

## Un problema de frontera libre para fluidos No-Newtonianos y aplicación al movimiento de glaciares

M. A. FONTELOS<sup>1</sup>, A. I. MUÑOZ<sup>2</sup>, E. SCHIAVI<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad Rey Juan Carlos, E.S.C.E.T.*

*c/ Tulipán s/n, 28933, Móstoles, Madrid, España. E-mails: [anaisabel.munoz@urjc.es](mailto:anaisabel.munoz@urjc.es),  
[emanuele.schiavi@urjc.es](mailto:emanuele.schiavi@urjc.es).*

<sup>2</sup> *Instituto de Matemáticas*

*Consejo Superior de Investigaciones Científicas  
c/ Serrano, nº 123, 28006, Madrid, España. E-mail: [marco.fontelos@uam.es](mailto:marco.fontelos@uam.es).*

**Palabras clave:** Fluidos no Newtonianos, problema de Stokes, frontera libre, soluciones débiles, método de Newton, método del disparo, método de elementos finitos

### Resumen

En este trabajo se aborda el estudio de la compleja dinámica de la zona de transición que se da en las denominadas marine ice sheet, donde el hielo pasa de deslizarse sobre un lecho de roca y sedimentos a flotar sobre el mar. Para ello se analiza un modelo matemático que describe el flujo del hielo en un entorno de la grounding line, considerando al hielo como un fluido No-Newtoniano. Habiendo probado la existencia y unicidad de soluciones débiles para el modelo considerado, se resuelve numéricamente el problema local que se tiene para un entorno de la zona de transición, obteniendo el comportamiento del campo de velocidades y esfuerzos, así como la geometría de la frontera libre que representa la interfase hielo-agua marina.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las marine ice sheets son masas de hielo continental que yacen sobre un lecho rocoso que se encuentra situado varios centenares de metros por debajo del nivel del mar, alcanzándose incluso los dos kilómetros. En estos mantos de hielo es usual que en sus márgenes el hielo polar deje de fluir sobre la roca y acabe flotando en el agua del mar. Estas lenguas de hielo que se adentran en el mar reciben el nombre en la bibliografía inglesa de ice shelves. La frontera móvil que localiza la transición del flujo de hielo, en el cual pasa de fluir sobre un lecho continental a hacerlo sobre el agua marina se denomina grounding line. El estudio

del flujo de hielo en un entorno de la grounding line es de gran importancia puesto que desempeña un papel crucial en la estabilidad de las marine ice sheets, como por ejemplo la Antártida Occidental. Fuera de esta zona de transición, el flujo del hielo es razonablemente bien entendido. En la ice sheet, el flujo del hielo está dominado fundamentalmente por la cizalla en planos horizontales cercanos a la base, sin embargo, en la ice shelf tienen mayor relevancia los esfuerzos laterales y las tensiones longitudinales. La diferencia entre los dos tipos de flujo y el cambio de uno a otro hace suponer que en la zona de transición se han de tener en cuenta todas las componentes de los esfuerzos. En esta comunicación analizaremos un modelo matemático que describe el flujo del hielo en un entorno de la grounding line y presentaremos su resolución numérica. Desde el punto de vista matemático, abordaremos un problema no lineal de frontera libre que se corresponde con la parte del hielo que está en contacto con el agua del mar. El propósito de nuestro análisis es determinar el campo de velocidades, así como la geometría y localización de la frontera libre.

## 2. EL PROBLEMA MATEMÁTICO

El flujo del manto de hielo será modelado como un flujo de Stokes en régimen estacionario. Consideraremos un dominio bidimensional  $\mathcal{D} := \{(x, z) \in [-M, M] \times [-1, 0]\}$  para representar un entorno de la grounding line. En la figura 1 pueden observarse dos regiones

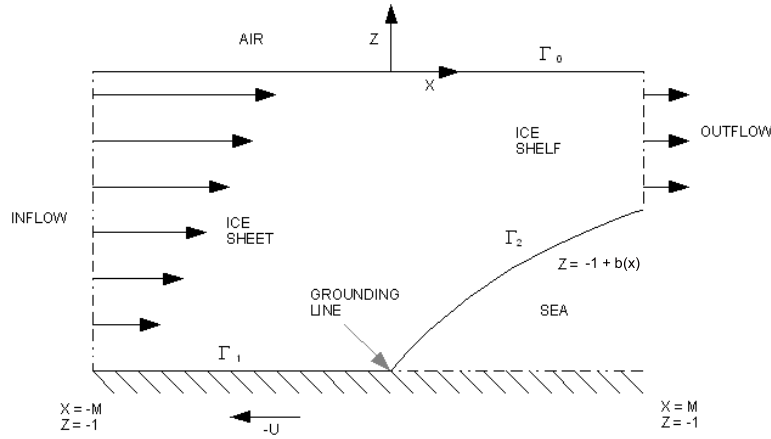


Figura 1: Planteamiento del problema

bien diferenciadas, la ice sheet y la ice shelf, en las cuales el flujo es relativamente bien conocido, y la transición de un régimen de flujo a otro en un entorno de la grounding line. La frontera superior, denotada  $\Gamma_0$ , es la que corresponde a la parte del hielo en contacto con el aire. Asumiremos que ésta es plana y localizada en el plano vertical  $z = 0$ . La parte del hielo en contacto con el lecho rocoso, denotada por  $\Gamma_1$ , se identifica con el semiplano  $z = -1$  y  $x < 0$ . La única frontera que se considera libre es la parte del hielo en contacto con el agua marina, denotada por  $\Gamma_2$  y descrita por la curva  $z = -1 + b(x)$ . Nótese que en la grounding line, localizada en el punto  $x = 0$  y  $z = -1$ , confluyen distintas condiciones de contorno. Este hecho, puede dar lugar a singularidades en la solución. En esta comunicación se supondrá que la grounding line se mueve horizontalmente (en la dirección

principal de flujo) con velocidad constante  $U$  y se considerará un sistema de referencia unido a ella. Nuestro propósito es determinar el campo de velocidades  $(-U, 0) + (u, w)$  y la geometría de la frontera libre en las vecindades de la grounding line. A lo largo del texto se utilizará indistintamente la notación  $(u, w)$  y  $(v_1, v_2)$ . El tensor de deformaciones se denotará por  $D$ , donde

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, \quad x_1 = x, \quad x_2 = z, \quad v_1 = u, \quad v_2 = w,$$

y la viscosidad  $\mu$  dependiendo del tensor de deformaciones como sigue:

$$\mu(|D|) = \mu_0 |D|^{\frac{1}{n}-1}, \quad \text{con } \mu_0 \text{ constante y } |D| \text{ dado por} \quad (1)$$

$$|D| = \sqrt{2D : D} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2}.$$

El valor del exponente  $n$  que se asume típicamente para el flujo del hielo es  $n = 3$ . Nótese que  $n = 1$  es el valor del exponente asociado a un fluido Newtoniano. Las ecuaciones que se han de satisfacer en el interior del dominio  $\mathcal{D}$  son las de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento,

$$\nabla \cdot T = 0, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ en } \mathcal{D}, \quad (2)$$

donde el tensor de esfuerzos  $T$  viene dado por  $T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu D_{ij}$  y  $\vec{v} = (u, w)$ . La presión  $p$  es una presión reducida, pues es la resultante de restar el término  $\rho_{ice}g(z+1)$  al término de presión real, para así absorber la acción de la fuerza gravitatoria sobre el hielo (véase [1]). De hecho, se reduce a la presión real para  $\rho_{ice} = 0$ . En referencia a las condiciones de contorno, en la parte superior de la ice sheet en contacto con el aire,  $\Gamma_0$ , imponemos que la velocidad normal y los esfuerzos tangenciales sean nulos,

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{t} T \vec{n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_0, \quad (3)$$

donde  $\vec{n}$  y  $\vec{t}$  son los vectores normal y tangente a  $\Gamma_0$  respectivamente. En la parte inferior de la ice sheet que está en contacto con el lecho de rocas y sedimentos, se asume que  $\vec{v} = \vec{0}$ . En la parte que está en contacto con el agua del mar, imponemos un balance entre los esfuerzos viscosos y la presión hidrostática del agua. Por tanto, en la base, dependiendo de si el hielo yace sobre el lecho rocoso o flota en el mar, se consideran la siguientes condiciones de contorno:

$$\vec{v} = \vec{0} \quad \text{en } \Gamma_1, \quad (4)$$

$$\vec{t} T \vec{n} = 0, \quad T \vec{n} = \gamma U b(x) \vec{n} \quad \text{en } \Gamma_2, \quad (5)$$

donde  $\gamma$  es el parámetro adimensional  $\gamma = \frac{\rho g [L]^{\frac{1}{n}+1}}{U \mu_0}$ , que depende de las densidades del agua y del hielo,  $\rho = \rho_{water} - \rho_{ice}$ , la velocidad  $U$ , la escala de longitud típica y el factor  $\mu_0$  que aparece en la ley de viscosidad (1). También han de imponerse condiciones para los flujos entrante y saliente en  $x \rightarrow \pm M$  respectivamente. Denotaremos el flujo de entrada en  $x \rightarrow -M$  por  $\vec{v}^{in}(z)$  y asumiremos en concordancia con la física del problema que es de tipo Poiseuille, es decir,

$$\vec{v}^{in} = \left( \frac{\sigma}{2} (1 - |z|^{n+1}), 0 \right). \quad (6)$$

El flujo saliente, denotado por  $\vec{v}^{out}(z)$  será de tipo uniforme,

$$\vec{v}^{out} = (U_\infty, 0). \quad (7)$$

Las constantes  $\sigma$  y  $U_\infty$  son dos parámetros positivos arbitrarios que, sin embargo, están ligados por el principio de conservación de la masa del siguiente modo,

$$-U + \int_{-1}^0 u^{in}(z) dz = -U(1 - b(M)) + \int_{b(M)}^0 u^{out}(z) dz,$$

por tanto, la velocidad de la grounding line puede determinarse a partir de  $u^{in}(z)$ ,  $u^{out}(z)$  y  $b(M)$  como sigue:

$$U = \frac{1}{b(M)} \left( \int_{-1}^0 u^{in}(z) dz - \int_{b(M)}^0 u^{out}(z) dz \right). \quad (8)$$

Nótese que además,  $\Gamma_2$  debe evolucionar siguiendo el campo de velocidades, y por tanto, para soluciones estacionarias se tendrá que

$$0 = Ub_x + w - b_x u. \quad (9)$$

### 3. EXISTENCIA Y UNICIDAD PARCIAL DE SOLUCIONES DÉBILES

#### 3.1. El problema en un dominio fijo S

Dado que estamos tratando con un problema de frontera libre y este hecho podría complicar el análisis, lo que primero que se hará es aplicar un difeomorfismo de  $\mathcal{D}$  al rectángulo  $S \equiv [-M, M] \times [-1, 0]$ , con el fin de considerar un dominio fijo que facilite el análisis. Para aplicar este difeomorfismo, asumiremos cierta regularidad de la frontera libre y supondremos que es una perturbación de la curva  $(x, -1)$ ,  $x > 0$ . Remitimos al lector a la sección 3.2 de [2] donde se presenta un resultado acerca de la regularidad de la frontera libre y se justifica la aplicación del difeomorfismo, en particular se demuestra que  $b(x) \in C^{1+\frac{1}{n}}(0, M)$ . Tras realizar el difeomorfismo y un proceso de linealización, se obtienen las ecuaciones que han de verificarse en el interior de  $S$ :

$$\nabla \cdot T = 0, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ en } [-M, M] \times [-1, 0], \quad (10)$$

donde  $T$  es el tensor de esfuerzos, que en términos de la función de corriente  $\psi$ , dada por  $\psi_x = w$  y  $\psi_z = -u$ , se define del modo siguiente:

$$T = \begin{pmatrix} -p + \mu(|D|)\psi_{xz} & \frac{1}{2}\mu(|D|)(\psi_{zz} - \psi_{xx}) \\ \frac{1}{2}\mu(|D|)(\psi_{zz} - \psi_{xx}) & -p - \mu(|D|)\psi_{xz} \end{pmatrix}.$$

Aplicando el rotacional a (10)<sub>1</sub>, para eliminar la presión de la ecuación, se obtiene que la función de corriente ha de satisfacer:

$$\mu(|D|)\Delta^2\psi + 2\partial_x(\mu(|D|))[\psi_{xzz} + \psi_{xxx}] + 2\partial_z(\mu(|D|))[\psi_{xxz} + \psi_{zzz}] +$$

$$4\partial_{xz}(\mu(|D|))\psi_{xz} + [\partial_{xx}(\mu(|D|)) - \partial_{zz}(\mu(|D|))][\psi_{xx} - \psi_{zz}] = 0. \quad (11)$$

Nótese que en el caso Newtoniano (para  $n = 1$ ) con viscosidad constante, la ecuación anterior se reduce al operador biarmónico actuando sobre  $\psi$ , es decir,  $\Delta^2\psi = 0$ . Respecto a las condiciones de contorno, se tiene que la condición (3) se traduce en la siguiente para el dominio  $S$ ,

$$T_{xz} = 0, w = 0 \text{ en } z = 0, \quad (12)$$

la condición (4) en

$$\vec{v} = \vec{0} \text{ en } z = -1, x < 0, \quad (13)$$

y finalmente, la condición (5) en

$$T_{xz} = 0, T_{zz} = -\gamma \int_0^x w(s, -1) \text{ en } z = -1, x > 0. \quad (14)$$

Nótese que en (14), la integral  $\int_0^x w(s, -1)$  reemplaza a  $b$  en (5), y es la expresión que resulta después de integrar en  $x$  la linealización de (9). En las fronteras laterales,  $x = -M$  y  $x = +M$ , se consideran un flujo de entrada de tipo Poiseuille y de salida un flujo uniforme, dados respectivamente por (6) y (7). Las condiciones de contorno escritas en términos de la función de corriente quedan como sigue:

$$\psi_x = 0 \quad \text{y} \quad \psi_{zz} - \psi_{xx} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, \quad (15)$$

$$\psi_x = \psi_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \psi_z = 0 \quad \text{en} \quad z = -1, x < 0 \quad \text{y} \quad (16)$$

$$\psi_{zz} - \psi_{xx} = 0, [\mu(|D|)(\psi_{zz} - \psi_{xx})]_z + 4[\mu(|D|)\psi_{xz}]_x = -\gamma\psi_x \text{ en } z = -1, x > 0. \quad (17)$$

### 3.2. Estudio de la existencia y unicidad de soluciones débiles en $S$ .

En esta sección se estudiará la existencia de soluciones débiles del problema (10) con las condiciones de contorno (12), (13), (14) y condiciones de flujo de entrada y salida, (6) y (7) respectivamente. También se presentará un resultado de unicidad parcial. Remitimos a los lectores interesados al trabajo [2], donde aparece desarrollado este estudio con mayor detalle. En primer lugar definimos el espacio funcional  $X$ ,

$$X \equiv \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = (v_1, v_2) \in [W^{1,p}(S)]^2, v_1(x, -1) = v_2(x, -1) = 0, x \in [-M, 0], \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0, v_2(x, 0) = 0, T_{xz}(x, 0) = 0, x \in [-M, M], \\ \vec{v} = \vec{v}^{in} \text{ en } x = -M \text{ y } \vec{v} = \vec{v}^{out} \text{ en } x = M, \end{array} \right\}$$

donde  $p = \frac{n+1}{n}$ , el espacio  $Z$ ,

$$Z \equiv \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = (v_1, v_2) \in [W^{1,p}(S)]^2, v_1(x, -1) = v_2(x, -1) = 0, x \in [-M, 0], \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0, v_2(x, 0) = 0, T_{xz}(x, 0) = 0, x \in [-M, M], \\ \vec{v} = \vec{0} \text{ en } x = -M \text{ y } \vec{v} = \vec{0} \text{ en } x = M. \end{array} \right\}$$

y lo que entenderemos por solución débil. Se dirá que  $\vec{v} \in X$  es una solución débil del problema dado por (11)- (14), junto con (6) y (7), si se verifica la siguiente identidad:

$$\int_S \mu(|D|(\vec{v}))(v_{i,j} + v_{j,i})(\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}) - \gamma \int_{L^+} \varphi_2 b = 0, \forall \vec{\varphi} \in Z, \quad (18)$$

con  $b$  verificando

$$Ub_x = v_2 \quad y \quad b(0) = 0. \quad (19)$$

El resultado de existencia de soluciones débiles, que probamos en [2], es el siguiente teorema: Si el flujo de entrada y de salida,  $\vec{v}^{in}$  y  $\vec{v}^{out}$ , verifican que  $\|\vec{v}^{in}\|_{C^2[-1,0]} < \varepsilon$  y  $\|\vec{v}^{out}\|_{C^2[-1+b(M),0]} < \varepsilon$  para  $\varepsilon$  y  $b(M)$  suficientemente pequeños, entonces existe al menos una solución débil  $\vec{v} \in X$  del problema no lineal (10) con condiciones de contorno (12),(13), (14) y con condiciones de flujo de entrada y salida dadas por (6) y (7).

## 4. ANÁLISIS NUMÉRICO

### 4.1. Análisis numérico del problema local en un entorno de la grounding line

En esta sección describiremos la resolución numérica del problema no lineal local, es decir, el que se tiene en un entorno de la grounding line. En primer lugar, escribiremos la ecuación que tenemos que resolver de modo adecuado. En el interior de un entorno de la grounding line, la ecuación que se ha de satisfacer en terminos de la función de corriente es:

$$2(2\mu(|D|)\psi_{xz})_{xz} = (\mu(|D|)(\psi_{xx} - \psi_{zz}))_{zz} - (\mu(|D|)(\psi_{xx} - \psi_{zz}))_{xx}. \quad (20)$$

Si definimos los operadores  $D_1$  y  $D_2$ , y  $T_1$ ,  $T_2$ , como sigue:

$$D_1 \equiv 2\partial_{xz}, \quad D_2 \equiv \partial_{zz} - \partial_{xx}, \quad T_1 \equiv \mu(|D|)D_1(\psi) \quad y \quad T_2 \equiv \mu(|D|)D_2(\psi), \quad (21)$$

la definición de  $|D|$  y la ecuación (11) pueden escribirse del siguiente modo:

$$|D| = (|D_1(\psi)|^2 + |D_2(\psi)|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad D_2T_2 = -D_1T_1. \quad (22)$$

Para estudiar el flujo en un entorno de la grounding line, utilizaremos coordenadas polares  $(r, \theta)$ , como se hizo en [1], y buscaremos soluciones separables de la forma  $\psi = r^m f(\theta)$  y

$$T_1 = r^{\tilde{m}} t_1(\theta), \quad T_2 = r^{\tilde{m}} t_2(\theta), \quad \text{con } \tilde{m} = \frac{m-2}{n}. \quad (23)$$

El propósito de este análisis numérico es generalizar los resultados presentados en [1] relativos a un fluido Newtoniano, al caso más general de fluidos con una ley de flujo de tipo potencia como la estudiada en el presente trabajo. Por tanto, se trata de encontrar un exponente  $m$  adecuado para cada exponente  $n$  asociado a la reología considerada.

El procedimiento numérico usado está esencialmente basado en un método de disparo para ajustar  $m$  de modo que satisfagan las condiciones de contorno (ver [2] para los detalles). En la figura (2) se presentan los resultados obtenidos para diferentes valores de  $n$ , exponente asociado a la reología, con respecto al exponente  $m$ , relativo a la función de corriente  $\psi = r^m f(\theta)$ . Nótese que para el valor típico  $n = 3$  en la ley de flujo de Glen, el valor de  $m$  que se obtiene es aproximadamente  $m \sim 1,25$ .

Puede observarse que el exponente  $m$  decrece monótonamente con  $n$  y que el valor para  $n = 1$  es  $m = 1,5$ , que coincide con el obtenido analíticamente en [1]. Según los resultados numéricos, los valores de  $m$  varían de 1,5 a 1, siendo 1 el valor asintótico de  $m$  al que

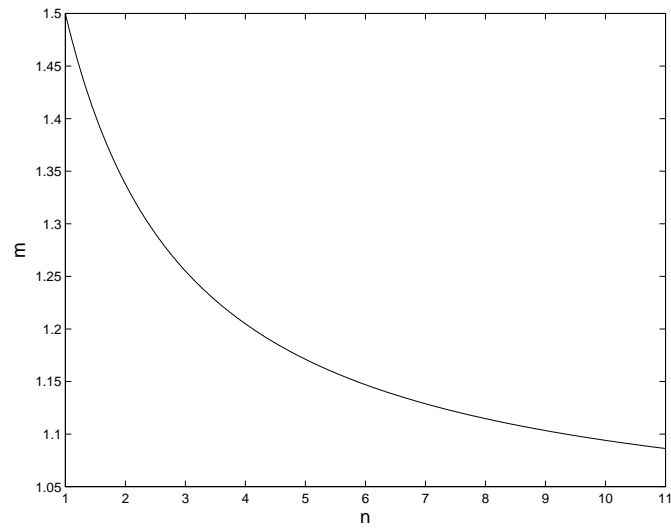


Figura 2: Relación entre el exponente  $m$  y el exponente de la reología,  $n$ .

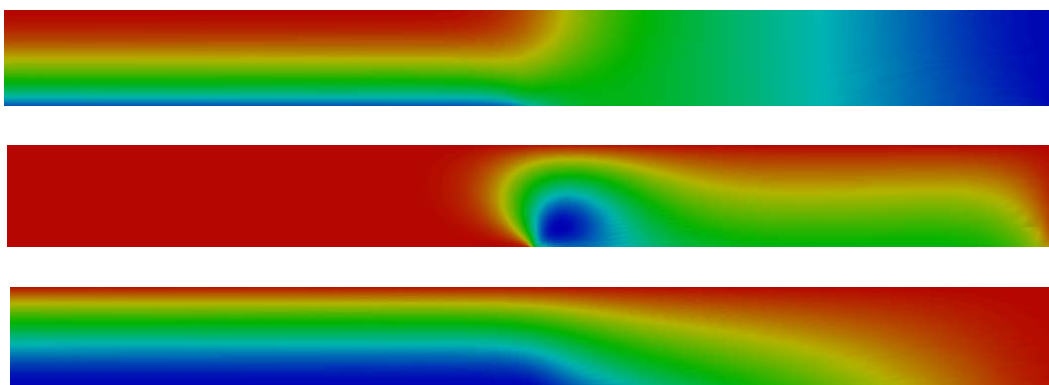


Figura 3: Resultados numéricos relativos a (de arriba a abajo) las componentes horizontal y vertical del campo de velocidades y a la función de corriente para el caso  $n = 3$ .

parece converger cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por tanto,  $(u, w) \rightarrow (0, 0)$  cuando  $r \rightarrow 0$ , lo que implica, acorde con (9), que la geometría de la frontera libre,  $b(x)$ , es plana en las proximidades de la grounding line. Este hecho tiene dos consecuencias. En primer lugar, el difeomorfismo realizado del dominio  $\mathcal{D}$  al rectángulo  $S$ , queda justificado numéricamente. Y en segundo lugar, puesto que la interfase es plana en la vecindad de la grounding line, el campo de velocidades  $(u, w)$  es continuo y tiende a cero al aproximarse a la línea de contacto. El tensor de deformaciones  $D$  y el de esfuerzos  $T$  son singulares en cualquier caso.

#### 4.2. Análisis numérico del problema global planteado en $\mathcal{D}$

En esta sección describimos el método de elementos finitos adaptativo que ha sido empleado para la resolución numérica del problema planteado en todo el dominio  $\mathcal{D}$  y se presentan los resultados obtenidos. Las simulaciones han sido realizadas en un computador SUN-Blade con 2 procesadores utilizando el software Polyflow de Fluent. Inc. La geometría del problema y la generación del mallado se han realizado con el preprocesador GAMBIT, con una descomposición y optimización del mallado automática. Se han utilizado elementos triangulares de tipo Pave y su número inicial es de 15.512. El mallado se elige de modo que exista un mayor refinamiento en un entorno de la grounding line. Para abordar la no linealidad presente en el término de viscosidad se utiliza un esquema evolutivo que identifica como parámetro de evolución al exponente  $n$  de la ley de potencias del flujo. Al aumentar  $n$ , disminuye la tasa de dependencia de la cizalla con respecto a la viscosidad y por ello se emplean iteraciones de Picard en la viscosidad. El ensamblado de la matriz de rigidez y el proceso de eliminación Gaussiana se realizan en paralelo utilizando un método frontal y la subrutina BLAS3. En el proceso evolutivo, el refinamiento del mallado se basa en criterios locales para la componente vertical del campo de velocidades. La eficiencia de la estrategia seguida ha sido demostrada comparando los resultados obtenidos con los correspondientes a un mallado fijo. En la figura (3) se ilustran los resultados numéricos obtenidos para el exponente típico  $n = 3$ . La primera de las tres corresponde a la componente horizontal del campo de velocidades. Puede observarse el flujo de entrada de tipo parabólico, con condiciones de no deslizamiento en la parte de la base en contacto con la roca y el flujo uniforme de salida. La segunda figura corresponde a la componente vertical de la velocidad, en ella se aprecia como se pasa de una variación nula en sentido vertical a un cambio de régimen, en el que cobra relevancia las variaciones en la dirección normal a la dirección principal de flujo. En ambas figuras puede observarse que la zona de gradientes más elevados, fundamentalmente en la componente vertical, tiene lugar en un entorno de la grounding line. Es en esta zona también donde los esfuerzos presentan mayores gradientes, ya que se obtienen unos valores uniformes en prácticamente todo el dominio de flujo, y es sólo en una región muy pequeña, casi inapreciable gráficamente, en torno a la grounding line donde los valores varían rápidamente, hasta el punto de presentar una singularidad. Por último, en la tercera figura se representa la función de corriente.

#### Referencias

- [1] M.A. Fontelos, A.I. Muñoz. *A free boundary problem in glaciology: The motion of grounding lines*. Interfaces and free boundaries, 9 (2007), 67–93.
- [2] M.A. Fontelos, A.I. Muñoz, E. Schiavi. *The ice flow behaviour in the neighborhood of the grounding line. Non Newtonian case*. Preprint.