XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Simetrias de Lie y soluciones exactas para ecuaciones de Schrödinger no lineales con no linealidad inhomogénea

Juan Belmonte-Beitia[1], Víctor M. Pérez-García[1], Vadym Vekslerchik[1], Pedro J. Torres[2]

[1] *Departamento de Matemáticas, E.T.S.I Industriales e Instituto de Matemática Aplicada a la Ciencia y la Ingeniería (IMACI), Avda. de Camilo José Cela, 3. Universidad de Castilla-La Mancha, 3071 Ciudad Real. E-mail:* `juan.belmonte@uclm.es`, `victor.perezgarcia@uclm.es`, `vadym@ind-cr.uclm.es` .
[2] *Departamento de Matemática Aplicada. Facultad de Ciencias, Universidad de Granada Campus de Fuentenueva s/n 18071 Granada. E-mail:* `ptorres@ugr.es`.

Palabras clave: Ecuaciones de Schrödinger no lineales, solitones, simetrias de Lie, transformaciones canónicas.

Resumen

Usando teoría de grupos de Lie y transformaciones canónicas, construimos soluciones explícitas de ecuaciones de Schrödinger no lineales con no linealidad modulada en el espacio. Presentamos la teoría general y apoyandonos en esta, estudiamos diferentes ejemplos, presentando soluciones explícitas.

1. Introducción

La ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE) es, en sus muchas versiones, uno de los más importantes modelos de la física matemática, con aplicaciones en diferentes campos [19], como por ejemplo física de semiconductores [5, 15], óptica no lineal [12], fotónica [11], física del plasma [8], fundamentación de la mecánica cuántica [17], dinámica de aceleradores [9], teoría del campo medio de condensados de Bose-Einstein [6] o dinámica biomolecular [7], por citar solo algunos ejemplos.

El estudio de este tipo de ecuaciones ha servido como catalizador para el desarrollo de nuevas ideas, incluyendo conceptos matemáticos tales como el de solitón [20] o el desarrollo de singularidades en ecuaciones en derivadas parciales [10, 18].

En los últimos años ha habido un gran interes por una variante de la ecuación de Schrödinger no lineal estándar, la llamada ecuación de Schrödinger no lineal con no linealidad inhomogénea (INLSE), que en una dimensión tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} i\psi_t &= -\psi_{xx} + V(x)\psi + g(x)\left|\psi\right|^2\psi, && (1)\\ \psi(x,0) &= \psi_0(x), && (2)\end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}$, siendo $V(x)$ un potencial externo y donde $g(x)$ describe la modulación espacial de la no linealidad. Esta ecuación surge en diferentes contextos físicos, tales como óptica no lineal y dinámica de condensados de Bose-Einstein.

Aunque muchas soluciones exactas de la NLSE con no linealidad homogénea y sin potencial externo ($V = 0$) se conocen desde hace tiempo, el problema de encontrar soluciones exactas de la INLSE es bastante complicado.

En este trabajo, usando el método de simetrías de Lie, encontramos conjuntos de potenciales $V(x)$ y funciones $g(x)$ para los que soluciones exactas de la ecuación (1) pueden ser calculadas. La idea básica del método de simetrías de Lie es el estudio de las propiedades invariantes de ecuaciones diferenciales bajo grupos continuos de transformaciones. Este método ha sido aplicado con éxito a diferentes ecuaciones, como por ejemplo, ecuaciones diferenciales que modelan osciladores anarmónicos [13, 14] y ecuacion de Madelung, que surgen en la dinámica de fluidos [1]. Para un trabajo mas detallado y completo que el que aqui se presenta, se pueden consultar las referencias [2, 3].

2. Teoría general de simetrías de Lie

En este articulo, nos proponemos buscar soluciones estacionarias localizadas de la ecuación (1), que tienen la siguiente forma

$$\psi(x,t) = \phi(x)e^{-i\lambda t}, \tag{3}$$

y que satisfacen el siguiente problema de autovalores no lineales

$$-\phi_{xx} + V(x)\phi + g(x)\phi^3 = \lambda\phi, \tag{4a}$$

$$\phi(\pm\infty) = 0. \tag{4b}$$

La ecuación (4a) es equivalente a

$$-\phi_{xx} + f(x,\phi) = 0, \tag{5}$$

con $f(x,\phi) = V(x)\phi + g(x)\phi^3 - \lambda\phi$. Por definición [4, 16], una ecuación diferencial de segundo orden $A(x,u,u',u'') = 0$ posee un grupo de Lie de transformaciones puntuales o una simetría puntual de Lie de la forma

$$M = \xi(x,u)\partial/\partial x + \eta(x,u)\partial/\partial u, \tag{6}$$

si la acción de la segunda extensión de M, $M^{(2)}$ sobre A es igual a cero, es decir

$$M^{(2)}A(x,u,u',u'') = \left[\xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^{(1)}(x,u)\frac{\partial}{\partial u'} + \eta^{(2)}(x,u)\frac{\partial}{\partial u''}\right] A(x,u,u',u'') = 0, \tag{7}$$

donde se satisface $A(x,u,u',u'')=0$, y con $\eta^{(k)}$

$$\eta^{(k)}(x,u,u',u'',...,u^k)=\frac{D\eta^{(k-1)}}{Dx}-u^k\frac{D\xi(x,u)}{Dx}, \quad k=1,2,... \tag{8}$$

donde $\eta^{(0)}=\eta(x,u)$ y D/Dx es la derivada total. En nuestro caso, $A(x,\phi,\phi_x,\phi_{xx})$ viene dada por

$$A(x,\phi,\phi_x,\phi_{xx})=-\phi_{xx}+V(x)\phi+g(x)\phi^3-\lambda\phi, \tag{9}$$

y la acción del operador $M^{(2)}$ sobre $A(x,\phi,\phi_x,\phi_{xx})$ lleva a una ecuación polinómica en ϕ_x. Igualando los coeficientes de las potencias de ϕ_x, se obtiene

$$\begin{aligned}
\xi_{\phi\phi} &= 0, && (10a)\\
\eta_{\phi\phi}-2\xi_{\phi x} &= 0, && (10b)\\
2\eta_{x\phi}-\xi_{xx}-3f\xi_\phi &= 0, && (10c)\\
\eta_{xx}-\xi f_x-\eta f_\phi+\eta_\phi f-2\xi_x f &= 0. && (10d)
\end{aligned}$$

Solucionando estas ecuaciones, encontramos que la única simetría puntual de Lie de la ecuación (4a) es de la forma

$$M=b(x)\frac{\partial}{\partial x}+c(x)\phi\frac{\partial}{\partial\phi}, \tag{11}$$

donde

$$\begin{aligned}
g(x) &= g_0 b^{-3}e^{-2C\int_0^x 1/b(s)ds}, && (12a)\\
c(x) &= \tfrac{1}{2}b'(x)+C, && (12b)\\
c''(x)-b(x)V'(x)-2b'(x)\left(V(x)-\lambda\right) &= 0, && (12c)
\end{aligned}$$

para alguna constante C. Las ecuaciones (12) nos permiten construir pares $\{V(x),g(x)\}$ para los cuales existe la simetria de Lie. Así, dado uno de los dos, $g(x)$ o $V(x)$, podemos, en principio, elegir el otro para que se satisfagan las ecuaciones (12).

3. Transformaciones canónicas e invariantes.

Es conocido [13], que la invariancia de la energía está asociada a la invariancía translacional. El generador de esta transformación es de la forma $M=\partial/\partial X$. Para usar este hecho, definimos la siguiente transformación

$$X=f(x), \qquad U=n(x)\phi, \tag{13}$$

donde $f(x)$ y $n(x)$ serán determinados requiriendo que una ley de conservación de tipo energía $M=\partial/\partial X$ exista en las variables canónicas. Usando la ecuación (13) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial\phi}=n(x)\frac{\partial}{\partial U}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=n'(x)\phi\frac{\partial}{\partial U}+f'(x)\frac{\partial}{\partial X}. \tag{15}$$

Sustituyendo las expresiones (14) y (15) en las ecuación (11) e imponiendo la condición $M = \partial/\partial X$, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$f'(x)b(x) = 1, \tag{16}$$
$$b(x)n'(x) + c(x)n(x) = 0. \tag{17}$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (12b) en (17), e integrando, se obtiene

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{b(s)} ds, \tag{18a}$$
$$n(x) = b(x)^{-1/2} e^{-C\int_0^x 1/b(s)ds}. \tag{18b}$$

Se puede escribir ahora la ecuación (4a) en términos de las coordenadas canónicas U y X,

$$-\frac{d^2U}{dX^2} - 2C\frac{dU}{dX} + g_0U^3 - EU = 0, \tag{19}$$

con

$$E = (\lambda - V(x))\, b(x)^2 - \tfrac{1}{4}b'(x)^2 + \tfrac{1}{2}b(x)b''(x) + C^2. \tag{20}$$

La ecuación (19) es la ecuación de Duffing, que sirve para modelizar las oscilaciones no lineales. Es inmediato probar que la cantidad E, que viene dada por la ecuación (20) es una constante del movimiento.

Cuando $C = 0$, las transformaciones anteriores preservan la estructura Hamiltoniana, ya que la transformación canónica es simpléctica. En ese caso, la ecuación (19) queda de la siguiente forma

$$-\frac{d^2U}{dX^2} + g_0U^3 = EU. \tag{21}$$

Eliminando $c(x)$ de las ecuaciones (12), obtenemos

$$g(x) = g_0/b(x)^3, \tag{22}$$

junto con la siguiente ecuación, que relaciona $b(x)$ y $V(x)$

$$b'''(x) - 2b(x)V'(x) + 4b'(x)\lambda - 4b'(x)V(x) = 0. \tag{23}$$

Al ser E constante, esto significa que en las nuevas variables, obtenemos la ecuación de Schrödinger no lineal sin potencial externo y con una no linealidad homogénea.

Por supuesto, no todas las elecciones posibles de $V(x)$ y $g(x)$ conducen a la existencia de una simetria de Lie o a una transformación canónica apropiada, ya que $V(x)$ y $g(x)$ están ligadas por las ecuaciones (12). Este hecho impone algunas restricciones obvias, como el que $b(x)$ tiene que ser diferenciable y positiva.

Muchas soluciones de la ecuación (21) son conocidas. En este trabajo, para los ejemplos de la siguiente sección, usaremos las siguientes soluciones:

$$U_1(X) = \eta\frac{\mathrm{sn}(\mu X,k)}{\mathrm{dn}(\mu X,k)}, \quad \left(E = \mu^2(1-2k^2), g_0 = -\frac{2\mu^2k^2(1-k^2)}{\eta^2}\right), \tag{24}$$
$$U_2(X) = \eta\frac{1}{\cosh(\mu X)}, \quad \left(E = -\mu^2, g_0 = -\frac{2\mu^2}{\eta^2}\right), \tag{25}$$

con $0 \leq k \leq 1$. Queremos recalcar que se podía haber escogido cualquier otra solución de (21) para lo que sigue, con lo que se vislumbra la amplitud del método, ya que para cada solución de la ecuación (21), obtendríamos una solución de la ecuación (4a).

La idea, entonces, para construir soluciones de la ecuación (4a), a partir de soluciones de la ecuación (21), es la siguiente:

Escogemos una función $b(x)$ positiva y diferenciable. Ayudandonos de la ecuación (23) podemos obtener el valor del potencial $V(x)$. Utilizando la ecuación (22), podemos obtener la función $g(x)$. Finalmente, utilizando (13) y (18b), obtenemos que las soluciones de la ecuación (4a), para $C = 0$, vienen dadas por

$$\phi(x) = b^{1/2}(x)U(X(x)), \tag{26}$$

con

$$X(x) = \int_0^x \frac{1}{b(s)} ds \tag{27}$$

4. Dos ejemplos concretos como aplicación de la teoría general

Ejemplo 1:

Tomemos $b(x) = \cosh(x)$. Usando las ecuaciones (20) y (23), para $C = 0$, obtenemos

$$V(x) = \lambda + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} - E\right) \frac{1}{\cosh^2(x)}. \tag{28}$$

Además, usando la ecuación (22), $g(x)$ viene dado por

$$g(x) = \frac{g_0}{\cosh^3(x)}, \tag{29}$$

con $X(x)$ dado por

$$\cos X(x) = -\tanh x, \tag{30}$$

donde $0 \leq X \leq \pi$. Se tiene que la no linealidad $g(x)$ es una función localizada, ya que $g(x) \to 0$, cuando $|x| \to \infty$. Este tipo de no linealidades son importantes desde el punto de vista físico.

Ahora, cualquier solución U de la ecuación (21) da una solución (26) de la ecuación original (4a). Podemos escoger la solución $U_1(X)$ que viene dada por (24). Usando la regla de L'Hopital, es sencillo comprobar que la solución

$$\phi(x) = b^{1/2}(x)U_1(X(x)), \tag{31}$$

es una órbita homoclina a cero, que llamaremos solitón brillante, de la ecuación original (4a).

En la figuras 1(a) y (b), hemos dibujado diferentes soluciones de la ecuación (21), (figura 1 (a)), y de la ecuación (4a), (figura 1 (b)), para diferentes valores de E y g_0.

El caso $E = 1/4$ es un caso especial, ya que $V(x)$ es una constante para este valor de E. Este caso ha sido estudiado en [2].

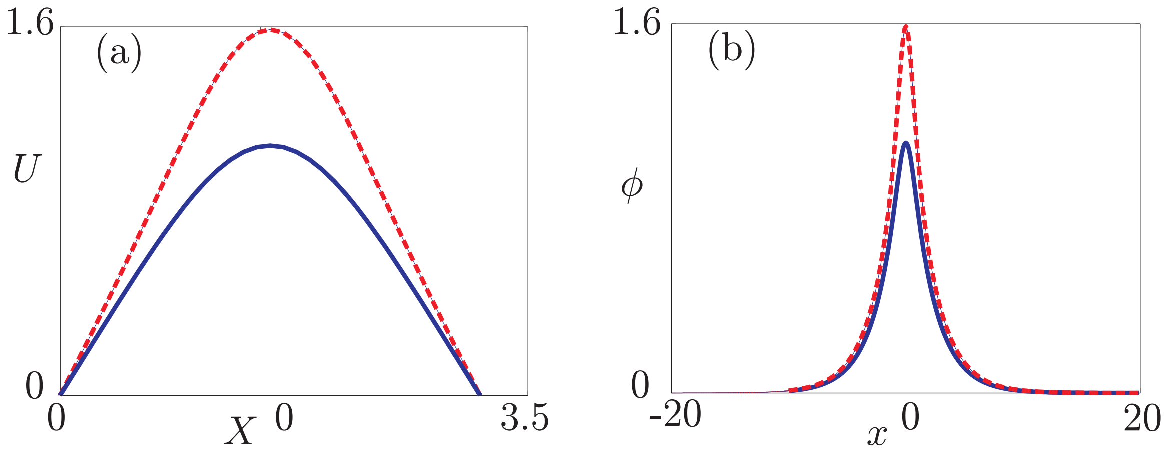

Figura 1: Soluciones de las ecuaciones (a) (21) y (b) (4a), para diferentes valores $E = 0{,}15$, $g_0 = -1$ (linea azul) y $E = -0{,}75$, $g_0 = -1$ (linea roja rayada). Se realiza la transformación (26) para las soluciones de la ecuación (21), mostradas en la figura 1(a) y se obtienen las soluciones de la ecuación (4a) mostradas en la figura 1(b).

Ejemplo 2:

Tomemos ahora la siguiente función $b(x) = \alpha/\sqrt{1+\beta x^2}$, con $\alpha, \beta > 0$. Sustituyendo en (22), obtenemos

$$g(x) = \frac{g_0}{\alpha^3}(1+\beta x^2)^{3/2}, \tag{32}$$

y usando la ecuacion (23), se obtiene

$$V(x) = M(1+\beta x^2) + \frac{1}{4}\frac{3\beta x^2 - 2\beta + 4\lambda + 8\lambda\beta x^2 + 4\lambda\beta^2 x^4}{(1+\beta x^2)^2}, \tag{33}$$

siendo M una constante positiva. Aunque la expresión de $V(x)$ parece complicada, realmente es un potencial cuasi-armónico, y satisface $V(x) \sim x^2$ para valores grandes de x. Ademas, $V(x)$ es un potencial armónico con un término perturbativo acotado, Fig. 2(a). Para la función $g(x)$ que acompaña al término no lineal en la ecuación (4a), ésta satisface $g(x) \sim x^2$ para $x \ll 1$ y $g(x) \sim x^3$ para $x \gg 1$.

Usando la ecuación (20), se obtiene que $E = -\alpha^2 M$. Si tomamos $g_0 < 0$, obtenemos la ecuación de Schrödinger no lineal con término no lineal atractivo, esto es, la ecuación (21).

Si escogemos como solución de la ecuación (21) la solución dada por (24), obtenemos la siguiente solución para la ecuación (4a)

$$\phi(x) = b(x)^{1/2} U_2(X(x)). \tag{34}$$

con $U_2(X)$ dada por

$$U_2(X) = \sqrt{\frac{2E}{g_0}}\frac{1}{\cosh(\sqrt{|E|}X)}. \tag{35}$$

y siendo $X(x)$

$$X(x) = x\sqrt{1+\beta x^2}/(2\alpha) + \sinh^{-1}(\sqrt{\beta}x)/(2\alpha\sqrt{\beta}) \tag{36}$$

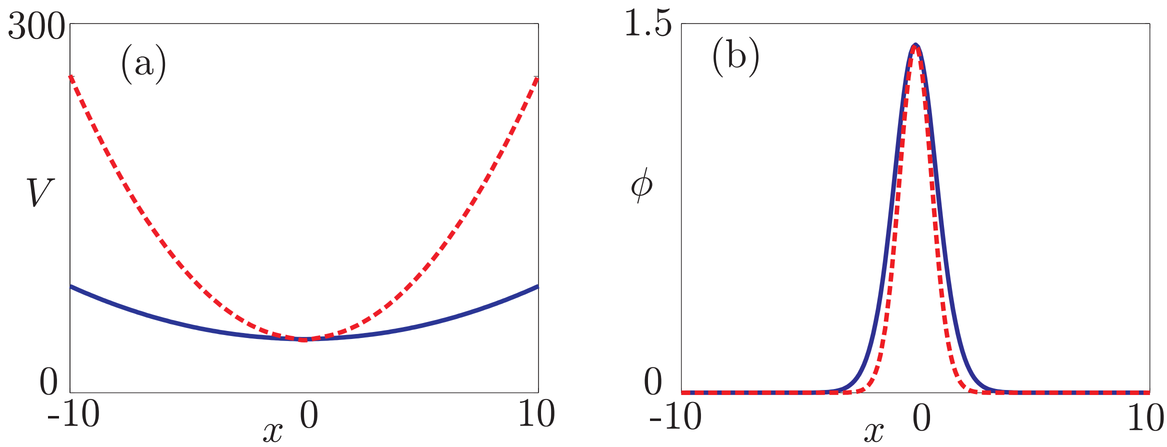

Figura 2: (a) Potencial cuasi-armónico para $M = 1$, $\lambda = 1$ y (i) $\beta = 0{,}5$ (linea azul) y (ii) $\beta = 2{,}5$ (linea roja rayada). (b) Soluciones de la ecuación (4a) para $\alpha = 1$, $g_0 = -1$, $M = 1$ y (i) $\beta = 0{,}5$ (linea azul) y (ii) $\beta = 2{,}5$ (linea roja rayada)

En la figura 2(b), se pueden observar diferentes soluciones de la ecuación (4a) para distintos valores del parámetro β.

5. Conclusiones

En este trabajo, se ha utilizado el método de simetrías de Lie para encontrar soluciones exactas de la ecuación de Schrödinger no lineal con no linealidad inhomogénea. Se ha introducido el marco general de la teoría de Lie y se han presentado dos ejemplos concretos como aplicaciones a esta teoría.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por las becas FIS2006-04190, MTM2005-03483 (Ministerio de Educación y Ciencia, España) y PAI-05-001 (Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha, España).

Referencias

[1] G. Baumann and T.F. Nonnenmacher, *Lie transformations, similarity reduction, and solutions for the nonlinear Madelung fluid equations with external potential*, J. Math. Phys., **28**, 6, (1987).

[2] J. Belmonte-Beitia, V. M. Pérez-García, V. Vekslerchik and P. J. Torres, *Lie symmetries and solitons in nonlinear systems with spatially inhomogeneous nonlinearities*, Phys. Rev. Lett., **98**, 064102, (2007).

[3] J. Belmonte-Beitia, V. M. Pérez-García, V. Vekslerchik and P. J. Torres,*Lie symmetries, qualitative analysis and exact solutions of nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities,* Discrete and continuous dynamical systems-Series B (enviado).

[4] G. W. Bluman and S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1989).

[5] F. Brezzi, P. A. Markowich, *The three-dimensional Wigner-Poisson problem: existence, uniqueness and approximation*, Math. Meth. in Appl. Sci., **14**, 35-61, (1991).

[6] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys., **71**, 463-512, (1999).

[7] A.S. Davydov, *Solitons in Molecular Systems*, Reidel, Dordrecht, (1985).

[8] R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, H.C. Morris, *Solitons and nonlinear wave equations*, Academic Press, New York, (1982).

[9] R. Fedele, G. Miele, L. Palumbo, V. G. Vaccaro, *Thermal wave model for nonlinear longitudinal dynamics in particle accelerators*, Phys. Lett. A, **173**, 407-413, (1993).

[10] G. Fibich, G. Papanicolau, *Self-focusing in the perturbed and unperturbed nonlinear Schrödinger equation in critical dimension*, SIAM J. Appl. Math., **60**, 183-240, (1999).

[11] A. Hasegawa, *Optical Solitons in Fibers*, Springer-Verlag, Berlin, (1989).

[12] Y. Kivshar, G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From fibers to Photonic crystals*, Academic Press, (2003).

[13] P. G. L. Leach, *An exact invariant for a class of time-dependent anharmonic oscillators with cubic anharmonicity*, J. Math. Phys., **22**, 3, (1981).

[14] P. G. L. Leach and S. D. Maharaj, *A first integral for a class of time-dependent anharmonic oscillators with multiple anharmonicities*, J. Math. Phys., **33**, 6, (1992).

[15] J. L. López, J. Soler, *Asymptotic behaviour to the 3D Schrödinger/Hartree-Poisson and Wigner-Poisson systems*, Math. Meth. in App. Sci., **10**, 923-943, (2000).

[16] P. J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer, (1993).

[17] J. L. Rosales, J. L. Sánchez-Gómez, *Nonlinear Schödinger equation coming from the action of the particles gravitational field on the quantum potential*, Phys. Lett. A, **66**, 111-115, (1992).

[18] C. Sulem, P. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation: Self-focusing and wave collapse*, Springer, Berlin, (2000).

[19] L. Vázquez, L. Streit, V. M. Pérez-García, Eds., *Nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger systems: Theory and Applications*, World Scientific, Singapur, (1997).

[20] V. E. Zaharov, V. S. L'vov, S. S. Starobinets, *Spin-wave turbulence beyond the parametric excitation threshold*, Sov. Phys. Usp., **17**, 6, 896-919, (1975).