XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

La completación de matrices parciales totalmente no negativas: una visión general

Ramadán el-Ghamry, Cristina Jordán, Juan Ramón Torregrosa

Dpto. Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, 46071 Valencia.
E-mails: el_ghamry@hotmail.com, cjordan@mat.upv.es, jrtorre@mat.upv.es.

Palabras clave: matriz parcial, matriz totalmente no negativa, completación, grafo

Resumen

En este trabajo consideramos el problema de completación de las matrices parciales totalmente no negativas. Concretamente demostramos, bajo ciertas condiciones, la existencia de una completación totalmente no negativa cuando el grafo asociado a la matriz parcial es un camino, ciclo, doble camino o doble ciclo.

1. Introducción

Una matriz A de tamaño $n \times n$ donde algunos de sus elementos son especificados y otros no se conoce por el nombre de *matriz parcial*. Una matriz parcial $A = (a_{ij})$ es *posicionalmente simétrica* cuando a_{ij} está especificado si y sólo si a_{ji} lo está, y no posicionalmente simétrica en caso contrario. Una *completación* A_c de A es la matriz que resulta al sustituir los elementos no especificados por valores concretos. Cuando estos valores son todos nulos la matriz resultante recibe el nombre de *completación nula* y la denotaremos por A_0.

Una forma sencilla de estudiar las matrices parciales es mediante la teoría de grafos. Dada una matriz parcial $A = (a_{ij})$, llamamos *grafo asociado* a A al grafo $G_A = (V, E)$ tal que $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $E = \{(i, j) \ : \ a_{ij} \text{ está especificado}\}$. Las matrices posicionalmente simétricas tienen grafos asociados no dirigidos, mientras que son grafos dirigidos en caso contrario.

Un *camino* es un grafo $G = (V, E)$ donde $V = \{v_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ y $E = \{(v_j, v_{j+1}), j = 1, 2, \ldots n-1\}$. $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Se llama *ciclo* si $v_1 = v_n$. Un doble camino es un grafo dirigido formado por dos caminos que coinciden en los vértices inicial y final. De forma semejante definimos un doble ciclo como el grafo cuyo conjunto de arcos está formado por dos ciclos con un vértice, un arco, o más de un arco en común.

Una matriz real A, de tamaño $n \times n$, se dice que es totalmente no negativa , si todas sus submatrices tienen determinante no negativo. Estas matrices aparecen con frecuencia en teoría de aproximación, estadística, economía, diseño gráfico asistido por ordenador, etc. Podemos consultar una visión general de este tipo de matrices y sus aplicaciones en [1] y [6].

En este trabajo vamos a utilizar las siguientes propiedades de estas matrices.

Proposición 1.1 *Sea A una matriz totalmente no negativa.*

1. *Si D es una matriz diagonal positiva, entonces DA, AD y DAD^{-1} son matrices totalmente no negativa.*

2. *Toda submatriz de A es una matriz totalmente no negativa.*

La última propiedad nos permite extender el concepto de matriz totalmente no negativa al contexto de matrices parciales.

Definición 1.1 *Una matriz parcial, A, se dice que es una matriz parcial totalmente no negativa si toda submatriz totalmente especificada de A es una matriz totalmente no negativa.*

En este trabajo abordamos el *problema de completación de matrices parciales totalmente no negativas*, es decir, buscamos valores para los elementos no especificados a fin de conseguir completaciones que sean del mismo tipo.

Teniendo en cuenta que el concepto de total no negatividad no se hereda por semejanza de permutación, excepto para la matriz permutación $P = [n, n-1, \ldots, 1]$, debemos trabajar con grafos etiquetados, es decir, grafos en los que la numeración de los vértices está fijada. En nuestro estudio vamos a distinguir entre grafos monótona y no monótonamente etiquetados. Se dice que un grafo es *monótonamente etiquetado* si está numerado de forma natural, en caso contrario se dice que es no monótonamente etiquetado, (véase [2], [4] y [5] para más información sobre este concepto).

Este problema fue estudiado inicialmente por Johnson, Kroschel y Lundquist, en [4], para matrices posicionalmente simétricas, obteniendo como resultado principal el siguiente teorema.

Teorema 1.1 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa cuyo grafo asociado es G. Si G es 1-cordal monótonamente etiquetado entonces existe una completación totalmente no negativa de A.*

Posteriormente Jordán y Torregrosa, en [5], analizaron la existencia de completaciones totalmente no negativas en el caso de caminos y ciclos no dirigidos, así como de otros tipos de grafos no cordales.

Teorema 1.2 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa, de tamaño $n \times n$, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado es un camino no monótonamente etiquetado $\{\{1, 2, \ldots, n\}, \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n)\}\}$. Entonces, A tiene completación totalmente no negativa si cumple la CP-condición.*

Teorema 1.3 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, con elementos diagonales no nulos, cuyo grafo asociado es un ciclo no dirigido monótonamente etiquetado. Existe una completación totalmente no negativa, A_c de A, si y sólo si A satisface la condición SS-diagonal.*

En este trabajo consideramos matrices parciales con diagonal especificada no nula. Por tanto, y apoyándonos en la proposición 1.1, supondremos sin pérdida de generalidad que los elementos diagonales son 1's.

Para distintos casos de grafos dirigidos y no dirigidos, dicho problema de completación es todavía una cuestión abierta en la que seguimos trabajando. A continuación centramos el análisis del problema de completación de matrices parciales totalmente no negativas en el caso de grafos dirigidos, es decir, consideramos matrices no posicionalmente simétricas.

2. Resultados

En esta sección exponemos algunos de los resultados obtenidos (ver [3]) para matrices parciales totalmente no negativas cuyo grafo asociado es un camino dirigido, ciclo dirigido, doble camino o doble ciclo. En general, como veremos a continuación, no existe la completación deseada para los casos mencionados, lo que nos lleva a introducir nuevas condiciones.

Caminos

El problema de completación planteado tiene respuesta afirmativa para el caso de caminos monótonamente etiquetados.

Proposición 2.1 *Toda matriz parcial totalmente no negativa cuyo grafo asociado es un camino dirigido monótonamente etiquetado tiene completación totalmente no negativa.*

En el caso de caminos no monótonamente etiquetados obtenemos, para matrices parciales de tamaño 3×3, un resultado análogo al anterior.

El siguiente ejemplo nos permite afirmar que, en general, no existe la completación deseada para matrices parciales de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$.

Ejemplo 2.1 La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 1 & x_{1n} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & x_{2n} \\ x_{31} & 0 & 1 & x_{3n} \\ 1 & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un camino dirigido no monótonamente etiquetado, no posee completación totalmente no negativa, puesto que de $\det A[\{2,3\}|\ \{1,2\}] \geq 0$ y $\det A[\{1,4\}|\ \{1,3\}] \geq 0$ se obtiene que $x_{31} \leq 0$ y $x_{43} \geq 1$ respectivamente. Estas desigualdades nos llevan a una contradicción con $\det A[\{3,4\}|\{1,3\}] = x_{31}x_{43} - 1 \geq 0$.

Sin embargo, el resultado es cierto para las mencionadas matrices si todos los elementos especificados son no nulos.

Teorema 2.1 *Toda matriz parcial totalmente no negativa, de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado es un camino dirigido no monótonamente etiquetado, tiene completación totalmente no negativa.*

Ciclos

En general, el problema de completación tiene, como los siguientes ejemplos ponen de manifiesto, respuesta negativa para ciclos dirigidos monótona o no monótonamente etiquetados.

Ejemplo 2.2 Consideremos la matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 1 & 1 & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & 1 \\ 2 & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido monótonamente etiquetado. La matriz A no tiene completación totalmente no negativa, ya que $\det A[\{i, i+1\}] \geq 0$, implica que $x_{i+1i} \leq 1$ para i=1,2,3, y de $\det A[\{j, j+1\}|\{1, j\}] \geq 0$ con $j = 2, 3$, se deduce $x_{43}x_{32}x_{21} \geq 2$, lo cual es una contradicción.

Ejemplo 2.3 La matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 1 & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & 2 \\ x_{31} & 1 & 1 & x_{34} \\ 1 & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido no monótonamente etiquetado no tiene completación totalmente no negativa, ya que $\det A[\{1, 3\}|\{2, 3\}] \geq 0$, implica que $x_{12} \geq 1$, y $\det A[\{2, 4\}|\{1, 4\}] \geq 0$ implica $x_{21} \geq 2$, y por tanto $\det A[\{1, 2\}] < 0$.

A fin de resolver el problema de completación para este tipo de matrices parciales introducimos la siguiente condición.

Definición 2.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz parcial, de tamaño $n \times n$, cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)\}$. Decimos que A satisface la C-condición si*

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{n-1} i_n} a_{i_n i_1} \leq 1.$$

Dicha condición es necesaria y suficiente para la existencia de la completación deseada en el caso de ciclos dirigidos tanto monótona como no monótonamente etiquetados.

Teorema 2.2 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa, de tamaño $n \times n$, $n \geq 3$, cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido monótonamente etiquetado. Existe una completación totalmente no negativa de A si y sólo si A satisface la C-condición.*

En el caso de matrices parciales de tamaño 3×3, cuyos grafos asociados son ciclos dirigidos no monótonamente etiquetados, podemos suponer sin pérdida de generalidad, utilizando la semejanza de permutación por la matriz $P = [3, 2, 1]$, que el grafo asociado es monótonamente etiquetado. Por lo tanto consideraremos sólo matrices de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, demostrando que la C-condición es también una condición necesaria y suficiente para la existencia de una completación totalmente no negativa.

Definición 2.2 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa, de tamaño $n \times n$, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido no monótonamente etiquetado, $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)\}$. Llamamos C^*-completación a la completación definida de la siguiente forma.*

$$c_{i_k i_m} = \begin{cases} a_{i_k i_{k+1}} a_{i_{k+1} i_{k+2}} \dots a_{i_{m-1} i_m} & si \quad i_k, i_m \neq i_1, \quad k < m-1 \\ 1/a_{i_m i_{m+1}} a_{i_{m+1} i_{m+2}} \dots a_{i_{k-1} i_k} & si \quad i_k, i_m \neq i_1, \quad k \geq m+1 \\ a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{m-1} i_m} & si \quad i_k = i_1, \quad m = 3, 4, \dots, n \\ a_{i_m i_{m+1}} a_{i_{m+1} i_{m+2}} \dots a_{i_{n-1} i_n} a_{i_n i_1} & si \quad i_m = i_1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

En el siguiente resultado establecemos que, bajo la hipótesis indicada, la C^*-completación es una completación totalmente no negativa si y sólo si se verifica la C-condición.

Teorema 2.3 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa, de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido no monótonamente etiquetado. Entonces, existe una completación totalmente no negativa de A, si y sólo si A cumple la C-condición.*

Si algún elemento especificado es nulo, el resultado anterior no es cierto, en general, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4 La matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & a_{14} \\ x_{21} & 1 & 0 & x_{24} \\ a_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & a_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{con } a_{ij} > 0,$$

cuyo grafo asociado es un ciclo dirigido no monótonamente etiquetado que verifica la C-condición, no tiene completación totalmente no negativa, ya que $\det A[\{1,2\}|\{1,3\}] \geq 0$ si y sólo si $x_{13} = 0$ o $x_{21} = 0$. Sin embargo, si $x_{13} = 0$ entonces $\det A[\{1,3\}|\{3,4\}] = -a_{14} < 0$ y, por otra parte, si $x_{21} = 0$ entonces $\det A[\{2,3\}|\{1,2\}] = -a_{31} < 0$.

Doble caminos

Para matrices parciales totalmente no negativas, de tamaño 3×3, cuyo grafo asociado es del tipo que nos ocupa, siempre existe la completación deseada.

Proposición 2.2 *Toda matriz parcial totalmente no negativa, de tamaño 3×3, cuyo grafo es un doble-camino tiene completación totalmente no negativa.*

A continuación abordamos el problema de completación de matrices parciales, de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, cuyo grafo asociado es un doble camino, distinguiendo entre el caso en el que sólo uno de los caminos es monótonamente etiquetado y en el que ninguno lo es. Para ambos tipos de grafos el problema tiene, en general, respuesta negativa.

Ejemplo 2.5 Consideramos la siguiente matriz parcial totalmente no negativa,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & x_{13} & 0{,}5 \\ x_{21} & 1 & 0{,}5 & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble-camino con un camino monótonamente etiquetado y el otro no. Si $\det A[\{1,2\}|\{2,4\}] \geq 0$ y $\det A[\{2,4\}|\{3,4\}] \geq 0$ obtenemos $x_{24} \geq 1$ y $x_{24} \leq 0{,}5$ respectivamente, lo cual es una contradicción. Por tanto, A no tiene completación totalmente no negativa.

Ejemplo 2.6 Consideramos la siguiente matriz parcial totalmente no negativa,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 0{,}5 & 1 \\ x_{21} & 1 & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & 1 & 1 & x_{34} \\ x_{41} & 1 & x_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble camino (con dos caminos no monótonamente etiquetados). Para que $\det A[\{1,3\}|\{3,4\}]$ y $\det A[\{3,4\}|\{2,4\}]$ sean no negativos, es necesario que $x_{34} \geq 2$ y $x_{34} \leq 1$ respectivamente. Por tanto, A no tiene completación totalmente no negativa.

Para obtener la completación deseada en este contexto introducimos una nueva condición.

Denotamos por P_c el producto de los a_{ij} que corresponden a un determinado camino C. Para matrices parciales de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, con elementos especificados no nulos, abordamos en primer lugar el caso de doble camino en el que uno de los caminos, C_1, es monótonamente etiquetado, y el otro, C_2, no lo es. La condición $P_{C_1} \geq P_{C_2}$ es suficiente para la existencia de la completación deseada cuando $n \geq 4$. Además, dicha condición es también necesaria cuando $n > 4$.

Teorema 2.4 *Sea G_A un doble-camino con C_1 monótonamente etiquetado y C_2 no monótonamente etiquetado. Entonces, toda matriz parcial totalmente no negativa, $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times n$, $n > 4$, con elementos especificadas no nulas, cuyo grafo asociado es G_A tiene una completación totalmente no negativa si y sólo si $P_{c_1} \geq P_{c_2}$.*

Si la matriz parcial contiene algún elemento especificado nulo, la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$ no es ni siquiera suficiente, como podemos ver el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7 Consideramos la siguiente matriz parcial totalmente no negativa,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_{13} & 1 \\ x_{21} & 1 & 1 & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble camino con un camino $C_1 = (\{1,2,3\}, \{(1,2),(2,3)\}\})$ monótonamente etiquetado, y $C_2 = (\{1,3,4\}, \{(1,4),(4,3)\}\})$ no monótonamente etiquetado. La matriz A satisface la condición $P_{c_1} \geq P_{c_2}$, sin embargo $\det A[\{1,2\}|\{2,3\}] \geq 0$ implica $x_{13} = 0$, con lo cual $\det A[\{1,2\}|\{3,4\}]$ es negativo. Por lo tanto, A no tiene completación totalmente no negativa.

En el caso de doble camino con dos caminos no monótonamente etiquetados, el resultado es cierto cuando el vértice inicial $i_1 \neq 1$.

Teorema 2.5 *Sea G_A un doble camino formado por caminos no monótonamente etiquetados $C_1 = (V_1, E_1)$ y $C_2 = (V_2, E_2)$, cuyos vértices inicial y final no están etiquetados por 1. Toda matriz parcial totalmente no negativa A, de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, con elementos especificados no nulos y cuyo grafo asociado es G_A tiene una completación totalmente no negativa si cumple la condición*

$$P_{c_1} \leq P_{c_2}, \quad si \quad 1 \in V_1 \qquad o \qquad P_{c_2} \leq P_{c_1}, \quad si \quad 1 \in V_2$$

La condición del último teorema no es necesaria como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8 La matriz parcial totalmente no negativa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 1 & x_{23} & x_{24} \\ 2 & x_{32} & 1 & x_{34} \\ x_{41} & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo grafo asociado es un doble camino formado por los caminos C_1 y C_2, con conjuntos de arcos $E_1 = \{(4,3), (3,1), (1,2)\}$ y $E_2 = \{(4,2)\}$ respectivamente, no satisface la condición $P_{c_1} \leq P_{c_2}$. Sin embargo, A tiene una completación totalmente no negativa

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 1/6 & 1/6 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, el teorema 2.5 no es cierto si la matriz parcial contiene elementos nulos.

Ejemplo 2.9 Consideramos la matriz parcial totalmente no negativa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 1 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad a_{14}, a_{21}, a_{23} \quad \text{distintos de cero,}$$

cuyo grafo asociado es un doble camino que cumple la hipótesis del enunciado del teorema anterior. Sin embargo, A no tiene completación totalmente no negativa, ya que $\det A[\{2,3\}|\{3,4\}] \geq 0$ implica $x_{24} = 0$, y con este valor $\det A[\{1,2\}|\{1,4\}] < 0$.

Para las matrices parciales totalmente no negativas de tamaño 4×4, cuyos grafos asociados son doble caminos, con caminos no monótonamente etiquetados y vértice inicial $i_1 = 1$, hemos obtenido resultados parciales, por lo que seguimos trabajando en este tipo de grafos a fin de generalizar los mencionados resultados.

Doble ciclos

En general, para este tipo de grafos, no existe una completación totalmente no negativa como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10 El grafo asociado a la matriz parcial totalmente no negativa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & 0{,}8 & x_{14} \\ 1 & 1 & x_{23} & 1 \\ x_{31} & 1 & 0{,}7 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

es un doble ciclo con un arco en común. La matriz A no tiene completación totalmente no negativa ya que $A[\{1,2,3\}]$ no la tiene, ver [3].

Analizamos el caso de doble ciclos con uno o más arcos en común, distinguiendo tres casos: los dos ciclos son monótonamente etiquetados, los dos ciclos son no monótonamente etiquetados, y por último uno de los ciclos es monótonamente etiquetado y el otro no.

En el primer caso hemos obtenido el siguiente resultado.

Teorema 2.6 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa, de tamaño $n \times n$, $n \geq 4$, cuyo grafo asociado es un doble ciclo monótonamente etiquetado con dos ciclos C_1 y C_2 y uno o más arcos en común. Existe una completación totalmente no negativa de A si y sólo si cada una de las submatrices que especifican los ciclos satisface la C-condición.*

En los restantes casos el problema sigue abierto y continuamos trabajando a fin de demostrar la validez de la siguiente conjetura.

Conjetura 2.1 *Sea A una matriz parcial totalmente no negativa, de tamaño $n \times n$, con elementos especificados no nulos, cuyo grafo asociado es un doble ciclo con uno o más arcos en común. A tiene completación totalmente no negativa si y sólo si*

a) la submatriz a la que está asociado cada ciclo cumple la C-condición, en el caso de ambos ciclos no monótonamente etiquetados,

b) las submatrices a las que están asociados los dos ciclos cumplen la C-condición y además $P_{c_1} \geq P_{c_2}$, en el caso de un ciclo C_1 monótonamente etiquetado y otro C_2 no monótonamente etiquetado.

Referencias

[1] T. Ando, *Totally positive matrices*, Linear Algebra and its Applications 90, 1987, 165–219.

[2] R. el-Ghamry, C. Jordán, and J. R. Torregrosa, *The completable digraphs for the totally positive completion problem*, Discrete Applied Mathematics, to appear.

[3] R. el-Ghamry, *El problema de completación de matrices parciales*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, en curso.

[4] C. R. Johnson, B. K. Kroschel and M. Lundquist, *The Totally Nonnegative Completion Problem*, Fields Institute Commnunications, American Mathematical Society, Providence, RI, 18, 1998, 97–109.

[5] C. Jordán, J. R. Torregrosa, *The totally positive completion problem*, Linear Algebra and its Applications 393, 2004, 259–274.

[6] S. Karlin, *Totally positive matrices*, Stanfor University Press, Stanford, 1968.