XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Relajación de problemas de control en los coeficientes con un funcional dependiendo del gradiente

J. Casado Díaz[1], J. Couce Calvo[1], J.D. Martín Gómez[1]

[1] *Dpto. E.D.A.N., Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, E-41080 Sevilla. E-mails:* `jcasadod@us.es`, `couce@us.es`, `jdmartin@us.es`.

Palabras clave: control, diseño óptimo, relajación, EDP

Resumen

Se considera un problema de diseño óptimo consistente en mezclar dos materiales (eléctricos o térmicos) anisótropos de tal forma que se minimice un funcional coste dependiente del gradiente de la función estado. En general, este tipo de problemas no admite solución, lo que obliga a introducir una formulación relajada. Mostramos en este trabajo como esta relajación puede ser obtenida usando materiales compuestos, construidos por homogeneización, y realizando una determinada extensión del funcional coste a estos nuevos materiales. Esta extensión admite una representación integral. Nuestros resultados contienen en particular los obtenidos por otros autores en el caso de materiales isotrópos.

1. Introducción

Consideramos un problema de control para una EDP elíptica lineal donde la variable de control es la matriz de difusión (problema de control en los coeficientes). Desde el punto de vista aplicado, este tipo de problemas aparece en el diseño de materiales óptimos. Supondremos que los materiales se construyen mediante la mezcla de dos materiales fijos (en general no isotrópos), los cuales vendrán dados por sus matrices de difusión A and B, simétricas y elípticas. Para simplificar la exposición, supondremos también que $A - B$ es invertible, aunque el caso no invertible puede ser tratado de forma similar ([6]). Así, para un conjunto Ω abierto, acotado y regular en $\mathbb{R}^N$ y un término fuente $f \in H^{-1}(\Omega)$, nos proponemos encontrar un subconjunto medible $\omega \subset \Omega$ tal que la solución u de

$$\begin{cases} -div\,(A\chi_\omega + B\chi_{\Omega\setminus\omega})\nabla u = f \quad \text{en } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

minimice un determinado funcional J definido sobre $H_0^1(\Omega)$. Es usual también añadir la restricción $|\omega| \leq \kappa|\Omega|$, con $0 < \kappa < 1$.

En general (ver por ejemplo [11]) este problema no admite solución y por tanto es necesario introducir una relajación. Tomando para $p \in [0,1]$, $\mathcal{K}(A,B,p)$ como el conjunto de matrices (materiales) construidos via homogeneización ([13], [14]), mezclando A y B con proporciones respectivas p y $1-p$, i.e.

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(A,B,p) = \ & \big\{M \in \mathcal{M}_N^s : \ \exists\, \omega_n \subset \mathbb{R}^N, \text{ medible, con } \ \chi_{\omega_n} \overset{*}{\rightharpoonup} p \text{ in } L^\infty(\mathbb{R}^N), \\ & \qquad\qquad A\chi_{\omega_n} + B(1-\chi_{\omega_n}) \ H\text{-converge a } M\big\},\end{aligned} \tag{1}$$

y suponiendo J secuencialmente continua en $H_0^1(\Omega)$ con la topología débil, se tiene ([1], [9], [17]) que la relajación del problema anterior, se obtiene reemplazando el conjunto de controles

$$\{A\chi_\omega + B\chi_{\Omega\setminus\omega} : \ \omega \subset \Omega \text{ medible}, |\omega| \leq \kappa|\Omega|\}, \tag{2}$$

por

$$\left\{(M,\theta) \text{ medible en } \Omega : \ \theta \in [0,1], \ M \in \mathcal{K}(A,B,\theta) \text{ e.c.t. } \Omega, \ \int_\Omega \theta\, dx \leq \kappa|\Omega|\right\}. \tag{3}$$

En el presente trabajo nos interesamos en funcionales que dependen del gradiente de la función estado, y que por tanto, en general, no son secuencialmente continuos para la topología débil de $H_0^1(\Omega)$. Concretamente supondremos

$$J(u) = \int_\Omega F(\nabla u)\, dx + G(u), \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{4}$$

donde $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es tal que existe $L > 0$ verificando

$$F(0) = 0, \qquad |F(\xi) - F(\xi')| \leq L(1 + |\xi| + |\xi'|)|\xi - \xi'|, \quad \forall\, \xi, \xi' \in \mathbb{R}^N, \tag{5}$$

(en particular, F tiene un crecimiento cuadrático) y G es un funcional secuncialmente continuo en la topología débil de $H_0^1(\Omega)$. Nuestro problema de control queda por tanto

$$\left\{\begin{array}{l} \inf \left\{\displaystyle\int_\Omega F(\nabla u)\, dx + G(u)\right\} \\ -div\,(A\chi_\omega + B\chi_{\Omega\setminus\omega})\nabla u = f \ \text{ in } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \quad \omega \subset \Omega \text{ medible}, |\omega| \leq \kappa|\Omega|, \end{array}\right. \tag{6}$$

Mencionar que algunos problemas relacionados han sido ya estudiados por otros autores, principalmente en el caso

$$A = \alpha I, \quad B = \beta I, \quad J(u) = \int_\Omega |\nabla(u - v)|^2\, dx. \tag{7}$$

Así, aparece probado en [17] la existencia de un conjunto denso de $v \in H^1(\Omega)$ para el cual, reemplazando en el problema anterior las funciones características por funciones de $L^\infty(\Omega)$ con valores en $[0,1]$, se tiene que el problema (6) admite una única solución.

Por otra parte, una relajación de (6) suponiendo (7) aparece en [3], [8], [10].

En [2], aparecen también algunos resultados tanto númericos como de relajación para el problema (6) bajo la hipótesis de que la diferencia $B - A$ is pequeña.

En el presente trabajo obtenemos un resultado de relajación válido para A y B arbitrarias.

2. Resultados Principales

A lo largo de esta sección, suponemos Ω, A, B, F y G como en la introducción y para $p \in [0,1]$, denotamos

$$\Lambda_p = pA + (1-p)B.$$

Como ya mencionamos, nuestro propósito es obtener una relajación del problema (6). La demostración de los resultados que presentamos aparece en [6] (donde además $A-B$ no se supone necesariamente invertible) y está basada en un resultado bien conocido de G. Dal Maso y R. Kohn ([1], [7]) que afirma que el conjunto de matrices obtenidas mediante homogeneización periódica es denso en el conjunto de matrices obtenidas por homogeneización general.

A lo largo del trabajo usaremos la notación $Y = (0,1)^N$. Las funciones definidas en Y se considerarán siempre prolongadas por periodicidad a todo $\mathbb{R}^N$.

Para expresar nuestros resultados necesitamos introducir las siguientes funciones.

Dado $\delta > 0$, definimos $H_\delta : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por

$$\left\{\begin{array}{ll} H_\delta(\xi,\eta,p) = & \text{ínf} \displaystyle\int_Y F(\xi + \nabla w)\, dy \\ & -div(A\chi_Z + B\chi_{Y\setminus Z})(\xi+\nabla w) = 0 \ \text{ en } \mathbb{R}^N, \quad w \in H^1_\sharp(Y) \\ & \left| \displaystyle\int_Y (A\chi_Z + B\chi_{Y\setminus Z})(\xi + \nabla w)\, dy - \eta \right| < \delta \\ & Z \subset Y, \text{ medible}, \ |Z| = p, \end{array}\right. \tag{8}$$

para todo $(\xi,\eta,p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times [0,1]$, donde el ínfimo sobre el conjunto vacío es entendido como $+\infty$. Teniendo en cuenta que H_δ es decreciente con respecto a δ, introducimos también $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por

$$H(\xi,\eta,p) = \lim_{\delta \to 0} H_\delta(\xi,\eta,p), \quad \forall\, (\xi,\eta,p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times [0,1]. \tag{9}$$

En el caso de dimensión 1, la función H puede ser calculada de forma explícita, lo que lleva al siguiente resultado

Proposición 2.1 *Para $N = 1$, la función H viene dada por*

$$H(\xi,\eta,p) = \left\{\begin{array}{ll} pF(\dfrac{\eta}{A}) + (1-p)F(\dfrac{\eta}{B}) & \textit{si } \eta = \left(\dfrac{p}{A} + \dfrac{1-p}{B}\right)^{-1}\xi \\ +\infty & \textit{en otro caso.} \end{array}\right. \tag{10}$$

Para $N \geq 2$, no disponemos de una expresión explícita de H pero podemos aún probar los siguientes resultados

Teorema 2.2 *Si $N \geq 2$, la función H verifica las siguientes propiedades:*

$$Dom(H) = \big\{(\xi,\eta,p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times [0,1] : \ \eta \in \mathcal{K}(A,B,p)\xi\big\}, \tag{11}$$

donde para $\xi \in \mathbb{R}^N$*, el conjunto* $\mathcal{K}(A,B,p)\xi$ *puede ser caracterizado por*

$$\mathcal{K}(A,B,p)\xi = \left\{\eta \in \mathbb{R}^N : \; (A-B)^{-1}\Big(\frac{A}{p}+\frac{B}{1-p}\Big)(A-B)^{-1}(\Lambda_p\xi-\eta)\cdot(\Lambda_p\xi-\eta) \leq \xi\cdot(\Lambda_p\xi-\eta)\right\},$$

si $p \in (0,1)$ *y*

$$\mathcal{K}(A,B,p)\xi = \{B\xi\} \quad si\ p = 0, \qquad \mathcal{K}(A,B,p)\xi = \{A\xi\} \quad si\ p = 1.$$

La función H *es continua en* $Dom(H)$ *y denotando* α *y* β *el mínimo y máximo entre todos los autovalores de* A *y* B *se tiene*

$$|H(\xi,\eta,p)| \leq L\left(\frac{\beta}{\alpha}|\xi|\right)\left(1+\frac{\beta}{\alpha}|\xi|\right), \quad \forall(\xi,\eta,p) \in Dom(H).$$

Además, se cumple

$$H(\xi, A\xi, 1) = H(\xi, B\xi, 0) = F(\xi), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N,$$

$$\begin{cases} H(\xi,\eta,p) = pF\left(\xi + (A-B)^{-1}\left(\dfrac{\Lambda_p\xi-\eta}{p}\right)\right) + (1-p)F\left(\xi - (A-B)^{-1}\left(\dfrac{\Lambda_p\xi-\eta}{1-p}\right)\right) \\ \forall(\xi,\eta,p) \in \partial Dom(H),\ p \in (0,1). \end{cases}$$

Si F *es convexa, entonces*

$$F(\xi) \leq pF\left(\xi + (A-B)^{-1}\left(\frac{\Lambda_p\xi-\eta}{p}\right)\right) + (1-p)F\left(\xi - (A-B)^{-1}\left(\frac{\Lambda_p\xi-\eta}{1-p}\right)\right) \leq$$
$$\leq H(\xi,\eta,p), \qquad \forall\,(\xi,\eta,p) \in Dom(H),\ p \in (0,1).$$

Si F *es cóncava, entonces*

$$F(\xi) \geq pF\left(\xi + (A-B)^{-1}\left(\frac{\Lambda_p\xi-\eta}{p}\right)\right) + (1-p)F\left(\xi - (A-B)^{-1}\left(\frac{\Lambda_p\xi-\eta}{1-p}\right)\right) \geq$$
$$\geq H(\xi,\eta,p), \qquad \forall\,(\xi,\eta,p) \in Dom(H),\ p \in (0,1).$$

La propiedad principal de la función H será dada por el Teorema 2.4. Necesitamos la siguiente definición

Definición 2.3 *Decimos que* $(u_n,\sigma_n,\theta_n) \in H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)^N \times L^\infty(\Omega)$ $\mathcal{T}$*-converge a* $(u,\sigma,\theta) \in H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)^N\times L^\infty(\Omega)$ *si*

$$\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u \quad en\ H^1(\Omega), & |\nabla u_n|^2 \ equiintegrable \\ \sigma_n \rightharpoonup \sigma \quad en\ L^2(\Omega)^N, & div\,\sigma_n \to div\,\sigma \ \ en\ H^{-1}(\Omega)^N \\ \theta_n \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \quad en\ L^\infty(\Omega). & \end{array}$$

Teorema 2.4 *La envolvente semicontinua inferior con respecto a la $\mathcal{T}$-covergencia del funcional $\mathcal{F} : H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)^N \times L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definido por*

$$\mathcal{F}(u,\sigma,\theta)=\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega F(\nabla u)\,dx & \textit{si } \theta = \chi_\omega,\ \omega \subset \Omega \textit{ medible, } \sigma = \Lambda_\theta \nabla u \\ +\infty & \textit{en otro caso,} \end{cases} \tag{12}$$

viene dada por

$$\overline{\mathcal{F}}(u,\sigma,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega H(\nabla u,\sigma,\theta)\,dx & \textit{si } 0 \le \theta \le 1,\ \sigma \in \mathcal{K}(A,B,\theta)\nabla u,\ \textit{e.c.t. } \Omega \\ +\infty & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{13}$$

Como consecuencia del teorema anterior, se tiene el siguiente resultado de relajación para el problema (6). Obsérvese que este teorema se puede también aplicar a la relajación de otros problemas de control similares.

Teorema 2.5 *Para $G : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$, secuencialmente con respecto a la topología débil de $H^1_0(\Omega)$, $\kappa \in (0,1)$, $f \in H^{-1}(\Omega)$, una relajación del problema (6) viene dada por*

$$\begin{cases} \min\left\{\displaystyle\int_\Omega H(\nabla u, M\nabla u,\theta)\,dx + G(u)\right\} \\ -div\, M\nabla u = f \quad \textit{en } \Omega \\ u \in H^1_0(\Omega) \\ \theta \in L^\infty(\Omega),\ 0 \le \theta \le 1 \ \textit{e.c.t. } \Omega,\ \displaystyle\int_\Omega \theta\,dx \le \kappa|\Omega| \\ M \textit{ medible, } M(x) \in \mathcal{K}(A,B,\theta(x)) \ \textit{e.c.t. } x \in \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

Gracias a que $\overline{\mathcal{F}}$ es semicontinua inferiormente para la $\mathcal{T}$-convergencia, la teoría de la compacidad por compensación de F. Murat y L. Tartar ([12], [15]) prueba la siguiente propiedad de convexidad para H.

Proposición 2.6 *La función H satisface:*
i) Si $N = 1$, entonces para todo ξ_1, ξ_2, $\eta \in \mathbb{R}$, y todo p_1, p_2, $\lambda \in [0,1]$, se tiene

$$H(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2, \eta, \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) \le \lambda H(\xi_1,\eta,p_1) + (1-\lambda)H(\xi_2,\eta,p_2),$$

ii) Si $N \ge 2$, entonces para todo ξ_1, ξ_2, η_1, $\eta_2 \in \mathbb{R}^N$, con $(\xi_2 - \xi_1)\cdot(\eta_2-\eta_1) = 0$, y todo p_1, $p_2, \lambda \in [0,1]$, se tiene

$$H(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2, \lambda\eta_1 + (1-\lambda)\eta_2, \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) \le \lambda H(\xi_1,\eta_1,p_1) + (1-\lambda)H(\xi_2,\eta_2,p_2).$$

Más generalmente, el teorema 2.5 permite probar la siguiente propiedad de quasiconvexidad para H.

Proposición 2.7 *La función H verifica*

$$\left\{\begin{array}{rl} H(\xi,\eta,p)= & \text{ínf} \displaystyle\int_Y H(\xi+\nabla w, M(\xi+\nabla w),\theta)\,dy \\ & \theta\in L^\infty_\sharp(Y),\quad 0\le\theta\le 1\quad e.c.t.\ Y,\quad \displaystyle\int_Y \theta\,dy=p \\ & M\in\mathcal{K}(A,B,\theta)\quad e.c.t.\ Y,\qquad w\in H^1_\sharp(Y) \\ & -div\, M(\xi+\nabla w)=0\quad en\ \mathbb{R}^N \\ & \displaystyle\int_Y M(\xi+\nabla w)dy=\eta. \end{array}\right. \tag{15}$$

3. Ejemplo.

En esta sección damos un ejemplo en dimensión $N\ge 2$ de una función cuadrática F para la cual se puede calcular explícitamente la función H. Esto viene dado por el siguiente resultado.

Teorema 3.1 *Sean $N\ge 2$, $s\in\mathbb{R}$ y A,B dos matrices simétricas definidas positivas tales que $s(A-B)$ es definida positiva. Consideremos $F:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ definida por*

$$F(\xi)=sA\xi\cdot\xi,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^N.$$

Entonces, para todo $(\xi,\eta,p)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\times(0,1)$ tal que $\eta\in\mathcal{K}(A,B,p)\xi$, la función H definida por (9) está dada por

$$H(\xi,\eta,p)=sA\xi\cdot\xi+s(\Lambda_p\xi-\eta)\cdot\xi+\frac{s}{1-p}(A-B)^{-1}(\Lambda_p\xi-\eta)\cdot(\Lambda_p\xi-\eta).$$

Observación 3.2 *Recordamos que H viene dado a través de un problema de minimización (ver (8), (9)). La expresión de H dada por el teorema anterior se obtiene mostrando que el mínimo se alcanza realizando dos laminaciones (ver [6]).*

Como caso particular del resultado anterior se tiene inmediatamente

Corolario 3.3 *Supongamos $N\ge 2$, $A=\alpha I$, $B=\beta I$, con $0<\alpha<\beta$. Para $s\in\mathbb{R}$ definimos $F(\xi)=s|\xi|^2$, $\xi\in\mathbb{R}^N$. Entonces, la función H definida por (9) verifica*

$$\begin{array}{ll} H(\xi,\eta,p)=s|\xi|^2+\dfrac{s}{\beta}(\Lambda_p\xi-\eta)\cdot\xi+\dfrac{s}{\beta(\beta-\alpha)p}|\Lambda_p\xi-\eta|^2, & si\ s\ge 0, \\ H(\xi,\eta,p)=s|\xi|^2+\dfrac{s}{\alpha}(\Lambda_p\xi-\eta)\cdot\xi-\dfrac{s}{\alpha(\beta-\alpha)(1-p)}|\Lambda_p\xi-\eta|^2, & si\ s\le 0, \end{array}$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}^N$, $p\in(0,1)$, $\eta\in\mathcal{K}(A,B,p)\xi$.

Observación 3.4 *Corolario 3.3 y Teorema 2.5 proporcionan una formulación relajada para el problema*

$$\begin{cases} \text{ínf}\left\{ s\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \right\} \\ -div\,(\alpha\chi_\omega + \beta\chi_{\Omega\setminus\omega})\nabla u = f \quad in\ \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \\ \omega \subset \Omega \ measurable,\ |\omega| \leq \kappa|\Omega|. \end{cases}$$

En el caso $s > 0$, esta relajación fue obtenida por J.C. Bellido y P. Pedregal en [3], para $N = 2$, e independientemente por Y. Grabovsky en [8] en dimensión arbitraria. El método usado para probar nuestros resultados es diferente de los empleados por estos autores.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto MTM2005-04914 del *Ministerio de Educación y Ciencia* y el grupo de investigación FQM-309 de la *Junta de Andalucía.*

Referencias

[1] G. Allaire, *Shape optimization by the homogenization method,* Appl. Math. Sci. 146, Springer-Verlag, New York, 2002.

[2] G. Allaire, S. Gutiérrez. *Optimal design in small amplitude homogenization.* Por aparecer.

[3] J.C. Bellido, P. Pedregal. *Explicit quasiconvexification for some cost functionals depending on derivatives of the state in optimal designing.* Discr. Contin. Dyn. Syst. 8, 4 (2002), 967–982.

[4] J. Casado-Díaz, J. Couce-Calvo, J. D. Martín-Gómez. *Optimality conditions for nonconvex multistate control problems in the coefficients.* SIAM J. Control and Optim. 43, 1 (2004), 216–239.

[5] J. Casado-Díaz, J. Couce-Calvo, J.D. Martín-Gómez. *A density result for the variation of a material with respect to small inclusions.* C.R.A.S. Paris I, 342 (2006), 353–358.

[6] J. Casado-Díaz, J. Couce-Calvo, J.D. Martín-Gómez. *Relaxation of a control problem in the coefficients with a fuctional of quadratic growth in the gradient.* Por aparecer.

[7] G. Dal Maso, R.V. Kohn. *The local character of G-closure.* Trabajo no publicado.

[8] Y. Grabovsky. *Optimal design for two-phase conducting composites with weakly discontinuous objective functionals.* Adv. Appl. Math. 27 (2001), 683–704.

[9] K.A. Lurie, A.V. Cherkaev. *Exact estimates of the conductivity of a binary mixture of isotropic materials.* Proc. Royal Soc. Edinburgh 104 A (1986), 21-38.

[10] F. Maestre, P. Pedregal. *Quasiconvexification in 3-D for a variational reformulation of an optimal design problem in conductivity.* Nonlinear Anal. 64 (2006), 1962–1976.

[11] F. Murat. *Un contre-example pour le problème du contrôle dans les coefficients.* C.R.A.S Sci. Paris A 273 (1971), 708-711.

[12] F. Murat. *Compacité par compensation.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 5, 4 (1978), 489–507.

[13] F. Murat, L. Tartar. *H-convergence.* En *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials*, eds. L. Cherkaev, R.V. Kohn, Progress in Nonlinear Diff. Equ. and their Appl., 31, Birkaüser, Boston, 1998, 21–43.

[14] S. Spagnolo. *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 22, 3 (1968), 571-597.

[15] L. Tartar. *Compensated compactness and applications to partial differential equations, nonlinear analysis and mechanics.* En *Heriot-Watt symposium IV*, ed. R.J. Knops. Research Notes in Math. 39, Pitman, San Fransisco, 1979, 136-212.

[16] L. Tartar. *Estimations fines de coefficients homogénéisés.* En *Ennio de Giorgi colloquium*, ed. P. Kree. Research Notes in Math. 125, Pitman, London, 1985, 168-187.

[17] L. Tartar. *Remarks on optimal design problems.* En *Calculus of variations, homogenization and continuum mechanics,* eds. G. Buttazzo, G. Bouchitte, P. Suquet. Advances in Math. for Appl Sci, 18, World Scientific, Singapore, 1994, 279-296.