XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–3)

Aproximación de homeomorfismos continuos Hölder por homeomorfismos afines a trozos

J.C. Bellido[1], C. Mora-Corral[2]

[1] *Dpto. de Matemáticas, E.T.S.I. Industriales, Universidad de Castilla-La Mancha, Campus Universitario, 13071-Ciudad Real. E-mail:* JoseCarlos.Bellido@uclm.es
[2] *Mathematical Institute, Oxford University, 24–29 St Giles', OX1 3LB Oxford, UK. E-mail:* mora-cor@maths.ox.ac.uk

Palabras clave: Aproximación de homeomorfismos, homeomorfismos afines a trozos

Resumen

En esta comunicación tratamos el problema de la aproximación de homeomorfismos por homeomorfismos afines a trozos. El resultado principal es el siguiente: cualquier homeomorfismo continuo Hölder de exponente $\alpha \in (0, 1]$ definido en un dominio de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal, y cuyo inverso también es continuo Hölder de exponente α, puede ser aproximado en la norma Hölder de exponente β, para un cierto $\beta < \alpha$, por homeomorfismos afines a trozos sobre triangulaciones.

En este trabajo se trata el problema de aproximar homeomorfismos por homeomorfismos afines a trozos. La motivación en el contexto de la matemática aplicada viene dada por multitud de situaciones. Citamos, por ejemplo, las que provienen de la Elasticidad no Lineal [1]. En esta situación, las deformaciones son minimizadores de problemas variacionales planteados sobre el subconjunto de las funciones de un espacio de Sobolev $W^{1,p}$ que además son invertibles y conservan la orientación (estos dos son requisitos físicos para que una función sea efectivamente una deformación de un medio elástico, que matemáticamente se traducen en que la función sea un homeomorfismo y que el determinante de su gradiente sea positivo). Si queremos aproximar estos minimizadores o deformaciones por funciones afines a trozos que sean deformaciones discretas, aparece el problema de la aproximación de homeomorfismos por homeomorfismos afines a trozos. También en el contexto de los problemas de Cálculo de Variaciones que provienen de la Elasticidad no Lineal, un resultado de aproximación de homeomorfismos de Sobolev por homeomorfismos afines a trozos abriría una vía para establecer la validez de la ecuación de Euler-Lagrange para este tipo de problemas, y para extender los resultados de regularidad de Evans [4] para minimizadores de problemas variacionales al caso de la Elasticidad no Lineal. Ambos son problemas abiertos (ver [2]), ya que no entran en el contexto estándar del Cálculo de Variaciones vectorial, debido a las condiciones de crecimiento que se requieren sobre los integrandos de los funcionales que se pretenden minimizar.

El método típico de aproximación de funciones por funciones afines a trozos (a saber, elementos finitos P_1-Lagrange sobre una triangulación regular dada basado en los valores nodales de la función objetivo en los vértices de los triángulos) no es válido cuando tratamos de aproximar un homeomorfismo $W^{1,p}$ (pero no de clase C^1) por funciones afines a trozos sobre una triangulación dada que también sean homeomorfismos. Un ejemplo interesante para ilustrar esta situación es el siguiente: Sea D el disco unidad de $\mathbb{R}^2$ y consideremos la función $h : D \to D$ definida en coordenadas polares como

$$(r, \theta) \mapsto (r, \theta - \log r), \qquad r \in (0, 1), \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

y $h(0) = 0$. Es fácil comprobar que esta función es un homeomorfismo Lipschitz, con inversa Lipschitz y $\det \nabla h(x) = 1$ para todo $x \in D \setminus \{0\}$. Sin embargo, si consideramos el triángulo T de vértices (en coordenadas polares)

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad \left(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{4}\right),$$

la interpolación P_1-Lagrange de h sobre el triángulo ϵT, esta interpolación invierte la orientación de este triángulo ϵT para todo $\epsilon > 0$. Este ejemplo muestra la existencia de un homeomorfismo $W^{1,\infty}$ con inversa $W^{1,\infty}$, y una familia de triángulos arbitrariamente pequeños tales que la interpolación P_1-Lagrange de la función sobre cualquiera de estos triángulos invierte la orientación de dicho triángulo. De esta manera, la aproximación P_1-Lagrange de h sobre cualquier triangulación que contenga cualquiera de estos triángulos no puede ser un homeomorfismo. En este sentido, para obtener el resultado de aproximación deseado son necesarias nuevas ideas. El ejemplo presentado aquí ha sido tomado de [6], donde pueden encontrarse diferentes ejemplos del mismo estilo.

Un resultado clásico de Topología Geométrica establece que cualquier homeomorfismo de un dominio de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ puede ser aproximado por homeomorfismos afines a trozos (sobre triangulaciones del dominio) en norma del supremo (ver [5] y las referencias que ahí se citan). El principal resultado de nuestra investigación extiende este resultado clásico al espacio y la norma de las funciones continuas Hölder, y, hasta donde sabemos, es el único resultado hasta el momento de aproximación de homeomorfismos por homemorfismos afines a trozos en una norma más fuerte que la norma del supremo.

Teorema *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto con frontera poligonal. Sea $0 < \alpha \leq 1$. Sea $h \in C^\alpha(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ un homeomorfismo tal que $h^{-1} \in C^\alpha(h(\bar{\Omega}), \mathbb{R}^2)$. Aquí, C^α denota el espacio de Banach de las funciones globalmente continuas Hölder de exponente α, con norma $\|\cdot\|_\alpha$. Entonces existe $0 < \beta < \alpha$, que depende sólo de α, tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un homeomorfismo afín a trozos $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ sobre una triangulación de Ω tal que $\|h - f\|_\beta < \epsilon$.*

Es importante señalar que la prueba es constructiva, el homeomorfismo afín a trozos lo es sobre una triangulación (no *regular* en el sentido de Ciarlet [3], en general) que se adapta a la función objetivo y además no coincide con esta función sobre los vértices de los triángulos. La prueba del resultado es técnica y se basa en el resultado clásico de Topología Geométrica antes mencionado, que adaptamos a nuestra situación haciéndolo totalmente constructivo.

Agradecimientos

Los autores agradecen al profesor John M. Ball de la Universidad de Oxford por las múltiples discusiones sobre este trabajo, que han resultado ser muy útiles y estimulantes. J.C.B. tiene soporte financiero de la Consejería de Educación y Ciencia de Castilla-La Mancha PAI-05-027 y del Ministerio de Educación y Ciencia español MTM-2004-07114. C.M.-C. tiene soporte financiero de EPSRC (Reino Unido) y del Ministerio de Educación y Ciencia español CGL2006-00524/BOS.

Referencias

[1] J. M. Ball, *Singularities and computation of minimizers for variational problems.* In "Foundations of computational mathematics (Oxford, 1999)" pages 1–20. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **284**, Cambridge Univ. Press. Cambridge 2001.

[2] J. M. Ball, *Some open problems in elasticity.* In Geometry, mechanics, and dynamics", pages 3–59. ringer. New York 2002.

[3] Ph. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems.* Classics in Applied Mathematics **40**. SIAM. Philadelphia, PA, 2002.

[4] L. C. Evans, Quasiconvexity and partial regularity in the calculus of variations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **95** (1986) 227–252.

[5] E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions* 2 *and* 3. Graduate Texts in Mathematics **47**. Springer. New York-Heidelberg 1977.

[6] C. Mora-Corral, Approximation by piecewise affine homeomorphisms of Sobolev homeomorphisms that are smoooth outside a point. Aparecerá en *Houston Journal of Mathematics.*