

Un esquema centrado de cuarto orden no oscilatorio con compresión artificial para leyes de conservación hiperbólicas

A. BALAGUER¹, V. MARTÍNEZ², E.D. FERNÁNDEZ³

¹ *Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera s/n, E-46071 Valencia. Spain. E-mails: abalague@mat.upv.es*

² *Dpto. de Matemáticas, Universitat Jaume I, Campus Riu Sec, E-12071 Castellón, Spain. E-mail: martinez@mat.uji.es*

³ *Dpto. Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla, E-41012 Sevilla, Spain. E-mail: edofer@us.es*

Palabras clave: Esquemas centrados, alto orden, compresión artificial

Resumen

En este trabajo se presenta un método numérico de cuarto orden, no oscilatorio, que utiliza un esquema centrado de volúmenes finitos para resolver leyes de conservación hiperbólicas. Para la discretización espacial se utiliza un algoritmo de reconstrucción de valores puntuales en función de valores promedio, el cual conserva la monotonia de los promedios en cada celda y garantiza que el número de puntos extremos en la solución no exceda del número de máximos y mínimos que posee la condición inicial. Las integrales temporales se evalúan mediante fórmulas de cuadratura gaussiana aproximando el flujo temporal mediante un esquema Runge-Kutta de orden 4 con la ayuda de una extensión natural continua y una interpolación de cuarto orden no oscilatoria. Para reducir la difusión numérica en las discontinuidades de contacto se aplica un procedimiento de compresión artificial basado en una corrección del flujo en las celdas afectadas por el salto. El esquema descrito se ha aplicado con éxito en la resolución de varios problemas tipo test, mostrando su carácter no oscilatorio, que los errores de precisión son de orden 4 y el buen grado de resolución en discontinuidades.

1. Introducción

En este trabajo se presenta un esquema numérico de cuarto orden diseñado para resolver las leyes de conservación hiperbólicas de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (1)$$

donde $u_0(x)$ es una función acotada conocida.

Supondremos que el intervalo temporal se encuentra discretizado uniformemente en los valores $t^n = n \cdot \Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots, NT$, y que hemos elegido una malla espacial de puntos equidistantes $x_j = x_{j-1} + \Delta x$, $\forall j = 1, \dots, NX$, donde Δx y Δt son constantes conocidas. El esquema numérico que se presenta en este trabajo está basado en un método de volúmenes finitos, el cual integra la ecuación (1) respecto a los variables espacio y tiempo en los denominados volúmenes de control.

Dado un punto (x_j, t^n) , los esquemas tipo upwind toman como volumen de control el definido por: $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times [t^n, t^{n+1}]$, siendo $x_{j\pm\frac{1}{2}} = x_j \pm \frac{\Delta x}{2}$. Ello crea la dificultad de la aproximación de los flujos en los puntos $x_{j\pm\frac{1}{2}}$. Nessyahu & Tadmor [6] presentaron los denominados esquemas centrados, capaces de evitar la resolución de un problema de Riemann en dichos puntos frontera. En los esquemas centrados, el volumen de control elegido alrededor de cada punto (x_j, t^n) es el siguiente: $[x_j, x_{j+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$. De esta forma la ecuación (1) se convierte en:

$$\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+1}, \tau)) d\tau - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_j, \tau)) d\tau \right] \quad (2)$$

habiendo definido:

$$\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(\varphi, t^n) d\varphi \quad (3)$$

En el instante $t = t^n$ supondremos conocida una aproximación de orden $O((\Delta x)^4)$ de los siguientes promedios de la solución: $\bar{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(\varphi, t^n) d\varphi$. La sección 2 de este trabajo analiza la definición de los polinomios de reconstrucción:

$$R_j(x; \bar{u}^n) = u(x, t^n) + O((\Delta x)^4), \quad \forall x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \quad (4)$$

usando los valores promedio \bar{u}_i^n , $i \in \{j-2, j-1, j, j+1, j+2\}$. Utilizando dichos polinomios en la ecuación (2) tomaremos esta aproximación para los promedios de (3):

$$\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n \equiv \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{x_j}^{x_{j+\frac{1}{2}}} R_j(x; \bar{u}^n) dx + \int_{x_{j+\frac{1}{2}}}^{x_{j+1}} R_{j+1}(x; \bar{u}^n) dx \right] \quad (5)$$

Las integrales que aparecen en (5) se evaluarán de forma exacta dado que, como veremos posteriormente, $R_j(x; \bar{u}^n)$ y $R_{j+1}(x; \bar{u}^n)$ son polinomios de grado menor o igual que 3.

Las integrales respecto a la variable tiempo que aparecen en (2) se aproximan mediante una fórmula de cuadratura gaussiana con 2 nodos de integración:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_j, \tau)) d\tau \equiv \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} (f(u(x_j, t^n + \beta_0 \Delta t)) + f(u(x_j, t^n + \beta_1 \Delta t))) \quad (6)$$

siendo:

$$\beta_0 = \left(\frac{1 - 1/\sqrt{3}}{2} \right), \quad \beta_1 = \left(\frac{1 + 1/\sqrt{3}}{2} \right) \quad (7)$$

En la fórmula (6) falta por aproximar los valores de $u(x_j, t^n + \beta_k \Delta t)$, $k \in \{0, 1\}$. Para ello usaremos un método Runge-Kutta de orden 4 con la ayuda de una extensión natural continua. Con dicha técnica:

$$u(x_j, t^n + \beta_k \Delta t) \equiv R_j(x_j, \bar{u}^n) - \Delta t \sum_{i=1}^4 b_i(\beta_k) K_j^{(i)} \quad (8)$$

siendo:

$$\begin{aligned} b_1(\beta_0) &= \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{108}, & b_2(\beta_0) &= b_3(\beta_0) = \frac{1}{6} - \frac{8\sqrt{3}}{108}, & b_4(\beta_0) &= -\frac{\sqrt{3}}{108} \\ b_1(\beta_1) &= \frac{18 + \sqrt{3}}{108}, & b_2(\beta_1) &= b_3(\beta_1) = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{54}, & b_4(\beta_1) &= -\frac{1}{36\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (9)$$

El coeficiente $K_j^{(i)}$ coincide con la derivada en el punto x_j del polinomio interpolante $P_j(x; f(y^{(i)}))$, el cual es el polinomio de grado menor o igual que 3 que usa los valores puntuales $f(y_k^{(i)})$, $k \in \{j-2, j-1, j, j+1, j+2\}$, estando éstos definidos por:

$$y_j^{(1)} \equiv R_j(x_j; \bar{u}^n), \quad y_j^{(2)} = y_j^{(1)} + \frac{\Delta t}{2} K_j^{(1)}, \quad y_j^{(3)} = y_j^{(1)} + \frac{\Delta t}{2} K_j^{(2)}, \quad y_j^{(4)} = y_j^{(1)} + \Delta t K_j^{(3)} \quad (10)$$

Más detalles sobre la obtención de estos coeficientes pueden encontrarse en Bianco et al. [2] o Levy et al. [4]. Al igual que ocurre con el polinomio $R_j(x; \bar{u}^n)$, el polinomio $P_j(x; f(y^{(i)}))$ satisface ciertas condiciones de monotonía para preservar el carácter no oscilatorio del esquema resultante. La siguiente sección está dedicada a la definición de ambos polinomios.

2. Polinomios de reconstrucción no oscilatorios.

En esta sección se presenta el procedimiento que permite definir los polinomios $R_j(x; \bar{u}^n)$ y $P_j(x; f(y^{(i)}))$. Ambos polinomios son de grado 3 con lo cual el esquema resultante es de orden 4. Para definirlos imponemos las restricciones que se muestran a continuación.

2.1. Reconstrucción de valores puntuales a partir de valores promedio.

Al igual que en Balaguer & Conde [1], inicialmente consideramos el polinomio de grado 3 que verifica estas condiciones:

$$q_j(x_j; \bar{u}^n) = \bar{u}_j^n, \quad q_j(x_{j-1}; \bar{u}^n) = \bar{u}_{j-1}^n, \quad q_j(x_{j+1}; \bar{u}^n) = \bar{u}_{j+1}^n, \quad \Delta x \frac{dq_j}{dx}(x_j; \bar{u}^n) = d_j^n \quad (11)$$

d_j^n será definido posteriormente para preservar el comportamiento no oscilatorio de la reconstrucción. El polinomio $q_j(x; \bar{u}^n)$ interpola valores promedio aunque nuestro objetivo es conseguir una reconstrucción de valores puntuales que sea de $O((\Delta x)^4)$. Además, para preservar la estabilidad del esquema resultante consideramos el parámetro θ_j^n definido en Liu & Tadmor [5]. De esta forma definimos:

$$R_j(x; \bar{u}^n) = \theta_j^n \left(q_j(x; \bar{u}^n) - \frac{1}{24} (\Delta x)^2 \frac{d^2 q_j(x; \bar{u}^n)}{dx^2} \right) + (1 - \theta_j^n) \bar{u}_j^n \quad (12)$$

Con ello, el polinomio resultante adopta esta forma:

$$R_j(x; \bar{u}^n) = \bar{u}_j^n + \theta_j^n \left(-\frac{1}{24} (\bar{u}_{j-1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j+1}^n) + \left(\frac{\bar{u}_{j-1}^n - \bar{u}_{j+1}^n + 10d_j^n}{8} \right) \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right) \right) \quad (13)$$

$$+ \left(\frac{\bar{u}_{j-1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j+1}^n}{2} \right) \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{-\bar{u}_{j-1}^n + \bar{u}_{j+1}^n - 2d_j^n}{2} \right) \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right)^3$$

El polinomio $R_j(x; \bar{u}^n)$ presentará un comportamiento no oscilatorio siempre que tenga la misma forma y el mismo grado de monotonía que la secuencia de promedios $\{\bar{u}_{j-1}^n, \bar{u}_j^n, \bar{u}_{j+1}^n\}$. Considerando la siguiente notación:

$$S_j^n = \text{Sign}(\bar{U}C_j^n), \bar{U}C_j^n = \bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j-1}^n, \bar{U}R_j^n = \bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_j^n, \bar{U}C2_j^n = \bar{u}_{j+2}^n - \bar{u}_{j-2}^n$$

$$ds_j^n \equiv \frac{2}{3}\bar{U}C_j^n - \frac{1}{12}\bar{U}C2_j^n, ds1_j^n = \frac{\bar{U}C_j^n}{10}, ds2_j^n = \frac{1}{2}(\bar{U}C_j^n - 4 \cdot \bar{U}R_j^n), \quad (14)$$

$$ds3_j^n = \frac{1}{2}(4 \cdot \bar{U}R_j^n - 3 \cdot \bar{U}C_j^n), ds4_j^n = \frac{1}{6}(5 \cdot \bar{U}C_j^n - 4 \cdot \bar{U}R_j^n), ds5_j^n = \frac{1}{6}(4 \cdot \bar{U}R_j^n + \bar{U}C_j^n)$$

en Balaguer & Conde [1] se demuestra que dichas condiciones se verifican con la siguiente definición de d_j^n :

Caso (A): Promedios monótonos, es decir, se cumple que

$$\bar{u}_{j-1}^n \leq \bar{u}_j^n \leq \bar{u}_{j+1}^n, \text{ o } \bar{u}_{j-1}^n \geq \bar{u}_j^n \geq \bar{u}_{j+1}^n$$

En este caso definimos d_j^n del siguiente modo:

(A1) Si $S_j^n = 0$ entonces $d_j^n = 0$.

(A2) Si $S_j^n \neq 0$ y $(2 \cdot S_j^n \cdot \bar{U}C_j^n \geq S_j^n \cdot \bar{U}C2_j^n)$ entonces $d_j^n = ds_j^n$

(A3) Si $S_j^n \neq 0$ y $(2 \cdot S_j^n \cdot \bar{U}C_j^n < S_j^n \cdot \bar{U}C2_j^n)$ entonces:

$$(A3.1) \text{ Si } \bar{u}_j^n = \frac{\bar{u}_{j+1}^n + \bar{u}_{j-1}^n}{2} \text{ definimos } d_j^n = \begin{cases} \text{máx} \{ ds1_j^n, ds_j^n \} & \text{si } S_j^n > 0 \\ \text{mín} \{ ds1_j^n, ds_j^n \} & \text{si } S_j^n < 0 \end{cases}$$

(A3.2) Si $\bar{u}_j^n \neq \frac{\bar{u}_{j+1}^n + \bar{u}_{j-1}^n}{2}$ entonces:

(A3.2.1) Si $\left| \bar{U}R_j^n - \frac{1}{2}\bar{U}C_j^n \right| \geq \frac{1}{8} \left| \bar{U}C2_j^n - 2 \cdot \bar{U}C_j^n \right|$ entonces:

$$d_j^n = \begin{cases} \text{máx} \{ ds2_j^n, ds3_j^n, ds_j^n \} & \text{si } S_j^n > 0 \\ \text{mín} \{ ds2_j^n, ds3_j^n, ds_j^n \} & \text{si } S_j^n < 0 \end{cases}$$

(A3.2.2) Si $\left| \bar{U}R_j^n - \frac{1}{2}\bar{U}C_j^n \right| < \frac{1}{8} \left| \bar{U}C2_j^n - 2 \cdot \bar{U}C_j^n \right|$ entonces:

$$d_j^n = \begin{cases} \frac{\bar{U}C_j^n}{2} - S_j^n \cdot C_1 \cdot \left| 2 \cdot \bar{U}R_j^n - \bar{U}C_j^n \right| & \text{si } \left| \frac{\bar{U}R_j^n}{\bar{U}C_j^n} - \frac{1}{2} \right| \leq C_2 \\ \frac{\bar{U}C_j^n}{2} & \text{si } \left| \frac{\bar{U}R_j^n}{\bar{U}C_j^n} - \frac{1}{2} \right| > C_2 \end{cases}$$

siendo $C_1 = \frac{\sqrt{15}}{15}$ y $C_2 = \frac{15-\sqrt{15}}{28}$

Caso (B): Los promedios tienen un máximo. En este caso: $\bar{u}_{j-1}^n < \bar{u}_j^n > \bar{u}_{j+1}^n$ y la definición de d_j^n se efectua del siguiente modo:

- (B1) Si $\bar{UC}2_j^n = 2 \cdot \bar{UC}_j^n$ entonces $d_j^n = ds_j^n$
 (B2) Si $\bar{UC}2_j^n < 2 \cdot \bar{UC}_j^n$ entonces $d_j^n = \min \{ ds2_j^n, ds4_j^n, ds_j^n \}$
 (B3) Si $\bar{UC}2_j^n > 2 \cdot \bar{UC}_j^n$ entonces $d_j^n = \max \{ ds3_j^n, ds5_j^n, ds_j^n \}$

Caso (C): Los promedios tienen un mínimo, es decir, $\bar{u}_{j-1}^n > \bar{u}_j^n < \bar{u}_{j+1}^n$. La definición de d_j^n se efectua teniendo en cuenta lo siguiente:

- (C1) Si $\bar{UC}2_j^n = 2 \cdot \bar{UC}_j^n$ entonces $d_j^n = ds_j^n$
 (C2) Si $\bar{UC}2_j^n < 2 \cdot \bar{UC}_j^n$ entonces $d_j^n = \min \{ ds3_j^n, ds5_j^n, ds_j^n \}$
 (C3) Si $\bar{UC}2_j^n > 2 \cdot \bar{UC}_j^n$ entonces $d_j^n = \max \{ ds2_j^n, ds4_j^n, ds_j^n \}$

2.2. Reconstrucción de valores puntuales a partir de valores puntuales.

Para el cálculo de los polinomios $P_j(x; f(y^{(i)}))$ partimos de los valores puntuales $f(y_k^{(i)})$, $k \in \{j-2, j-1, j, j+1, j+2\}$. Con ello, construimos el polinomio de grado 3 que verifica estas condiciones:

$$P_j(x_j; f(y^{(i)})) = f(y_j^{(i)}), \quad P_j(x_{j-1}; f(y^{(i)})) = f(y_{j-1}^{(i)}), \quad P_j(x_{j+1}; f(y^{(i)})) = f(y_{j+1}^{(i)}) \quad (15)$$

Como cuarta condición se considera que, $\Delta x \frac{dP_j}{dx}(x_j; f(y^{(i)})) = dP_j^{(i)}$ y dicho valor de $dP_j^{(i)}$ será definido con el objetivo de preservar la forma y el grado de monotonía que poseen los datos discretos de partida. De acuerdo con dichas condiciones, el polinomio $P_j(x; f(y^{(i)}))$ adopta la siguiente definición:

$$P_j(x; f(y^{(i)})) = f(y_j^{(i)}) + \theta_j^{(i)} \left(dP_j^{(i)} \cdot \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right) + \left(\frac{f(y_{j-1}^{(i)}) - 2f(y_j^{(i)}) + f(y_{j+1}^{(i)})}{2} \right) \cdot \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{-f(y_{j-1}^{(i)}) + f(y_{j+1}^{(i)}) - 2 \cdot dP_j^{(i)}}{2} \right) \cdot \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right)^3 \right) \quad (16)$$

Nuevamente el valor de $\theta_j^{(i)}$ se define según lo expuesto en Liu & Tadmor [5] con el objetivo de evitar la aparición de falsos extremos en la solución numérica obtenida.

La definición de $dP_j^{(i)}$ coincide con la expuesta en la sección 2 para d_j^n con la excepción que cambiamos los valores promedio \bar{u}_j^n por los valores puntuales $f(y_j^{(i)})$ (en general cambiamos \bar{U} por F) y además, definiendo (más detalles en Balaguer & Conde [1]):

$$FC_j^{(i)} = f(y_{j+1}^{(i)}) - f(y_{j-1}^{(i)}), \quad FR_j^{(i)} = f(y_{j+1}^{(i)}) - f(y_j^{(i)}), \quad C1 = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad C2 = \frac{6}{12 + \sqrt{3}},$$

$$dPs1_j^{(i)} = 0, \quad dPs2_j^{(i)} = \frac{1}{2} \left(FC_j^{(i)} - 8 \cdot FR_j^{(i)} \right), \quad dPs3_j^{(i)} = \frac{1}{2} \left(8 \cdot FR_j^{(i)} - 7 \cdot FC_j^{(i)} \right)$$

3. Algoritmo de compresión artificial.

En Fernández-Nieto & Martínez [3] se presenta una técnica de compresión artificial para evitar la difusión numérica que presentan algunos esquemas de segundo orden. La idea es reemplazar el flujo en las celdas situadas alrededor de las discontinuidades de contacto. En este trabajo adaptamos el algoritmo de compresión artificial descrito en [3] al esquema de orden 4 presentado en las secciones anteriores. Por simplicidad presentamos el algoritmo resultante para el caso de la ecuación escalar. La extensión a problemas no lineales se puede desarrollar siguiendo las ideas descritas en [3].

Supondremos que se resuelve el problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(v \cdot u)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (17)$$

siendo v una constante conocida. Consideramos que λ_0 es el número CFL bajo el cual el esquema numérico es estable.

Paso 1: Elegimos $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ tal que $\lambda_0 - |v| \frac{\Delta t}{\Delta x} > 0$

Paso 2: En el instante de tiempo $t = t^n$, conocidos los promedios de la solución \bar{u}_k^n calculamos la siguiente constante en cada punto x_j :

$$ds_j^n = \frac{1}{12} (\bar{u}_{j-2}^n - 8\bar{u}_{j-1}^n + 8\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_{j+2}^n) \quad (18)$$

Puede observarse que ds_j^n ha sido utilizada en la sección 2.1 para definir el valor de la derivada del polinomio $q_j(x; \bar{u}^n)$ en el punto x_j . Además, puede comprobarse que con $d_j^n = ds_j^n$ se consigue un polinomio $R_j(x; \bar{u}^n)$ que verifica $R_j(x; \bar{u}^n) = u(x, t^n) + O((\Delta x)^4)$.

Paso 3: En las celdas $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ para las cuales $ds_{j-1}^n < 12$, $ds_j^n < 12$ y $ds_{j+1}^n < 12$ se aplica el esquema numérico descrito en la sección 2 resolviendo el problema (1) con $f(u) = v \cdot u$.

Paso 4: Si $ds_j^n \geq 12$ entonces en las celdas $[x_{k-\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{1}{2}}]$ con $k \in \{j-1, j, j+1\}$ se aplica el esquema numérico descrito en la sección 2 pero resolviendo el problema (1) con $f(u) = v \cdot u + \rho(u - \bar{u}_{j-2}^n)(u - \bar{u}_{j+2}^n)$ siendo:

$$\rho = \frac{\lambda_0 - |v| \frac{\Delta t}{\Delta x}}{\lambda_0 \cdot (\bar{u}_{j-2}^n - \bar{u}_{j+2}^n)} \quad (19)$$

4. Algunos ejemplos tipo test.

Para verificar el comportamiento no oscilatorio y la precisión del esquema numérico descrito en este trabajo, a continuación presentamos la resolución de varios problemas tipo test.

Problema 1 Consideramos la ecuación escalar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(v \cdot u)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0,15 < x < 0,45 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (20)$$

Para resolver dicho problema consideramos una malla con $NX = 100$ puntos en el intervalo $[0, 1]$ y calculamos el resultado final para $T = 0,3$ con $NT = 120$ pasos de tiempo. De esta

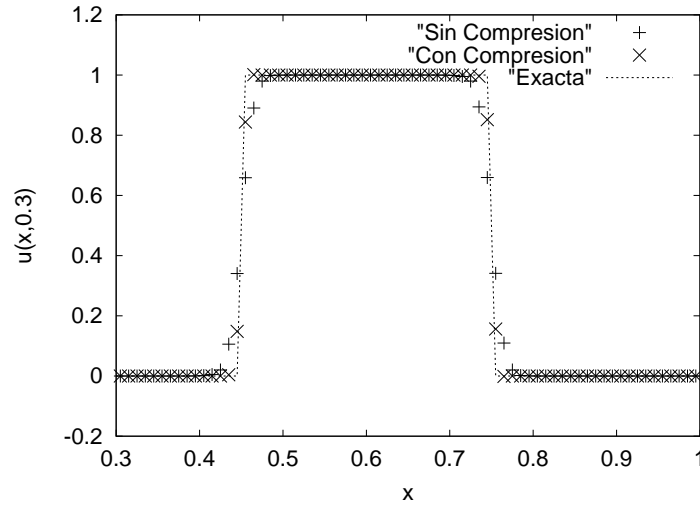


Figura 1: Soluciones numéricas del problema 1 en $T = 0,3$ con $NX = 100$, $NT = 120$. En la compresión artificial $\lambda_0 = 0,35$

forma $\Delta t = 0,25\Delta x$. La figura 1 compara el resultado obtenido al aplicar el esquema descrito en la sección 2 con y sin el algoritmo de compresión artificial. En este último algoritmo se considera que $\lambda_0 = 0,35$. Al aplicar la compresión artificial la difusión numérica disminuye notablemente, de forma que tal sólo 2 nodos intervienen en cada discontinuidad de contacto. Tampoco se observan oscilaciones numéricas de tamaño mayor al del error de truncamiento local.

Problema 2 Cambiamos la condición inicial en la ecuación (20):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(v \cdot u)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} \sin(\pi x) & 0 \leq x \leq 0,5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (21)$$

A pesar de que el algoritmo de compresión artificial descrito en [3] ha estado diseñado para discontinuidades de contacto con estados constantes, probamos su aplicación a este problema con estados no constantes. Los resultados se encuentran en la figura 2. De nuevo hemos elegido una malla con $NX = 100$ puntos en el intervalo $[0, 1]$ y se ha calculado el resultado final para $T = 0,3$ con $NT = 120$. En la compresión artificial $\lambda_0 = 0,35$. El algoritmo de compresión artificial produce un resultado con poca difusión numérica sin oscilaciones numéricas.

Problem 3. Resolvemos la ecuación de Burgers con condiciones iniciales periódicas:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{1}{2} u^2(x, t) \right)}{\partial x} = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad u(x, 0) = 1 + \frac{1}{2} \sin(\pi x) \quad (22)$$

La tabla 1 muestra los errores obtenidos en las normas L^1 y L^∞ , calculando el orden de precisión experimental de la solución numérica en $T = 0,3$ con $\Delta t = 0,2\Delta x$. En ella se observa que nuestro esquema presenta un error que es de orden 4 en las dos normas L^1 y L^∞ . Dado que dicha ecuación no tiene soluciones con discontinuidades de contacto no se ha aplicado el algoritmo de compresión artificial.

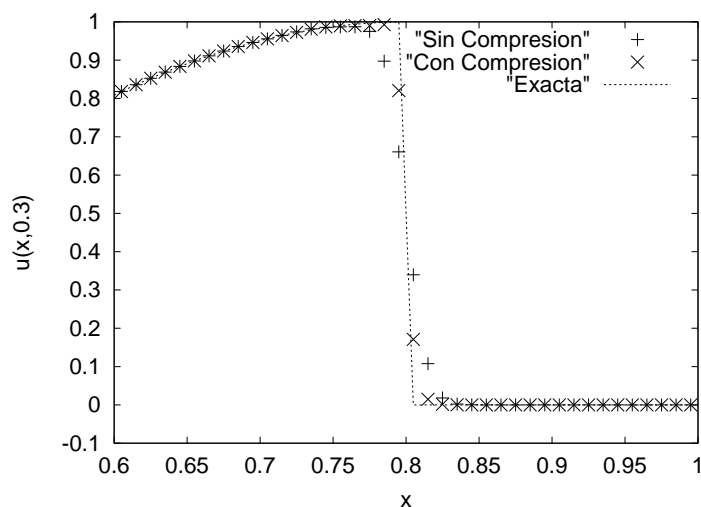


Figura 2: Soluciones del problema 2 en $T = 0,3$ con $NX = 100$, $NT = 120$ y $\lambda_0 = 0,35$

NX	L^1 error	L^1 orden	L^∞ error	L^∞ orden
80	$2.644516 \cdot 10^{-6}$	4.07	$1.975064 \cdot 10^{-5}$	4.29
160	$1.568363 \cdot 10^{-7}$	4.23	$1.008918 \cdot 10^{-6}$	4.25
320	$8.331654 \cdot 10^{-9}$	4.20	$5.313971 \cdot 10^{-8}$	4.36
640	$4.511819 \cdot 10^{-10}$	4.13	$2.594052 \cdot 10^{-9}$	4.12

Tabla 1: Errores en la solución numérica del problema 3 en $T = 0,3$ con $\Delta t = 0,2\Delta x$.

Agradecimientos

Los autores agradecen la ayuda recibida a través de los proyectos GV06/143 de la Generalitat Valenciana y CTM2006-11767, CGL2006-11242-C03 y MTM2006-01275 del ministerio de Educación y Ciencia de España.

Referencias

- [1] A. BALAGUER, C. CONDE. *Fourth-order non-oscillatory upwind and central schemes for hyperbolic conservation laws*. SIAM J. Numer. Anal., 43 (2), (2006), 455-473.
- [2] F. BIANCO, G. PUPPO, G. RUSSO. *High-order central schemes for hyperbolic systems of conservation laws*. SIAM J. Sci. Comput. 21 (1), (1999), 294-322.
- [3] E.D. FERNÁNDEZ-NIETO, V. MARTÍNEZ. *A treatment of discontinuities for nonlinear systems with linearly degenerate fields*. Computers & Fluids, 36, (2007), 987-1003.
- [4] D. LEVY, G. PUPPO, G. RUSSO. *Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws*. Math. Model. Numer. Anal., 33 (3), (1999), 547-571.
- [5] X.D. LIU AND E. TADMOR. *Third order nonoscillatory central scheme for hyperbolic conservation laws*. Numer. Math., 79, (1998), 397-425.
- [6] H. NESSYAHU AND E. TADMOR. *Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws*. J. Comp. Phys., 87, (1990), 408-463.