

# Una perspectiva de los métodos distributivos y su aplicación a las ecuaciones de transporte de sedimentos.

Tomás Chacón Rebollo, Gladys Narbona Reina

25 de febrero de 2005

## 1. Introducción

En este trabajo hemos pretendido dar una visión de cómo resolver las ecuaciones de transporte de sedimentos mediante los llamados Métodos Distributivos. Estos métodos fueron diseñados en el ámbito de la ingeniería para la discretización de la ecuación de transporte e introducidos por Roe a finales de los años 80 [8, 9]. Su posterior desarrollo se ha debido principalmente a los trabajos de Deconinck, Sildikover y Struijs, entre otros, [2, 6, 10, 11]. Se trata de la extensión de los esquemas descentrados 1D al caso multidimensional. Los métodos Distributivos poseen grandes ventajas que hacen de ellos una herramienta eficaz de resolución de problemas de transporte.

Vamos a exponer en primer lugar cómo se definen estos métodos para una ecuación lineal de transporte, haciendo especial mención al método PSI (Positive Streamwise Invariance). Este método es no lineal, gracias a lo cual es capaz de satisfacer el principio del máximo y además ser de segundo orden de precisión en espacio.

Por otra parte, presentaremos un análisis de la resolución de las ecuaciones de convección-difusión lineal y Navier-Stokes estacionarias, mediante el método PSI, bajo una reformulación Petrov-Galerkin.

En segundo lugar adaptaremos el método PSI a la resolución de leyes escalares de conservación con términos fuente genéricos en una variable de espacio.

## 2. Métodos Distributivos

Vamos a considerar la ecuación de transporte evolutiva

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho = 0. \quad (1)$$

La idea base de los métodos distributivos es distribuir el flujo convectivo en cada elemento entre los nodos situados “corriente abajo”. Esto proporciona una forma cómoda de construir esquemas que satisfacen el principio del máximo, aunque no todos los esquemas basados en este tipo de métodos son positivos, así que, en primer lugar, estudiaremos sus principales propiedades: positividad y preservación de la linealidad. También probaremos que un esquema lineal positivo, no puede ser de segundo orden de precisión.

Describiremos en una segunda parte algunos de los métodos distributivos en dimensión dos más usados habitualmente por sus buenas propiedades: positividad y alta precisión para problemas con convección dominante.

## 2.1. Construcción del esquema

Consideramos una malla en elementos finitos  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ , por triángulos si  $d = 2$  y por tetraedros si  $d = 3$ , con  $N$  nodos. Buscamos solución en el espacio de dimensión finita  $V_h$  formado por las funciones continuas sobre  $\bar{\Omega}$  que son afines sobre cada elemento  $T$  de  $\mathcal{T}_h$ , es decir,

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) / v|_T \in \mathbb{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Denotamos por  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  las funciones de base de este espacio, dadas por  $\varphi_i(b_j) = \delta_{ij}$ ,  $\forall 1 \leq i, j \leq N$ , siendo  $\{b_j\}_{j=1}^N$  los nodos de la malla.

Recordamos que la aproximación de Galerkin-Elementos Finitos de la ecuación (1) consiste en proyectarla sobre  $V_h$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Obtener } \rho_h : [0, T] \rightarrow V_h \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \rho_h}{\partial t} \varphi_i + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla \rho_h) \varphi_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots N, \end{array} \right. \quad (2)$$

con  $\rho_h(0) = \rho_{0h}$ , siendo  $\rho_{0h}$  un interpolado o aproximado de  $\rho_0$  sobre  $V_h$ .

La solución aproximada  $\rho_h(t) \in V_h$  será una función de la forma:

$$\rho_h(t) = \sum_{j=1}^N \rho(b_j, t) \varphi_j, \quad (3)$$

siendo  $\rho(b_j, t)$  una función de  $[0, T]$  en  $\mathbb{R}$ .

Vamos a discretizar el término de transporte mediante métodos distributivos y después escribiremos la discretización completa de la ecuación (2) junto con la discretización de la derivada en tiempo mediante el método de Euler.

### Discretización del término de convección.

En esta sección vamos a introducir la técnica general de discretización del término de transporte

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla \rho_h) \varphi_i \quad (4)$$

mediante métodos distributivos.

En primer lugar, precisaremos el sentido de la expresión “flujo total que atraviesa la frontera de un volumen”, habitualmente utilizada en la literatura de métodos distributivos.

El flujo convectivo de la magnitud  $\rho$  al ser transportada por la velocidad  $u$ , viene dado por:

$$q_{conv} = u \cdot \rho.$$

El balance de flujo convectivo que atraviesa la frontera de un subconjunto  $V \subset \Omega$  es:

$$\phi^V = \int_{\partial V} q_{conv} \cdot \eta_{ext},$$

donde  $\eta_{ext}$  es el vector normal unitario exterior a  $\partial V$ .

Aplicando la fórmula de Green, como estamos considerando un flujo incompresible ( $\nabla \cdot u = 0$ ), tenemos que:

$$\phi^V = \int_V \nabla \cdot q_{conv} = \int_V \nabla \cdot (u\rho) = \int_V u \cdot \nabla \rho. \quad (5)$$

Así que podemos interpretar la integral del término  $u \cdot \nabla \rho$  sobre  $V$  como el flujo total que atraviesa  $\partial V$ ,  $\phi^V$ .

La idea de los métodos distributivos es repartir el flujo total  $\phi^T$  sobre un elemento  $T$  de  $\mathcal{T}_h$ , en principio, entre los nodos de los elementos vecinos a  $T$ . Esta distribución se realiza mediante unos “coeficientes de distribución”  $\{\beta_i^T\}_{i=1}^N$  con  $\beta_i^T \geq 0$ , de tal forma que al nodo  $b_i$  le corresponde la parte del flujo dada por

$$\phi_i = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \phi_i^T, \quad \text{con } \phi_i^T = \beta_i^T \phi^T,$$

que sería el flujo enviado a  $b_i$ , correspondiente al elemento  $T$ .

Desde el punto de vista práctico es mucho más cómodo repartir el flujo  $\phi^T$  únicamente entre los nodos del elemento  $T$  correspondiente. Así que se ponen los coeficientes  $\beta_i^T = 0$  si el nodo  $b_i$  no está en  $T$ . Y el flujo total enviado al nodo  $b_i$  será

$$\phi_i = \sum_{T \in E_i} \beta_i^T \phi^T,$$

donde  $E_i$  denota el conjunto de elementos de  $\mathcal{T}_h$  de los que  $b_i$  es nodo.

Podemos incluir esta idea de distribución de flujos sobre nodos en la formulación variacional Galerkin (2) mediante una modificación de ésta. Consideramos para ello una función  $\lambda_i$  constante a trozos asociada al nodo  $b_i$ , tal que  $\lambda_{i|T} = \beta_i^T$ ,  $\forall T \in \mathcal{T}_h$ , y que sea una aproximación de  $\varphi_i$ .

Entonces aproximamos

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla \rho_h) \varphi_i \simeq \int_{\Omega} (u \cdot \nabla \rho_h) \lambda_i, \quad (6)$$

y pedimos que la masa sobre cada elemento  $T$  de las funciones  $\varphi_i$  y  $\lambda_i$  sea la misma:

$$\sum_{i=1}^{d+1} \int_T \varphi_{i_T} = \sum_{i=1}^{d+1} \int_T \lambda_{i_T} = |T|.$$

O sea,

$$\sum_{i=1}^{d+1} \beta_{i_T}^T = 1, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (7)$$

donde  $i_T$  denota el índice global del  $i$ -ésimo ( $i = 1, \dots, d+1$ ) vértice del elemento  $T$ . Esta es una condición que se pide habitualmente a los coeficientes de distribución.

De esta forma, el flujo total sobre el elemento  $T$  es la suma del flujo correspondiente a cada vértice:

$$\phi^T = \sum_{i=1}^{d+1} \phi_{i_T}^T = \sum_{i=1}^{d+1} \beta_{i_T}^T \phi^T.$$

Todavía nos queda por concretar la expresión de la discretización. Vamos a considerar que la velocidad  $u$  es constante por elemento, reemplazando  $u$  por su media sobre  $T$ . En efecto, al ser  $\nabla \rho_h|_T$  constante, tenemos

$$\int_T u \cdot \nabla \rho_h = \int_T \bar{u}_T \cdot \nabla \rho_h \quad \text{con } \bar{u}_T = \frac{1}{|T|} \int_T u.$$

Suponemos, pues, en adelante, que  $u$  es constante por elemento.

Así nos queda:

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla \rho_h) \lambda_i = \sum_{T \in E_i} \beta_i^T \phi^T,$$

con

$$\phi^T = - \int_{\partial T} \rho_h u \cdot \eta^T d\sigma = - \sum_{j=1}^{d+1} \int_{\Gamma_j} \rho_h u \cdot \eta^T d\sigma = - \sum_{j=1}^{d+1} \left( \frac{1}{d} \sum_{i \neq j} \rho_i \right) u \cdot \eta_j^T, \quad (8)$$

donde  $\eta_i^T$ ,  $1 \leq i \leq d+1$  es el vector normal interior a la arista ( $d=2$ ) o cara ( $d=3$ ) opuesta al vértice  $b_i$  en el elemento  $T$ , multiplicado por la medida de la arista o cara  $\Gamma_i$ ,  $\eta_i^T = \eta_{|\Gamma_i|} |\Gamma_i|$ . Y hemos denotado por  $\rho_i = \rho_h(b_i)$ ,  $1 \leq i \leq d+1$ .

Para obtener (8) hemos usado que  $\rho_h$  es afín sobre  $\partial T$  y que la fórmula del punto medio es exacta sobre  $\mathbb{P}_1$ .

Si tomamos  $\rho_h = 1$  y  $u$  como  $e_i = (0, \dots, 1^i, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$ , para  $i = 1, \dots, d$  en la igualdad (8), tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{d+1} \eta_i^T = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (9)$$

Así, podemos escribir el flujo como

$$\phi^T = - \sum_{i=1}^{d+1} \int_{\Gamma_i} \rho_h u \cdot \eta^T d\sigma = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d+1} (u \cdot \eta_i^T) \rho_i.$$

De aquí, si definimos

$$K_{i_T}^T = \frac{1}{d} u \cdot \eta_i^T \quad 1 \leq i \leq d+1, \quad (10)$$

podemos escribir

$$\phi^T = \sum_{i=1}^{d+1} K_{i_T}^T \rho_{i_T}, \quad (11)$$

Además, por (9) tenemos que también se verifica que

$$\sum_{i=1}^{d+1} K_{i_T}^T = 0, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

**Definición 2.1** *A partir de los coeficientes  $K_{i_T}^T$ , establecemos la siguiente definición para nodos de entrada y de salida:*

*Dado un elemento  $T$  de  $\mathcal{T}_h$ , diremos que el vértice  $b_i$  es un nodo de entrada para  $T$  si se verifica que  $K_{i_T}^T < 0$ . En caso contrario diremos que  $b_i$  es un nodo de salida para  $T$ .*

Haciendo una discretización en tiempo mediante el método de Euler explícito, podemos escribir el esquema como:

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} S_i + \sum_{T \in E_i} \beta_i^{T,n} \phi^{T,n} = 0,$$

donde  $S_i$  es la medida del polígono ( $d = 2$ ) o poliedro ( $d = 3$ )  $C_i$  definido por las medianas de los elementos que tienen a  $b_i$  como vértice común.

O también

$$S_i \rho_i^{n+1} = S_i \rho_i^n - \Delta t \sum_{T \in E_i} \beta_i^{T,n} \phi^{T,n}. \quad (12)$$

donde  $\phi^{T,n}$  denota el flujo sobre  $T$  calculado con la velocidad  $u|_T(t_n)$  en el instante  $t = t_n$ .

De donde utilizando la expresión del flujo  $\phi^{T,n}$ , el esquema queda:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{S_i} \sum_{T \in E_i} \sum_{j=1}^{d+1} C_{ij}^{T,n} \rho_{jT}^n, \quad \text{con } C_{ij}^{T,n} = \beta_i^{T,n} K_{jT}^{T,n} \quad 1 \leq i, j \leq d+1. \quad (13)$$

Si definimos la matriz  $C^{T,n} = (C_{ij}^{T,n})_{i,j=1}^{d+1}$ , es una matriz por elemento de orden  $(d+1) \times (d+1)$  que llamamos matriz elemental del método distributivo.

Podemos también tener directamente de forma alternativa

$$\beta_i^{T,n} \phi^{T,n} = \sum_{j=1}^{d+1} C_{ij}^{T,n} \rho_{jT}^n. \quad (14)$$

En este caso,  $\beta_i^{T,n}$  es una función racional de  $\rho_{1T}^n, \rho_{2T}^n, \rho_{3T}^n$  que no está definida para  $\phi^{T,n} = 0$ .

En ambos casos podemos escribir el esquema en la forma

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{S_i} \sum_{j=1}^N D_{ij}^n \rho_j^n, \quad \text{donde } D_{ij}^n = \sum_{T \in E_j \cap E_i} C_{ij}^{T,n}. \quad (15)$$

Entonces la matriz  $D^n = (D_{ij}^n)_{i,j=1}^N$ , es la matriz global del método distributivo.

Según los coeficientes del esquema, podemos distinguir entre ellos dos tipos:

- **Esquemas lineales:** Se tienen si  $D_{ij}^n$  no depende de  $\rho_h, \forall 1 \leq i, j \leq N$ . Teniendo en cuenta (12), podemos distinguir a su vez dos posibilidades:
  - o bien los  $\beta_i^{T,n}$  son independientes de  $\rho_h$ .
  - o bien  $\beta_i^{T,n}$  son funciones racionales proporcionales a  $1/\phi^{T,n}$ .
- **Esquemas no lineales:** Se dan si los  $D_{ij}^n$  dependen de  $\rho_h$ .

## 2.2. Principio del máximo y precisión de segundo orden

En esta sección vamos a determinar condiciones que garanticen por una parte el principio del máximo y por otra la precisión de segundo orden. Estas dos propiedades son importantes a la hora de elegir el esquema. Por una parte, el principio del máximo permite que la solución

numérica presente propiedades fundamentales de la solución continua (por ejemplo, concentraciones comprendidas entre 0 y 1). Por otra parte, la alta precisión (por debajo del 1 %) es con frecuencia un requerimiento muy importante en ingeniería, (Cf. [3]).

Sin embargo, probaremos que hay una alta incompatibilidad entre ellas, en el sentido de que un esquema lineal positivo no puede ser de segundo orden para la ecuación de transporte estacionaria (Teorema de Godunov). Esto hace necesario el uso de esquemas no lineales, como el PSI (Positive Streamwise Invariance), que introduciremos en la próxima sección.

**Teorema 2.1 (Condición suficiente para el principio del máximo)** *Un esquema donde la aproximación en cada nodo puede escribirse como combinación lineal convexa de los valores en los nodos adyacentes, es decir*

$$\rho_i^{n+1} = \sum_{j \text{ vecino de } i} d_{ij}^n \rho_j^n \quad \text{con} \quad \sum_{j \text{ vecino de } i} d_{ij}^n = 1 \quad \text{y} \quad d_{ij}^n \geq 0 \quad \forall j. \quad (16)$$

*verifica el principio del máximo.*

En la práctica, comprobar globalmente las propiedades (16) resulta muy complicado, y se prefiere utilizar propiedades elementales.

**Corolario 2.1** *Si los coeficientes locales  $C_{ij}^{T,n}$  que determinan el método distributivo general (13) verifican:*

$$C_{ii}^{T,n} \geq 0, \quad C_{ij}^{T,n} \leq 0 \quad \forall i \neq j, \quad (17)$$

*entonces el esquema verifica el principio del máximo para un paso de tiempo  $\Delta t$  suficientemente pequeño:*

$$\Delta t \leq \min_i \frac{S_i}{\sum_{T \in E_i} C_{ii}^{T,n}}. \quad (18)$$

A la vista de este resultado, realizamos la siguiente definición:

**Definición 2.2** *Diremos que el esquema (15) es*

$$\begin{aligned} \text{Positivo :} & \quad \text{Si } D_{ii}^n > 0 \text{ y } D_{ij}^n \leq 0 \quad \forall j \neq i; \\ \text{Localmente Positivo :} & \quad \text{Si } C_{ii}^{T,n} \geq 0 \text{ y } C_{ij}^{T,n} \leq 0 \quad \forall j \neq i, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \end{aligned}$$

Obviamente la positividad local implica la positividad global y, por tanto, el principio del máximo discreto.

Por el Teorema de Godunov [4, 12], tenemos que para esquemas lineales, positividad y segundo orden son incompatibles. De forma semejante a la situación del principio del máximo, vamos a deducir a continuación una propiedad local, llamada “preservación de la linealidad” que implicará la precisión de segundo orden de forma global. Además tendremos también un resultado equivalente al Teorema de Godunov, pero con carácter local.

**Definición 2.3** *El esquema (12) preserva localmente la linealidad si para toda solución lineal estacionaria  $\rho^{(l)}$  de (1) se verifica*

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho^{(l)}} \beta_i^{T,n}(\rho) \phi^{T,n}(\rho) = 0, \quad \text{para todo nodo } b_i,$$

*donde  $\rho = \rho^{(l)} + tw$  con funciones  $w$  tales que  $\phi^{T,n}(w) \neq 0$ .*

Para entender esta definición, recordemos que según (12) podemos escribir un esquema distributivo genérico en la forma:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{S_i} \sum_{T \in E_i} \beta_i^{T,n} \phi^{T,n}, \quad \text{con } \phi^{T,n} = \int_T u^n \cdot \nabla \rho_h^n. \quad (19)$$

Entonces, podemos entender la definición anterior en el sentido de que la contribución individual de cada elemento a la actualización de todo valor nodal de una solución lineal estacionaria a través de perturbaciones de ésta es nula.

Tenemos los siguientes resultados, que recogen la versión local del teorema de Godunov, pero ahora para un esquema distributivo general de la forma (12). Y a continuación el teorema que nos da la implicación de “preservación de la linealidad” a esquemas de segundo orden. Ambos resultados están demostrados en [4].

**Lema 2.1** *Supongamos que podemos escribir los coeficientes del esquema (12) como*

$$\beta_i^{T,n}(\rho) = \frac{\gamma_i^{T,n}(\rho)}{\phi^{T,n}(\rho)}$$

si  $\phi^{T,n}(\rho) \neq 0$ , siendo  $\gamma_i^{T,n}$  una función lineal de  $\rho$ .

Entonces el esquema preserva localmente la linealidad si y sólo si los coeficientes  $\beta_i^{T,n}$  están acotados cuando  $\phi^{T,n}$  tiende a cero a través de perturbaciones de toda solución lineal estacionaria de (1).

**Corolario 2.2** *Si un esquema distributivo (12) es lineal, entonces preserva la linealidad si y sólo si los coeficientes  $\beta_i^{T,n}$  son constantes.*

**Teorema 2.2** *Dado un esquema lineal, no puede ser localmente positivo y preservar la linealidad al mismo tiempo.*

**Teorema 2.3** *Si un esquema lineal de la forma (12) preserva la linealidad, entonces es un esquema de segundo orden para la ecuación de transporte estacionaria cuando se aplica a una malla ortogonal cartesiana.*

Como consecuencia de este teorema, para conseguir esquemas positivos y de segundo orden para la ecuación de transporte es necesario introducir esquemas no lineales en el sentido de que los coeficientes  $D_{ij}^n$  en (15) sean funciones de la solución  $\rho_h$ .

### 2.3. Algunos esquemas distributivos

En este apartado vamos a definir algunos de los métodos distributivos más importantes: el N-esquema (Narrow) y el esquema PSI (Positive Streamwise Invariance). El N-esquema es positivo pero sólo de primer orden y el esquema PSI es positivo y preserva la linealidad (y, por tanto, es no lineal).

Si consideramos un elemento  $T \in \mathcal{T}_h$  (en este caso  $T$  es un triángulo), podemos encontrarlos con dos situaciones: que el triángulo tenga sólo un nodo corriente abajo, o que tenga dos (ver Figura 1).

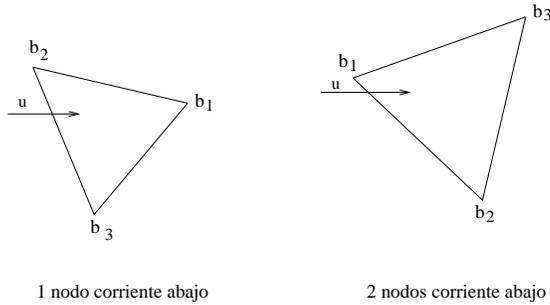


Figura 1: Configuración de los nodos corriente arriba / abajo.

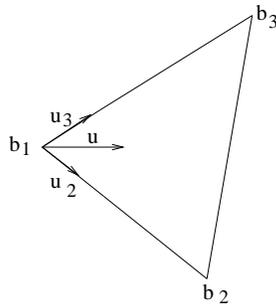


Figura 2: N-esquema.

Según la teoría de los métodos distributivos, tomamos el convenio de que sólo los nodos que están corriente abajo reciben una contribución del flujo total sobre  $T$ . Esto se traduce en que para estos nodos, los coeficientes de distribución  $\beta_i^T$  serán no nulos.

Por comodidad de notación no especificaremos en esta sección los índices relativos al paso de tiempo ni a las funciones discretas.

Para caracterizar estos nodos, utilizaremos por una parte la velocidad (que tiene que ser incidente), y por otro, los vectores normales interiores definidos en (9). Así, diremos que un nodo está corriente abajo, si se verifica que  $K_i^T \geq 0$  (con  $K_i^T$  definido por (10)). Luego tendremos que  $\beta_i^T = 0$  para los vértices  $b_i$  tales que  $K_i^T < 0$ , ya que sería un nodo corriente arriba, y por tanto no recibiría contribución alguna.

Así, en el primer caso (sólo un nodo corriente abajo), tendremos determinados el valor de los  $\beta_i^T$  para los tres vértices del triángulo, ya que  $\beta_2^T = \beta_3^T = 0$  y necesariamente por la condición (7), se tiene que  $\beta_1^T = 1$ .

Por tanto, sólo nos queda saber cómo distribuir el flujo en el segundo caso. Esto será lo que diferencie a los distintos métodos distributivos.

### 2.3.1. N-esquema

Partimos del caso en que tenemos dos nodos corriente abajo. Para distribuir el flujo, dividimos la velocidad en dos componentes a lo largo de las aristas del triángulo como muestra la Figura 2.

Así, a cada nodo se le asocia el flujo correspondiente a cada una de las componentes en que hemos descompuesto la velocidad  $u$ :  $\phi^T = \phi_2^T + \phi_3^T$ , con  $\phi_i^T = \int_T u_i \cdot \nabla \rho$   $i = 2, 3$ .

Según (8), el flujo debido a la componente  $u_2$  será:

$$-\phi_2^T = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} u_2 \cdot \eta_3^T + \frac{\rho_1 + \rho_3}{2} u_2 \cdot \eta_2^T + \frac{\rho_2 + \rho_3}{2} u_2 \cdot \eta_1^T,$$

y teniendo en cuenta  $\eta_1^T + \eta_2^T + \eta_3^T = 0$ ,  $u_2 \cdot \eta_3^T = 0$  y que  $u = u_2 + u_3$  y  $u_3 \cdot \eta_2^T = 0$ , tenemos:  $-\phi_2^T = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)u \cdot \eta_2^T = K_{2T}^T(\rho_1 - \rho_2)$ .

De la misma forma se puede ver que el flujo correspondiente a la componente  $u_3$  es:  $\phi_3^T = K_{3T}^T(\rho_3 - \rho_1)$ . La totalidad del flujo  $\phi_2^T$  (resp.  $\phi_3^T$ ) es enviada al nodo  $b_2$  (resp.  $b_3$ ). De donde definimos los “coeficientes”  $\beta_j^T$  como:

$$\beta_1^T = 0 \quad \beta_2^T = \frac{K_{2T}^T(\rho_2 - \rho_1)}{\phi^T} \quad \beta_3^T = \frac{K_{3T}^T(\rho_3 - \rho_1)}{\phi^T} \quad (20)$$

Estos coeficientes son funciones racionales de  $\rho$  que al sustituirse en (12) da lugar a un esquema lineal. En realidad, en (12) intervienen los valores  $\beta_2^T \phi^T = \phi_2^T$  y  $\beta_3^T \phi^T = \phi_3^T$ , lo que evita la aparente dificultad que se presenta en (20) para definir  $\beta_2^T$  y  $\beta_3^T$  cuando  $\phi^T = 0$ .

**Proposición 2.1** *El N-esquema es localmente positivo bajo la condición CFL:  $\Delta t \leq \min_{j=2,3} \left( \frac{S_j}{K_j^T} \right)$ .*

Además si la triangulación es regular, es globalmente positivo bajo la condición  $\Delta t \leq \frac{S}{\alpha}$ , con  $S = \min_i S_i$ ,  $\alpha = \frac{1}{2} M \|u\|_{L^\infty(\Omega)} h$ , siendo  $h$  la talla de la triangulación  $\mathcal{T}_h$  y  $M$  el número máximo de elementos en  $E_i$ .

**Teorema 2.4** *El N-esquema es de orden 1 exactamente.*

### 2.3.2. El esquema PSI

El esquema PSI (Positive Streamwise Invariance), a diferencia de los anteriores, es un esquema no lineal diseñado para ser positivo y de segundo orden.

Nos centramos en el caso en que hay dos nodos corriente abajo. El objetivo de este método es asegurar que el flujo sea constante a lo largo de las líneas de nivel de  $\rho_h$  (líneas en que  $\rho_h$  es constante). Recordamos que denotamos  $\rho_h$  por  $\rho$  para simplificar la notación. Vamos a considerar entonces las líneas de nivel de  $\rho$ . Trazamos las correspondientes a los vértices:  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ . Tenemos dos posibilidades, que estas líneas corten a la arista de salida de  $u$  o no.

#### Caso 1. Las líneas de nivel cortan a la arista de salida.

Supongamos que estamos en la situación de la Figura 3. En este caso, se verifica que:  $\Lambda = (\rho_2 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_1) < 0$ , o lo que es lo mismo  $\min(\rho_2, \rho_3) < \rho_1 < \max(\rho_2, \rho_3)$ . Como en la figura, vamos a suponer que  $\min(\rho_2, \rho_3) = \rho_2$ .

Supongamos que queremos resolver la ecuación de transporte estacionaria

$$u \cdot \nabla \rho = 0 \quad (21)$$

a través de un procedimiento evolutivo. Denotemos por  $\rho_{out}$  al valor que toma  $\rho$  en la intersección entre la recta paralela a  $u$  que pasa por  $b_1$  y el lado  $b_2 b_3$  (ver Figura 4). Pretendemos que  $\rho_{out} = \rho_1$ .

La idea es distribuir el flujo entre los nodos  $b_2$  y  $b_3$  de modo que la contribución de  $T$  al valor  $\rho_1^{n+1}$  acerque este valor a  $\rho_{out}^{n+1}$  más de lo que  $\rho_{out}^n$  lo está de  $\rho_1^n$ .

Proponemos el siguiente criterio:

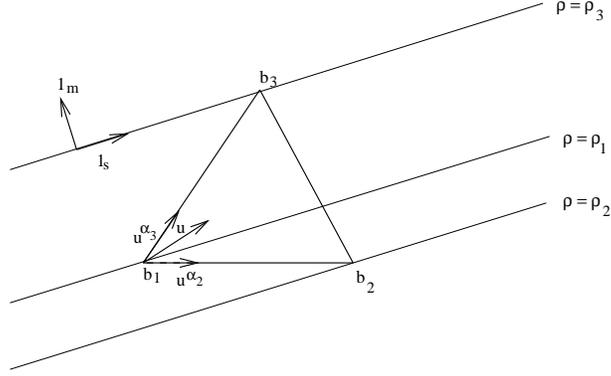


Figura 3: Líneas de nivel cortan a la arista de salida.

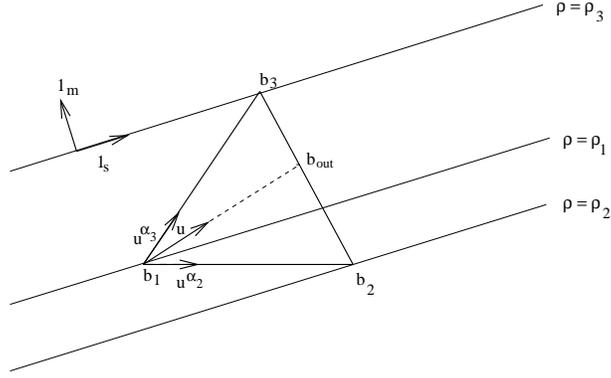


Figura 4: Cálculo nodo de salida.

- **Caso 1.1:** Si  $u \cdot \nabla \rho > 0$  (es el caso de la Figura 3).

Ponemos  $\beta_1^T = \beta_2^T = 0$ ,  $\beta_3^T = 1$ .

- **Caso 1.2:** Si  $u \cdot \nabla \rho < 0$ .

Ponemos:  $\beta_1^T = \beta_3^T = 0$ ,  $\beta_2^T = 1$ .

Si  $u \cdot \nabla \rho = 0$ , cualquiera de las dos elecciones es aceptable.

Queda aún determinar la matriz  $C^T$ . Observemos que si, por ejemplo, estamos en el Caso 1.1 ( $u \cdot \nabla \rho > 0$ ), con  $\beta_1^T = \beta_2^T = 0$ ,  $\beta_3^T = 1$ , tenemos

$$C^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{1T}^T & K_{2T}^T & K_{3T}^T \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{signo}(C^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ - & + & + \end{pmatrix}$$

con lo que el elemento  $C_{23}^T$  es positivo y no tenemos garantizada la positividad del esquema.

Para solventar esta dificultad, consideramos un vector  $l_s$  unitario ortogonal a  $\nabla \rho$  y una velocidad

$$u^\alpha = u + \alpha l_s,$$

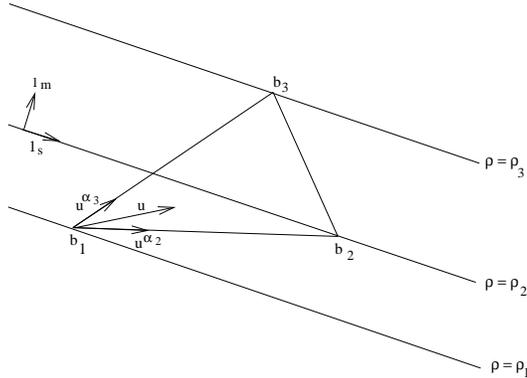


Figura 5: Líneas de nivel no cortan a la arista de salida.

de modo que  $u^\alpha \cdot \nabla \rho = u \cdot \nabla \rho$ , por lo que  $\phi^T(u) = \phi^T(u^\alpha)$ . Vamos a denotar por  $r_i$  el vector de posición del vértice  $b_i$ , y también definimos el vector  $r_{ki} = r_i - r_k$  que nos da la dirección de las aristas.

Si conseguimos  $\alpha$  tal que  $u^\alpha$  es paralelo al vector  $r_{13}$ , entonces  $K_{2T}^T(u^\alpha) = \frac{1}{2}u^\alpha \cdot \eta_2 = 0$ , y si además  $u^\alpha$  está alineado con  $r_{13}$ , entonces  $K_{1T}^T(u^\alpha) < 0$ ,  $K_{3T}^T(u^\alpha) > 0$ .

Conseguimos así la positividad local sin modificar el flujo total que atraviesa  $\partial T$ . Se trata, pues, del equivalente de un limitador de pendiente.

Veamos que se puede elegir  $\alpha_i$  para que  $u^{\alpha_i}$  esté alineada con  $r_{1i}$ , para  $i=2$  ó  $3$ , según  $u \cdot \nabla \rho$  sea positivo o negativo. En efecto, definamos el vector velocidad frontal:

$$u^m = (u \cdot 1_m)1_m \quad \text{con} \quad 1_m = \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|}.$$

Basta elegir

$$\alpha = \alpha_i = (u \cdot 1_m) \frac{r_{1i} \cdot 1_s}{r_{1i} \cdot 1_m} - u \cdot 1_s. \quad (22)$$

Tenemos además que

- Si  $u \cdot \nabla \rho > 0$ , entonces  $u^{\alpha_3} = \frac{u \cdot \nabla \rho}{\rho_3 - \rho_1} r_{13}$  está alineado con  $r_{13}$ .
- Si  $u \cdot \nabla \rho < 0$ , entonces  $u^{\alpha_2} = \frac{u \cdot \nabla \rho}{\rho_2 - \rho_1} r_{12}$  está alineado con  $r_{12}$ .

**Caso 2. Las líneas de nivel no cortan a la arista de salida.**

Esto se traduce en que

$$\Lambda = (\rho_2 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_1) > 0. \quad (23)$$

De donde, de forma análoga que en el caso 1, deducimos

$$\rho_1 < \min(\rho_2, \rho_3) \quad \text{ó} \quad \rho_1 > \max(\rho_2, \rho_3).$$

Suponemos que  $\min(\rho_2, \rho_3) = \rho_2$  y que  $\rho_1 < \rho_2$ , como en la Figura 5.

Al tener  $\rho_2 - \rho_1$  y  $\rho_3 - \rho_1$  el mismo signo, según (22), podemos elegir  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  tales que  $u^{\alpha_i}$  está alineado con  $r_{1i}$ , para  $i = 2, 3$ . Entonces en este caso, la velocidad que consideramos es una combinación lineal de estas dos,  $u^\alpha = \beta_2 u^{\alpha_2} + \beta_3 u^{\alpha_3}$ , con  $\beta_2 + \beta_3 = 1$ .

Observemos que corresponde al mismo flujo  $\phi^T$ :

$$\int_T u^\alpha \cdot \nabla \rho = \beta_2 \int_T u^{\alpha_2} \cdot \nabla \rho + \beta_3 \int_T u^{\alpha_3} \cdot \nabla \rho = \beta_2 \phi^T + \beta_3 \phi^T = \phi^T.$$

Distribuimos entonces el flujo entre los nodos  $b_2$  y  $b_3$  tomando los coeficientes  $\beta_2$  y  $\beta_3$  del N-esquema.

Observemos que en este caso,  $\phi^T \neq 0$ . En efecto, de ser  $u \cdot \nabla \rho = 0$ , entonces la línea de nivel  $\rho = \rho_1$  es paralela a  $u$  y por tanto, corta a la arista de salida. Y justamente estamos suponiendo que no ocurre así en este caso. Por tanto, los coeficientes  $\beta_i^T$  están bien definidos.

Recordemos además que como los nodos  $b_2$  y  $b_3$  son de salida, entonces  $K_{2T}^T \geq 0$  y  $K_{3T}^T \geq 0$ . Por tanto,  $\beta_2 \geq 0$  y  $\beta_3 \geq 0$ .

**Observación 2.1** *La no linealidad del PSI se presenta en el Caso 1, ya que los coeficientes de las matrices  $C_{\alpha_2}^T$  y  $C_{\alpha_3}^T$  son funciones racionales de  $\rho$ . Por ejemplo, en el Caso 1.1 (obviando el subíndice  $\alpha_3$ ):*

$$C_{33}^T = \frac{u \cdot \nabla \rho}{\rho_3 - \rho_1} r_{13} \cdot \eta_3.$$

*Aparece aquí clara la naturaleza “limitador de pendiente” de este esquema.*

**Observación 2.2** *El esquema PSI es invariante sobre las características asociadas a las soluciones estacionarias discretas de la ecuación de transporte homogénea (21), por construcción.*

Presentamos en los siguientes resultados las propiedades más importantes del método PSI. (Ver [4]).

**Lema 2.2** *La matriz  $D(\rho_h)$  definida por el método PSI es continua como función de  $\rho_h$ .*

**Proposición 2.2** *El esquema PSI es un método localmente positivo y preserva la linealidad. Además es globalmente positivo bajo la condición CFL  $\Delta t \leq \frac{S}{\alpha}$ , con  $S = \min_i S_i$ ,*

*$\alpha = \frac{1}{2} M \|u\|_{L^\infty(\Omega)} h$ , siendo  $M$  el número máximo de elementos en los  $E_i$ . Ello ocurre cualquiera que sea la función  $\rho^n \in V_h$  que se utilice para definir la matriz  $D^n$  del esquema.*

## 2.4. Interpretación como formulación variacional Petrov-Galerkin

En esta sección, reescribimos los Métodos Distributivos como formulación variacional.

Vamos a ver que podemos interpretarlos como métodos modificados de Galerkin, en concreto de Petrov-Galerkin.

Consideramos en primer lugar el problema de transporte estacionario

$$\begin{cases} u \cdot \nabla \rho = f & \text{en } \Omega; \\ \rho = 0 & \text{sobre } \Gamma^-, \end{cases}$$

con  $\Gamma^- = \{x \in \partial\Omega / u \cdot n < 0\}$ . Suponemos que  $\Omega$  es un dominio poligonal o poliédrico de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ó  $3$ ). Consideramos de nuevo un espacio de funciones afines a trozos sobre  $\mathcal{T}_h$ :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) / v_{h|_T} \in \mathbb{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad v_{h|_{\Gamma^-}} = 0\}. \quad (24)$$

Nos planteamos el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Obtener } \rho_h \in V_h \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} (u \cdot \nabla \rho_h) v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Los métodos distributivos se usan, como hemos visto en la Sección 2.1, para aproximar el término de transporte. Así que la idea que seguimos es tomar funciones test en un espacio diferente pero sólo para este término.

Para ello vamos a considerar de nuevo un espacio discreto de elementos finitos sobre  $\mathcal{T}_h$  constantes a trozos por triángulos. Sus funciones de base  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$  van a ser las que toman el valor  $\beta_i^T$  sobre todo elemento  $T \in \mathcal{T}_h$  tal que  $b_i$  es vértice de  $T$  y cero en los demás elementos de  $\mathcal{T}_h$ .

Así, nuestro espacio de funciones test será:

$$W_h = \mathcal{L}\{\lambda_i\}_{i=1}^N, \quad (25)$$

donde  $N$  denota el número de nodos de  $\mathcal{T}_h$  situados en  $\Omega \setminus \Gamma^-$ . Si consideramos una función  $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ , definimos su interpolado sobre  $W_h$  casi por doquier como

$$\Pi_h f(x) = \sum_{i=1}^N f(b_i) \lambda_i(x). \quad (26)$$

El método distributivo puede ahora ser re-escrito como el siguiente método de Galerkin modificado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Obtener } \rho_h \in V_h \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} (u \cdot \nabla \rho_h) \Pi_h v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right. \quad (27)$$

En efecto:

Tomamos una base del espacio  $V_h$  formada por las funciones  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  tales que  $\varphi_i(b_j) = \delta_{ij}$   $\forall 1 \leq i, j \leq N$ . Entonces podemos escribir la matriz elemental de este método como

$$A_{ij}^T = \int_T (u \cdot \nabla \varphi_j) \Pi_h \varphi_i = \beta_i^T \int_T u \cdot \nabla \varphi_j.$$

Ahora bien, si ponemos  $\rho_h = \varphi_j$  en (11), tenemos

$$\int_T u \cdot \nabla \varphi_j = K_{jT}^T. \quad (28)$$

Por tanto,  $A_{ij}^T = \beta_i^T K_{jT}^T = C_{ij}^T$ , que son precisamente las componentes de la matriz elemental de los métodos distributivos, (ver (15)). Para el método PSI, se tendría:

$$\int_T (u \cdot \nabla \rho_h) \Pi_h \varphi_i = \int_T (u^{\alpha_T} \cdot \nabla \rho_h) \Pi_h \varphi_i = \sum_{j=1}^{d+1} \beta_i^T \int_T (u^{\alpha_T} \cdot \nabla \varphi_j) \rho_j = \sum_{j=1}^{d+1} C_{ij}^{\alpha_T} \rho_j,$$

así que en este caso también se tiene  $A_{ij}^T = C_{ij}^{\alpha_T}$ .

Hemos de observar, por otra parte, que tanto para el N-esquema como para el PSI los coeficientes  $\beta_i^T$  (y por tanto, el espacio  $W_h$ ) dependen de la incógnita  $\rho_h$ . Además, en el caso del N-esquema, en general, estos coeficientes dependen del flujo convectivo elemental. Pueden ser negativos y estar no acotados. Esto va a impedir que el operador de interpolación  $\Pi_h$  pueda ser estable en este caso.

En cambio, para el esquema PSI los coeficientes  $\beta_i^T$  están acotados y son no negativos. Además, la matriz  $D$  es continua como función de la incógnita  $\rho_h$ , (ver Lema 2.2). Estas buenas propiedades nos van a permitir analizar la convergencia de las ecuaciones de transporte-difusión y Navier-Stokes mediante este método, en la próxima sección.

Supondremos, pues, las siguientes hipótesis sobre los coeficientes  $\beta_i^T$ :

$$(H1) \left\{ \begin{array}{l} a) \text{ La matriz local del método, } C^T, \text{ es continua como función de} \\ \rho_h \text{ sobre } V_h. \\ b) \sum_{i=1}^{d+1} \beta_i^T = 1; \beta_i^T \geq 0, i = 1, \dots, d+1. \end{array} \right.$$

Si las funciones  $\beta_i^T$  están construidas a partir de una función  $\rho_h \in V_h$ , denotaremos  $\Pi_{\rho_h}$  al correspondiente operador de interpolación. Cuando no haya lugar a confusión, simplemente lo denotaremos por  $\Pi_h$ , por abreviar la notación. Observemos que (27) puede ser escrito como un sistema “lineal - no lineal” de la forma

$$D(R)R = F, \tag{29}$$

donde  $R = \{\rho_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ ,  $F = \{f_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ , con  $f_i = \int_{\Omega} f \varphi_i$ , y  $D(R) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  es una matriz cuadrada de coeficientes

$$D_{ij}(R) = \sum_{T \in E_i \cap E_j} \beta_i^T(\rho_h) \int_T u \cdot \nabla \varphi_j \quad \text{con } \rho_h = \sum_{i=1}^N \rho_i \varphi_i,$$

donde hemos usado (13), (15) y (28). La matriz  $D$  es continua respecto de  $R$ ; según la hipótesis (H1).

### 3. Análisis de los problemas de transporte-difusión y Navier-Stokes

#### 3.1. Problemas de transporte-difusión

Presentamos en esta sección una relación de los resultados obtenidos al aproximar el problema de transporte-difusión mediante el método PSI, utilizando su interpretación como método de Petrov-Galerkin.

Antes de empezar a analizar el problema discreto, vamos a ver unos resultados previos que nos serán de utilidad.

**Lema 3.1** *Si consideramos un esquema distributivo que verifique las hipótesis del Corolario 2.1 entonces la matriz del esquema es una M-matriz.*

Los siguientes resultados nos dan diversas propiedades de operador de interpolación  $\Pi_{\rho_h}$ .

**Lema 3.2** *Sea  $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ , bajo la condición (7) existe una constante  $C_p$  tal que para todo  $\rho_h \in V_h$ ,*

$$\|\Pi_{\rho_h} v\|_p \leq C_p \|v\|_p \quad \text{con } 1 \leq p < +\infty.$$

**Lema 3.3** *Sea  $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ , bajo la condición (7) se tiene que para toda sucesión  $\rho_h \in V_h$ ,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\Pi_{\rho_h} v - v\|_{L^p(\Omega)} = 0, \quad \forall p \in [1, +\infty].$$

**Lema 3.4** *Sea  $\sigma_h \in V_h$ . Entonces  $\forall p \in [1, +\infty]$*

$$\|\Pi_h \sigma_h - \sigma_h\|_p \leq h \|\nabla \sigma_h\|_p.$$

### 3.1.1. Aproximación numérica

Planteamos en primer lugar el problema que queremos resolver. Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^d$  (con  $d = 2$  ó  $3$ ) con frontera  $\Gamma$ . Consideramos el siguiente problema de transporte-difusión estacionario:

$$\begin{cases} u \cdot \nabla \rho - \nu \Delta \rho = f & \text{en } \Omega \\ \rho = 0 & \text{sobre } \Gamma^- \\ \nu \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma \setminus \Gamma^- \end{cases} \quad (30)$$

donde  $\rho$  es una magnitud física transportada por un flujo de fluido a velocidad  $u$ , sujeta a una difusión molecular con difusividad  $\nu$ , que suponemos constante.  $f \in L^2(\Omega)$  representa un aporte distribuido de la magnitud  $\rho$ ,  $u$  es un campo de vectores con divergencia nula. Suponemos que  $\Gamma^-$  es una parte medible de medida no nula de  $\Gamma$ , que identificamos como la frontera de entrada:

$$\Gamma^- = \{x \in \Gamma / u \cdot n < 0\}.$$

Si escribimos el problema variacional discreto teniendo en cuenta la expresión para la aproximación mediante métodos distributivos (27) tenemos:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \rho_h \in V_h \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} (u \cdot \nabla \rho_h) \Pi_{\rho_h} v_h + \nu \int_{\Omega} \nabla \rho_h \cdot \nabla v_h = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (31)$$

Dada  $r_h \in V_h$ , definimos ahora la forma bilineal  $b(r_h) : V_h \times V_h \longrightarrow \mathbb{R}$  como:

$$b(r_h; v_h, w_h) = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla v_h) \Pi_{r_h} w_h,$$

con lo que el problema (31) se re-escribe como:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \rho_h \in V_h \text{ tal que} \\ b(\rho_h; \rho_h, v_h) + \nu (\nabla \rho_h, \nabla v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (32)$$

Se puede probar que la forma  $b(\rho_h)$  es continua, y gracias al Teorema de Brouwer obtenemos la existencia de solución para el problema discreto (ver [4]).

**Teorema 3.1** *El problema (31) admite solución  $\rho_h \in V_h$ . Toda solución satisface la estimación*

$$\|\rho_h\|_V \leq \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'}. \quad (33)$$

Se puede comprobar (ver [4]) que se puede extender el operador  $\Pi_h$  al espacio de funciones  $H^1$ . Esto es necesario para probar el siguiente resultado de convergencia fuerte.

**Teorema 3.2** *Sea  $\Omega$  un dominio poligonal o poliédrico acotado de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ó  $3$ ),  $V_h$  aproximación interna de  $V$  definida por (24) y una función  $f \in L^2(\Omega)$ . Entonces la sucesión  $\{\rho_h\}_{h>0}$  formada por una solución de (32) para todo  $h > 0$  converge fuerte en  $V$  a  $\rho$ , solución del problema continuo.*

**Teorema 3.3** *En las hipótesis del teorema anterior, supongamos además que  $u \in L^\infty(\Omega)$ . Entonces existe una constante positiva  $C$  tal que*

$$\|\nabla(\rho - \rho_h)\|_0 \leq (2 + C\nu^{-1}\|u\|_\infty)d_1(\rho, V_h) + h\nu^{-2}\|u\|_\infty\|f\|'_V.$$

con  $d_1(\rho, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|\nabla(\rho - v_h)\|_0$ .

Los puntos clave para este análisis son la positividad del método PSI y las propiedades del operador de interpolación distribuida  $\Pi_h$ . La positividad permite reproducir las estimaciones estándar de la aproximación mediante el método de Galerkin de las ecuaciones de Convección-Difusión. Las propiedades de estabilidad y convergencia del operador  $\Pi_h$  permiten probar la convergencia del método. El Lema 3.4 permite obtener las estimaciones de error óptimas. Debido a este Lema aparece el término adicional (el último en  $O(h)$ ) en la estimación de error del Teorema 3.3.

Se puede además probar un principio del máximo para el principio discreto (Cf. [4]).

### 3.2. Ecuaciones de Navier-Stokes

Al igual que en el apartado anterior para el problema de transporte-difusión, vamos a exponer los principales resultados de estabilidad, convergencia y estimaciones de error. Que resultan al aplicar el método PSI a las ecuaciones de Navier-Stokes.

Escribimos en primer lugar el problema continuo y la aproximación numérica. Sea  $\Omega$  un dominio poligonal o poliédrico acotado de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ó  $3$ ) con frontera Lipschitz  $\Gamma = \partial\Omega$ . Queremos resolver el problema:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^d, p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f & \text{en } \Omega; \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega; \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (34)$$

Vamos a considerar los espacios  $V = (H_0^1(\Omega))^d$  y  $L_0^2(\Omega)$  donde vamos a buscar nuestra solución  $(u, p)$ . Suponemos que la función del término fuente  $f$  está en  $(H^{-1}(\Omega))^d$ .

Para la aproximación numérica, consideramos una aproximación interna de los espacios  $V$  y  $L_0^2(\Omega)$  mediante subespacios en dimensión finita,  $\{V_h\}_{h>0}$  y  $\{M_h\}_{h>0}$  respectivamente. Para

aproximar el término de transporte por el método PSI, vamos a definir una forma trilineal para el problema aproximado como sigue:

$$b_h(u_h; v_h, w_h) = \int_{\Omega} (u_h \cdot \nabla v_h) \mathcal{P}_{u_h} w_h \quad \forall u_h, v_h, w_h \in V_h. \quad (35)$$

Aquí,  $\mathcal{P}_{u_h}$  es un operador de interpolación vectorial definido de forma análoga a (26), por componentes:

$$\mathcal{P}_{u_h} w_h = (\Pi_{u_{1h}} w_{1h}, \Pi_{u_{2h}} w_{2h}, \Pi_{u_{3h}} w_{3h}) \in W_h(u_{1h}) \times W_h(u_{2h}) \times W_h(u_{3h}),$$

siendo  $\Pi_{u_{ih}}$  el operador definido por (26) construido con  $u_{ih}$ . Observemos que  $\mathcal{P}_{u_h}$  depende de  $u_h$  por una parte a través de sus componentes como agentes pasivos (el  $\rho_h$  de la definición del PSI) y por otra como vector de convección.

Fijada  $u_h$ ,  $b_h(u_h; \cdot, \cdot)$  es bilineal y continua sobre  $V_h \times V_h$ . Definimos

$$\mathcal{N} = \sup_{0 < h \leq h_0} \sup_{u, v, w \in V_h} \frac{b_h(u; v, w)}{\|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 \|\nabla w\|_0},$$

donde  $h_0$  es una cota superior dada para la talla de la malla.

**Observación 3.1** *Supongamos que el espacio de velocidades discretas  $V_h$  está formado por elementos finitos afines a trozos. Entonces, como consecuencia del Lema 3.1, se verifica que*

$$b_h(u_h; v_h, v_h) \geq 0 \quad \forall u_h, v_h \in V_h. \quad (36)$$

Planteamos ahora el problema aproximado:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_h \in V_h, p_h \in M_h \text{ tal que} \\ b_h(u_h; u_h, v_h) + \nu(\nabla u_h, \nabla v_h) - (p_h, \nabla \cdot v_h) = \langle f, v_h \rangle & \forall v_h \in V_h; \\ (\nabla \cdot u_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in M_h. \end{cases} \quad (37)$$

Consideramos las siguientes hipótesis:

(H2)  $\Omega$  abierto acotado conexo poliédrico.

(H3) Los espacios  $(V_h, M_h)$  verifican la condición inf-sup discreta:

$$\exists \hat{\beta} > 0 \text{ tal que } \hat{\beta} \|r_h\| \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{(r_h, \nabla \cdot v_h)}{\|\nabla v_h\|_0}, \quad \forall r_h \in M_h. \quad (38)$$

(H4)  $V_h$  está formado por elementos finitos de tipo  $\mathbb{P}_1$ .

Por ejemplo podemos considerar elementos finitos  $(\mathbb{P}_1 - iso\mathbb{P}_2, \mathbb{P}_1)$  ó  $(\mathbb{P}_1 - iso\mathbb{P}_2, \mathbb{P}_0)$ .

Podemos entonces garantizar la existencia de solución de nuestra aproximación:

**Teorema 3.4** *Bajo las hipótesis (H2), (H3) y (H4), el problema (37) admite al menos una solución que satisface las estimaciones*

$$\begin{aligned} \|\nabla u_h\|_0 &\leq \nu^{-1} \|f\|_{-1} \\ \|p_h\|_0 &\leq \hat{\beta}^{-1} (2 + C\nu^{-2} \|f\|_{-1}) \|f\|_{-1} \end{aligned} \quad (39)$$

siendo  $\hat{\beta}$  la constante de la condición inf-sup, (38) y  $C$  una constante positiva que depende únicamente del dominio y de la dimensión del espacio.

Este resultado se debe esencialmente a la propiedad (36). La positividad del operador de interpolación distribuida hace que no sea necesario usar la forma antisimétrica que se suele usar para aproximar al operador de convección  $u \cdot \nabla u$ .

Enunciamos a continuación los resultados de convergencia y estimaciones de error.

**Teorema 3.5** *Bajo las hipótesis (H2), (H3) y (H4), existe una subsucesión de la sucesión  $\{(u_h, p_h)\}_{h \geq 0}$  solución de (37) que converge fuertemente en  $V \times L_0^2(\Omega)$  a una solución del problema continuo. Si esta solución es única, entonces toda la sucesión converge.*

**Teorema 3.6** *Supongamos que se verifican las hipótesis (H2), (H3) y (H4) y además que  $\mathcal{N}\|f\|_{-1} \leq \nu^2$ . Entonces existen dos constantes  $C$  y  $C'$  positivas tales que*

$$\|\nabla(u - u_h)\|_0 + \|p - p_h\|_0 \leq C(d_1(u, V_h) + d_0(p, M_h)) + C'h^{1-\varepsilon_q},$$

donde  $d_1(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|\nabla(u - v_h)\|_0$  y  $d_0(p, M_h) = \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_0$  y  $\varepsilon_q = \frac{d}{q}$ ,  $\forall q > 2$ .

## 4. Extensión del método PSI a leyes escalares de conservación con término fuente

Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x F(\rho) = g(\rho) & \text{en } (0, L) \\ \rho(x, 0) = \rho^0(x) & \text{en } (0, L) \\ \rho(x, t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Nos planteamos resolverlo mediante el método PSI visto antes. La idea consiste en integrar el término fuente en el término de transporte. Así, se trata de repartir entre los nodos de cada intervalo, no sólo el flujo correspondiente al término de transporte sino también la parte equivalente del término fuente. De manera que podemos escribir el esquema PSI como:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{T \in E_i} \beta_i^{T,n} (\phi^{T,n} - \mathcal{G}^{T,n}). \quad (40)$$

Donde  $E_i = \{T/x_i \in T\}$ . Y

$$\phi^{T,n} = \int_T \partial_x F(\rho), \quad \mathcal{G}^{T,n} = \int_T g(\rho) dx.$$

Si denotamos por  $T_j = [x_{j-1}, x_j]$  y suponemos que existe una función  $G$  tal que  $g(\rho) = \partial_x G(\rho)$ , entonces tenemos:

$$\begin{aligned} E_i &= T_{i-1} \cup T_i, \\ \phi^{T_i,n} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \partial_x F(\rho) = F(\rho_{i+1}^n) - F(\rho_i^n) \equiv F_{i+1}^n - F_i^n, \\ \mathcal{G}^{T_i,n} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \partial_x G(\rho) = G(\rho_{i+1}^n) - G(\rho_i^n) \equiv G_{i+1}^n - G_i^n. \end{aligned}$$

Si definimos el residuo sobre cada intervalo  $T_j$  como  $R^{j,n} = \phi^{T_j,n} - \mathcal{G}^{T_j,n}$ , entonces el esquema se escribe:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\beta_i^{i-1,n} R^{i-1,n} + \beta_i^{i,n} R^{i,n}). \quad (41)$$

Los coeficientes  $\beta_j$  se definen de manera que en cada etapa de tiempo, la solución evolutiva se acerque lo más posible a la estacionaria, garantizando la estabilidad. Lo que se traduce en ir disminuyendo el residuo en valor absoluto en cada paso, es decir,

$$|R^{i,n+1}| \leq |R^{i,n}| \quad \forall i.$$

Consideramos el intervalo  $T_i = [x_i, x_{i+1}]$  y determinamos los coeficientes según el signo del residuo  $R^{i,n}$  que será “repartido” entre los nodos  $x_i$  y  $x_{i+1}$  en función de estos coeficientes,  $\beta_i^{i,n}$  y  $\beta_{i+1}^{i,n}$ , respectivamente. Veamos antes una expresión para  $R^{i,n}$ :

$$\begin{aligned} R^{i,n} &= \phi^{T_i,n} - \mathcal{G}^{T_i,n} = (F_{i+1}^n - F_i^n) - (G_{i+1}^n - G_i^n) = \\ &= (F_{i+1}^n - G_{i+1}^n) - (F_i^n - G_i^n) = (F - G)'(z_i^n)(\rho_{i+1}^n - \rho_i^n); \end{aligned} \quad (42)$$

con  $z_i^n \in (\rho_i^n, \rho_{i+1}^n)$ .

**Caso 1.**  $R^{i,n} > 0$ . Queremos que en la etapa  $n+1$  el residuo sea menor. Esto se conseguiría según el esquema (41) (debido al signo negativo), enviando todo el residuo al nodo donde  $\rho$  sea máximo. Disminuyendo así el valor de  $\rho_j^{n+1}$  de forma óptima, para  $j = i, i+1$ . Entonces tenemos:

$$\text{Si } \rho_{i+1}^n > \rho_i^n \Rightarrow \begin{cases} \beta_i^{i,n} = 0 \\ \beta_{i+1}^{i,n} = 1 \end{cases} \cdot \text{Si } \rho_{i+1}^n < \rho_i^n \Rightarrow \begin{cases} \beta_i^{i,n} = 1 \\ \beta_{i+1}^{i,n} = 0 \end{cases}$$

**Caso 2.**  $R^{i,n} < 0$ . Queremos ahora que el residuo aumente en la etapa  $n+1$ . Según el esquema (41) habrá que enviar la totalidad del residuo al nodo donde  $\rho$  alcanza el mínimo. Aumentando el valor de  $\rho_j^{n+1}$  de forma óptima, con  $j = i, i+1$ . Así de forma análoga al caso anterior, tenemos:

$$\text{Si } \rho_{i+1}^n > \rho_i^n \Rightarrow \begin{cases} \beta_i^{i,n} = 1 \\ \beta_{i+1}^{i,n} = 0 \end{cases} \cdot \text{Si } \rho_{i+1}^n < \rho_i^n \Rightarrow \begin{cases} \beta_i^{i,n} = 0 \\ \beta_{i+1}^{i,n} = 1 \end{cases}$$

**Caso 3.**  $R^{i,n} = 0$ . En este caso, no estamos actualizando el valor de  $\rho_i^n$ . Necesitamos de una corrección entrópica. Para ello definimos una nueva función  $\tilde{F} = F - \epsilon \partial_x \rho$ , y tomamos un nuevo residuo

$$\tilde{R}^{i,n} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\partial_x \tilde{F}(\rho^n) - g(\rho^n)) dx.$$

Y procedemos de forma análoga a los Casos 1 y 2 anteriores pero con  $\tilde{R}^{i,n}$  en vez de  $R^{i,n}$ .

**Proposición 4.1** *El esquema (41) es TVD bajo la condición CFL:*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |(F - G)'| \leq \frac{1}{2}. \quad (43)$$

## 5. Aplicación al transporte de sedimentos

Las ecuaciones que modelan el transporte de sedimentos, en su versión mas simple, esto es, en una variable de espacio, tienen una estructura como sigue:

$$\partial_t \rho + \partial_x r = 0,$$

donde  $\rho = \rho(x, t)$  es la masa de sedimento transportado (o, equivalentemente, la posición del fondo) y  $r = r(x, t)$  es su caudal. La principal dificultad con que nos enfrentamos es que  $r$  no se conoce como función de  $\rho$ , sino (y ello tras mucho esfuerzo de modelado) de variables hidrodinámicas como altura de la superficie libre ( $h$ ) y caudal de agua ( $q$ ). Esto hace imposible aplicar los métodos desarrollados en las secciones anteriores a esta ecuación directamente.

Una estrategia que nos planteamos actualmente es considerar la masa de sedimentos  $\rho$  como una variable hidrodinámica más, y considerar un sistema acoplado de leyes de conservación Aguas Someras + Transporte de Sedimentos para la variable

$$W = (h, q, \rho),$$

con la estructura

$$\partial_t W + \nabla \cdot F(W) = B(W) \partial_x W,$$

donde  $F$  es una función de flujo y  $B$  un término de acoplamiento debido a gradientes horizontales del fondo.

Para diversos modelos de transporte de sedimentos se trata de un sistema hiperbólico.

Actualmente estamos trabajando en la extensión de métodos distributivos a Sistemas de Leyes de Conservación Hiperbólicas y, especialmente, de Aguas Someras con Transporte de Sedimentos. Entendemos que es un problema de mucho interés aplicado del que aún se conoce poco. (Cf. [5], [1], [7]).

## Referencias

- [1] Castro, M.J.; Chacón, T.; Domínguez, A.; Fernández, E.D: *Well-Balanced Schemes for Shallow-Water Equations With Sediment Transport*, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Finlandia. Eccomas 2004.
- [2] Deconinck, H.; Paillère, H.; Struijs, R.; Roe, P.L.: *Multidimensional upwind schemes based on fluctuation-splitting for systems of conservation laws*, Computational Mechanics 11, pp. 323-340, (1993).
- [3] Morton, K.W.: *Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*, Chapman & Hall, (1996).
- [4] Narbona, G.: *Aproximación numérica de algunos flujos de interés en Arquitectura e Ingeniería mediante esquemas positivos en elementos finitos*, Tesis Doctoral de la Universidad de Sevilla, (2004).
- [5] Nielsen, P.: *Coastal bottom boundary layers and sediment transport*, Ed. World Scientific, (1992).

- [6] Paillère, H.; Deconinck, H.; Struijs, R.; Roe, P.L.; Mesaros, L.M.; Müller, J.D.: *Computations of inviscid compressible flows using fluctuation-splitting on triangular meshes*, AIAA 93-3301, Julio 6-9, Orlando, Florida, (1993).
- [7] Peña, E.: *Estudio numérico y experimental del transporte de sedimentos en cauces aluviales*, Tesis Doctoral de la Universidade da Coruña, (2002).
- [8] Roe, P.L.: *Linear advection schemes on triangular meshes*, Technical report, Cranfield Institute of Tecnology, CoA 8720, (1987).
- [9] Roe, P.L.: *A Framework for Numerical Evolution Problems*, Numerical Methods for Fluid Dynamics, Academic Press, (1982).
- [10] Roe, P.L.; Sildikover, D.: *Optimum positive linear schemes for advection in two and three dimensions*, SIAM J. Numer. Anal. 29(6), pp. 1542-1568 (1992)
- [11] Struijs, R.; Deconinck, H.; Roe, P.L.; Do Palma, P.; Powell, A.G.: *Progress on multidimensional upwind euler solvers for unstructured grids*, AIAA 91-1550, (1991).
- [12] Toro, E.F.: *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, (1997).