

## Formulación de tipo Petrov-Galerkin de algunos métodos distributivos: Aplicación a las ecuaciones de Navier-Stokes.

T. CHACÓN REBOLLO<sup>1</sup>, M. GÓMEZ MÁRMOL<sup>1</sup>,  
G. NARBONA REINA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. E.D.A.N., Universidad de Sevilla, Apto. 1160, 41012 Sevilla. E-mails: chacon@us.es, macarena@us.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. Matemática Aplicada I, Universidad Sevilla, 41012 Sevilla. E-mail: gnarbona@us.es.*

**Palabras clave:** Métodos distributivos, Petrov-Galerkin, Navier-Stokes

### Resumen

En este trabajo estudiamos la resolución de las Ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias mediante métodos distributivos no lineales. Formulamos estos métodos como métodos de tipo Petrov-Galerkin, en un contexto de discretización por el método de los elementos finitos. Utilizamos funciones tests descentradas “corriente arriba” para el tratamiento del término de convección.

Esta formulación nos permite realizar el análisis de los métodos distributivos que consideramos como una extensión del análisis estándar. Presentamos resultados de existencia de solución del problema discreto, convergencia y estimaciones de error.

Por último, presentamos algunos test numéricos resueltos mediante un esquema de tipo distributivo no lineal, el PSI. Estos tests muestran un comportamiento resistente a la generación de oscilaciones parásitas, y una mayor exactitud que un método de las características de primer orden.

## 1. Ecuaciones de Navier-Stokes

En esta sección desarrollamos la aproximación del problema estacionario de Navier-Stokes. Para ello consideramos estas ecuaciones de tipo convección-difusión, con el objetivo de realizar la discretización del término de transporte utilizando el método PSI.

Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  o  $3$ ) con frontera Lipschitz  $\Gamma = \partial\Omega$ . Consideramos el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^d, p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{en } \Omega; \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \end{array} \right. \quad (1)$$

siendo  $u$  el campo de velocidad,  $p$  la presión y  $\nu$  el coeficiente de difusión. Y denotamos por  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , el término fuente.

Consideramos los espacios  $\mathbf{V} = (H_0^1(\Omega))^d$  y  $L_0^2(\Omega)$  donde vamos a buscar la solución  $u$  y  $p$ , respectivamente. Suponemos  $f$  en  $(H^{-1}(\Omega))^d$ . Por último, definimos la forma trilineal  $b$  asociada al primer término de la ecuación:  $b(u, v, w) = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla v) w \, dx$ , con  $u, v, w \in \mathbf{V}$ . Y denotamos su norma por  $\mathcal{M}$ .

Consideramos la formulación variacional estándar del problema (1):

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in \mathbf{V}, p \in L_0^2(\Omega) \text{ tal que} \\ b(u, u, v) + \nu(\nabla u, \nabla v) - (p, \nabla \cdot v) = \langle f, v \rangle & \forall v \in \mathbf{V}; \\ (\nabla \cdot u, q) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \quad (2)$$

Se puede probar que el problema (2) admite solución (Cf. [6], [8]) y que además es única bajo la condición  $\mathcal{M}\|f\|_{-1} < \nu^2$ .

A partir de ahora supondremos que  $\Omega$  es un dominio poligonal. Sea  $\mathcal{T}_h$  una triangulación de  $\Omega$ . Definimos los siguientes espacios discretos:

$$V_h^* = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) / v_{h|_T} \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad V_h = \{v_h \in V_h^* / v_h = 0 \text{ sobre } \Gamma\}. \quad (3)$$

Nuestra aproximación interna  $\{\mathbf{V}_h\}_{h>0}$  para el espacio de velocidades  $\mathbf{V}$  es  $\mathbf{V}_h = (V_h)^d$ . Consideramos también una aproximación interna por tipo elementos finitos  $\{M_h\}_{h>0}$  del espacio de presiones  $L_0^2(\Omega)$  tal que se satisface una condición inf-sup:

$$\exists \hat{\beta} > 0 \text{ tal que } \hat{\beta} \|r_h\| \leq \sup_{v_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(r_h, \nabla \cdot v_h)}{\|\nabla v_h\|_0}, \quad \forall r_h \in M_h. \quad (4)$$

### 1.1. Esquema PSI

En esta sección describimos la idea general para la construcción de los métodos distributivos, y en particular para el esquema PSI. Por simplicidad en la notación lo haremos en dimensión 2.

Los métodos distributivos se centran en el tratamiento del término de convección. Vamos a considerar el flujo convectivo de la magnitud  $\rho$  transportada por la velocidad  $u$ , definido por

$$q_{conv} = u\rho.$$

El balance total del flujo convectivo que atraviesa la frontera de un elemento  $T \in \mathcal{T}_h$  viene dado por

$$\Phi^T = \int_{\partial T} q_{conv} \cdot n = \int_T \nabla \cdot (u\rho) = \int_T u \cdot \nabla \rho,$$

donde hemos utilizado que  $\nabla \cdot u = 0$ .

La idea básica de los métodos distributivos es repartir el flujo  $\Phi^T$  entre los vértices de los elementos vecinos a  $T$ . Esta distribución se hace mediante unos coeficientes que denotamos por  $\{\beta_j^T\}_{j=1}^N$ , de forma que el flujo enviado al nodo  $b_j$  es

$$\Phi_j = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \beta_j^T \Phi^T. \quad (5)$$

Normalmente, el flujo generado en el elemento  $T$  sólo se distribuye entre los vértices de este elemento, así que podemos escribir:

$$\beta_j^T = 0 \quad \text{si } b_j \text{ no es un vértice de } T.$$

Así, si denotamos por  $E_j$  el conjunto de todos los elementos de los cuales  $b_j$  es vértice, podemos escribir:

$$\Phi_j = \sum_{T \in E_j} \beta_j^T \int_T u \cdot \nabla \rho. \quad (6)$$

Para obtener un flujo conservativo y un método estable  $L^\infty$ , se consideran las siguientes propiedades sobre los coeficientes de distribución (Cf. [3]):

$$\sum_{j=1}^{d+1} \beta_{jT}^T = 1, \quad \beta_{jT}^T \geq 0, \quad \text{para todo nodo } b_j, \text{ para todo triángulo } T \in \mathcal{T}_h. \quad (7)$$

El esquema PSI se construye a partir de un método distributivo lineal llamado N-esquema, el cual viene determinado por la definición del flujo

$$\Phi_i^T(s_h) = \beta_i^T \Phi^T(s_h), \quad \text{para } s_h \in V_h.$$

Para ello vamos a introducir el vector normal interior a la frontera de  $T$ , opuesto al nodo  $b_i$ ,

$$n_i^T = d |T| \nabla \varphi_{iT}, \quad (8)$$

y los valores

$$K_i^T = \frac{1}{d} \bar{u}^T \cdot n_i^T, \quad \text{con } \bar{u}^T = \frac{1}{|T|} \int_T u.$$

De manera que para el N-esquema tenemos,

$$\Phi_i^T(s_h) = \sum_{i=1}^3 c_{ij}^T (s_i^T - s_j^T), \quad c_{ij} = (K_i^T)^+ M^T (K_j^T)^-, \quad (9)$$

$$\text{donde } (K_i^T)^+ = \max\{K_i^T, 0\}, \quad (K_j^T)^- = \min\{K_j^T, 0\}, \quad M^T = \sum_{j=1}^3 (K_j^T)^-,$$

y  $s_1^T, s_2^T, s_3^T$  son los valores de  $s_h$  en los vértices de  $T$ .

Observar que el signo de  $K_i^T$  indica si el vértice  $b_i$  está “corriente abajo” con respecto a  $u$  ( $K_i^T \leq 0$ ). Para que el método sea estable, los nodos que están “corriente arriba” en el triángulo  $T$  no reciben ninguna aportación del flujo de este elemento.

En algunos casos, el flujo  $\Phi^T(s_h)$  puede anularse, mientras que el flujo  $\Phi_i^T(s_h)$  toma un valor finito, y por tanto, el coeficiente  $\beta_i^T$  no estaría definido. Es por esta razón por la que el N-esquema no puede escribirse bajo una formulación Petrov-Galerkin (ver [5]).

El esquema PSI se construye, como hemos dicho antes, a partir del N-esquema, buscando unas nuevas funciones de flujo  $\Phi_i^*$  tales que

$$\Phi_i^* = (1 - \mu_i) \Phi_i, \quad \text{para unos coeficientes } 0 \leq \mu_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, d+1 \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{d+1} \Phi_i^* = \Phi. \quad (11)$$

Los coeficientes  $\beta_i^* = \frac{\Phi_i^*}{\Phi}$  están acotados independientemente de la malla. (12)

(Hemos suprimido el superíndice  $T$  y la dependencia de  $s_h$  por claridad en la notación). Se prueba que  $\mu_i$  son funciones continuas de  $\Phi_i$ , y que  $\beta_i^*$  cumplen la propiedad (7). Observar además que tanto los coeficientes de distribución como las funciones de flujo  $\Phi^*$  y  $\Phi$  dependen de  $s_h$ .

La resolución del problema (10)-(12) y por tanto la definición explícita del esquema PSI, puede encontrarse en [3], no la detallamos aquí, ya que no es relevante en nuestro análisis.

## 1.2. Formulación Petrov-Galerkin

Podemos dar una formulación abstracta de tipo Petrov-Galerkin del método PSI y de otros métodos distributivos no lineales. Al igual que en [5], definimos un nuevo espacio discreto cuyas funciones de base *nodales* denotamos por  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$  (dependiendo de un elemento  $\sigma_h$  de  $V_h$ ):

$$W_h(\sigma_h) = \text{span}\{\lambda_1(\sigma_h), \lambda_2(\sigma_h), \dots, \lambda_M(\sigma_h)\}. \quad (13)$$

En particular para el método PSI, dado un nodo  $b_i$  de la malla, definiremos la función de base asociada como sigue:

$$\lambda_i(\sigma_h) = \begin{cases} \beta_i^{*T}(\sigma_h) & \text{si } b_i \in T; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observemos que la dependencia respecto de la función  $\sigma_h$  se debe al carácter no lineal del método PSI.

Consideramos también el operador de interpolación asociado, que toma valores en  $W_h$ , y que denotamos por  $\Pi_{\sigma_h}$ :

$$\begin{aligned} \Pi_{\sigma_h} : \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) &\longrightarrow W_h \\ z &\longrightarrow \Pi_{\sigma_h} z = \sum_{i=1}^M z(b_i) \lambda_i, \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $\{b_i\}_{i=1}^M$  denota los nodos de la malla situados en el interior del dominio.

Llamaremos a  $\Pi_{\sigma_h}$  el operación de interpolación distribuida generado por la función  $\sigma_h$ .

La extensión de esta definición al espacio vectorial  $\mathbf{V}_h$  se realiza por componentes, de la siguiente forma. Definimos  $\mathbf{W}_h(w_h) = W_h(w_{1_h}) \times W_h(w_{2_h})$  y denotamos por  $\mathbf{\Pi}_{w_h}$  el operador vectorial de interpolación distribuida generado por  $w_h \in \mathbf{V}_h$ . Utilizaremos las funciones de  $\mathbf{W}_h(w_h)$  como funciones test para el término de convección.

Definimos ahora la forma discreta asociada al término de convección  $b_h(r_h) : \mathbf{V}_h \times \mathbf{V}_h \times \mathbf{V}_h \mapsto \mathbb{R}$  como  $b_h(r_h; u_h, v_h, w_h) = \int_{\Omega} (u_h \cdot \nabla v_h) \mathbf{\Pi}_{r_h} w_h$ , para una función

dada  $r_h \in \mathbf{V}_h$ . Escribimos entonces la aproximación variacional del problema (2):

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_h \in \mathbf{V}_h, p_h \in M_h \text{ tal que} \\ b_h(u_h; u_h, u_h, v_h) + \nu(\nabla u_h, \nabla v_h) - (p_h, \nabla \cdot v_h) = \langle f, \mathbf{\Pi}_{u_h} v_h \rangle & \forall v_h \in \mathbf{V}_h; \\ (\nabla \cdot u_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in M_h. \end{cases} \quad (15)$$

Hemos discretizado también de forma descentrada el término fuente con el fin de obtener un esquema bien equilibrado al segundo orden en régimen de convección dominante, ver [5]. Para que este término  $\langle f, \mathbf{\Pi}_{u_h} v_h \rangle$  tenga sentido basta considerar  $f$  en un espacio más regular que  $\mathbf{V}'$ , por ejemplo  $f \in L^2(\Omega)^d$ .

## 2. Existencia, convergencia y estimaciones de error

Nuestro análisis de existencia de soluciones del problema discreto (2), convergencia y estimaciones de error está basado en ciertas propiedades satisfechas por nuestra formulación :

**Propiedad 1** *Para todo elemento  $T \in \mathcal{T}_h$  y para todo  $\sigma_h \in V_h$ ,  $\lambda_i^T(\sigma_h) \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, d+1$  y  $\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_{i_T}^T(\sigma_h) = 1$ , donde por  $i_T$  denotamos el índice global correspondiente al índice local  $i$ , del elemento  $T$ , y siendo  $\lambda_{i_T}^T(\sigma_h)$  la restricción de  $\lambda_i(\sigma_h)$  al elemento  $T$ .*  
□

Definamos la matriz de convección asociada a una velocidad  $v_h \in \mathbf{V}_h$  y a un elemento  $\sigma_h \in V_h$  denotada por  $C(v_h; \sigma_h) \in \mathfrak{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$  (el espacio de las matrices reales de dimensión  $M \times M$ ) como sigue:

$$C_{ij}(v_h; \sigma_h) = \int_{\Omega} (v_h \cdot \nabla \varphi_j) \Pi_{\sigma_h} \varphi_i = \int_{\Omega} (v_h \cdot \nabla \varphi_j) \lambda_i(\sigma_h),$$

Entonces

**Propiedad 2** *La matriz  $C(v_h; \sigma_h)$  es semi-definida positiva para cualesquiera  $v_h \in \mathbf{V}_h$  y  $\sigma_h \in V_h$ .* □

Por último se tiene una hipótesis técnica sobre el comportamiento de la matriz de convección respecto a sus argumentos  $v_h$  y  $\sigma_h$ :

**Propiedad 3** *La matriz de convección  $C(v_h; \sigma_h)$  es una matriz continua de  $\mathbf{V}_h \times \mathbf{V}_h$  al espacio  $\mathfrak{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$ .* □

Bajo las Propiedades 1 y 2, la forma  $b$  es continua sobre  $H_0^1(\Omega)^3$  y *semidefinida positiva*.

*Observación 1* Una técnica habitual para la aproximación de las ecuaciones de Navier-Stokes por métodos mixtos en elementos finitos, consiste en reemplazar la forma  $b$  por una forma antisimétrica  $\tilde{b}$  que satisface  $\tilde{b}(u_h; v_h, v_h) = 0$ . En nuestro caso, la forma  $b_h$  no satisface esta condición, pero es semi-positiva.

Esta propiedad nos permite realizar el análisis del problema discreto usando el análisis estándar con algunas modificaciones adecuadas. En particular, el análisis de existencia de soluciones del problema discreto se sigue del Teorema del Punto Fijo de Brouwer:

**Teorema 2.1** *Supongamos  $f \in L^r(\Omega)^d$  para  $r > r_{min}$ , con  $r_{min} = 1$  para  $d = 2$  y  $r_{min} = 6/5$  para  $d = 3$ . Entonces el problema (15) admite al menos una solución que satisface la estimación:*

$$\begin{aligned} \|\nabla u_h\|_0 &\leq \nu^{-1} K_r \|f\|_r \\ \|p_h\|_0 &\leq \hat{\beta}^{-1} (\mathcal{N} \nu^{-2} K_r^2 \|f\|_r + 2K_r) \|f\|_r \end{aligned} \quad (16)$$

siendo  $\hat{\beta}$  la constante de la condición inf-sup (4),  $K_r$  una constante que depende de  $r$ , y

$$\mathcal{N} = \sup_{0 < h \leq h_0} \sup_{u, v, w \in \mathbf{V}_h} \frac{b_h(r; u, v, w)}{\|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 \|\nabla w\|_0}.$$

□

El análisis de convergencia y estimaciones de error se siguen de una modificación bastante elaborada del análisis estándar de aproximación de las Ecuaciones de Navier-Stokes mediante métodos mixtos. Tenemos los siguientes resultados.

**Teorema 2.2** *Bajo las hipótesis del Teorema 2.1, existe una subsucesión de la sucesión  $\{(u_h, p_h)\}_{h \geq 0}$ , solución de (15) que converge fuerte en  $\mathbf{V} \times L_0^2(\Omega)$  a una solución del problema (2). Si el problema continuo tiene una única solución, entonces toda la sucesión converge a ella.*

□

**Teorema 2.3** *Supongamos ciertas las hipótesis del Teorema 2.2 y además suponemos que  $\mathcal{N} \|f\|_{-1} < \nu^2$  y  $\mathcal{M} \|f\|_{-1} < \nu^2$ . Entonces existe una constante positiva  $C$  tal que*

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - u_h)\|_0 + \|p - p_h\|_0 &\leq C \left[ d_1(u, \mathbf{V}_h) + d_0(p, M_h) + h^{1-\frac{d}{s}} \right], \forall \hat{s} \in (d, r_{max}] \\ \text{con } r_{max} &= \begin{cases} \infty & d = 2; \\ 6 & d = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

donde  $d_1(u, \mathbf{V}_h) = \inf_{v_h \in \mathbf{V}_h} \|\nabla(u - v_h)\|_0$  y  $d_0(p, M_h) = \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_0$ .

□

### 3. Resultados numéricos

En esta sección presentamos algunos test numéricos clásicos para el problema de Navier-Stokes. Se han obtenido utilizando el método distributivo PSI, que comparamos con la solución obtenida por el método de las características. Observamos una mayor precisión y una escasa formación de oscilaciones parásitas del método PSI, especialmente en zonas de flujo de fuerte gradiente.

Para la resolución numérica hemos utilizado del software Freefem++ ([www.freefem.org](http://www.freefem.org)).

#### 3.1. Test 1: Problema de la cavidad

Consideramos como dominio el cuadrado unidad,  $\Omega = [0, 1]^2$ . Y resolvemos el problema (15) para  $\nu = 0,001$  y  $f = 0$ . Como condición inicial tomamos  $u = 0$  en todo el dominio y como condición de contorno:

$$u = \begin{cases} (1, 0) & \text{sobre } y = 1; \\ (0, 0) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

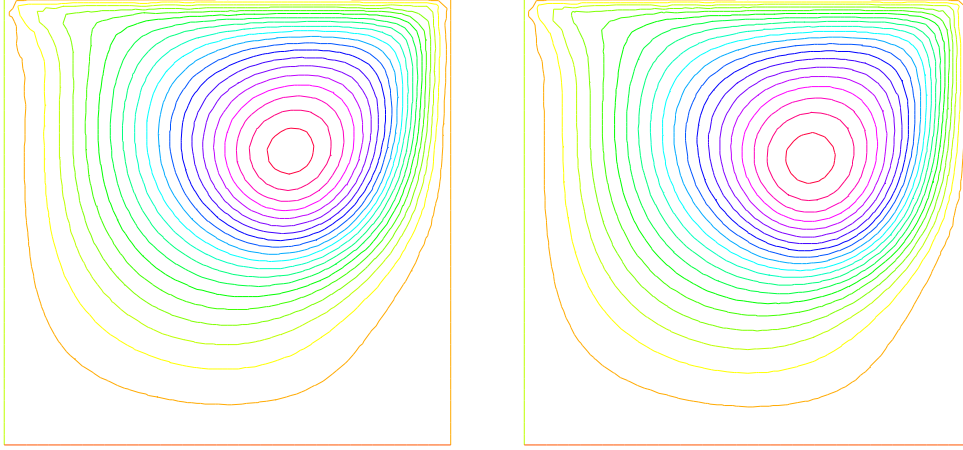


Figura 1: Test 1: Método de las Características (izquierda), Esquema PSI (derecha).

En la Figura 1, representamos la solución obtenida para tiempo final  $T = 2,4$ . Observamos el buen comportamiento del método PSI y una mejor aproximación en la zona superior izquierda, donde los gradientes son fuertes. Esta diferencia es aún más clara en el Test 2, como veremos a continuación.

### 3.2. Test 2: Problema del escalón

Se trata de resolver mediante las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles la evolución de un fluido que se mueve en un canal estrecho con un escalón en la parte inferior. El dominio está representado en la Figura 2, donde hemos dividido la frontera en cuatro partes. Consideramos en este caso el coeficiente de difusión  $\nu = 0,0025$  y término fuente  $f = 0$ . Las condiciones de contorno vienen dadas por:

$$u = \begin{cases} (4y(1-y), 0) & \text{sobre } \Gamma_1; \\ (0, 0) & \text{sobre } \Gamma_2 \cup \Gamma_4; \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} + p n = 0 & \text{sobre } \Gamma_3. \end{cases}$$

Como condición inicial tomamos:

$$u_0 = \begin{cases} (4y(1-y), 0) & \text{sobre } \Gamma_1; \\ (0, 0) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En este caso podemos apreciar una mayor diferencia entre las soluciones, notando que la solución obtenida por el método PSI es más regular y captura mejor el torbellino formado tras el escalón. En la Figura 3 mostramos la solución para ambos métodos, para un tiempo final de  $T = 20$  segundos.

### Agradecimientos

Investigación parcialmente financiada por Proyecto de Investigación MEC MTM2006-01275.

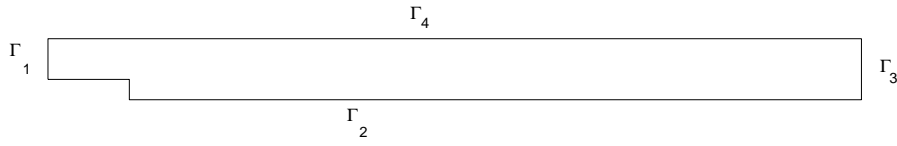


Figura 2: Test 2: Dominio.

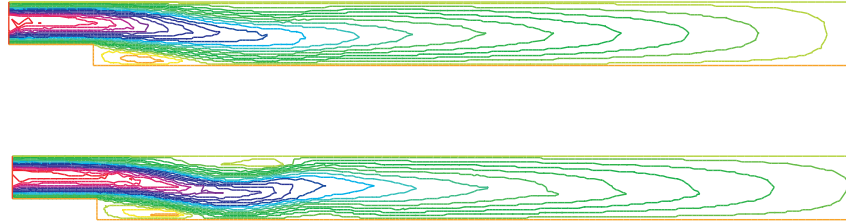


Figura 3: Test 2: Método de las Características (arriba), Esquema PSI (abajo).

## Referencias

- [1] F. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.
- [2] J. Simon. *Compact sets in  $L^p(0, T; B)$* . Ann. Mat. Pura Appl., sér. IV, CXLVI (1987), 65–96.
- [3] R. Abgrall, M. Mezine, *Construction of second-order accurate monotone and stable residual distribution schemes for steady problems*, Journal of Computational Physics 195, pp. 474-507 (2004).
- [4] S. Brenner, L. Ridgway Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer (2002).
- [5] T. Chacón Rebollo, M. Gómez Mármol, G. Narbona Reina, *Numerical analysis of the PSI solution of the convection-diffusion problem through a Petrov-Galerkin formulation*, Mathematical models and methods in applied sciences. En prensa.
- [6] V. Girault, P.A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, Berlin (1986).
- [7] O. Pironneau, *On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations*. Numer. Math. 38, no. 3, 309–332 (1981/82).
- [8] R. Temam, *Navier-Stokes equations*, North-Holland Publishing Company, (1977).