

Un esquema de volúmenes finitos de alto orden para las ecuaciones de aguas someras con topografía y áreas secas

J.M. GALLARDO¹, M. CASTRO¹, C. PARÉS¹

¹ Dpto. Análisis Matemático, Universidad de Málaga, Campus de Teatinos s/n, 29080-Málaga. E-mails: gallardo@anamat.cie.uma.es, castro@anamat.cie.uma.es, pares@anamat.cie.uma.es.

Palabras clave: Sistemas hiperbólicos, productos no conservativos, esquemas bien equilibrados, método de Roe, esquemas de alto orden, sistemas de aguas someras

Resumen

Presentamos un esquema de volúmenes finitos para la resolución de las ecuaciones de aguas someras con término fuente debido a la topografía del fondo. Se trata de un esquema de alto orden, bien equilibrado y capaz de afrontar situaciones en las que aparecen zonas secas. El esquema se ha desarrollado en un marco no conservativo general, y se basa en reconstrucciones hiperbólicas de estados. El tratamiento de situaciones seco/mojado se lleva a cabo mediante la resolución de problemas de Riemann no lineales en las intercelas donde se detecta una transición.

1. Introducción

Las ecuaciones de aguas someras son ampliamente utilizadas para modelizar flujos en ríos, pantanos, áreas costeras, etc. En la forma considerada en este trabajo, dichas ecuaciones conforman un sistema hiperbólico de leyes de conservación con un término fuente debido a la topografía del fondo.

En los últimos años ha habido un ingente desarrollo de esquemas numéricos de alto orden para resolver las ecuaciones de aguas someras. Dichos esquemas calculan soluciones con un alto grado de precisión (tanto espacial como temporal) en las zonas donde dichas soluciones son regulares, mientras que, al mismo tiempo, las discontinuidades son adecuadamente capturadas. Sin embargo, cuando las ecuaciones contienen un término fuente, debe satisfacerse un cierto balance entre el flujo y el término fuente para que las soluciones estacionarias o casi estacionarias sean aproximadas correctamente. Los esquemas que satisfacen dicho balance se conocen con el nombre de *esquemas bien equilibrados*.

Recientemente, en [1] se presentó un esquema de alto orden y bien equilibrado, desarrollado en un marco abstracto no conservativo. El esquema utiliza reconstrucciones de

estados y se basa en los esquemas de Roe generalizados introducidos en [8], y cuyas propiedades de bien equilibrado fueron analizadas en [6]. En particular, se aplicó con éxito a la resolución de las ecuaciones de aguas someras con topografía, usando reconstrucciones WENO de quinto orden en espacio, y un esquema Runge-Kutta TVD de tercer orden para avanzar en tiempo.

Una dificultad que aparece en la simulación de flujos con superficie libre es la aparición de zonas secas, bien debidas a las condiciones iniciales o como resultado de la evolución del fluido. Los ejemplos son numerosos: inundaciones, roturas de presas, tsunamis, etc. Si no se realizan modificaciones, los esquemas habituales pueden fallar ante la presencia de una situación de seco/mojado, produciendo resultados sin significado físico. En la literatura pueden encontrarse diversos métodos que solucionan el problema, aunque son a lo sumo de segundo orden.

Cuando se aplican a las ecuaciones de aguas someras, los esquemas introducidos en [6] pierden sus propiedades de bien equilibrado ante la presencia de transiciones seco/mojado. De hecho, pueden producir valores negativos del espesor de la capa de agua en las proximidades del frente seco/mojado. Recientemente, en [2] se ha introducido una nueva técnica para el tratamiento de frentes seco/mojado en el contexto de los esquemas de Roe generalizados. Dicha técnica se basa en reemplazar, en las interceldas donde se ha detectado una transición seco/mojado, el correspondiente problema de Riemann lineal por otro no lineal, que se construye de acuerdo con el tipo de transición que aparezca.

La idea central del presente trabajo consiste en combinar adecuadamente el esquema de alto orden presentado en [1] con la técnica introducida en [2] para el tratamiento de frentes seco/mojado. Dicha combinación no es en absoluto trivial, ya que aparecen numerosas dificultades. En particular, los flujos numéricos deben ser modificados consistentemente en función del tipo de transición seco/mojado que tengamos. Asimismo, las variables a reconstruir deben ser elegidas cuidadosamente, tanto para preservar el carácter de bien equilibrado del esquema, como para mantener la positividad del espesor de la capa de agua.

Por último, hemos construido una extensión del esquema para resolver las ecuaciones de aguas someras bidimensionales sobre mallas estructuradas.

2. Ecuaciones de aguas someras, sistemas hiperbólicos no conservativos y esquemas de Roe generalizados

Consideremos el sistema unidimensional

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q = 0, \\ \partial_t q + \partial_x (q^2/h + gh^2/2) = ghH'(x), \end{cases} \quad (1)$$

que está formado por las ecuaciones que gobiernan un flujo de aguas someras a lo largo de un canal recto con sección rectangular constante. La variable x hace referencia al eje del canal y t es el tiempo; $h(x, t)$ y $q(x, t)$ son, respectivamente, el espesor y el caudal; g es la constante gravitatoria; por último, $H(x)$ es la función de profundidad medida desde un nivel de referencia fijado. Se supone que el fluido es homogéneo y no viscoso. Por simplicidad, los términos que modelizan la fricción con el fondo y los efectos del viento no han sido considerados.

Si añadimos a (1) la ecuación trivial $\partial_t H = 0$, obtenemos el sistema no conservativo

$$\partial_t W + \mathcal{A}(W)\partial_x W = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2)$$

La variable de estado es $W = [h, q, H]^T$, mientras que la matriz $\mathcal{A}(W)$ viene dada por

$$\mathcal{A}(W) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -u^2 + c^2 & 2u & -c^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $u = q/h$ y $c = \sqrt{gh}$. Mientras no aparezcan zonas secas, la variable W toma sus valores en el conjunto abierto y convexo $\Omega = \{[h, q, H]^T : h > 0, q \in \mathbb{R}, H \in \mathbb{R}\}$. Aunque más adelante estaremos interesados en el caso en que W pertenezca al conjunto $\Omega^* = \Omega \cup \{[0, 0, H]^T : H \in \mathbb{R}\}$, supondremos en esta sección que se verifica $h > 0$.

En general, el producto no conservativo $\mathcal{A}(W)W_x$ no está bien definido en el marco de la teoría de distribuciones. De manera más precisa, el término ghH_x no define una distribución si tanto h como H poseen discontinuidades en los mismos puntos. Sin embargo, la teoría desarrollada en [3] permite interpretar dicho producto no conservativo como una medida de Borel.

Muchos de los esquemas numéricos diseñados para resolver sistemas de leyes de conservación pueden ser adaptados para la discretización del sistema no conservativo (2). Este es el caso de los esquemas de Roe, cuya definición se basa en el concepto de *linealización de Roe* introducido en [8] (véase también [6]). Aquí, nos restringiremos al caso particular en el que la matriz de Roe viene dada, para estados arbitrarios W_0 y W_1 en Ω , por

$$\mathcal{A}(W_0, W_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\tilde{u}^2 + \tilde{c}^2 & 2\tilde{u} & -\tilde{c}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde \tilde{u} y \tilde{c} son los estados de Roe clásicos:

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_0}u_0 + \sqrt{h_1}u_1}{\sqrt{h_0} + \sqrt{h_1}}, \quad \tilde{c} = \sqrt{g \frac{h_0 + h_1}{2}}. \quad (3)$$

Consideremos una descomposición en celdas $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, donde $x_{i+1/2} = i\Delta x$; $x_i = (i-1/2)\Delta x$ es el centro de la celda I_i . Sea Δt el paso temporal y definamos $t^n = n\Delta t$. Denotemos por W_i^n la aproximación al promedio de la solución exacta en la celda I_i , en el tiempo t^n .

Dados los estados W_i^n y W_{i+1}^n , la matriz de Roe asociada se define como

$$\mathcal{A}_{i+1/2} = \mathcal{A}(W_i^n, W_{i+1}^n).$$

Entonces, el esquema numérico puede escribirse como sigue:

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{A}_{i-1/2}^+(W_i^n - W_{i-1}^n) + \mathcal{A}_{i+1/2}^-(W_{i+1}^n - W_i^n)). \quad (4)$$

En lo que atañe a la estabilidad, hay que considerar una condición de tipo CFL. Por último, también se aplica el método de corrección entrópica de Harten-Hyman.

Como es bien sabido, la presencia de términos fuente o de acoplamiento en sistemas de leyes de conservación puede afectar a la calidad de la solución numérica cuando se aproximan estados estacionarios o casi estacionarios. Los *esquemas bien equilibrados*, considerados por numerosos autores, solucionan dicho problema. Para una definición de la propiedad de bien equilibrado en un marco no conservativo, véase [6].

En el contexto de las ecuaciones de aguas someras (1), diremos que un esquema es *bien equilibrado con orden γ* si aproxima las soluciones estacionarias con orden γ , y es *exactamente bien equilibrado* si las calcula de forma exacta. En [6] se prueba que el esquema (4) es bien equilibrado con orden dos para soluciones estacionarias generales, y es exactamente bien equilibrado para soluciones correspondientes a agua en reposo.

3. Esquemas de alto orden

Los esquemas de Roe generalizados introducidos en la sección anterior son tan sólo de primer orden. Para capturar adecuadamente las características de flujos complejos, es necesario considerar esquemas con mayor orden de precisión. En [1] se ha construido una extensión de alto orden del esquema (4), basada en reconstrucciones de los estados W . Veamos brevemente cómo se construye dicho esquema.

Fijado un tiempo t , se consideran funciones de reconstrucción de orden p , $\mathcal{R}_{i+1/2}^{-,t}(x)$ y $\mathcal{R}_{i+1/2}^{+,t}(x)$, definidas en $[x_i, x_{i+1/2}]$ y $[x_{i+1/2}, x_{i+1}]$ respectivamente. Sean $W_{i+1/2}^{\pm}(t)$ las reconstrucciones laterales en la intercelda $x_{i+1/2}$. Entonces el esquema puede escribirse en forma semidiscreta como sigue:

$$W_i'(t) = -\frac{1}{\Delta x} \left(\mathcal{A}_{i-1/2}^+(W_{i-1/2}^+(t) - W_{i-1/2}^-(t)) + \mathcal{A}_{i+1/2}^-(W_{i+1/2}^+(t) - W_{i+1/2}^-(t)) \right. \\ \left. + \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \mathcal{A}(\mathcal{R}_{i-1/2}^{+,t}(x)) \frac{d}{dx} \mathcal{R}_{i-1/2}^{+,t}(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \mathcal{A}(\mathcal{R}_{i+1/2}^{-,t}(x)) \frac{d}{dx} \mathcal{R}_{i+1/2}^{-,t}(x) dx \right), \quad (5)$$

donde $\mathcal{A}_{i+1/2}$ es la matriz de Roe asociada a los estados $W_{i+1/2}^-(t)$ y $W_{i+1/2}^+(t)$.

El esquema (5) resulta ser de alto orden (teorema 3.2 en [1]), exactamente bien equilibrado para soluciones de agua en reposo, y bien equilibrado con alto orden para soluciones estacionarias generales. Por último, se considera un integrador en tiempo estándar de orden adecuado.

4. El esquema MRoe para las ecuaciones de aguas someras

En [2] se modificó el esquema de Roe (4) para realizar un tratamiento adecuado de situaciones seco/mojado cuando se consideran las ecuaciones de aguas someras (1). En cada intercelda donde se detecta una transición, se sustituye el problema de Riemann aproximado habitual por un problema no lineal adecuado, que se resuelve de forma exacta. Los flujos numéricos deben ser también modificados: véase [2] para los detalles. El esquema resultante se denomina *esquema MRoe*, y resulta ser bien equilibrado, incluso para soluciones estacionarias que contienen áreas secas. Además, se asegura la positividad del espesor h calculado en las interceldas donde se ha detectado una transición seco/mojado, salvo en casos muy especiales, en los que será necesario restringir la condición CFL.

5. Extensión de alto orden del esquema MRoe

En esta sección presentamos un esquema bien equilibrado de alto orden para resolver (1), capaz de tratar adecuadamente situaciones de seco/mojado. Los ingredientes de dicho esquema han sido introducidos en las secciones precedentes. La idea es combinar el esquema de alto orden (5) con la técnica del esquema MRoe para el tratamiento de zonas secas. El esquema resultante se denomina *esquema HMRoe*.

Es necesario elegir adecuadamente las variables que serán reconstruidas. Para que el esquema resultante sea exactamente bien equilibrado para las soluciones de agua en reposo, consideraremos la elevación $\eta = h - H$. Por otra parte, para evitar la aparición de valores negativos del espesor h , reconstruiremos dicha variable usando un operador que preserve la positividad. En resumen, las variables reconstruidas serán (h, q, η) .

Demos una breve descripción del esquema HMRoe. Supongamos conocidos los promedios $W_i = [h_i, q_i, H_i]^T$ en un instante t dado. Entonces:

- Se definen los promedios $\eta_i = h_i - H_i$. Si $h_i < h_\varepsilon$, donde h_ε es una tolerancia fijada, hacemos $h_i = 0$ y $q_i = 0$ (esta puesta a cero se realiza tan sólo en el proceso de reconstrucción: los valores originales de los promedios no son modificados).
- A partir de los promedios en una plantilla adecuada, reconstruimos las variables (h, q, η) y definimos el fondo reconstruido usando la igualdad $H = h - \eta$: esto nos proporciona los operadores de reconstrucción $\mathcal{R}_{i+1/2}^\pm(x)$ y los estados reconstruidos en las intercelas $W_{i+1/2}^\pm$. Si una plantilla contiene una celda seca, tomamos $W_{i+1/2}^- = W_i^n$ o $W_{i+1/2}^+ = W_{i+1}^n$, según el caso.
- En el caso de fondo mojado, los flujos numéricos son los mismos que en (5).
- Si aparece una transición seco/mojado, se aplica la técnica introducida en [2] para modificar tanto los estados intermedios como los flujos numéricos.

Una vez que el esquema semidiscreto ha sido definido, lo integramos en tiempo usando un esquema estándar de orden apropiado.

Según se demuestra en [1] y [2], el esquema HMRoe es exactamente bien equilibrado para soluciones de agua en reposo (con o sin áreas secas), y bien equilibrado con el mismo orden que el operador de reconstrucción utilizado, para soluciones estacionarias generales.

En la práctica hemos usado reconstrucciones de tipo hiperbólico (véase [5]). Las razones para esta elección son múltiples: monotonicidad (evitamos la aparición de valores negativos del espesor h); tercer orden de precisión en toda la celda (el esquema resultante es de orden tres); plantilla compacta (robustez); y, por último, el hecho de que las hipérbolas poseen un mecanismo natural para reducir las oscilaciones cerca de un choque. Respecto a la discretización en tiempo, hemos utilizado un método Runge-Kutta TVD de tercer orden.

6. Extensión al caso bidimensional

En [7] se ha desarrollado una extensión natural del método de reconstrucción hiperbólica sobre mallas no estructuradas en dos dimensiones. Dicha extensión, denominada reconstrucción *bi-hiperbólica*, considera en cada celda una combinación de dos hipérbolas, cada

una de ellas asociada a una dirección espacial. Cuando se aplica sobre mallas rectangulares (no necesariamente uniformes), se obtiene una reconstrucción de tercer orden en cada celda computacional.

El método de reconstrucciones bi-hiperbólicas permite extender el esquema HM Roe a un contexto bidimensional sobre mallas rectangulares, ya que la técnica para el tratamiento de frentes seco/mojado puede aplicarse componente a componente.

7. Experimentos numéricos

En los experimentos numéricos que siguen se ha tomado $CFL = 0,8$, $h_\varepsilon = 10^{-6}$ y $g = 9,81$. Los detalles de cada experimento pueden consultarse en [4].

7.1. Generación de fondo seco: la vara de Moisés

En este test consideramos un fondo plano con un obstáculo rectangular. Inicialmente, la altura del agua es constante y el caudal es -350 si $x < 50/3$ y 350 si no. Dicha discontinuidad provoca la aparición, a la derecha del escalón, de una zona seca entre dos ondas de rarefacción que viajan en direcciones opuestas. La onda que viaja hacia la izquierda interactúa con el obstáculo, produciendo la aparición de ondas en la superficie del agua. Los resultados obtenidos para diversos tiempos se representan en la figura 1.

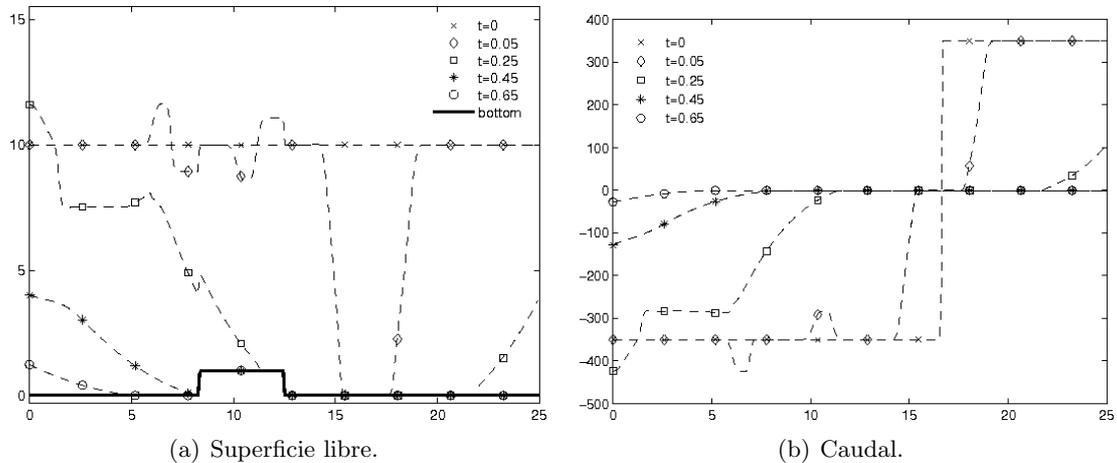


Figura 1: Generación de un área seca sobre fondo no plano.

7.2. Drenado sobre fondo no plano

En este experimento el fondo contiene un montículo e, inicialmente, el agua tiene altura constante. A la derecha se impone una condición de drenado. El flujo alcanza un estado estacionario, con agua a la izquierda del montículo y una zona seca a su derecha (véase la figura 2).

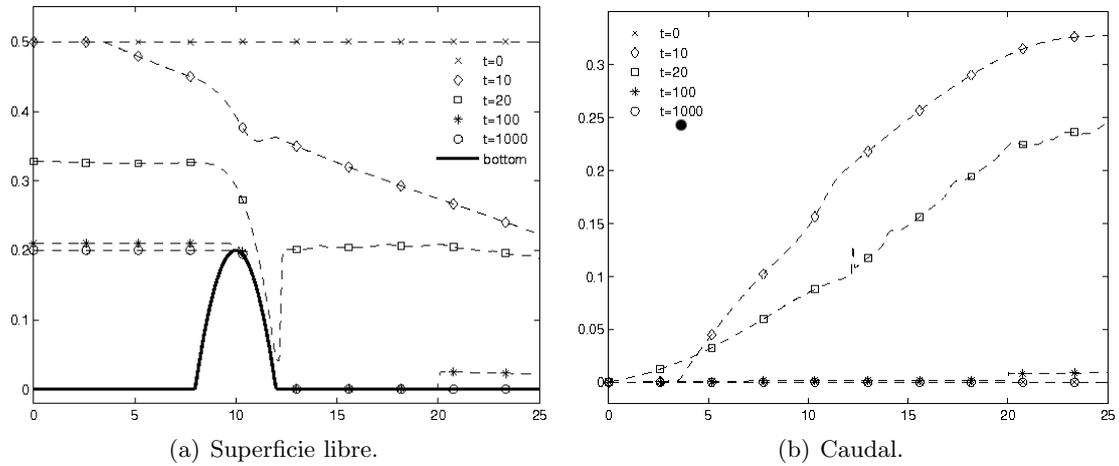


Figura 2: Drenado sobre fondo no plano.

7.3. Inundación en un canal abierto

Consideramos un canal rectangular con tres montículos. Se supone que las fronteras superior e inferior son paredes sólidas, y se impone un flujo entrante por la izquierda de la siguiente forma: hasta $t = 300$, $h = 0,5$ y $u = 1,0$; desde $t = 300$, $h = 1,0$ y $u = 1,0$. Los resultados obtenidos se representan en la figura 3, siendo bastante consistentes físicamente.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto BFM2003-07530-C02-02.

Referencias

- [1] M. Castro, J.M. Gallardo, C. Parés, *High order finite volume schemes based on reconstruction of states for solving hyperbolic systems with nonconservative products. Applications to shallow water systems*. Math. Comput. 75 (2006), 1103–1134.
- [2] M. Castro, J.M. González, C. Parés, *Numerical treatment of wet/dry fronts in shallow flows with a modified Roe scheme*. Math. Mod. Meth. App. Sci. 16 (2006), 897–931.
- [3] G. Dal Maso, P. LeFloch, F. Murat, *Definition and weak stability of nonconservative products*. J. Math. Pures Appl. 74 (1995), 483–548.
- [4] J.M. Gallardo, C. Parés, M. Castro, *On a well-balanced high-order finite volume scheme for shallow water equations with topography and dry areas*. Preprint (2007).
- [5] A. Marquina, *Local piecewise hyperbolic reconstructions for nonlinear scalar conservation laws*. SIAM J. Sci Comput. 15 (1995), 892–915.
- [6] C. Parés, M. Castro, *On the well-balanced property of Roe’s method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow water flows*. ESAIM: M2AN 38 (2004), 821–852.
- [7] H.J. Schroll, F. Svensson, *A bi-hyperbolic finite volume method on quadrilateral meshes*. J. Sci. Comp. 26 (2006), 237–260.
- [8] I. Tóumi, *A weak formulation of Roe’s approximate Riemann solver*. J. Comput. Phys. 102 (1992), 360–373.

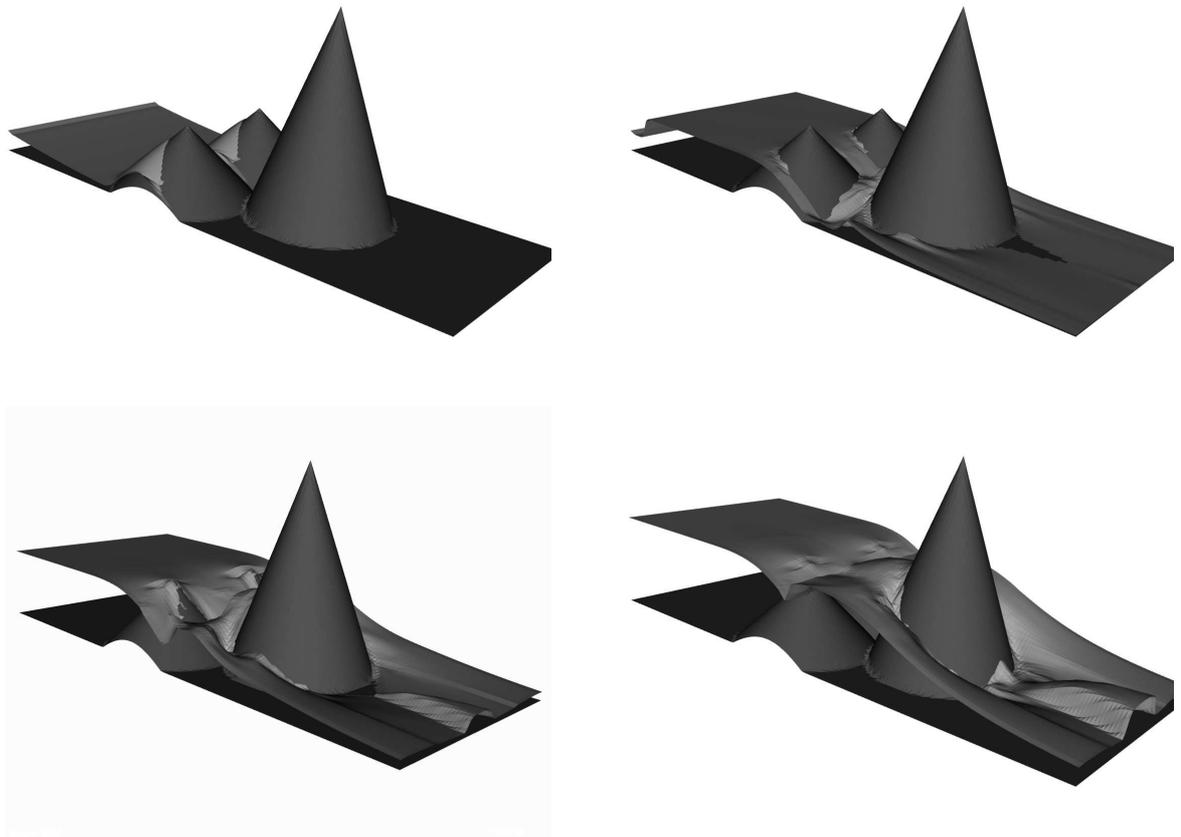


Figura 3: Inundación en un canal abierto. Resultados para $t = 8, 30, 300$ y 900 .