

XX CONGRESO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICACIONES  
X CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA  
Sevilla, 24-28 septiembre 2007  
(pp. 1-8)

## Estrategias de “semicoarsening” en la aplicación del “smoother” SDI en problemas anisotrópicos tridimensionales

J. R. GALO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Universidad Córdoba, Campus de Rabanales, Ed. Einstein, E-14071 Córdoba. E-mail: ma1gasaj@uco.es.*

**Palabras clave:** Direcciones simultáneas, Helmholtz anisotrópico, Smoother, Multigrid

### Resumen

Los problemas anisotrópicos tienen interés bien por su fundamento físico (anisotropía física), bien por la aplicación de métodos en diferencias finitas con mallados no regulares (anisotropía discreta). En trabajos anteriores demostramos que el método de direcciones simultáneas (SDI) cuenta con un competitivo factor de “smoothing” cuando se aplica, con una estrategia de engrosamiento estándar (“standard coarsening”), a problemas isotrópicos 2D, pero si se introducen anisotropías el comportamiento degenera a medida que éstas aumentan, requiriendo su corrección la aplicación de adecuadas estrategias de engrosamiento parcial (“semicoarsening”).

En este trabajo abordamos el estudio del factor de “smoothing” del método SDI aplicado al problema de Helmholtz tridimensional, mostrándose como con la anisotropía, también aquí, ocurre la degeneración antes citada. El análisis de diferentes estrategias de relajación, bien por líneas (“line coarsening”) o bien por planos (“plane coarsening”), permite desglosar cuales son las técnicas más adecuadas a cada una de las cuatro diferentes situaciones tipo que pueden considerarse, obteniéndose factores que, de nuevo, son competitivos con otros métodos usuales.

## 1. Introducción

Las ecuaciones anisotrópicas tienen su génesis en aquellos problemas en los que las propiedades del medio físico dependen de la dirección espacial. Pero la anisotropía, indirectamente, también surge en la resolución de problemas isotrópicos cuando se necesita el uso de discretizaciones no regulares en la aplicación de métodos en diferencias finitas, por ejemplo en la necesaria búsqueda del equilibrio entre el coste computacional y el número

de nodos a emplear para poder detectar pequeñas estructuras tales como remolinos o capas límite; es la denominada anisotropía discreta.

En trabajos previos ([3], [4]) hemos analizado la convergencia del método paralelo SDI (“Simultaneous Directions Implicit”) aplicado a la resolución de problemas elípticos isotrópicos, así como en la de problemas más complejos como las ecuaciones de Navier–Stokes [1]. En [7] también demostramos su buen comportamiento como “smoother” (método iterativo que amortigua más rápidamente las componentes del error correspondientes a altas frecuencias que las asociadas a bajas frecuencias) y por consiguiente que puede configurarse como una buena alternativa para su integración en un esquema “multigrid” (esquema iterativo que aprovecha el carácter “smoother” de un método para conseguir una rápida convergencia en la resolución, para ello usa diferentes “grids” y de ahí su denominación).

La consideración de anisotropías, en los problemas citados, requirió la determinación de los parámetros óptimos de convergencia del método SDI (consultar [5]) y, a su vez, permitió detectar que, aunque este método se basa en la resolución por líneas, el factor de “smoothing” degenera a medida que aumenta la anisotropía, hecho que en general ocurre con los “pointwise smoothers” ([2], [8] y [9]). En el XIX CEDYA (ver [6]) presentamos una alternativa correctora de esta degeneración en el caso del problema de Helmholtz bidimensional, mediante la aplicación de “semicoarsening” o engrosamiento parcial en una dirección espacial.

En el trabajo que aquí presentamos se refleja un análisis que muestra, igualmente, como al aumentar la anisotropía degenera el factor de “smoothing” del método SDI cuando es aplicado a la ecuación anisotrópica tridimensional de Helmholtz, la cual puede definirse por el operador en derivadas parciales:

$$L^{\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2} := \alpha I - \varepsilon_1 \partial_{x_1}^2 - \varepsilon_2 \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2, \quad (1)$$

donde  $\alpha \geq 0$  y  $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1$  (cuando  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$  se tiene el caso isotrópico). En la búsqueda de alternativas correctoras de esta degeneración y según las ratios existentes entre  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y la unidad, se pueden considerar cuatro situaciones representativas:

- a)  $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim 1$
- b)  $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \ll 1$
- c)  $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2 \ll 1$
- d)  $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2 \sim 1$

En cada uno de estos casos, mediante el uso de la técnica LFA (“Local Fourier Analysis” [8]) y considerando diferentes alternativas de “semicoarsening” (engrosamiento parcial bien por líneas o por planos), se aborda la determinación del factor de “smoothing” y su comportamiento en relación con la anisotropía, lo que permite establecer cuál es la estrategia que en cada situación conduce a un valor óptimo de dicho factor y consecuentemente a una adecuada velocidad de convergencia cuando este “smoother” se integra en un esquema “multigrid”.

Los resultados obtenidos concuerdan con la regla fundamental de relajación por bloques de Brandt (ver [2] y [8]), es decir, cuando las incógnitas fuertemente acopladas son relajadas simultáneamente se obtiene un buen “smoothing” del error.

En este caso, dado que SDI es un método paralelo de resolución donde la paralelización es por líneas, la consideración de relajación por planos y consecuentemente la necesidad

de resolución de problemas bidimensionales en dichos planos, no aporta un coste computacional adicional.

## 2. Análisis de Fourier local (“Local Fourier Analysis” o LFA)

A continuación, se describen sintetizadamente los elementos necesarios para el análisis de Fourier local en la determinación del factor de “smoothing”. Para un mayor detalle consúltese [7] y [8]. LFA fue usado por primera vez en este contexto por Brandt [2].

### 2.1. Autofunciones y autovalores de un operador discreto definido mediante patrones en diferencias (“stencil”)

Consideraremos las llamadas funciones “grid”, dadas por  $\varphi_{\mathbf{h}}(\theta, \mathbf{x}) = e^{i\theta \cdot \mathbf{x}/\mathbf{h}}$ , siendo  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ , donde  $\mathbf{x}$  toma valores en un “grid” infinito  $G_{\mathbf{h}}$ , y  $\theta$  es un parámetro continuo que caracteriza la frecuencia de cada función “grid”.

Consideremos que

$$L_{\mathbf{h}}u_{\mathbf{h}} = f_{\mathbf{h}}, \quad (2)$$

es una discretización en diferencias finitas de la ecuación en derivadas parciales  $Lu = f$ , donde el operador discreto  $L_{\mathbf{h}}$ , definido en el “grid” infinito  $G_{\mathbf{h}}$ , está expresado mediante su patrón (“stencil”) en diferencias  $L_{\mathbf{h}} \equiv [s_{\mathbf{k}}]_{\mathbf{h}}$ , siendo  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ ,  $\mathbf{k} \in V \subset \mathbb{Z}^3$ , los  $s_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$  son coeficientes constantes (fijado  $\mathbf{h}$ ) y  $V$  es un conjunto finito de índices, es decir,

$$L_{\mathbf{h}}u_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in V} s_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{h}}(x_1 + k_1h_1, x_2 + k_2h_2, x_3 + k_3h_3). \quad (3)$$

Es inmediato comprobar que, para  $\theta \in [-\pi, \pi]^3$ , todas las funciones “grid”  $\varphi_{\mathbf{h}}(\theta, \mathbf{x})$ , son autofunciones (formales) de cualquier operador discreto que pueda describirse mediante un patrón dado por (3), es decir, se verifica

$$L_{\mathbf{h}}\varphi_{\mathbf{h}}(\theta, \mathbf{x}) = \tilde{L}_{\mathbf{h}}(\theta)\varphi_{\mathbf{h}}(\theta, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_{\mathbf{h}}, \quad (4)$$

donde  $\tilde{L}_{\mathbf{h}}(\theta)$  diremos que es el autovalor (formal) de  $L_{\mathbf{h}}$ .

### 2.2. Operador de “smoothing” asociado al método SDI

El método SDI es un método iterado que aplicado a (2) se corresponde con la descomposición (“splitting”)

$$L_{\mathbf{h}} = L_{\mathbf{h}}^1 + L_{\mathbf{h}}^2 + L_{\mathbf{h}}^3, \quad (5)$$

de manera que fijado el denominado parámetro de evolución del método  $\tau > 0$  y el parámetro de coordinación  $\omega$ , y conocida la aproximación a la solución correspondiente a la iteración  $m$ , que denotaremos  $U_{\mathbf{h}}^m$ , la aproximación  $U_{\mathbf{h}}^{m+1}$  verifica

$$(I_{\mathbf{h}} + \tau L_{\mathbf{h}}^1)U_{\mathbf{h}}^{m+1,1} = (I_{\mathbf{h}} - \tau L_{\mathbf{h}}^2 - \tau L_{\mathbf{h}}^3)U_{\mathbf{h}}^m + \tau f_{\mathbf{h}}, \quad (6)$$

$$(I_{\mathbf{h}} + \tau L_{\mathbf{h}}^2)U_{\mathbf{h}}^{m+1,2} = (I_{\mathbf{h}} - \tau L_{\mathbf{h}}^1 - \tau L_{\mathbf{h}}^3)U_{\mathbf{h}}^m + \tau f_{\mathbf{h}}, \quad (7)$$

$$(I_{\mathbf{h}} + \tau L_{\mathbf{h}}^3)U_{\mathbf{h}}^{m+1,3} = (I_{\mathbf{h}} - \tau L_{\mathbf{h}}^1 - \tau L_{\mathbf{h}}^2)U_{\mathbf{h}}^m + \tau f_{\mathbf{h}}, \quad (8)$$

$$U_{\mathbf{h}}^{m+1} = \frac{\omega}{3}(U_{\mathbf{h}}^{m+1,1} + U_{\mathbf{h}}^{m+1,2} + U_{\mathbf{h}}^{m+1,3}) + (1 - \omega)U_{\mathbf{h}}^m. \quad (9)$$

Si denotamos por  $e_{\mathbf{h}}^m = u_{\mathbf{h}} - U_{\mathbf{h}}^m$ , se tiene que

$$e_{\mathbf{h}}^{m+1} = S_{\mathbf{h}}(\omega, \tau)e_{\mathbf{h}}^m, \quad (10)$$

donde  $S_{\mathbf{h}}(\omega, \tau)$  es el operador “smoothing” del método. Y si  $\tilde{L}_{\mathbf{h}}^1(\theta)$ ,  $\tilde{L}_{\mathbf{h}}^2(\theta)$  y  $\tilde{L}_{\mathbf{h}}^3(\theta)$  son los autovalores respectivamente de  $L_{\mathbf{h}}^1$ ,  $L_{\mathbf{h}}^2$  y  $L_{\mathbf{h}}^3$ , con  $1 + \tau\tilde{L}_{\mathbf{h}}^1(\theta) \neq 0$ ,  $1 + \tau\tilde{L}_{\mathbf{h}}^2(\theta) \neq 0$  y  $1 + \tau\tilde{L}_{\mathbf{h}}^3(\theta) \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\mathbf{h}}(\omega, \tau, \theta) &= \frac{\omega}{3} \left( \frac{1 - \tau\tilde{L}_{\mathbf{h}}^2(\theta) - \tau\tilde{L}_{\mathbf{h}}^3(\theta)}{1 + \tau\tilde{L}_{\mathbf{h}}^1(\theta)} + \frac{1 - \tau\tilde{L}_{\mathbf{h}}^1(\theta) - \tau\tilde{L}_{\mathbf{h}}^3(\theta)}{1 + \tau\tilde{L}_{\mathbf{h}}^2(\theta)} + \frac{1 - \tau\tilde{L}_{\mathbf{h}}^1(\theta) - \tau\tilde{L}_{\mathbf{h}}^2(\theta)}{1 + \tau\tilde{L}_{\mathbf{h}}^3(\theta)} \right) \\ &\quad + (1 - \omega) \end{aligned} \quad (11)$$

son los autovalores de  $S_{\mathbf{h}}(\omega, \tau)$  o factores de amplificación.

### 2.3. Componentes de alta y baja frecuencia

Para analizar el efecto “smoothing” consideraremos separadamente componentes  $\varphi_{\mathbf{h}}(\theta, \cdot)$  de alta y baja frecuencia relativas al grid  $G_{\mathbf{h}}$  respecto a un segundo grid más grueso (“coarse”)  $G_{\mathbf{H}}$ . Por asimilación hablaremos de altas y bajas frecuencias  $\theta$ . Así pues con una partición regular definida por  $\mathbf{h} = (h, h, h)$ , tenemos:

- “Standard coarsening”, dado por  $\mathbf{H} = (2h, 2h, 2h)$ , donde diremos que  $\varphi_{\mathbf{h}}(\theta, \cdot)$  es una componente de baja frecuencia si  $\theta \in \mathbf{T}^L = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^3$  y de alta frecuencia si  $\theta \in \mathbf{T}^H = [-\pi, \pi]^3 \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^3$ .
- “z-line coarsening” dado por  $\mathbf{H} = (h, h, 2h)$ , teniendo que  $\varphi_{\mathbf{h}}(\theta, \cdot)$  es una componente de baja frecuencia si  $\theta \in \mathbf{T}^L = [-\pi, \pi]^2 \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  y de alta frecuencia si  $\theta \in \mathbf{T}^H = [-\pi, \pi]^3 \setminus ([-\pi, \pi]^2 \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ . Análogo planteamiento se obtiene cuando se considera un engrosamiento sólo en la dirección de eje  $OX_1$  (“x-line coarsening”) o sólo en la dirección de eje  $OX_2$  (“y-line coarsening”).
- “yz-plane coarsening” al considerar  $\mathbf{H} = (h, 2h, 2h)$ , donde  $\varphi_{\mathbf{h}}(\theta, \cdot)$  es una componente de baja frecuencia si  $\theta \in \mathbf{T}^L = [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^2$  y de alta frecuencia si  $\theta \in \mathbf{T}^H = [-\pi, \pi]^3 \setminus ([-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^2)$ . Y de manera análoga “xy-plane coarsening” y “xz-plane coarsening”.

### 2.4. Factor de “smoothing”

Por definición el factor de “smoothing” de un método iterativo es el peor factor por el cual son reducidas las componentes del error de alta frecuencia en cada iteración del método. Para el método SDI dependerá de  $(\omega, \tau)$  y vendrá definido como:

$$\mu_{loc}(\omega, \tau, h) = \mu_{loc}(S_{\mathbf{h}}(\omega, \tau)) := \sup \left\{ \left| \tilde{S}_{\mathbf{h}}(\omega, \tau, \theta) \right| : \theta \in \mathbf{T}^H \right\}. \quad (12)$$

Obviamente el método es “smoother” si  $\mu_{loc} < 1$ , y esta cualidad mejora a medida que este factor disminuye. La determinación de la zona  $(\omega, \tau)$  en la que el operador  $S_{\mathbf{h}}$  es “smoother”, así como del valor

$$\mu_{loc}(h) = \min_{(\omega, \tau)} \mu_{loc}(\omega, \tau, h), \quad (13)$$

depende del problema, del “splitting” efectuado y de la estrategia de engrosamiento adoptada.

### 3. LFA en el problema de Helmholtz anisotrópico

Consideremos la ecuación de Helmholtz anisotrópica

$$L^{\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2} u = f \text{ en } \Omega \subset^2, \quad (14)$$

donde  $f$  es una función dada y  $L^{\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2}$  es el operador definido en (1), discretizada utilizando diferencias finitas de segundo orden mediante el conocido patrón de siete puntos definido sobre una partición regular determinada por  $\mathbf{h} = (h, h, h)$ , es decir, el problema (2) con  $L_{\mathbf{h}}$  expresado según el siguiente patrón y notación “stencil”:

$$L_{\mathbf{h}} = \frac{1}{h^2} \left[ \left[ \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & -1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right]_h, \left[ \begin{array}{ccc} & -\varepsilon_2 & \\ -\varepsilon_1 & \alpha h^2 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1) & -\varepsilon_1 \\ & -\varepsilon_2 & \end{array} \right]_h, \left[ \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & -1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right]_h \right]. \quad (15)$$

Aplicando a (14) el método paralelo SDI (6)–(9) y considerando el “splitting” (5) con los operadores discretos:

$$I_{\mathbf{h}} = \frac{1}{h^2} \left[ \left[ \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right]_h, \left[ \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right]_h, \left[ \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right]_h \right], \quad (16)$$

$$L_{\mathbf{h}}^1 = \frac{1}{h^2} \left[ \left[ \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right]_h, \left[ \begin{array}{ccc} & 0 & \\ -\varepsilon_1 & \frac{\alpha}{3} h^2 + 2\varepsilon_1 & -\varepsilon_1 \\ & 0 & \end{array} \right]_h, \left[ \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right]_h \right], \quad (17)$$

$$L_{\mathbf{h}}^2 = \frac{1}{h^2} \left[ \left[ \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right]_h, \left[ \begin{array}{ccc} & -\varepsilon_2 & \\ 0 & \frac{\alpha}{3} h^2 + 2\varepsilon_2 & 0 \\ & -\varepsilon_2 & \end{array} \right]_h, \left[ \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right]_h \right], \quad (18)$$

$$L_{\mathbf{h}}^3 = \frac{1}{h^2} \left[ \left[ \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & -1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right]_h, \left[ \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & \frac{\alpha}{3} h^2 + 2 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right]_h, \left[ \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & -1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right]_h \right], \quad (19)$$

obtenemos que el factor de amplificación asociado a esta discretización viene dado por

$$\tilde{S}_{\mathbf{h}}(\omega, \tau, \theta) = 1 - \frac{\omega}{3} \psi(\tau \lambda_1, \tau \lambda_2, \tau \lambda_3), \quad (20)$$

donde

$$\psi(x, y, z) := (x + y + z) \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \right) \quad (21)$$

y

$$\lambda_1 := \frac{\alpha}{3} + \frac{4}{h^2} \varepsilon_1 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}, \lambda_2 := \frac{\alpha}{3} + \frac{4}{h^2} \varepsilon_2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}, \lambda_3 := \frac{\alpha}{3} + \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\theta_3}{2}. \quad (22)$$

Como ya hemos indicado cada estrategia  $C$  de engrosamiento del “grid” determina un conjunto de altas frecuencias  $\theta \in \mathbf{T}^H$  y consecuentemente  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  tomará valores en una determinada región  $R_{\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, h}^C$  del octante positivo del espacio  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Por tanto, partiendo de (12) y definiendo:

$$\delta_R(\tau) := \min_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in R_{\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, h}^C} \psi(\tau \lambda_1, \tau \lambda_2, \tau \lambda_3) \quad (23)$$

$$\gamma_R(\tau) := \max_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in R_{\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, h}^C} \psi(\tau \lambda_1, \tau \lambda_2, \tau \lambda_3) \quad (24)$$

un sencillo análisis (ver [7]) permite determinar la región  $(\omega, \tau)$  donde el método es “smoother” y adicionalmente se tiene que, para todo  $\tau > 0$

$$\mu_{loc}(\tau, h) := \min_{\omega} \mu_{loc}(\omega, \tau, h) = \frac{\gamma_R(\tau) - \delta_R(\tau)}{\gamma_R(\tau) + \delta_R(\tau)}, \quad (25)$$

lo que permite determinar (13) como el mínimo de una función en la variable  $\tau$ .

### 3.1. Estrategias de engrosamiento

Si denotamos  $m := \frac{4}{h^2}$  y  $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , las regiones  $R_{\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, h}^C$  correspondientes a cada estrategia  $C$  de engrosamiento están reflejadas en la figura 1 representadas con aristas más gruesas e incluyéndose como referencia (algo difuminado) el ortoedro correspondiente a la región reflejada en el apartado (a) de dicha figura. Los vértices que determinan estas regiones pueden obtenerse observando la gráfica a partir de los puntos denotados de  $A$  a  $F$  y los intermedios  $H, I$  y  $J$ . En estos puntos la coordenada que no es nula viene dada para  $A, C$  y  $E$  por  $\frac{\alpha}{3}$ , para  $B$  por  $\frac{\alpha}{3} + \varepsilon_1 m$ , para  $D$  es  $\frac{\alpha}{3} + \varepsilon_2 m$ ,  $F$  con  $\frac{\alpha}{3} + m$ ,  $H$  sería  $\frac{\alpha}{3} + \varepsilon_1 \frac{m}{2}$ ,  $I$  es  $\frac{\alpha}{3} + \varepsilon_2 \frac{m}{2}$  y finalmente  $J$  con  $\frac{\alpha}{3} + \frac{m}{2}$ . En “standard coarsening” tanto para  $H$  e  $I$  el valor a considerar es  $\frac{\alpha}{3} + \varepsilon \frac{m}{2}$ .

La determinación de (25) requiere el estudio, en cada una de las regiones anteriores, de los extremos de la función  $\psi$  definida en (21), estudio que por su extensión no detallamos aquí.

### 3.2. Factor de “smoothing”

El análisis citado de la función  $\psi$  conduce al cuadro reflejado en la tabla 1 que sintetiza los resultados obtenidos cuando  $h \rightarrow 0$ , considerando cada uno de los cuatro tipos de anisotropía y reflejando el comportamiento del factor de “smoothing”  $\mu_{loc}$  en relación a la tendencia en los valores de  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ .

Para “ $x$ -line coarsening”, sin más que permutar el papel de  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , se obtienen resultados análogos a los reflejados en la tabla 1 para “ $y$ -line coarsening”. Una situación similar encontramos en el comportamiento para “ $xz$ -plane coarsening” e “ $yz$ -plane coarsening”.

Un análisis de dicha tabla nos permite observar el comportamiento del método SDI en este tipo de problemas:

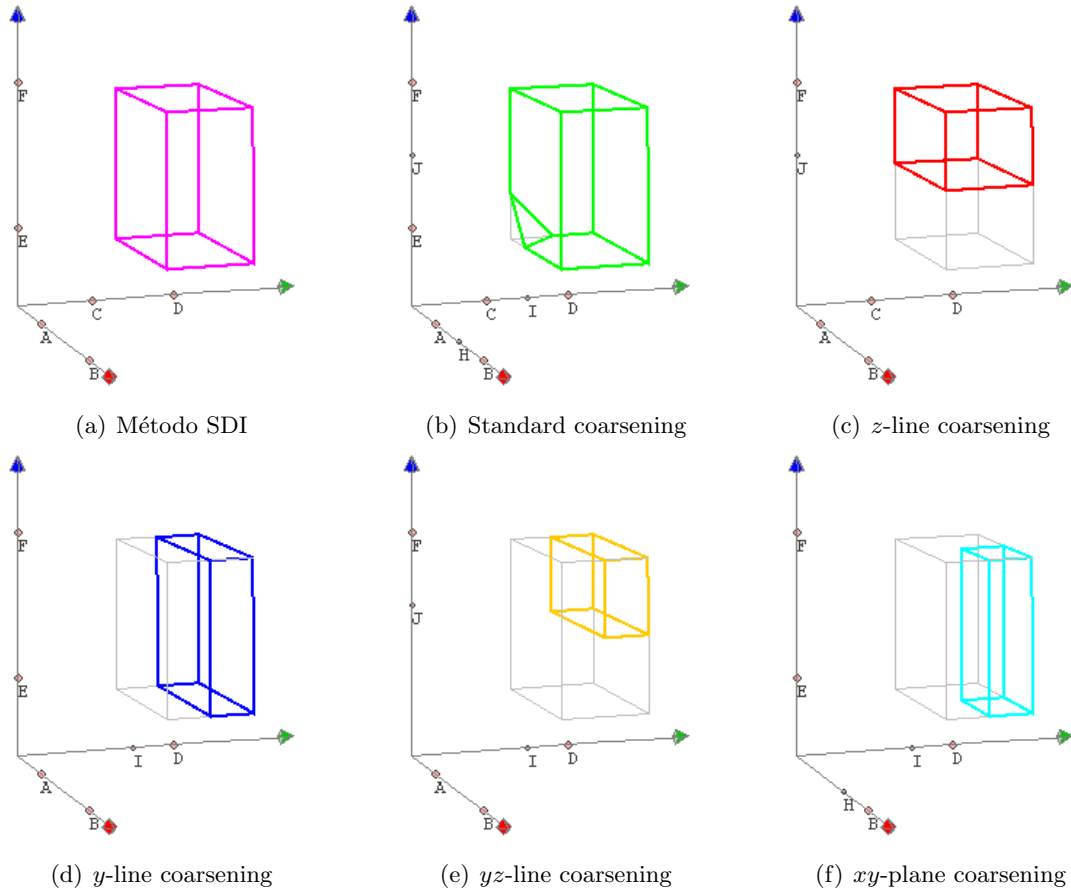


Figura 1: Problema de Helmholtz anisotrópico 3D. Regiones para el análisis de los extremos de la función  $\psi$ , los cuales intervienen el estudio de la convergencia del método SDI y en el análisis de Fourier local (LFA) para diferentes estrategias de “coarsening”.

- La aplicación de una estrategia de “standard coarsening” cuenta con un factor  $\frac{1}{2}$  en el caso isotrópico y degenera a un factor de 1 a medida que aumenta la anisotropía, tanto si ésta acontece sólo en una dirección como en dos.
- La aplicación de una estrategia de engrosamiento en una dirección (“line coarsening”) permite corregir la degeneración en el factor de “smoothing” antes observada siempre que la dirección seleccionada se corresponda con una dirección en la que las incógnitas estén fuertemente acopladas (es decir la dirección seleccionada se corresponde en el operador (1) con un coeficiente próximo a 1 en la derivada en esa dirección) alcanzado un valor de  $\frac{9}{19} = 0,4736\dots$  para situaciones próximas al caso isotrópico bien en tres o dos direcciones, y un valor de  $\frac{13}{43} = 0,3023\dots$  en otro caso.
- La aplicación de estrategias de relajación por planos permite la obtención bien de un factor de  $\frac{17}{67} = 0,2537\dots$  cuando las dos direcciones de engrosamiento parcial coinciden con incógnitas fuertemente acopladas entre sí, bien al factor  $\frac{13}{43}$  o  $\frac{9}{19}$  en un comportamiento análogo al caso de relajación en una dirección.

Los resultados antes reflejados muestran como una adecuada estrategia de engrosa-

	$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim 1$	$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \ll 1$	$\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2 \ll 1$	$\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2 \sim 1$
	$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 1$	$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$	$\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2$ fijo	$\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 1$
Standard Coarsening	$\mu_{loc} \rightarrow \frac{1}{2}$	$\mu_{loc} \rightarrow 1$	$\mu_{loc} \rightarrow 1$	$\mu_{loc} \rightarrow 1$
z-line coarsening	$\mu_{loc} \rightarrow \frac{9}{19}$	$\mu_{loc} \rightarrow \frac{13}{43}$	$\varepsilon_2 \rightarrow 0$ $\mu_{loc} \rightarrow \frac{13}{43}$ $\varepsilon_2 \rightarrow 1$ $\mu_{loc} \rightarrow \frac{9}{19}$	$\mu_{loc} \rightarrow \frac{9}{19}$
y-line coarsening	$\mu_{loc} \rightarrow \frac{9}{19}$	$\mu_{loc} \rightarrow 1$	$\varepsilon_2 \rightarrow 0$ $\mu_{loc} \rightarrow 1$ $\varepsilon_2 \rightarrow 1$ $\mu_{loc} \rightarrow \frac{9}{19}$	$\mu_{loc} \rightarrow \frac{9}{19}$
xy-plane coarsening	$\mu_{loc} \rightarrow \frac{17}{67}$	$\mu_{loc} \rightarrow 1$	$\varepsilon_2 \rightarrow 0$ $\mu_{loc} \rightarrow 1$ $\varepsilon_2 \rightarrow 1$ $\mu_{loc} \rightarrow \frac{9}{19}$	$\mu_{loc} \rightarrow \frac{9}{19}$
yz-plane coarsening	$\mu_{loc} \rightarrow \frac{17}{67}$	$\mu_{loc} \rightarrow \frac{13}{43}$	$\varepsilon_2 \rightarrow 0$ $\mu_{loc} \rightarrow \frac{13}{43}$ $\varepsilon_2 \rightarrow 1$ $\mu_{loc} \rightarrow \frac{17}{67}$	$m\mu_{loc} \rightarrow \frac{17}{67}$

Tabla 1: Comportamiento del factor de “smoothing” del método SDI aplicado al problema de Helmholtz tridimensional según el tipo de anisotropía y según la estrategia de engrosamiento aplicada

miento conduce a un buen comportamiento del método SDI como “smoother” cuando es aplicado en la resolución de problemas anisotrópicos tridimensionales, a lo que hemos de añadir su carácter paralelo.

### Agradecimientos

Trabajo parcialmente financiado por la D.G.E.S. proyecto BFM2003-06446-C02 y por la Junta de Andalucía PAI FQM-124.

### Referencias

- [1] I. Albarreal; M.C. Calzada; J.L. Cruz; E. Fernández-Cara; J.R. Galo; M. Marín. *Time and space parallelization of the Navier-Stokes equations*. Comput. and Appl. Math., Vol.24, No.3 (2005), 1-22.
- [2] A. Brandt, *Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems*, Math. Comp. **31** (138) (1977), 333–390.
- [3] J.R. Galo; I. Albarreal; M.C. Calzada; J.L. Cruz; E. Fernández-Cara; M. Marín, *Simultaneous directions method for elliptic and parabolic systems*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **339** (2004), 145–150.
- [4] J.R. Galo; I. Albarreal; M.C. Calzada; J.L. Cruz; E. Fernández-Cara; M. Marín, *Stability and convergence of a parallel fractional step method for the solution of linear parabolic problems*. Applied Mathematics Research eXpress, Vol. 4 (2005), 117-142.
- [5] J.R. Galo; M.C. Calzada; J.L. Cruz; M. Marín, *Convergencia y optimización del método de direcciones simultáneas en problemas elípticos anisotrópicos*. Actas de XIX CEDYA (2005).
- [6] J.R. Galo; M.C. Calzada; J.L. Cruz; M. Marín, *Alternativa a la degeneración del factor de “smoothing” del método SDI en problemas elípticos anisotrópicos*. Actas de XIX CEDYA (2005).
- [7] J.R. Galo; I. Albarreal; M.C. Calzada; J.L. Cruz; E. Fernández-Cara; M. Marín, *The Smoothing Effect of a Simultaneous Directions Parallel Method as Applied to Poisson Problems*. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Vol. 22 (2006), 414-434. DOI 10.1002/num.20102.
- [8] U. Trottenberg; C.W. Oosterlee; A. Schüller. “*Multigrid*”, Academic Press, New York, 2001.
- [9] I. Yavneh, *Multigrid smoothing factors of red-black Gauss-Seidel applied to a class of elliptic operators*, SIAM J. Numer. Anal. **32**, (6) (1995), 1126-1138.