

Esquemas 2D de alto orden basados en reconstrucciones de estado, para sistemas hiperbólicos no conservativos. Aplicación a problemas de transporte de sedimentos.

M.J. CASTRO DÍAZ¹, E.D. FERNÁNDEZ NIETO²,
A.M. FERREIRO FERREIRO¹

¹ *Dpto. de Análisis Matemático, Univ. de Málaga. Campus de Teatinos. Málaga E-mail: castro@anamat.cie.uma.es.*

² *Dpto. de Matemática Aplicada I, Univ. de Sevilla. Sevilla. E-mail: edofer@us.es.*

³ *Dpto. de Matemáticas, E. U. Arquitectura Técnica, Univ. de A Coruña. E-mail: aferreiro@udc.es.*

Palabras clave: Reconstrucciones de estado, bien-equilibrado, método de volúmenes finitos, transporte de sedimentos

Resumen

En este trabajo se aborda la aproximación numérica del problema de arrastre de sedimentos causada por la evolución del agua. Para la componente hidrodinámica se consideran las ecuaciones de aguas poco profundas. La componente morfodinámica se define mediante una ecuación de continuidad, dada en función del caudal sólido. Ambas componentes constituyen un sistema acoplado que puede reescribirse como un sistema hiperbólico no conservativo (ver [4]).

Se propone un esquema 2D generalizado de Roe con reconstrucciones de estado para sistemas hiperbólicos no conservativos (ver [4]), mediante esquemas de volúmenes finitos y el método de líneas (ver [5]), extendiendo los esquemas de alto orden para el caso 1D propuesto en [2].

La reconstrucción de estado empleada es de tipo MUSCL (ver [1]), que proporciona orden dos para mallas no estructuradas de volúmenes finitos de tipo arista.

Finalmente se presenta un test numérico en el que se estudia la evolución del ángulo de expansión de una montaña de arena (ver [4]).

1. Introducción

En este trabajo estudiamos métodos de alto orden de volúmenes finitos basados en reconstrucciones de estado. Dichos métodos se aplican a problemas de arrastre de sedimentos. La componente hidrodinámica se modela mediante las ecuaciones de aguas poco

profundas, y la componente morfodinámica mediante una ecuación de continuidad. El sistema final puede escribirse como un sistema 2D no conservativo

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}_1(W) \frac{\partial W}{\partial x_1} + \mathcal{A}_2(W) \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0, \quad (1)$$

donde $W(x, t) : \mathcal{O} \times (0, T) \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^N$, \mathcal{O} es un dominio acotado de \mathbb{R}^2 , Ω es un conjunto convexo de \mathbb{R}^N , $\mathcal{A}_i : \Omega \rightarrow M_{N \times N}$ funciones regulares y localmente acotadas.

Dado un vector unitario $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$ se define: $\mathcal{A}(W, \eta) = \mathcal{A}_1(W)\eta_1 + \mathcal{A}_2(W)\eta_2$. Suponemos que el sistema (1) es estrictamente hiperbólico, es decir, para todo $W \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ and $\forall \eta \in \mathbb{R}^2$, la matriz $\mathcal{A}(W, \eta)$ tiene N autovalores reales y distintos: $\lambda_1(W, \eta) < \dots < \lambda_N(W, \eta)$, siendo $R_j(W, \eta)$, $j = 1, \dots, N$ los autovectores asociados. En consecuencia $\mathcal{A}(W, \eta)$ es diagonalizable: $\mathcal{A}(W, \eta) = \mathcal{K}(W, \eta)\mathcal{L}(W, \eta)\mathcal{K}^{-1}(W, \eta)$, donde $\mathcal{L}(W, \eta)$ es la matriz diagonal cuyos coeficientes son los autovalores de $\mathcal{A}(W, \eta)$ y $\mathcal{K}(W, \eta)$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $R_j(W, \eta)$, $j = 1, \dots, N$.

2. Ecuaciones de aguas poco profundas con arrastre de sedimentos

Consideramos el sistema,

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{q_1^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{q_1 q_2}{h} \right) = gh \frac{\partial S}{\partial x_1} - gh S_{f,x_1}, \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{q_1 q_2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{q_2^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) = gh \frac{\partial S}{\partial x_2} - gh S_{f,x_2}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} - \xi \frac{\partial q_{b,x_1}}{\partial x_1} - \xi \frac{\partial q_{b,x_2}}{\partial x_2} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

donde las incógnicas del problema son la altura de la columna del agua $h(\mathbf{x}, t)$, el caudal $q(\mathbf{x}, t) = (q_1(\mathbf{x}, t), q_2(\mathbf{x}, t))$ y $S(\mathbf{x}, t) = H(\mathbf{x}) - z_b(\mathbf{x}, t)$, donde H es la batimetría y z_b es el espesor de la capa de sedimento. Por q_{b,x_1} y q_{b,x_2} denotamos los caudales del transporte sólido para las componentes x_1 y x_2 , respectivamente. La definición de q_b depende del modelo considerado. En este trabajo consideramos el modelo de Grass y el modelo de Meyer-Peter&Müller. S_{f,x_1} y S_{f,x_2} son las leyes de fricción de Manning. Y $\xi = 1/(1 - \rho_0)$ donde ρ_0 es la porosidad de la capa de sedimento.

El sistema de ecuaciones (2) puede escribirse como un sistema hiperbólico no conservativo (1).

La definición de q_{b,x_1} y q_{b,x_2} para los casos particulares de Grass y Meyer-Peter&Müller son:

1. Modelo de Grass:

$$\begin{aligned} q_{b,x_1} &= A_g u_1 (u_1^2 + u_2^2), \\ q_{b,x_2} &= A_g u_2 (u_1^2 + u_2^2); \end{aligned} \quad (3)$$

donde $u_1 = \frac{q_1}{h}$ y $u_2 = \frac{q_2}{h}$. Siendo A_g la constante de interacción entre el fluido y el sedimento ($0 \leq A_g \leq 1$).

2. Modelo de Meyer-Peter&Müller:

$$\begin{aligned} q_{b,x_1} &= 8\sqrt{(G-1)gd_i^3} \operatorname{sgn}(u_1) (\tau_{*,x_1} - \tau_{*,c})^{3/2}, \\ q_{b,x_2} &= 8\sqrt{(G-1)gd_i^3} \operatorname{sgn}(u_2) (\tau_{*,x_2} - \tau_{*,c})^{3/2}; \end{aligned} \quad (4)$$

donde τ_* y τ_{*c} son la tensión tangencial adimensional y la tensión tangencial crítica adimensional, respectivamente. La definición de τ_* es

$$\tau_{*,x_1} = \frac{\gamma\eta^2|u_1|\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{(\gamma_s - \gamma)d_i R_h^{1/3}}, \quad \tau_{*,x_2} = \frac{\gamma\eta^2|u_2|\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{(\gamma_s - \gamma)d_i R_h^{1/3}},$$

donde γ denota el peso específico del fluido, γ_s denota el peso específico del sedimento, $G = \gamma_s/\gamma$, η es el coeficiente de Manning correspondiente a la capa de sedimento, d_i es el diámetro medio de grano. τ_{*c} se suele tomar igual a 0,047. Por R_h denotamos el radio hidráulico.

3. Métodos de volúmenes finitos de alto orden basados en reconstrucciones de estado

Consideremos un sistema hiperbólico no conservativo

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}_1(W) \frac{\partial W}{\partial x_1} + \mathcal{A}_2(W) \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0. \quad (5)$$

Nuestro objetivo es usar un método de volúmenes finitos de alto orden basado en reconstrucciones de estado para (5).

Descomponemos el dominio computacional en celdas o volúmenes de control, $V_i \subset \mathbb{R}^2$, que supondremos polígonos cerrados. Se usa la siguiente notación: dado un volumen finito V_i , \mathcal{N}_i es el conjunto de índices j tales que V_j es el vecino de V_i , E_{ij} es la arista común de dos celdas vecinas V_i y V_j , y $|E_{ij}|$ su longitud, $\eta_{ij} = (\eta_{ij,1}, \eta_{ij,2})$ es el vector unitario normal a la arista E_{ij} y que apunta hacia la celda V_j (ver Figura 1).

La discretización del sistema (5) se lleva a cabo mediante un esquema de volúmenes finitos (ver [5]). W_i^n representará la aproximación

$$W_i^n \cong \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} W(\mathbf{x}, t^n) d\mathbf{x}.$$

Dado un volumen V_i denotaremos por P_i el operador de reconstrucción sobre el volumen. En concreto, P_i dependerá de una familia de valores $\{W_j\}_{j \in \mathcal{B}_i}$, donde \mathcal{B}_i es un conjunto de índices de volúmenes de control vecinos o próximos a V_i (ver [4]). Cuando los valores de la sucesión dependan del tiempo, denotaremos al operador de reconstrucción por P_i^t .

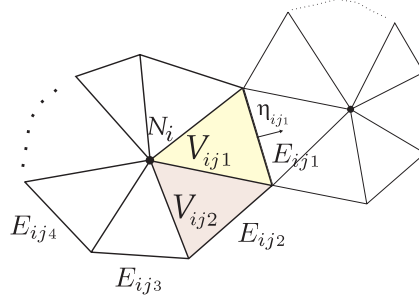


Figura 1: Volumen finito general.

Dado el vector η_{ij} que apunta al volumen V_j , denotaremos por $W_{ij}^-(t, \mathbf{s})$ y $W_{ij}^+(t, \mathbf{s})$ $\forall \mathbf{s} \in E_{ij}$, al límite de P_i^t (P_j^t respectivamente) cuando \mathbf{x} tiende a \mathbf{s} a través de V_i (V_j respectivamente):

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s} \\ \mathbf{x} \cdot \eta_{ij} < k_{ij}}} P_i^t(\mathbf{x}) = W_{ij}^-(t, \mathbf{s}), \quad \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{s} \\ \mathbf{x} \cdot \eta_{ij} > k_{ij}}} P_j^t(\mathbf{x}) = W_{ij}^+(t, \mathbf{s}), \quad (6)$$

donde la arista $E_{ij} = V_i \cap V_j$ está contenida en la recta, $\mathbf{x} \cdot \eta_{ij} = x_1 \eta_{ij,1} + x_2 \eta_{ij,2} = k_{ij}$.

Proponemos el siguiente esquema numérico (ver [4]):

$$\begin{aligned} W_i'(t) = & -\frac{1}{|V_i|} \left[\sum_{j \in \mathcal{N}_i} |E_{ij}| \sum_{l=1}^{n(\bar{r})} w_l \mathcal{A}_{ij,l}^-(W_{ij,l}^+, W_{ij,l}^-, \eta_{ij})(W_{ij,l}^+ - W_{ij,l}^-) \right. \\ & \left. + \int_{V_i} \left(\mathcal{A}_1(P_i(\mathbf{x})) \frac{\partial P_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}_2(P_i(\mathbf{x})) \frac{\partial P_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

donde $w_l, l = 1, \dots, n(\bar{r})$, denota los pesos de una fórmula de cuadratura 1D, la cual viene asociada a una integral sobre la arista E_{ij} . Si mediante x_l se denotan los puntos sobre la arista E_{ij} de la fórmula de cuadratura, entonces $W_{ij,l}^\pm = W_{ij}^\pm(\mathbf{x}_l)$. En la práctica esta fórmula se elige en función del orden del operador de reconstrucción de estado: si por \bar{r} denotamos el orden de la fórmula de cuadratura, entonces $\bar{r} > p$, siendo p el orden de aproximación del operador de reconstrucción.

Mediante \mathcal{A}_{ij} se denota la matriz de Roe asociada al problema 1D no conservativo proyectado sobre la arista E_{ij} . Los productos no conservativos $\mathcal{A}(W)W_x$ del problema 1D proyectado no tienen sentido en el marco de la teoría de distribuciones. En este trabajo usamos la teoría desarrollada por Dal Maso, LeFloch y Murat donde los productos no conservativos se interpretan como medidas de Borel, siendo necesario para su definición la elección de una familia de caminos en el espacio de fases. También será necesario la elección de una familia de caminos para definir la matriz de Roe (ver [7]).

4. Reconstrucciones de orden dos sobre mallas no estructuradas bidimensionales

Por simplicidad supongamos que tenemos volúmenes finitos de tipo arista (ver [5]). El volumen de tipo arista lo podemos escribir como $V_i = T_{i,1} \cup T_{i,2} \cup T_{i,3} \cup T_{i,4}$, donde $T_{i,k}$, $k = 1, 2, 3, 4$, son triángulos (ver Figura 2) definidos por C_i (punto medio de la arista sobre la que se construye el volumen finito de tipo arista) y las cuatro aristas del volumen de control. Sean $b_{i,k}$, $k = 1, 2, 3, 4$, los baricentros de estos triángulos, respectivamente.

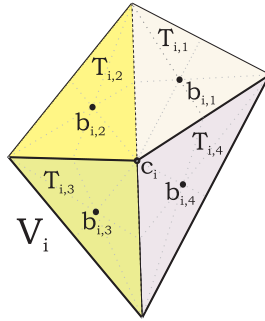


Figura 2: Triángulos que forman el volumen finito de tipo arista V_i .

Se considera el siguiente operador de reconstrucción $P_i(\mathbf{x})$ de orden dos (ver [4]), definido como

$$P_i(\mathbf{x}) = W_i + p(\mathbf{x}), \quad \text{con} \quad p(\mathbf{x}) = \nabla W_i(\mathbf{x} - N_i). \quad (8)$$

donde ∇W_i es una aproximación al menos de primer orden del gradiente de la solución $W(\mathbf{x})$, y N_i al punto definido por: $N_i = \sum_{k=1}^4 \frac{|T_{i,k}|}{|V_i|} b_{i,k}$.

Si por $\nabla W_{|T_j}$ denotamos la estimación del gradiente sobre T_j , se considera la siguiente aproximación, de segundo orden, del gradiente de la solución en N_i (ver [4]),

$$\nabla W_i \approx \frac{\sum_{j=1}^4 |T_j| \nabla W_{|T_j}}{\sum_{j=1}^4 |T_j|}. \quad (9)$$

Es frecuente que en la aproximación numérica de sistemas hiperbólicos como los considerados en este trabajo, la solución presente discontinuidades. A fin de obtener un operador de reconstrucción que aproxime con orden dos la solución en zonas regulares y que al mismo tiempo capture las regiones donde $W(\mathbf{x})$ sea discontinua sin introducir oscilaciones, es necesario modificar el operador de reconstrucción (8), usando para ello una función limitadora de pendiente (ver detalles en [4]).

5. Simulación bidimensional de la evolución de una duna de arena cónica

El siguiente test (ver [6]) estudia el comportamiento de la evolución de una duna de arena cónica en un canal de dimensiones $1000\text{ m} \times 1000\text{ m}$. Las condiciones iniciales son (ver Figura 3),

$$h(x, y, 0) = 0,1 - z_b(x, y, 0), \quad q_x(x, y, 0) = 10, \quad q_y(x, y, 0) = 0;$$

y la capa inicial de sedimento es una duna de arena con forma cónica,

$$z_b(x, y, 0) = \begin{cases} 0,1 + \sin^2\left(\frac{\pi(x-300)}{200}\right) \sin^2\left(\frac{\pi(y-400)}{200}\right) & \text{si } 300 \leq x \leq 500, \\ & 400 \leq y \leq 600, \\ 0,1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En primer lugar, estudiamos la evolución de la capa de sedimentos al modelizar el arrastre mediante la fórmula de Grass (3), para ello empleamos el esquema numérico (7) con reconstrucciones de estado tipo MUSCL. Consideramos una interacción débil entre el fluido y la capa de sedimentos, en concreto, imponemos $A_g = 0,001$. La porosidad del sedimento se ha tomado igual a 0,4. La condición CFL es igual a 0,8. Empleamos una malla de 7600 volúmenes finitos de tipo arista. Se imponen el caudal $\mathbf{q} = (10, 0)$ y el espesor de la capa de sedimentos $z_b = 0,1$ en la frontera correspondiente a la recta $x = 0$ y condición de salida libre en la contenida en la recta $x = 1000$. En las paredes laterales se impone la condición de deslizamiento $\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0$ (ver Figura 3). Con estos datos se deja evolucionar el experimento hasta 100 horas.

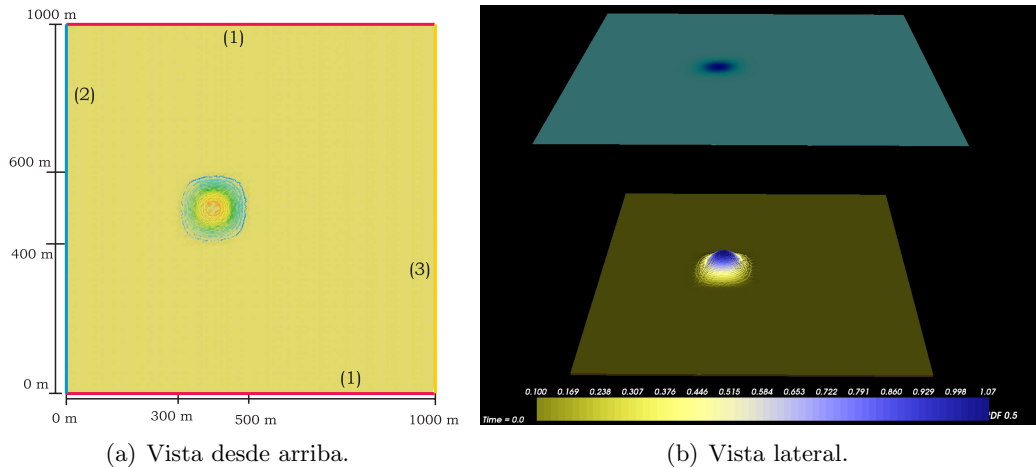


Figura 3: Condición inicial.

En la Figura 5 se muestran distintos instantes de la evolución de la capa de sedimentos. Se observa como la capa de sedimentos se deforma gradualmente hacia un patrón con forma de estrella, expandiéndose a lo largo del tiempo con un cierto ángulo (ver [6]). De Vriend obtiene en [3] una aproximación analítica del ángulo, asumiendo que la interacción de la

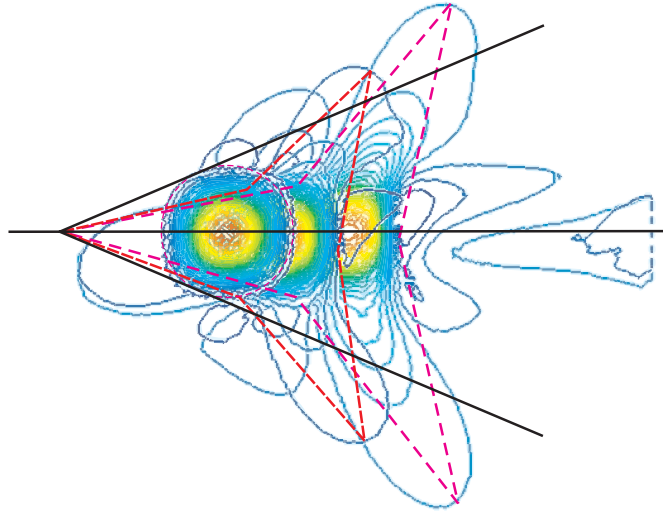


Figura 4: Estimación del ángulo de expansión (empleando 20 curvas de nivel).

capa de sedimentos y el fluido es lenta, esto es, $A_g < 0,01$. La aproximación analítica de dicho ángulo de expansión viene dada por, $\tan \alpha = \frac{3\sqrt{3}(m_g - 1)}{9m_g - 1}$, por lo que, para $m_g = 3$ el valor de dicho ángulo de expansión es: $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{13} \right) = 21,786789^\circ$. En la Figura 4 se presenta el ángulo de expansión estimado al comparar diferentes instantes en la evolución de la duna de arena. El ángulo estimado es aproximadamente 23° .

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos de investigación MTM2006-08075 y MTM2006-01275, financiados por el Gobierno Español.

Referencias

- [1] B. Van Leer. *MUSCL. A new approach to numerical gas dynamics. Computing in plasma physics and astrophysics, Max-Planck-Institut fur plasma physik.*. Carchung, Germany, April 1976.
- [2] M.J. Castro, J.M. Gallardo and C. Parés. *High order finite volume schemes based on reconstruction of states for solving hyperbolic systems with nonconservative products. Applications to shallow water systems.* Math. Comp., 75: 1103-1134. 2006.
- [3] H.J. De Vriend. *2DH Mathematical Modelling of Morphological Evolutions in Shallow Water Coastal Engineering* 11, 1-27, 1987.
- [4] A.M. Ferreiro Ferreiro. *Desarrollo de técnicas de post-proceso de flujos hidrodinámicos, modelización de problemas de transporte de sedimentos y simulación numérica mediante técnicas de volúmenes finitos.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. 2006.
- [5] J.A. García Rodríguez. *Paralelización de esquemas de volúmenes finitos: aplicación a la resolución de sistemas de tipo aguas someras.* Tesis Doctoral. Universidad de Málaga. 2005.
- [6] J. Hudson. *Numerical technics for morphodynamic modelling.* Tesis doctoral. University of Whiteknights, 2001.
- [7] C. Parés, M.J. Castro. *On the well-balanced property of Roe's method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow water systems.* ESAIM: M2AN **38**(5): 821-852, 2004.

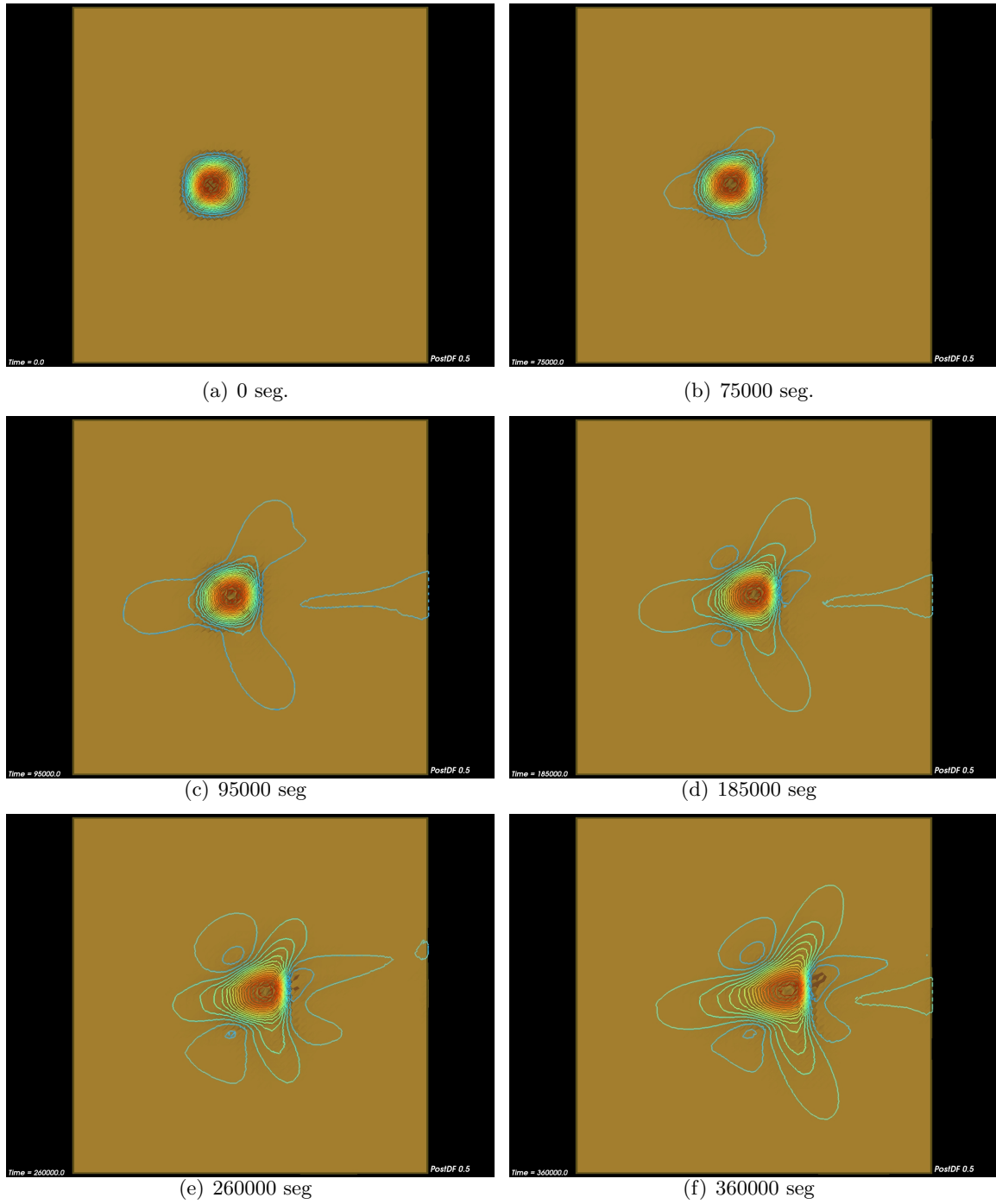


Figura 5: Evolución de la capa de sedimentos en diferentes instantes. Vista de las curvas de nivel (20 curvas de nivel).