciente de valores propios de dicho problema espectral con el convenio clásico de repetición de cada valor propio tantas veces como su multiplicidad. Sea $\{u_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$ la sucesión de las correspondientes funciones propias las cuales suponemos forman una base ortonormal de $H_0^1(\Omega)$, es decir,

$$\int_{\Omega} \nabla u_i^\varepsilon \cdot \nabla u_j^\varepsilon \, dx = \delta_{i,j} \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots \quad (3)$$

A través del principio del minimax se obtiene la siguiente acotación de los valores propios. Para cada $i = 1, 2, 3, \dots$ fijo se tiene que

$$C\varepsilon^{m-1} \leq \lambda_i^\varepsilon \leq C_i \varepsilon^{m-1} \quad \text{si } m > 1 \quad (4)$$

donde C y C_i son constantes independientes de ε , y $C_i \rightarrow \infty$ cuando $i \rightarrow \infty$ (ver [2] para la demostración en el caso de una membrana).

La estimación anterior nos permite asegurar que existe un fenómeno de concentración espectral en el origen. De hecho, teniendo en cuenta la desigualdad (4) y la normalización de las funciones propias (3), podemos extraer una subsucesión, que seguiremos denotando por ε , tal que

$$\lambda_i^\varepsilon/\varepsilon^{m-1} \rightarrow \lambda_i^* \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0$$

y

$$u_i^\varepsilon \rightarrow u_i^* \text{ débilmente en } H_0^1(\Omega) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0$$

donde λ_i^* es cierto número y u_i^* es cierta función de $H_0^1(\Omega)$. En [4] identificamos (λ_i^*, u_i^*) con un elemento propio de un *problema de tipo de Steklov*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega_+ \cup \Omega_-, \\ [u] = 0, \left[\frac{\partial u}{\partial x_3} \right] + \lambda 2qu = 0 & \text{sobre } \gamma, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5)$$

donde los corchetes indican el salto de la función y de la derivada en γ , es decir, $[v] = v(\bar{x}, 0^+) - v(\bar{x}, 0^-)$ para $\bar{x} \in \gamma$. La formulación débil de (5) es: Hallar λ y $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda 2 \int_{\gamma} quv \, d\bar{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (6)$$

Dicho problema tiene un espectro real, positivo y discreto. Denotamos por

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty,$$

la sucesión creciente de valores propios de (6) con el convenio clásico de repetición de valores propios y por $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ las correspondientes funciones propias.

Además, se tiene el siguiente resultado que garantiza la convergencia de los valores propios del problema (2), en el rango de las *bajas frecuencias*, y sus correspondientes funciones propias al problema límite (6); véase [4] para la demostración:

Teorema 1 *Sean λ_i^ε los valores propios del problema (2) y u_i^ε las correspondientes funciones propias tales que $\|\nabla u_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Si $m > 1$, para cada i fijo, la sucesión $\lambda_i^\varepsilon/\varepsilon^{m-1}$ converge, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, hacia λ_i , i -ésimo valor propio de (6). Además, para cualquier valor propio λ_i de (6) con multiplicidad \varkappa ($\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+\varkappa-1}$) y para cualquier función propia u de (6) asociada a λ_i tal que $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 1$, existe una combinación lineal \tilde{u}^ε de funciones propias asociadas a $\{\lambda_k^\varepsilon\}_{k=i}^{i+\varkappa-1}$ tal que \tilde{u}^ε converge hacia u en $H^1(\Omega)$.*

Asimismo, para cada sucesión u_i^ε podemos extraer una subsucesión, que seguiremos denotando por ε , tal que u_i^ε converge hacia u_i^ en $H_0^1(\Omega)$, donde u_i^* es una función propia de (6) asociada a λ_i , y $\{u_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ forma una base ortonormal del complemento ortogonal de $\{v \in H_0^1(\Omega) : v|_\gamma = 0\}$ en $H_0^1(\Omega)$.*

En la sección 3 caracterizamos los comportamientos límites de frecuencias propias de otros órdenes de magnitud más grandes, i.e., $\lambda_{i(\varepsilon)}^\varepsilon$ con $i(\varepsilon) \rightarrow \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Dada la variedad de casos que se pueden presentar dependiendo del valor de m , nos centramos en el caso $m = 3$.

Diversos autores han abordado el comportamiento de sistemas vibratorios con masas concentradas en puntos (cf. [6] para una extensa bibliografía), mientras que sólo tenemos referencia de los trabajos en [1], [2], [5], [4] y [8] relativos a masas concentradas sobre curvas o superficies. En [1]–[2] se analizan las vibraciones de una membrana cuando $m = 3$ mientras que en [5] se estudian problemas stiff y se utilizan técnicas muy distintas. Asimismo, en [8] se trata el problema (1) para $m = 1$.

Con motivo de dar una visión general del problema en distintas dimensiones, en la sección 2 exponemos los resultados para la dimensión dos del espacio. Estos resultados suponen una variante de los obtenidos en colaboración con el Profesor Yu. D. Golovaty, relacionados con el comportamiento asintótico de frecuencias propias medias y altas de una membrana con una masa concentrada a lo largo de una curva cuando $m = 3$ (véase [1] y [2] para más detalles).

2. Caso de una membrana

Para simplificar, consideramos una membrana situada en el dominio rectangular $R = (a, b) \times (-L, L)$ de \mathbb{R}^2 con a, b, L constantes reales tales que $a < b$ y $L > 0$. Sea S la curva $\{\bar{x} = (x_1, x_2) : a < x_1 < b, x_2 = 0\}$ que divide a R en dos partes R_+ y R_- (ver Figura 2).

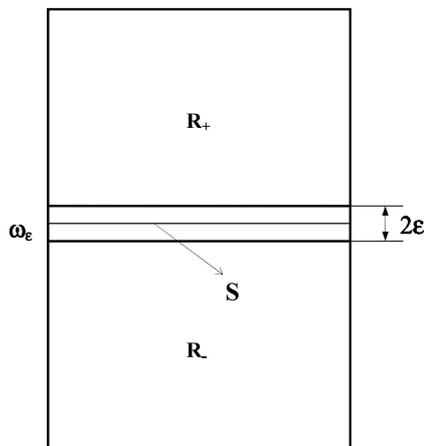


Figura 2: Configuración geométrica.

Consideramos el problema de valores propios (1) donde $\Omega = R$ y la función densidad ρ_ε es

$$\rho_\varepsilon(\bar{x}) = \begin{cases} p & \text{si } \bar{x} \in R \setminus (a, b) \times [-\varepsilon, \varepsilon], \\ q\varepsilon^{-3} & \text{si } \bar{x} \in (a, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon), \end{cases}$$

con p y q constantes positivas. Dicho problema está asociado con las vibraciones de una membrana que contiene en su interior una región muy delgada y pesada alrededor de una curva.

Para cada $\varepsilon > 0$, el problema anterior tiene un espectro real, positivo y discreto que denotamos por $\{\lambda_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$. Además, para i fijo, los valores propios λ_i^ε , bajas frecuencias, son de orden $O(\varepsilon^2)$. No obstante, como ocurre con otros problemas que contienen masas concentradas (véase, por ejemplo, [7], [3] y [2]), se puede probar que existen sucesiones

de valores propios $\lambda_{i(\varepsilon)}^\varepsilon$ de otros órdenes de magnitud más grandes que convergen; denominamos *altas frecuencias* a los valores propios de orden unidad, $\lambda_{i(\varepsilon)}^\varepsilon = O(1)$, y *medias frecuencias* a los valores propios de orden $O(\varepsilon)$, $\lambda_{i(\varepsilon)}^\varepsilon = O(\varepsilon)$. Describimos los problemas límites asociados a dichas frecuencias.

Las medias frecuencias están relacionadas con los valores propios del *problema de Neumann*

$$\begin{cases} -\frac{d^2 y_0}{d\xi^2} = \lambda_0 q y_0 & \text{si } \xi \in (-1, 1), \\ \frac{dy_0}{d\xi}(1) = \frac{dy_0}{d\xi}(-1) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Fácilmente se comprueba que los valores propios de (7) son

$$\lambda_{0,k} = \frac{k^2 \pi^2}{4q} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

y que las correspondientes funciones propias pueden ser elegidas de la forma

$$\begin{aligned} y_{0,2s}(\xi) &= \cos(s\pi\xi) \quad \text{para } s = 0, 1, 2, \dots \\ y_{0,2s+1}(\xi) &= \sin\left(\frac{(2s+1)\pi}{2}\xi\right) \quad \text{para } s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Denotamos por σ_+ y σ_- las constantes $y_{0,k}(1)$ e $y_{0,k}(-1)$ respectivamente.

De cara a describir las funciones propias asociadas a las medias frecuencias es necesario introducir el problema *de tipo de Steklov*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } R_+ \cup R_-, \\ \sigma_+ u|_{S_-} = \sigma_- u|_{S_+} & \text{sobre } S, \\ \sigma_+^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{S_+} - \sigma_+ \sigma_- \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{S_-} + \lambda_1 q u|_{S_+} = 0 & \text{sobre } S, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial R, \end{cases}$$

donde $f|_{S_+}$ ($f|_{S_-}$) denota la traza de la función f definida en R_+ (R_-) sobre la curva S . Dicho problema tiene un espectro real, positivo y discreto que converge a infinito. De hecho, los valores propios coinciden con los de

$$\begin{cases} \Delta \Phi = 0 & \text{en } R_+ \cup R_-, \\ [\Phi] = 0 & \text{sobre } S, \\ \sigma_+^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \Big|_{S_+} - \sigma_-^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \Big|_{S_-} + \lambda_1 q \Phi|_{S_+} = 0 & \text{sobre } S, \\ \Phi = 0 & \text{sobre } \partial R, \end{cases}$$

mientras que las funciones propias están definidas a través de

$$u(\bar{x}) = \begin{cases} \sigma_+ \Phi(\bar{x}) & \text{si } \bar{x} \in R_+, \\ \sigma_- \Phi(\bar{x}) & \text{si } \bar{x} \in R_-. \end{cases}$$

En relación con las altas frecuencias aparece el *problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda pu & \text{en } R_+ \cup R_-, \\ u = 0 & \text{en } \partial R \cup S. \end{cases}$$

El espectro de dicho problema es la unión de los espectros de dos problemas de Dirichlet, uno planteado en R_+ y el otro planteado en R_- .

3. Caso de un cuerpo

La extensión de los resultados obtenidos para la membrana con una masa concentrada en una curva, tanto los relativos a las medias como a las altas frecuencias, al caso de un cuerpo con una masa concentrada a lo largo de una superficie será objeto de una publicación posterior.

En este caso, obtenemos que las medias frecuencias están relacionadas con los valores propios del problema de Neumann (7), siendo necesario recurrir al problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega_+ \cup \Omega_-, \\ \sigma_+ u|_{\gamma_-} = \sigma_- u|_{\gamma_+} & \text{sobre } \gamma, \\ \sigma_+^2 \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{\gamma_+} - \sigma_+ \sigma_- \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{\gamma_-} + \lambda_1 q u|_{\gamma_+} = 0 & \text{sobre } \gamma, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para describir las correspondientes funciones propias; aquí $f|_{\gamma_+}$ ($f|_{\gamma_-}$) denota la traza de la función f definida en Ω_+ (Ω_-) sobre la superficie γ .

Finalmente, las altas frecuencias, valores propios de (1) de orden unidad, están relacionadas con los elementos propios del problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda pu & \text{en } \Omega_+ \cup \Omega_-, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \cup \gamma. \end{cases}$$

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto del MEC MTM2005-07720.

Referencias

- [1] Yu. D. Golovaty, D. Gómez, M. Lobo, and E. Pérez. *Asymptotics for the eigenelements of vibrating membranes with very heavy thin inclusions*, C. R. Mecanique **330** (2002), 777–782.
- [2] Yu. D. Golovaty, D. Gómez, M. Lobo, and E. Pérez. *On vibrating membranes with very heavy thin inclusions*, Math. Models Methods Appl. Sci. **14** (2004), 987–1034.
- [3] D. Gómez, M. Lobo, and E. Pérez *On the eigenfunctions associated with the high frequencies in systems with a concentrated mass*. J. Math. Pures Appl. **78** (1999), 841–865.
- [4] D. Gómez, M. Lobo, and E. Pérez. *Sobre vibraciones de baja frecuencia de un cuerpo con una masa concentrada sobre una superficie*, Actas del XIX CEDYA, Universidad Carlos III, 2006.
- [5] D. Gómez, M. Lobo, S. A. Nazarov, and E. Pérez. *Spectral stiff problems in domains surrounded by thin bands: asymptotic and uniform estimates for eigenvalues*, J. Math. Pures Appl. **85** (2006), 598–632.

- [6] M. Lobo, and E. Pérez. *Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review*, C.R. Mécanique, **331** (2003), 303–317.
- [7] J. Sanchez-Hubert and E. Sanchez-Palencia. *Vibration and Coupling of Continuous Systems. Asymptotic Methods*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1989.
- [8] H. Tchatat. *Perturbations Spectrales pour des Systèmes avec Masses Concentrées*, Thèse 3^{ème} cycle. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI. Paris, 1984.