LA DETERMINACIÓN DE LA DISTANCIA DEL SOL EN LA *ASTRONOMÍA* DE LEVI BEN GERSON

J.L. MANCHA

...just laying off, for evidence,
an overcoat of clay.

1. INTRODUCCIÓN

Neugebauer (1957, 205-6) escribió que no hay mejor modo de convencerse de la coherencia interna de la astronomía antigua y medieval que colocar uno al lado de otro el *Almagesto*, el *Opus astronomicum* de al-Battānī y el *De revolutionibus* de Copérnico, y comprobar que capítulo a capítulo, teorema a teorema, y tabla a tabla, las tres obras discurren paralelamente. Una excepción al predominio de la tradición ptolemaica la constituye la sección V de *Sefer Milhamot Adonai* (*Liber bellorum Dei*), que contiene el sistema astronómico de Levi ben Gerson (1288-1344) y es probablemente el texto de astronomía más original de cuantos fueron escritos entre el *Almagesto* de Ptolomeo (*ca.* 150) y la *Astronomia nova* (1609) de Kepler[1].

En el ámbito de la cosmología matemática, las *Hipótesis de los planetas* de Ptolomeo desempeñaron el mismo papel fundacional que el *Almagesto* en el de la astronomía, y esbozaron un modelo del cosmos -incluyendo una teoría sobre tamaños y distancias de los planetas- que se mantuvo prácticamente sin modificaciones hasta Copérnico[2].

En el texto de Levi, la teoría sobre magnitudes y distancias planetarias constituye también uno de sus aspectos más radicalmente novedosos. Como prueba de ello baste mencionar los valores ptolemaicos para la distancia de la esfera de las estrellas fijas y para el diámetro de las estrellas de primera magnitud, 20.000 radios terrestres y 4 + 1/2 + 1/25

1. Muchos aspectos importantes de la obra de Levi resultan ya conocidos: dos de sus modelos lunares y sus tablas astronómicas (Goldstein, 1972, 1974a, 1974b), su valor para la precesión (Goldstein, 1975), sus innovaciones en instrumentos de observación (Goldstein, 1977), sus cálculos y observaciones de eclipses (Goldstein, 1979) y sus observaciones planetarias (Goldstein, 1988); Goldstein (1985) contiene una edición con traducción y comentario de los 20 primeros capítulos de la versión hebrea de la *Astronomía* de Levi.

2. Una excepción interesante en la astronomía islámica la constituye Mu'ayyad al-Dīn al-ʿUrdī (m. 1266); cf. Goldstein & Swerdlow (1970-71) y Saliba (1979).

diámetros terrestres, respectivamente, y compararlos con los calculados por Levi en el capítulo 134 de la *Astronomía* para el supuesto de que Mercurio y Venus estén situados por encima del sol: 159 x 10^{12} + 6.515 x 10^{8} + 1.338 x 10^{4} + 944 radios terrestres y 328 x 10^{8} diámetros terrestres, respectivamente[3]. La distancia citada deriva de tres supuestos: (1) la razón entre las distancias relativas máxima y mínima obtenidas de los modelos planetarios es la misma que la existente entre las distancias absolutas máxima y mínima, (2) entre la esfera o conjunto de orbes de un planeta y el conjunto del inmediatamente anterior o posterior existe un fluido elástico de diferente espesor cuya función es impedir la transmisión del movimiento de uno a otro, y (3) un valor no ptolemaico para la distancia del sol -2.140 radios terrestres para la distancia media, en lugar de los 1.210 de Ptolomeo-, que Levi determina en los capítulos 90 y 91 de la *Astronomía* a partir de su observación del eclipse lunar del 3 de octubre de 1335 y del valor de la excentricidad (2;14 para un radio del deferente de 60;0) inferido en el capítulo 56 de observaciones realizadas en 1334 de la variación del diámetro solar aparente.

El objeto de este artículo es exponer la determinación de las distancias mínima y máxima solar y de las magnitudes del sol y la luna que Levi lleva a cabo en los capítulos 90, 91 y 92 de la *Astronomía*. Puesto que estos capítulos son inéditos tanto en su versión hebrea como latina[4], se añade una edición crítica del texto latino (seguida de traducción), utilizando para ello tres de las cuatro copias manuscritas conservadas: códices 3098 (*A*) y 3380 (*B*) de la Biblioteca Vaticana, y 326 (*L*) de la Biblioteca Municipal de Lyon. La cuarta, el manuscrito D 327 de la Biblioteca Ambrosiana de Milán, deriva de *L* y he prescindido de sus variantes en el aparato crítico[5].

A efectos de facilitar la comparación con el texto de Levi (dado que el procedimiento de éste es diferente del de Ptolomeo), se resumen a continuación las secciones del *Almagesto* (V, 15-16: Toomer, 1984, 255-7; Neugebauer, 1975, 109-10) dedicadas a la derivación de la distancia solar y de los volúmenes del sol y la luna.

3. Goldstein (1974a), 29. En el caso de que Mercurio y Venus estuvieran situados por debajo del sol, Levi calcula que la concavidad de la esfera de las estrellas fijas se hallaría a 83.851;18 r.t., un valor que discrepa también de manera considerable del ptolemaico; cf. Goldstein (1986), 294.

4. He probado en otro lugar (Mancha, 1992b) que la traducción latina de la *Astronomía* fue realizada por Pedro de Alejandría *ordinis fratrum heremitarum sancti Augustini* (un personaje ya conocido como traductor de la *Prognosticatio* de Levi y también de una editio de los capítulos 4 a 11 de la *Astronomía* dedicada al papa Clemente VI en 1342, conocida como *De sinibus* y titulada en las copias conservadas *Tractatus instrumenti astronomie*) probablemente entre 1339 y 1344 y, lo que es más interesante, que Levi colaboró en la traducción, introduciendo modificaciones respecto al texto hebreo conservado; comparada con éste, puede ser considerada por tanto una última versión de la obra más que una traducción. Con excepción del índice de capítulos (Renan-Neubauer, 1893) y algunos pasajes relativos al uso por Levi de la *camera obscura* y a su derivación de la excentricidad solar (Mancha, 1989; 1992a), la versión latina de estos manuscritos está completamente inédita. Dos capítulos del *De sinibus*, en cambio, fueron editados por Curtze (1989, 1901).

5. En el texto presentado en la sección 5 de este artículo, las inserciones editoriales aparecen entre corchetes. Los títulos de los capítulos están tomados del índice de materias al comienzo de la obra (A, 1ra-2vb; B, 71ra-73v; L, 1r-7v).

2. LA DISTANCIA SOLAR PTOLEMAICA

El procedimiento de Ptolomeo[6] supone que la distancia máxima lunar, obtenida independientemente a partir de la paralaje (*Almagesto*, V, 13), es 64;10 r.t., que a esa distancia los diámetros aparentes de la luna y el sol son iguales y miden 0;31,20°, que el radio angular del cono de sombra es 0;40,40°, *i.e.*, aproximadamente 2;36 veces el radio aparente de la luna (*Almagesto*, V, 13-14), y que el radio lunar es 0;17,33 r.t..

2.1. En la figura 1, E, M y S son, respectivamente, los centros de la tierra, la luna y el sol, s_s' es el radio angular de la luna y del sol, s_o' el radio angular de la sombra, y s_o = M'B el radio del cono de sombra de la tierra a una distancia de E igual a EM. Por tanto,

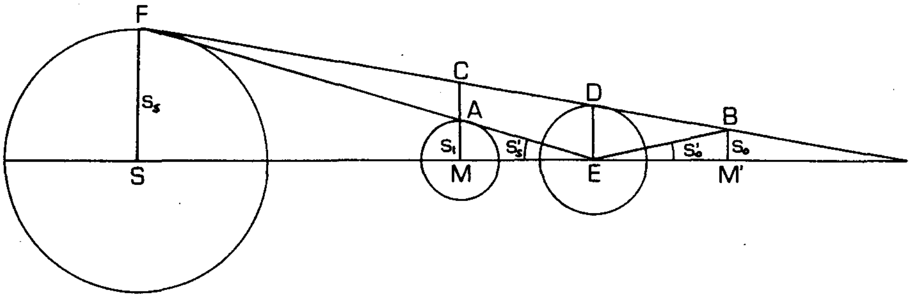

Fig. 1

EM = 64;10 r.t.,

s_s' = 0;15,40°,

MA = 0;17,33 r.t.,

s_o' = 2;36 s_s'.

Como los ángulos que intervienen son pequeños se supone que

M'B = s_o = 2;36 MA.

Dado que EM = EM' y ED = 1 r.t.,

ED = 1/2 (MC + s_o), de donde

MC = 2 ED – s_o = (2 – 2;36 MA) ED, y

AC = MC – MA = (2 – 3;36 MA) ED = 0;56,49 r.t.

6. Sobre la derivación en general y los problemas específicos de la fórmula ptolemaica véase Swerdlow (1968, 52-74).

De la igualdad de los diámetros aparentes se concluye que

$$\frac{ED}{AC} = \frac{EF}{AF} = \frac{ES}{MS} = \frac{ES}{ES - EM}$$

Por lo tanto, la distancia del sol en radios terrestres es

$$ES = \frac{EM}{ED - AC} = \frac{64;10}{1 - 0;56,49} = 1.210 \text{ r. t.}$$

De ES = 1.210 y s = 2;36 • 0;17,33 deriva a su vez el valor para la distancia entre el centro de la tierra y el vértice del cono de sombra, puesto que

$$OE = \frac{M'B \cdot EM'}{ED - M'B} + EM'.$$

Luego

$$OE = \frac{0;45,38 \cdot 64;10}{0;14,22} + 64;10 = 268 \text{ r. t.}$$

(exactamente, 267;58,53 r.t.).

Ptolomeo no especifica en el *Almagesto* si el valor derivado para ES representa la distancia solar máxima, media o mínima, aunque en las *Hipótesis de los planetas* (I, 2, 3) 1.210 r.t. corresponde a la distancia media. Puesto que en el modelo solar la excentricidad (e) es 2;30 para un radio del deferente (R) igual a 60, en valores absolutos e = 1.210/24 = 50;25 r.t.; de donde se deduce que la distancia mínima es 1.159;35 r.t. y la distancia máxima 1.260;25 r.t. Estos son los valores de Ptolomeo para la distancia solar, aceptados con mínimas variaciones a lo largo de la Edad Media (compárense, por ejemplo, con los 1.108 y 1.142 radios terrestres atribuidos por al-Battānī y Copérnico, respectivamente, a la distancia media).

2.2. La proporción entre los volúmenes de estos cuerpos es la que existe entre los cubos de sus diámetros. Puesto que MA = 0;17,33 r.t., EM = 64;10 r.t. y

$$\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{ES}}{\mathrm{SF}},$$

$$\mathrm{SF} = \frac{0;17,33 \cdot 1.210}{64;10} = 5;30 \; r.\, t.$$

(exactamente, 5;30,56)[7]. Si 2MA = 1, 2ED = 3;24 y 2SF = 18;48. Si V_s, V_t y V_l son, respectivamente, los volúmenes del sol, la tierra y la luna, entonces, si $V_l = 1$,

$V_t = (3;24)^3 = 39;15$ (exactamente, 39;18,14) y

$V_s = (18;48)^3 = 6.644;30$ (exactamente, 6.644;40,19). El volumen del sol es, por tanto, unas 170 veces el de la tierra (exactamente, 169;17,11).

3. LA DISTANCIA DEL SOL SEGÚN LEVI

3.1. El primer paso de Levi consiste en la determinación del diámetro aparente del sol en el momento del eclipse lunar del 3 de octubre de 1335, para lo que utiliza el modelo solar cuya excentricidad, 2;14, fue derivada en el capítulo 56 de observaciones realizadas a lo largo de 1334 utilizando la combinación de bastón de Jacob y *camera obscura* ideada por él mismo (Mancha, 1992a, 289-98). De acuerdo con 90:2[8], 106;8° es entonces el valor de la anomalía solar media[9].

En la figura 2[10], D es el centro del excéntrico, E el centro de la tierra, y B el centro del sol. A y C son, respectivamente, apogeo y perigeo. La excentricidad e = DE = 2;14

7. Introduzco entre paréntesis precedida del adverbio 'exactamente' mi comprobación de cada paso del cálculo de Levi. Las discrepancias entre este cálculo y el de Levi son menores y, por lo general, sólo afectan a la tercera fracción sexagesimal. Es probable que esas discrepancias fueran aún más pequeñas de haber utilizado la tabla de senos de Levi (Goldstein, 1974a, 153-5) e interpolación lineal.

8. Las referencias al texto latino de los capítulos 90, 91 y 92, se indican mediante el número del capítulo separado por dos puntos del número correspondiente a la frase citada. La misma convención se utiliza para las referencias a la versión hebrea, precedida entonces de la letra H. Para las referencias a otros capítulos de la versión latina se utiliza sólo el ms. Vat. lat. 3098 (A).

9. A la que corresponde, usando la tabla 2 (Goldstein, 1974a, 156-7), una ecuación de 2;3,59°; suponiendo de acuerdo con el capítulo 57 (A, 45va-46rb) que la longitud del apogeo es 93°, la longitud verdadera del sol es Libra 17;4,1°. En H 61:11 (A, 48vb) esta longitud es Libra 16;58,34° 2;25^h después de la medianoche aparente (Goldstein, 1975, 36) y en H 80:134 (A, 66rb) Libra 17;3,5° 3;38^h después de la medianoche aparente (Goldstein, 1979, 116).

10. Corresponde a la figura 90.1 del texto latino editado en la sección 5 de este artículo, tal como se encuentra en A, 77r, y B, 91v.

y EG = EC. Los ángulos DFE y EFB son rectos, y el ángulo ADB = 106;8°. En consecuencia, los ángulos EDF y DEF son 73;52° y 16;8°, respectivamente. Si ED = R = 60,

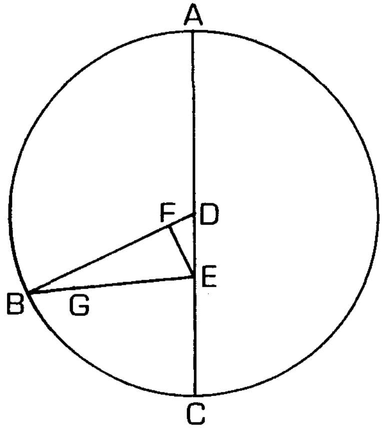

Fig. 2

EF = 60 • sen 73;52° = 57;38,10 (exactamente, 57;38,13), y

DF = 60 • sen 16;8° = 16;40,19 (exactamente, 16;40,29).

Si ED = 2;14, EF = 2;8,42 y DF = 0;37,14.

Dado que DB = 60, FB = 59;22,46.

Como $EB^2 = FB^2 + FE^2$, EB = 59;25,5.

De acuerdo con el capítulo 56 de la *Astronomía* (Mancha, 1992a), el diámetro aparente del sol en el perigeo ($2s'_C$) es 0;30°. Por tanto, su diámetro aparente en el momento del eclipse ($2s'_B$) viene dado por

$$\frac{2s'_B}{2s'_C} = \frac{EC}{EB} = \frac{57;46}{59;25,5}.$$

De donde, $2s'_B$ = 0;29,9,58,48,24° (exactamente, 0;29,9,58,23,13°).

3.2. A partir de aquí Levi deriva mediante aproximaciones sucesivas la distancia del sol en el momento del mencionado eclipse. La primera aproximación se lleva a cabo en 90:42-62. En la figura 3[11], C, F y G son, respectivamente, los centros del sol,la tierra

11. Corresponde a la figura 90.2 (*A*, 77r; *B*, 91v).

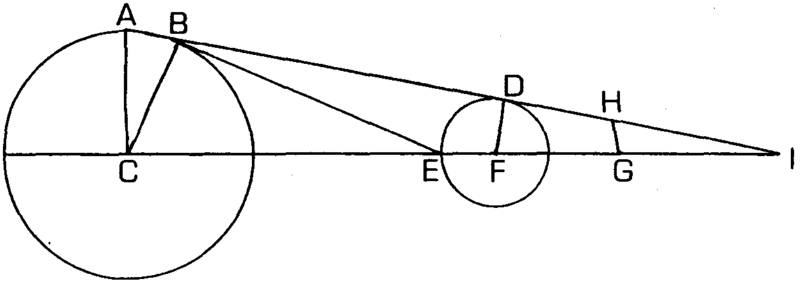

Fig. 3

y la luna. G es también el centro de la base del cono de sombra en ese punto, que es un círculo cuyo radio es GH. Los ángulos CAD y FDH son rectos y, por tanto, CA es paralela a FD. La línea GH, escribe Levi (90:32), es casi igual a la línea que partiendo de G es paralela a CA y FD y corta a DI (*i.e.* la línea GL en la figura 4). Según 90:20, si FD = 0;54,57,32,47[12], GH es 0;42. Si FD es igual a 1, GH es entonces 0;45,51,8,11,8,52. Como GH es casi igual a GL (fig. 4)[13],

$$\frac{IF}{IG} = \frac{FD}{GH}$$

y

$$\frac{IF}{GF} = \frac{GH}{FD - GH}.$$

De donde,

$$\frac{GH}{FD - GH} = \frac{0;45,51,8,11,8,52}{0;14,8,51,48,51,8} = 3;14,27,28,15,51,33.$$

12. De hecho, de acuerdo con el capítulo 88 (*A*, 72ra), 0;54,57,32,47° es la suma de la paralaje lunar, 0;53,20°, y la paralaje solar, que en ese mismo lugar es 0;1,37,32,47°. Por tanto, FD = sinR 0;54,57,32,47° = 0;57,33,15,50. Tomar, para calcular el valor de (FD – GH) más adelante (90:45-46), los valores de los ángulos en lugar de los senos correspondientes no produce una diferencia apreciable, al ser los ángulos tan pequeños. Usando 0;54,57,32,47 y 0;42 Levi obtiene (90:46) 0;45,51,8,11,8,52; con los senos correspondientes, 0;57,33,15,50 y 0;43,58,52, se obtiene 0;45,50,59,50,39,11, *i.e.*, un valor diferente en sólo 0;0,0,8. La misma observación se aplica a las aproximaciones en 90:68 y 90:87.

13. Véase el final de esta sección 3.2.

Si FD = 1,

$$FG = \frac{60}{0;57,33,15,30} = 62;32,58,16,24,8,9.$$

Por tanto,
GI = FG • 3;14,27,28,15,51,33 = 202;43,14,43,10,37 r.t., y

FI = 265;16,12,59,34,45,29 r.t.

Si FI = 60, FD = 0;13,34,15,49,51 (exactamente, 0;13,34,15,49,54). Por tanto el ángulo DIF es 0;12,57,32,47,2° (exactamente, 0;12,57,33,59,32°), que es igual al ángulo AIC. El 3 de octubre de 1335, el ángulo CEB es, de acuerdo con 90:18, 0;14,34,59,24,12°. Por consiguiente, si EC = 60,

CB = 0;15,16,14,25,49 (exactamente, 0;15,16,17,4,54). Si CI = 60,

CA = 0;13,34,15,49,55 (exactamente, 0;13,34,14,33,55). Pero tanto CA como CB son radios de la esfera del sol; luego

$$\frac{CE}{CI} = \frac{CA}{CB} = \frac{0;13,34,15,49,55}{0;15,16,14,25,49} \cdot$$

De donde

$$\frac{CE}{EI} = \frac{0;13,34,15,49,55}{0;1,41,58,35,54} = 7;59,5,18,29,39.$$

Si FD, el radio de la tierra, es 1,

EI = 266;16,12,59,34,45,29 r.t.,

EC = 2.126;7,1,9,12,15,43 r.t. (exactamente, 2.126;7,1,9,10,15,41,58), y

CF = 2.127;7,1,9,12,15,42 r.t[14].

Si CF = 60, FD = 0;1,41,32,45,13,30. Luego el ángulo DCF, la paralaje solar, es, de acuerdo con 90:62, 0;1,36,57,58° (exactamente, 0;1,36,58,9°). Este valor no coincide con el supuesto al comienzo de la derivación (90:20), que era 0;1,37,32,47°, de acuerdo con el capítulo 88.

Como la paralaje solar que se deduce al final de la distancia obtenida debe coincidir con la supuesta al comienzo de la derivación, Levi obtiene el valor adecuado de la

14. El cálculo no permite, obviamente, decidir la discrepancia de los manuscritos (43 ó 42) para la sexta fracción sexagesimal.

paralaje solar que debe suponerse inicialmente mediante un *argumentum ingenij*, que es la traducción latina del hebreo *heqqesh tahbuli*. Esta expresión (*uia argumentorum ingenij*) designa en Levi un método de aproximaciones sucesivas inspirado, en mi opinión, en el procedimiento usado por Ptolomeo en el *Almagesto* (X, 6 - XI, 8) para determinar la excentricidad y la línea apsidal de los planetas superiores[15].

Levi da algunas indicaciones acerca de su método en el capítulo 49 de la *Astronomía*[16]. Mi reconstrucción está basada en ese pasaje y concierne a la fórmula utilizada en 90:80-83. Supóngase $f(x) = y$, donde y es conocido. Si se tiene $f(a) = n$, y se da que $n > y$, de manera que $n - y = b$ (donde el signo de b es positivo), y se tiene también que $f(c) = p$, y se da $p < y$, de modo que $p - y = d$ (donde el signo de d es negativo), entonces el valor del argumento x de la función puede derivarse de

$$\frac{a - x}{a - c} = \frac{b}{b + d}$$

15. Este procedimiento, usado por Levi frecuentemente en la *Astronomía*, especialmente en la derivación de parámetros para los modelos planetarios preliminares a partir de los valores ptolemaicos de las distintas ecuaciones, no ha sido hasta ahora explicado satisfactoriamente. Goldstein, 1986, 279-81, contiene sin embargo algunas interesantes indicaciones sobre la relación entre el hebreo *heqqesh tahbuli*, los términos de Ptolomeo *synkrisis* y *peira* en *Almagesto*, IX, 1, y la expresión árabe *ᶜilm al-hiyal* en el *Compendio de las ciencias* de al-Fārābī (m. 950).

16. Donde el procedimiento es descrito del siguiente modo: *...ideo necesse est quod inquisitiones que ad inueniendum ueritatem nos dirigunt sint de genere argumentorum ingenij, que sunt ex diuisione accepta cum experientia que paulatim ad ueritatem accedit quousque perueniat ad eam. Et ista met argumenta sunt de genere argumentorum condicionalium. Et horum sunt due species. Una quarum est ex pluri et pauciori accepta; secunda est accepta ex duabus experientijs de pluri diuerso uel ex duabus de pauciori diuerso. Verbi gratia de specie prima, quia dicemus: si quando ponebamus quantitatem primam tantam sequebatur equatio maior quam uidemus in quantitate secunda tanta, et si quando ponebamus quantitatem tertiam tantam sequebatur equatio minor quam uideamus in quantitate quarta tanta, est notum ex proportione quod necesse est poni mediam unam inter primam et tertiam cuius differentia a prima se habeat ad differentiam inter primam et tertiam sicut se habet secunda ad resultans ex secunda et quarta simul. Verbi gratia de secunda specie, quia dicemus: si quando ponebamus quantitatem primam tantam sequebatur equatio maior quam uideamus in quantitate secunda tanta, et si quando ponebamus quantitatem tertiam tantam sequebatur equatio maior quam uideamus in quantitate quarta tanta, que est minor secunda, est notum ex proportione quod necesse est poni quantitatem quintam taliter quod tertia sit media inter primam et ipsam et eius differentia a prima se habeat ad differentiam inter primam et tertiam sicut se habet quantitas secunda ad differentiam inter secundam et quartam.* El pasaje es ejemplificado por una adición marginal, debida probablemente al mismo Levi (pero ausente en los manuscritos hebreos: véase, por ejemplo, Paris, B. N. Hebr. 724, 94b; agradezco a B. R. Goldstein haber puesto a mi disposición su traducción inédita del texto hebreo de este capítulo). La nota es como sigue: *Exemplum ex pluri et pauciori. Prima 10, ualent 30, quod est plus 6, secunda. Tertia 6, ualent 15, quod est minus 9, [quarta]. Quinta 8;24, ualent 24, quod uidemus. Exemplum de pluri diuerso. Prima 10, ualent 36, quod est plus 12, secunda. Tertia 8, ualent 30, quod est plus 6, quarta. Quinta 6, ualent 24, quod uidemus. De pauciori diuerso. Prima 6, ualent 24, quod est minus 12, [secunda]. Tertia 8, ualent 30, quod est minus 6, quarta. Quinta 10, ualent 36, quod uidemus. Argumenta superiora sunt conditionalia composita; sequens uero est simplex. Prima 10, ualent 30, que sunt quantitas secunda que non concordat cum 24 que uidemus, que sunt quantitas tertia; ergo 8, que sunt quantitas quarta et se habet ad 10 sicut 24 ad 30, ualent 24* (A, 40rb-va).

Esto es sólo un caso de la fórmula general

$$x = x_n = (x_{n+a} - x_n) \cdot \frac{f(x) - f(x_n)}{f(x_{n+a}) - f(x_n)},$$

-donde x es un valor arbitario de la variable independiente comprendido en el intervalo $x_{n+a} > x > x_n$ (siendo a un número positivo)-, que es equivalente a la fórmula para la interpolación lineal ptolemaica (Pedersen, 1974, 84)[17]:

$$f(x) = f(x_n) + [f(x_{n+1}) - f(x_n)] \cdot \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n}$$

Suponiendo a continuación que la paralaje solar (p_s) es 0;1,37° Levi lleva a cabo en 90:66-79 una segunda derivación de la distancia solar y de la paralaje solar correspondiente, para comprobar si ambas coinciden. La suma de las paralajes lunar y solar (p_l, p_s) es ahora 0;54,57° y, por consiguiente, FD, el seno de ese ángulo, es 0;57,32,26,0,53 (exactamente, 0;57,32,27,47,54). Si FD = 1,

FG = 62;33,52,25,43,29 (exactamente, 62;33,52,25,43,28,9), y

GH = 0;42/0;54,57 = 0;45,51,35,33,35 (exactamente, 0;45,51,35,32,29). Así,

$$\frac{GH}{FD - GH} = 3;14,35,40,52,13,26$$

(exactamente, 3;14,35,40,52,13,28). Luego

GI = 202;54,43,53,47,58 r.t. (exactamente, 202;54,43,53,47,55), y

FI = 265;28,36,19,31,27,5 r.t.

17. Este procedimiento de resolución de ecuaciones es el mismo que el conocido como *método de la cuerda, de partes proporcionales* o *regula falsi*. La regla de la doble posición falsa de los algebristas medievales, formalmente idéntica, se encuentra ya en el *Algebra* de al-Khwārizmī (*ca.* 800-847) y es conocida en lengua latina tanto a través del anónimo *Liber augmenti et diminutionis* como del *Liber abbaci* (1202) de Fibonacci (*Incipit capitulum 13 de regulis elchatayn, qualiter per ipsam fere omnes questiones abaci soluuntur. Elchataieym quidem arabice, latine duarum falsarum posicionum regula interpretatur...*). No he podido establecer hasta el momento, sin embargo, ninguna relación entre esa tradición del álbegra y Levi ben Gerson. Y es probable que de hecho no existiera, ya que de otro modo es difícil explicar que Levi y Petrus de Alexandria no recurrieran a una expresión común (*regula falsi*) en lugar de la utilizada (*heqqesh tahbuli, argumentum ingenij*); esto es compatible también con que las únicas referencias asociadas al método de los *argumenta ingenij composita* en la *Astronomía* sean ptolemaicas: por ejemplo, en el capítulo 47 (*A*, 39vb), el procedimiento iterativo de Ptolomeo, ya mencionado, para determinar la excentricidad y la línea apsidal de los planetas exteriores.

Si FI = 60, DF = 0;13,33,37,49,58,55. Por tanto,

$$\frac{CE}{CI} = \frac{0;13,33,37,49,58,55}{0;15,16,14,25,49},$$

y

$$\frac{CE}{EI} = \frac{0;13,33,37,49,58,55}{0;1,42,36,35,50,5} = 7;55,45,40,15,17,5.$$

Ahora bien, EI = 266;28,36,19,31,27 r.t.; en consecuencia,

EC = 2.113;59,17,48,47,25 r.t. (exactamente 2.112;59,17,48,45,51), y

CF = 2.114;59,17,48,47,25 r.t.[18]

Si CF = 60, entonces FD = 0;1,42,17,4,37 (exactamente, 0;1,42,7,41,36). Por consiguiente la paralaje solar, p_s, que es el ángulo correspondiente a ese seno, es 0;1,37,31,19,36° (exactamente, 0;1,37,40,28,37°).

Utilizando ahora la fórmula indicada más arriba puede obtenerse un valor inicial para la paralaje solar que se reproduzca al final a partir de la distancia; así pues,

$$\frac{a-x}{a-c} = \frac{b}{b+d};$$

de donde,

$$\frac{0;1,37,32,47-x}{0;0,0,32,47} = \frac{0;0,0,31,19,36}{0;0,1,6,8,36}.$$

En consecuencia, x = 0;1,37,17,15,23, de acuerdo con los 0;1,37,17 de Levi en 90:83. Las secciones 84 a 98 están destinadas a comprobar que ese valor obtenido es adecuado.

Si la suma de las paralajes lunar y solar es 0;54,57,17°, FD, el seno de ese ángulo, es 0;57,32,43,48,58,26 (exactamente, 0;57,32,45,35,54,15). Si FD es igual a 1, entonces

FG = 62;33,33,4,28,33,18 (exactamente, 62;33,33,4,28,34,15), y

GH = 0;45,51,21,21,17,28. Así pues,

$$\frac{GH}{FD-GH} = 3;14,31,25,10,51.$$

18. De acuerdo con la corrección para EC, CF = 2.113;59,17,48,47,25. El valor obtenido inmediatamente (90:78) para FD si CF = 60 muestra sin embargo que Levi ha utilizado 2.114;59,17,48,47,25.

Luego

GI = 202;49,14,31,53,16,26 r.t. (exactamente, 202;49,14,31,51,11,19), y

FI = 265;22,47,36,21,49,44 r.t.

Si FI = 60, FD = 0;13,33,55,25,6,22 (exactamente, 0;13,33,55,39,7,25). Luego

$$\frac{CE}{CI} = \frac{0;13,33,55,25,6,22}{0;1,42,19,0,42,38}.$$

Por tanto,

$$\frac{CE}{EI} = 7;57,17,45,12,53$$

(exactamente, 7;57,17,45,11,42).

Dado que EI = 266;22,47,36,21,49,44 r.t., EC = 2.119;2,1,39,52,24,30 r.t.
Si CF = 60,

$$FD = \frac{60}{2.120;2,1,39,52,24,30} = 0;1,41,53,6,36.$$

La paralaje solar, esto es, el ángulo correspondiente a ese seno, es ahora 0;1,37,17,22° (exactamente, 0;1,37,17,35°), que corresponde hasta los terceros con el valor supuesto inicialmente, 0;1,37,17°. Indicando sólo los minutos, la distancia entre el centro del sol y de la tierra en el momento del eclipse del 3 de octubre de 1335, que en valores relativos es 59;25,5, es en valores absolutos 2.120;2 radios terrestres.

Las restantes secciones del capítulo (99-115) están destinadas a probar que es correcta la suposición de 90:32, según la cual las líneas GH y GL (fig. 4[19]) son prácti-

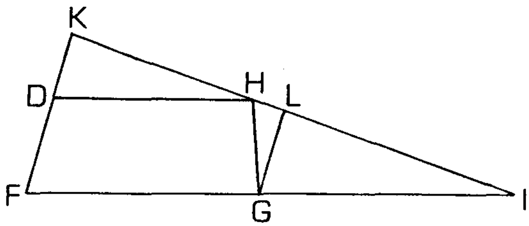

Fig. 4

19. Corresponde a la figura 90.3 (*A*, 77v; *B*, 92r).

camente iguales. Se ha visto ya (90:91) que si FI es 60, FD es entonces 0;13,33,55,25,6,22. El ángulo correspondiente a ese seno, DIF, es por tanto 0;12,57,13,17° (exactamente, 0;12,57,14,29°). Puesto que el ángulo HFG es 0;42° y las líneas FH y FG son iguales, los ángulos FHG y FGH valen 89;39°. Los ángulos FHK y HFG son iguales; luego el ángulo KHG es 90;21°. El ángulo DHG es la suma de los ángulos KHG y DHK; igual por tanto a la suma de los ángulos KHG y DIF, esto es, 90;33,57,13,17°. Por lo tanto el ángulo GHL es 89;26,2,46,43°. Si HG = 60, GL = 59;59,50 (exactamente, 59;59,49,27); si HG = 0;42, GL = 0;41,59,53.

3.3. A partir de la distancia 2.120;2 r.t. Levi deriva en el capítulo 91 las distancias máxima y mínima entre los centros de la tierra y del sol. En el modelo solar[20],

$$\frac{d_{min}}{d_{max}} = \frac{57;46}{62;14}$$

Por consiguiente,

$$\frac{d_{min}}{2.120;2} = \frac{57;46}{59;25,5};$$

de donde

d_{min} = 2.061;4,25,40,7,55 r.t. (exactamente, 2.061;6,42,41,20,,33 r.t.), y

$$\frac{d_{max}}{2.120;2} = \frac{62;14}{59;25,5};$$

de donde

d_{max} = 2.220;28,59,3,37,39 r.t. (exactamente, 2.220;28,56,18,26,3 r.t.)[21].

---

20. La fórmula que sigue supone una excentricidad de 2;14, que es el valor exigido por los cálculos de Levi y corresponde a su primer modelo solar. Como este modelo es modificado después de la observación del eclipse solar del 3 de marzo de 1337 (adoptando otro con una excentricidad de 2;23, cuyas tablas de la ecuación del centro se conservan sólo en la versión latina), es obvio que la redacción de los capítulos 90, 91 y 92 es anterior a la fecha mencionada.

21. En el capítulo 93, Levi subraya que el valor de la distancia solar obtenido en el capítulo 90 (2.120;2 r.t.) depende directamente de los valores de la paralaje lunar y del radio de la sombra, y que cualquier pequeña variación de éstos produce nuevos valores para la distancia solar. El capítulo desarrolla dos ejemplos, que muestran los límites inferior y superior de la indeterminación asociada a la paralaje y el radio de la sombra. En el primero, si se considera que la paralaje es 0;55,4° y el radio de la sombra 0;41,54°, la distancia que se obtiene es 2.437;4,41,14,47 r.t. En el segundo, si la paralaje es 0;54,51° y el radio de la sombra 0;42,6°, la distancia solar es 1882;23,58 r.t. Levi concluye (*A*, 78va): *Et si elongatio a ueritate in diuersitate aspectus lune et in semidiametro umbre non potest poni maior in experientijs istis quam modo posuimus, ut ex eclipsibus solaribus et lunaribus quas recitauimus manifeste apparuit, notum est quod impossibile est ponere distantiam centri solis a centro terre in predictis eclipsibus maiorem maiori uel minorem minori a nobis in uerbi gratia positis.*

4. LOS TAMAÑOS DEL SOL, LA TIERRA Y LA LUNA

4.1. Este es el objeto del capítulo 92. En la figura 5, el ángulo BEC, que es el radio aparente del sol en el momento del eclipse, mide, de acuerdo con 90:18, 0;14,34,59,24,12°,

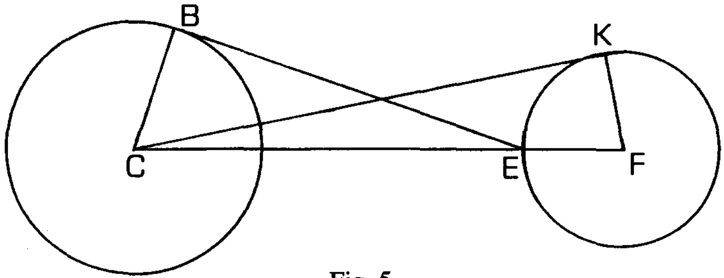

Fig. 5

y el ángulo KCF, la paralaje solar, 0;1,37,17° según 90:83. Se supone que el ángulo BFC puede ser sustituido por el ángulo BEC, dado que EF = 1 r.t. Por tanto,

$$\frac{s_s'}{p_s} = \frac{\text{sen BEC}}{\text{sen KCF}} .$$

Puesto que los ángulos son muy pequeños, la razón entre los radios del sol y de la tierra es

$$\frac{s_s}{s_t} = \frac{0;14,34,59,24,12°}{0;1,37,17°} = 8;59,39,16,45.$$

Por consiguiente, si $V_t = 1$,

$V_s = (8;59,39,16,45)^3 = 727;36,8.$

El volumen del sol es, por tanto, unas 727 veces el de la tierra, en lugar de las 170 de Ptolomeo.

Los valores mencionados en *H* 131:47 y 49 (2.052;4,47 r.t. y 2.229; 29 r.t., respectivamente; cf. Goldstein, 1986, 292) derivan de los obtenidos en el capítulo 91 para la distancia máxima y mínima solar, a pesar de que Goldstein (1986, 307-8) afirme que derivan de una excentricidad de 2;29. De hecho si se tiene en cuenta que Levi escribe (*H* 131:47) que 2.052;4,47 r.t. es la distancia del apogeo de la concavidad del orbe del movimiento diurno del sol y (*H* 131:49) que 2.229;29 r.t. es la distancia del apogeo de la convexidad del orbe excéntrico, eso implica (considerando como en 92:5 que el radio solar es 8;59,39 radios terrestres), que la distancia mínima entre los centros de la tierra y el sol es 2.061;4,25 – 8;59,39 = 2.052;4,46, y la distancia máxima 2.229;28,38 r.t., y como hemos visto (91:6), esas distancias derivan de una excentricidad de 2;14.

Una vez conocido s_s puede ser calculado el espesor de la esfera del sol (90:7-11), es decir, la distancia entre la concavidad y la convexidad del orbe excéntrico, que es igual a

$(d_{max} + s_s) - (d_{min} + s_s) = 177;24$ (exactamente, 177;23,51).

Para la relación entre los volúmenes de la tierra y la luna (92:15-23), considérese la figura 6. El ángulo DGF es, de acuerdo con 92:16, 0;54,57,17°, esto es, la suma de las paralajes lunar y solar. Según 92:17 el ángulo MEG, el radio angular de la luna, s_l', es

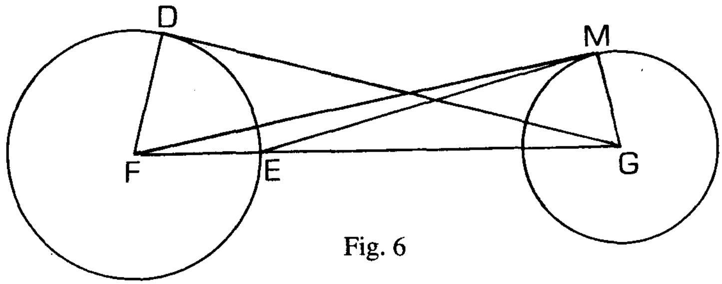

Fig. 6

0;13,55,30°. Puesto que FE = 1 r.t. y, según 90:86, EG = 61;33,33,4,28,33,18 r.t., el ángulo MFG = 0;13,42,8,33° (exactamente, 0;13,42,8,40,43°). Puesto que los ángulos son muy pequeños,

$$\frac{MG}{DF} = \frac{r_l}{r_t} = \frac{0;13,42,8,33^\circ}{0;54,57,17^\circ} = \frac{1}{4;0,38,9,10}$$

(exactamente, 4;0,38,9,14). En consecuencia, si $V_l = 1$,

$V_t = 64;30,36,11,22$ (exactamente, 64;30,36,14,50). Si $V_t = 1$,

$V_l = 0;0,55,48,19$ (exactamente, 0;0,55,48,18,52). Considerando $V_l = 1$,

$V_s = 46.937;40$[22] (exactamente, 46.937;39,31). El volumen del sol es aproximadamente 46.937 veces el volumen de la luna, en lugar de las 6.644 de Ptolomeo.

En 92:24-28, Levi deduce el espesor de la esfera de la luna, es decir, la distancia entre la convexidad del orbe más alejado de la tierra, que es el que transporta a la luna, y la concavidad del orbe más próximo a la tierra, que es el encargado del movimiento diurno; aunque, como cuando se trató del espesor de la esfera del sol, es imposible resolver la indeterminación ligada al hecho de que no hay procedimiento para averiguar

22. Aunque los mss. presentan, sin variantes, 5.537;40 en lugar de 46.937;40, el primer valor es un error. Mi reconstrucción es como sigue: 8;59,39,16,45/(1/4;0,38,9,10) = 8;59,39,16,45/0;14,57,37,18 = 36;4,20,16,19. Luego si $V_l = 1$, $V_s = (36;4,20,16,19)^3 = 46.937;39,31,24$.

el espesor de los dos orbes más próximos a la tierra, los del movimiento diurno y de los nodos, que son concéntricos (92:29-32).

El radio de la luna es, de acuerdo con 92:25, 0;15,9,32 r.t.[23] Por consiguiente, la distancia de la convexidad de la esfera de la luna es 62;48,42,36 r.t.[24] En el modelo lunar III de Levi[25], en unidades de las que R = 60, el espesor máximo de los orbes del movimiento medio y del apogeo es, respectivamente, 8;0 y 2;32. La distancia mínima (*i.e.*, contando con que el espesor de los dos orbes más cercanos a la tierra sea nulo) de la concavidad de la esfera lunar, d, es entonces 65;16 – (8 + 2;32) = 54;44[26]. Así pues,

$$\frac{54;44}{65;16} = \frac{d}{62;48,42,46 - 0;15,9,32},$$

y

d = 52;27,46 r.t.

El espesor de la esfera de la luna es, por tanto,

62;48,42 - 52;27,46 = 10;20,56 r.t.

4.2. A partir de lo anterior es posible derivar algunos valores que no son dados explicitamente en el texto de Levi: a) las distancias máxima y mínima en radios terrestres entre el centro de la luna y el de la tierra, y b) la variación de diámetro aparente correspondiente a esas distancias, a cuya determinación empírica Levi parece, de acuerdo con el texto, haber dedicado mucho tiempo, aunque en ningún lugar ofrezca al lector los valores observados.

Es conveniente señalar, en primer lugar, que las distancias mencionadas más arriba -62;48,42 r.t. y 52;27,46 r.t.- no corresponden a las distancias máxima y mínima de la luna. Las equivalencias ptolemaicas 'convexidad del orbe superior = distancia máxima del planeta' y 'concavidad del orbe inferior = distancia mínima del planeta' no se mantienen en los modelos de Levi, que evitan las conocidas objeciones a los de Ptolomeo

23. En realidad, de acuerdo con 92:20, s_l/s_t = 1/4;0,38,9,10, y esto es igual a 0;14,57,37 (véase nota anterior). El valor 0;15,9,32 es, sin embargo, consistente con los cálculos que siguen.

24. Esto es 62;33,33,4 + 0;15,9,32. La sustitución del valor 62;48,42,46 de los manuscritos por 62;48,42,36 se justifica porque 62;48,42,46 – 0;15,9,32 = 62;33,33,14, mientras que en 90:86 esta distancia es 62;33,33,4,28,33,18. El valor 62;48,42,36 está confirmado además por el texto en *H* 131:8 (Goldstein, 1986, 289).

25. Cf. Goldstein, 1972. En el capítulo 71 del texto latino de la *Astronomía* Levi describe tres modelos lunares (I, II y III), de los cuales sólo el primero y el tercero han sido estudiados (véanse Goldstein, 1974b, y Goldstein, 1972, respectivamente). Las razones que condujeron a Levi a rechazar ese modelo III son mencionadas en el capítulo 100, y al nuevo modelo IV, que Levi no tuvo tiempo de terminar, están dedicados los dos capítulos siguientes (incompleto el 102 tanto en la versión hebrea como en la latina).

26. *Cf.* el capítulo 71 (*A*, 62ra).

basadas en las discrepacias entre las variaciones de diámetro aparente observadas y las deducidas de la teoría. En unidades relativas y usando el modelo lunar III (capítulos 71, *A*, 62ra, y 88, *A*, 72ra), las distancias lunares máxima y mínima son 65;16 y 62;44. La distancia mínima absoluta es entonces

$$d_{min} = \frac{62;33,33,4 \cdot 62;44}{65;16} = 60;7,51,23 \text{ r.t.}$$

Si el diámetro aparente lunar en las syzygias es 0;27,51°, su valor en las cuadraturas es

$$\frac{61;33,33,4 \cdot 0;27,51}{59;7,51,23} = 0;28,59,37°$$

5. TEXTO LATINO DE LOS CAPÍTULOS 90, 91 Y 92 DE LA *ASTRONOMÍA*.

A: Vat. Lat. 3098, ff. 77ra-78ra.
B: Vat. Lat. 3380, ff. 191va-193rb.
L: Lyon, Bibliothèque Municipale 326, ff. 190r-193r.

Capitulum 90

[In 90° inquiremus quantitatem medij diametri umbre terre in loco in quo erat luna ipsa cuiusdam eclipsis tempore de qua experientiam certam habuimus et quantitatem longitudinis umbre et quantitatem distantie lune a terra et quantitatem distantie solis a terra.]

[1] Nunc autem necesse est declarare quantitatem semidiametri solis in tempore eclipsis quam recitauimus anno Christi 1335 die 3ª mensis octubris fuisse, [2] quia idem possumus dirigi ad sciendum distantie centri solis a centro terre, supponendo declaratum esse superius quod sol tunc erat post augem 106° et circa 0;8°.

[3] Declaratio hec est. [4] Ponatur ABC circumferentia quam sol in spera sua describit, cuius centrum sit punctus D, et centrum terre punctus E [Fig. 90.1]. [5] Et linea ADEC sit linea transiens per hec centra. [6] Et est notum quod punctus A est punctus augis et punctus C eius sephel, quod est ipsius oppositum. [7] Et sit angulus ADB 106;8°. [8] Et remanet angulus EDB complementum 180°, quod est 73;52°. [9] Et protrahatur linea EF perpendicularis super lineam DB. [10] Et quia quantitas anguli EDF est 73;52°, remanet angulus DEF complementum 90°, quod est 16;8°. [11] Et ideo est notum quod in quantitate in qua linea ED est 60;0, est linea EF 57;38,10 et linea DF est 16;40,19. [12] Et in quantitate in qua linea ED est 2;14, ut declaratum est supra, est linea EF 2;8,42 et

linea DF 0;37,14. [13] Et remanet linea FB complementum 60;0, quod est 59;22,46. [14] Et quia linea EB est in potentia maior ea in quantitate quadrati linee EF, sequitur quod linea EB sit 59;25,5. [15] Et auferatur a linea EB linea EG equalis distantie solis a terra in sephel. [16] Et est notum ex declarato superius quod si centrum solis esset in puncto G quantitas diametri eius uise esset 0;30° circumferentia quam tunc circa centrum terre describit. [17] Et est notum quod proportio quantitatis diametri solis uise ipso stante in puncto G [ad quantitatem diametri solis uise ipso stante in puncto B] est quasi talis qualis est proportio linee EG ad lineam EB, que proportio est talis qualis est proportio 57;46 ad 59;25,5. [18] Sequitur quod quantitas diametri solis uise in ista eclipsi fuit 0;29,9,58,48° et circa 24 quinta.

[19] Et ex quo hoc est sedatum possumus dirigi ad declarandum quantitatem longitudinis umbre terre in ista eclipsi a centro terre usque ad punctum in quo terminatur et ad sciendum distantiam centri solis a centro terre, [20] quia iam est suppositum supra quod semidiameter terre est 0;54,57,32,47° respectu circumferentie quam luna tempore oppositionis circa centrum terre describit et quod semidiameter umbre fuit in eadem eclipsi respectu eiusdem circumferentie 0;42°.

[21] Cuius declaratio hec est. [22] Ponatur AB circumferentia corporis solis transiens per centrum ipsius, quod est C [Fig. 90.2]. [23] Et ED ponatur circumferentia corporis terre circa centrum ipsius, quod est F. [24] Et dicte ambe circumferentie in eadem superficie ponantur. [25] Et ponatur punctus G centrum lune tempore eclipsis lunaris luna stante in capite uel cauda Draconis, quod G est etiam centrum circumferentie umbre, et linea GH sit quantitas semidiametri circumferentie umbre in hoc loco. [26] Et sit linea CFG recta transiens per omnes dictas diametros. [27] Et sint punctus A corporis solis et punctus D corporis terre et punctus H diametri umbre in eadem linea recta. [28] Et est notum quod ista linea tangit corpora solis et terre, non ea intersecans. [29] Et signentur linee AC, DF. [30] Et est notum quod angulus CAD est rectus et etiam angulus FDH. [31] Sequitur quod linee AC, DF, sint paralelle. [32] Et est notum modico studio quod linea GH est quasi equalis linee que exiret de puncto G ad lineam ADH paralelle lineis AC, DF. [33] Et ideo est notum quod linea que exiret de puncto G ad lineam ADH, paralella lineis AC, DF, est breuior quam linea DF; [34] quia declaratum est quod semidiameter umbre est minor semidiametro terre circa 0;13°. [35] Et ideo est notum modico studio quod si protrahantur linee AH, CG, ad infinitum concurrent. [36] Et ponatur quod concurrant in puncto I, ut fit in ista figura. [37] Et ponatur quod linea CF intersecet corpus terre in puncto E. [38] Et protrahatur linea EB tangens circumferentiam corporis solis in puncto B. [39] Et protrahatur linea CB. [40] Et expedit quod ex hoc declaremus quantitatem cuiuslibet partis linee CFI, et inde deueniemus in scientiam quantitatum corporum solis et lune [et eorum] proportionem ad corpus terre.

[41] Et primo querimus declarare quantitatem linee FI in quantitate in qua linea FD est 1;0, que est semidiameter terre. [42] Et iam est declaratum quod in quantitate in qua linea FD est 1;0 est linea FG 62;32,58,16,24,8 et circa 29 sexta. [43] Et quia in quantitate in qua

linea DF est 0;54,57,32,47 est linea GH 0;42, notum est quod in quantitate in qua linea DF est 1;0, est linea GH 0;45,51,8,11,5 et circa 52 sexta. [44] Et quia linea GH est quasi equalis linee paralelle linee FD que exiret de puncto G ad lineam DI, notum est quod proportio linee IF ad lineam IG est quasi talis qualis est proportio linee DF ad lineam GH. [45] Sequitur quod proportio linee IG ad lineam GF sit quasi talis qualis est proportio linee GH ad excessum linee DF super lineam GH. [46] Set ista proportio, ut est declaratum, est talis qualis est proportio 0;45,51,8,11,8,52 ad complementum 1;0; quod est 0;14,8,51,48,51,8. [47] Et ista proportio est quasi talis qualis est proportio 3;14,27,28,15,51,33 ad 1;0. [48] Set linea GF est 62;32,58,16,24,8 et circa 29 sexta in quantitate in qua semidiameter terre est 1;0. [49] Et est notum ex hoc quod linea GI est in ista quantitate 202;43,14,43,10 et circa 37 quinta. [50] Et hinc est notum quod linea FI est in ista quantitate 265;16,12,59,34,45 et circa 29 sexta. [51] Et in quantitate in qua linea FI est 60;0, est linea DF 0;13,34,15,49,51. [52] Ex quo sequitur quod angulus DIF sit 0;12,57,32,47° et circa 2 quinta, qui est angulus AIC met. [53] Set angulus CEB in dicta eclipsi tertie die octubris fuit 0;14,34,59,24° et circa 12 quinta, ut declaratum est supra. [54] Sequitur quod in quantitate in qua linea EC est 60;0, sit linea CB 0;15,16,14,25,49, que est sinus anguli CEB, [55] et in quantitate in qua linea CI est 60;0, est linea CA 0;13,34,15,49,55, que est sinus anguli CIA. [56] Et quia linea CA est equalis linee CB, quia quelibet est semidiameter corporis solis, et est notum quod proportio linee CE ad lineam CI est talis qualis est proportio 0;13,34,15,49,55 ad 0;15,16,14,25,49. [57] Et si diuidamus, est notum quod proportio linee EC ad lineam EI est talis qualis est proportio 0;13,34,15,49,55 ad 0;1,41,58,35,54. [58] Et ista proportio est talis qualis est 7;59,5,18,29,39 ad 1;0. [59] Set quantitas linee EI est 266;16,12,59,34,45,29 in quantitate in qua semidiameter terre est 1;0, ut declaratum est supra. [60] Sequitur quod linea EC sit in ista quantitate 2126;7,1,9,12,15 et circa 43 sexta. [61] Sequitur quod linea CEF sit in ista quantitate 2127;7,1,9,12,15 et circa 42 sexta, et in quantitate in qua CF est 60;0, FD 0;1,41,32,45,13,30. [62] Sequitur quod ex ista positione angulus diuersitatis aspectus sit 0;1,36,57° et circa 58 quarta.

[63] Et hoc aliqualiter elongatur ab eo quod supposueramus superius de quantitate diuersitatis aspectus solis. [64] Ideo necesse est quod inquirendo uia argumentorum ingenij quantitatem diuersitatis aspectus solis taliter supponamus quod non contradicat sibi ipsi dicte suppositio quantitatis, ut ex hoc deueniamus in quantitatum predictarum notitiam prout nostra possibilitas se extendit. [65] Et ideo nunc supponimus uia argumentorum ingenij quod quantitas finalis diuersitatis aspectus sit 1;37°.

[66] Ex quo sequitur declarando ut prius quod in quantitate in qua semidiameter circumferentie quam luna circa centrum terre tempore coniunctionis et oppositionis describit est 60;0, sit [semi]diameter terre 0;57,32,26,0,53. [67] Et in quantitate in qua semidiameter terre est 1;0, que est linea FD in ista figura, est semidiameter circumferentie antedicte 62;33,52,25,43,29, que est linea FG in ista figura. [68] Et quia in ista quantitate est semidiameter umbre, que est linea GH in ista figura, 0;45,51,35,33,35, erit manifestum modo predicto quod proportio linee GH ad excessum semidiametri terre super dictam lineam GH est talis qualis proportio 3;14,35,40,52,13,26 ad 1;0. [69] Et ideo est notum

modo predicto quod linea GI in ista figura est in ista quantitate 202;54,43,53,47,58. [70] Sequitur quod linea FI in ista figura sit in ista quantitate 265;28,36,19,31,27,5. [71] Et in quantitate in qua linea FI est 60;0 est linea DF 0;13,33,37,49,58,55. [72] Et erit notum quod proportio linee CE ad lineam CI est talis qualis est proportio 0;13,33,37,49,58,55 ad 0;15,16,14,25,49. [73] Et quando diuidemus erit proportio linee CE ad lineam EI talis qualis est proportio 0;13,33,37,49,58,55 ad 0;1,42,36,35,50,5. [74] Et ista proportio est talis qualis est proportio 7;55,45,40,15,17,5 ad 1;0. [75] Set quantitas linee EI est secundum istam positionem 266;28,36,19,31,27. [76] Sequitur quod quantitas linee EC sit in ista quantitate 2113;59,17,48,47,25. [77] Sequitur quod linea CF in ista figura sit in ista quantitate 2114;59,17,48,47 et circa 25 quinta. [78] Et in quantitate in qua linea CF est 60;0 est linea FD 0;1,42,17,4,37. [79] Sequitur quod quantitas finalis diuersitas aspectus solis sit 0;1,37,31,19° et circa 36 quinta.

[80] Et hoc est maius supposito 0;0,0,31,19,36°. [81] Set quando supposuimus angulum diuersitatis finalis aspectus solis 0;1,37,32,47°, erat consequens minus supposito 0;0,0,34,49°. [82] Et ex hoc sequeretur uia argumentorum ingenij quod deberemus accipere de istis 0;0,0,32,47° secundum proportionem tantum quod deueniremus ad aliquam quantitatem que non contradiceret sibi ipsi. [83] Et quando hoc modo processimus tandem inuenimus quod expedit supponere angulum finalis diuersitatis aspectus solis 0;1,37,17°, quia tunc consequens huius isti suppositioni multum concordat.

[84] Et sequitur ex hoc modo predicto quod quantitas finalis diuersitatis aspectus lune coniunctionis et oppositionis temporibus sit 0;54,57,17°. [85] Et ex hoc est notum modo predicto quod in quantitate in qua semidiameter circumferentie quam circa centrum terre luna describit coniunctionis et oppositionis temporibus est 60;0, est semidiameter terre 0;57,32,43,48,58,26. [86] Et in quantitate in qua semidiameter terre est 1;0, que est linea FD in ista figura, est semidiameter circumferentie predicte descripte a luna, que est in predicta figura linea FG, 62;33,33,4,28,33,18. [87] Et in ista quantitate est semidiameter umbre, que [est] linea GH, 0;45,51,21,21,17,28. [88] Et etiam erit notum modo predicto quod proportio semidiametri umbre, que est linea GH, ad excessum semidiametri terre super semidiametrum umbre est talis qualis est proportio 3;14,31,25,10,51 ad 1;0. [89] Et est notum modo predicto quod quantitas linee [GI] in ista figura est in ista quantitate 202;49,14,31,53,16,26. [90] Sequitur ex hoc quod linea FI sit 265;22,47,36,21,49,44. [91] Et in quantitate in qua linea FI est 60;0 est linea DF 0;13,33,55,25,6,22. [92] Et est notum modo predicto quod proportio linee CE ad lineam EI est talis qualis est proportio 0;13,33,55,25,6,22 ad 0;1,42,19,0,42,38. [93] Et ista proportio est talis qualis est proportio 7;57,17,45,12,53 ad 1. [94] Set quantitas linee EI, ut declaratum est supra, est in quantitate predicta 266;22,47,36,21,49,44. [95] Sequitur quod linea EC sit in quantitate predicta 2119;2,1,39,52,24 et circa 30 sexta. [96] Et in quantitate in qua linea CF est 60;0 est linea FD 0;1,41,53,6 et circa 36 quinta. [97] Sequitur quod finalis diuersitas aspectus solis sit 0;1,37,17 et circa 22 quarta. [98] Et hoc multum consentit ei quod supposuimus supra.

[99] Nunc autem expedit declarari quod linea GH est quasi equalis linee paralelle linee FD que exiret de puncto G ad lineam DI, quod supposuimus supra. [100] Et ne figura turbetur expedit quod faciamus figuram trianguli DIF modo quo supra dimittendo corpus solare [Fig. 90.3]. [101] Et sit linea GH semidiameter umbre supra et protrahatur de puncto H linea HK paralella linea GF intersecans lineam DF in puncto K. [102] Et protrahatur de puncto G linea GL perpendicularis super lineam DI. [103] Et est notum quod angulus DHK est equalis angulo DIF. [104] Et quia linea FD est 0;13,33,55,25,6,22 in quantitate in qua linea FI [est] 60;0, ut est superius declaratum, notum est quod angulus DIF est 0;12,57,13,17°. [105] Sequitur quod angulus DHK sit quantitatis eiusdem. [106] Etiam quia arcus semidiametri umbre est 0;42° sequitur quod angulus HFG sit 0;42°. [107] Et quia triangulus HFG habet crura equalia, quia quelibet linearum FH, FG, est distantia lune a centro, sequitur quod angulus FHG sit 89;39°, quia est equalis angulo FGH. [108] Et est notum quod angulus FHK est equalis angulo HFG. [109] Sequitur quod angulus KHG sit 90;21°, cui addito angulo DHK sequitur quod angulus DHG sit 90;33,57,13,17°. [110] Et remanet angulus GHL complementum 180°, quod est 89;26,2,46,43°. [111] Et quia triangulus HGL habet unum angulum rectum, est notum quod in quantitate in qua linea HG est 60;0 est linea GL 59;59,50. [112] Et in quantitate in qua linea GH est 0;42 est linea GL 0;41,59,53. [113] Et hoc quasi consentit quantitati linee GH, quia earum differentia non posset aliquo instrumentorum quibus experientie capiunt cognosci; [114] quibus instrumentis deuenimus in notitiam semidiametri umbre in ista eclipsi. [115] Ideo de ista differentia modicum est curandum.

1. octobris *BL*. 7. 206;8 *L*. 12. 0;39,14 *ABL*. 17. 57;46: 0:46 *A*. 18. 0;29,9,58,48: *ABL* 0;29,9,50,40. 25. circumferentie: circumferentia *AL*. 30. CAD: *ABL* CAB. 34. *post* semidiametrum *AL add*. umbre *et A del*. 42. 62;32,18,16,24,8 *ABL*. 43. 0;45,51,8,11,8: *ABL* 0;45,51,8,11,5. 49. 37 quinta: *ABL* 34 quinta. 52. 0;14,57,32,47 *ABL*. 53. octobris *BL*. 54. *B* 266;16,12,59,34,55,29. 56. et_2 *om. B*; est_3 *om. A*. 60. 43: 42 *B*. 61. sequitur... extra: *om. B*. 65. uia: uiam *ABL et A corr*. 68. 3;14,35,42,52,13,26 *ABL*. 69. 202;54,42,53,47,58 *ABL*. 70. 265; 22,26,16,31,27,5 *AL*, 265;22,26,16,31,26,5 *B*. 71. 60;0: 6;0 *L*. 72. qualis *rep. A*. 74. 7;55,45,30,15,17,5 *ABL*. 75. 266;28,36,14,31,27 *ABL*. 82. hoc *om. AL*. 87. et: *ABL* est *et L corr.*; 0;45,51,21,21,17,28: 0;45,51,21,22,17,28 *L*. 88. semidiametrum: diametrum *L*. 89. in_2 *om. A*. 91. 0;13,33,35,25,6,22 *ABL*. 92. 0;13,33,55,25,6,26 *ABL*; 0;1,42,19,42,18 *ABL*. 95. predicta + sit *AL*. 109. sit... DHG *add. a. m. mg. B*. 111. GL + est *AL*. 114. deueniemus *L*.

Capitulum 91

[In 91° inquiremus distantiam que est a sole ad centrum terre quando est in auge uel in opposito augis.]

[1] Et expedit declarare in hoc loco solis stantis in auge et in sephel a centro terre distantiam, [2] quia ex diuersitate istius distantie sequitur in semidiametro umbre diuersitas descripta in luna tempore eclipsium. [3] Et dico quod iam est declaratum

distantiam centri solis a centro terre in eclipsi que fuit anno Christi 1335 die 3ª octubris fuisse 59;25,5 in quantitate in qua est semidiameter spere solis 60;0. [4] Et tunc, ut declaratum est, erat distantia prelibata 2120 et circa 0;2 in quantitate in qua est semidiameter terre 1;0. [5] Et quia dicta distantia ipso stante in sephel est 57;46 in quantitate in qua semidiameter spere solis est 60;0, et ipso stante in auge est 62;14, [6] notum est quod proportio distantie solis a terra ipso stante in sephel ad distantiam quam habebat a terra tempore eclipsis predicte est talis qualis est proportio 57;46 ad 59;25,5, [7] et quod proportio dicte distantie ipso stante in auge ad distantiam eius tempore dicte eclipsis est talis qualis est proportio 62;14 ad 59;25,5. [8] Et hinc est notum quod dicta distantia sole stante in sephel est 2061;4,25,40,7 et circa 55 quinta in quantitate in qua semidiameter terre est 1;0 et ipso stante in auge est 2220;28,59,3,37 et circa 39 quinta. [9] Et hoc est quod uolebamus probare.

2. diuersitas: diuersitatis *AL*; descripta: descripte *ABL*. 3. octobris *BL*. 7. habeat *B*.

Capitulum 92

[In 92° inquiremus proportionem que est inter quantitatem corporis solis et lune et terre ad inuicem.]

[1] Nunc autem ex declaratis proportionem corporum solis et lune ad corpus terre possumus declarare faciliter. [2] Et quia declaratum est quod semidiameter solis in isto loco tempore predicte eclipsis erat tanta quod eius angulus erat 0;14,34,59,24,12° et angulus semidiametri terre uisus respectu spere solis, ut declaratum est, erat 0;1,37° et circa 17 tertia, [3] et quia proportio corde ad cordam in istis angulis paruis est quasi talis qualis est proportio arcus ad arcum, ut Ptolomeus declarat et etiam est notum modico studio ex nostro sermone arcuum et cordarum, [4] notum est quod proportio semidiametri solis ad semidiametrum terre est talis qualis est proportio 0;14,34,59,24,12° ad 0;1,37° et circa 17 tertia. [5] Et ista proportio est talis qualis est proportio 8;59,39,16,45 ad 1;0. [6] Et quia proportio spere ad speram est talis qualis est proportio earum diametrorum in proportione triplata, notum est quod in quantitate in qua corpus terre est 1;0, corpus solis est 727;36 et circa 0;0,8.

[7] Et hinc est nobis nota quantitas spissitudinis sperarum solis ad minus quo possunt poni secundum istam positionem; [8] quia si quantitatem semidiametri solis maiori distantie solis a centro terre addamus et eam a minori distantia subtrahamus, sequitur quod maior distantia conuexi dictarum sperarum sit altior minori distantia concaui earundem ad minus quo possunt poni 177 et circa 0;24. [9] Et hic non computamus spissitudines sperarum habentium superficies paralellas, quia non habemus uiam ad scientiam earum spissitudinum nos ducentem. [10] Et posset esse quod spissitudo earum sit 0;1 et potest esse maior uel minor. [11] Et expedit quod credamus

quod spissitudo earum non est magna, quia sine spissitudine magna sufficiunt ad illud ad quod sunt instrumentum et in rebus naturalibus nichil in uanum asseritur. [12] Et eadem ratione non expedit quod spissitudo spere deferentis corpus solare ponatur nisi in quantitate diametri corporis prelibati.

[13] Et eodem modo quo declarauimus proportionem corporis solis ad corpus terre erit nota proportio corporis lune ad corpus terre. [14] Et hinc deueniemus ad scientiam proportionis corporis lune ad corpus solis.

[15] Cuius declaratio hec est. [16] Nam declaratum est quod angulus semidiametri terre uisus respectu lune tempore eclipsium est 0;54,57° et circa 17 tertia. [17] Et quia uidemus angulum semidiametri lune 0;13,55,30°, notum est modico studio, ut declaratum est ex distantia centri corporis lune eclipsium tempore a centro terre, quod dictus angulus esset in proportionem ad centrum spere lune eclipsium tempore 0;13,42,8° et circa 33 quarta. [18] Sequitur quod proportio semidiametri corporis lune ad semidiametrum corporis terre est quasi talis qualis est proportio anguli ad angulum, ut dictum est supra; [19] intendo dicere ut est proportio 0;13,42,8,33° ad 0;54,57° et circa 17 tertia. [20] Et ista proportio est talis qualis est proportio 1;0 ad 4;0,38,9,10. [21] Et erit notum modo predicto quod proportio corporis lune ad corpus terre est talis qualis est proportio 1;0 ad 64;30,36,11 et circa 22 quarta. [22] Et in quantitate in qua corpus terre est 1;0, est corpus lune 0;0,55,48 et circa 19 quarta. [23] Et hinc est notum quod in quantitate in qua corpus [lune] est 1;0, corpus solis est 46937 et circa 0;40.

[24] Et hinc etiam nota est quantitas spissitudinis sperarum lune ad minus quo poni possunt. [25] Nam maiori distantie centri lune a terra quantitatem semidiametri lune addemus, que est 0;15,9,32. [26] Supponendo semidiametrum terre 1;0, sequitur quod maior distantia conuexi superioris spere lune a centro terre est 62;48,42 et circa 0;36 tertia. [27] Et quia proportio minoris distantie istarum sperarum ad maiorem, a dicta maiori subtracta semidiametro corporis lune, est talis qualis est proportio 54;44 ad 65;16, notum est quod distantia inferioris sperarum lune a centro terre non est maior 52;27 et circa 0;0,46. [28] Et hinc est notum quod spissitudo sperarum lune non potest esse minor 10;20 et circa 0;0,56 in quantitate predicta. [29] Et bene posset esse maior ratione spissitudinis duarum sperarum inferiorum habentium superficies paralellas. [30] Set nos non possumus certitudinaliter scire quantitatem earum, set uidetur quod debeat esse parua quia natura nichil facit in uanum. [31] Et quicquid sit non habemus portam nos ducentem in punctalem quantitatem earum. [32] Et notum est quod cuilibet scientifico expedit secernere illud quod est declarabile in sua scientia ab eo quod in ea declarari non potest.

[33] Et hic est declaratum quod querebamus de proportionibus corporum predictorum ad inuicem et de spissitudinibus sperarum solis et lune prout nostra possibilitas se extendit.

1. et_1 *om. B*. 5. 8;59,29,16,45 *ABL*. 8. maiori: maioris *AL*; $distantia_1$ *om. B*; sperarum *om. B*. 10. possit *L*. 13. $corporis_2$ *om. B*. 20-21. ad... ad_2: *om. B*. 22. 1;0: 21;0 *B*. 23. 46937: 5537 *ABL*. 26. 0;36 tertia: *ABL* 0;46 tertia. 27. a dicta: ad eam *L*. 31. punctualem *B*. 32. eo + et *B*.

6. TRADUCCIÓN

Capítulo 90

[En el capítulo 90 investigaremos el valor del radio de la sombra de la tierra en el momento de cierto eclipse del que tuvimos experiencia cierta, y el valor de la longitud de la sombra, y el de la distancia de la luna a la tierra y el de la distancia del sol a la tierra.]

[1] Ahora es necesario establecer el valor del radio solar en el momento del eclipse que hemos dicho que ocurrió el día 3 del mes de octubre del año 1335 de la era cristiana, [2] porque podemos utilizarlo para conocer la distancia entre el centro del sol y el de la tierra, suponiendo establecido previamente que el sol distaba entonces del apogeo [de su excéntrico] aproximadamente 106;8°.

[3] Lo hacemos del siguiente modo. [4] Sea ABC la circumferencia que el sol describe en su esfera, con centro en el punto D, y sea E el centro de la tierra [Fig. 90.1]. [5] Sea ADEC la línea que pasa por esos centros. [6] Es sabido que el punto A es el apogeo y el puncto C su *sephel*, que es su opuesto. [7] Sea el ángulo ADB 106;8°. [8] Queda el ángulo EDB, su suplementario, que es 73;52°. [8] Trácese la línea EF perpendicular a la línea DB. [10] Puesto que el valor del ángulo EDF es 73;52°, el ángulo DEF, su complementario, es 16;8°. [11] Sabemos por tanto que en unidades en las que la línea ED es 60, la línea EF es 57;38,10 y la línea DF 16;40,19. [12] En unidades en las que la línea ED es 2;14, como se ha establecido antes, la línea EF es 2;8,42 y la línea DF 0;37,14. [13] La línea FB, su complemento sobre 60, es por tanto 59;22,46. [14] Y puesto que $EB^2 = FB^2 + EF^2$, se sigue que la línea EB es 59;25,5. [15] Señálese en la línea EB la línea EG, igual a la distancia del sol en su *sephel* a la tierra. [16] A partir de lo establecido más arriba sabemos que, si el centro del sol estuviese en el punto G, su diámetro aparente sería 0;30° de la circunferencia cuyo radio es la distancia entre el centro de la tierra y G. [17] Se sabe también que la razón entre los diámetros aparentes del sol en los puntos G y B es casi igual a la existente entre las líneas EG y EB, que es idéntica a la que hay entre 57;46 y 59;25,5. [18] Se sigue de ello que el diámetro aparente del sol en ese eclipse fue aproximadamente 0;29,9,58,48,24°.

[19] Una vez conseguido esto podemos encaminarnos a establecer el valor de la longitud de la sombra de la tierra, desde su centro hasta el punto donde termina, durante ese eclipse, y a conocer la distancia del centro del sol al centro de la tierra, [20] porque ya se ha supuesto más arriba que el radio terrestre es 0;54,57,32,47° de la circunferencia cuyo radio es la distancia entre el centro de la tierra y la luna en el momento de la oposición, y que el radio de la sombra era en ese eclipse 0;42° de la misma circunferencia.

[21] Lo establecemos así. [22] Sea AB un círculo máximo en el sol, cuyo centro es C [Fig. 90.2]. [23] Y sea ED un círculo máximo en la tierra, cuyo centro es F. [24] Colóquense ambos círculos en la misma superficie. [25] Sea el punto G el centro de la luna situada en uno de los nodos en el momento del eclipse, siendo a la vez el centro de la sección del cono de sombra, y sea la línea GH el radio de la sombra en ese lugar. [26]

Trácese la recta CFG pasando por los diámetros de esos círculos. [27] Sitúense los puntos A del sol, D de la tierra y H del diámetro de la sombra en la misma recta. [28] Se sabe que esta línea es tangente al sol y la tierra, no secante. [29] Trácense las líneas AC, DF. [30] Sabemos que los ángulos CAD y FDH son rectos. [31] Se sigue de ello que las líneas AC, DF, son paralelas. [32] Puede verse sin dificultad que la línea GH es casi igual a la línea que, paralela a AC y DF, podría trazarse desde el punto G hasta la línea ADH. [33] Se sabe por tanto que la línea que, paralela a AC y DF, iría de G hasta la línea ADH sería menor que DF; [34] porque ya se ha dicho que el radio de la sombra es menor que el radio de la tierra aproximadamente 0;13°. [35] Se sabe por tanto sin dificultad que las líneas AH, CG, se cortan si se prolongan al infinito. [36] Supóngase que se cortan en el punto I, como en la figura. [37] Supóngase que la línea CF toque a la tierra en el punto E. [38] Trácese la línea EB tangente a la esfera solar en el punto B. [39] Trácese la línea CB. [40] Conviene que a partir de esto establezcamos el valor de las distintas partes de la línea CFI, y a partir de ahí derivemos el valor de los volúmenes del sol y de la luna y su razón respecto al de la tierra.

[41] Procuremos primero establecer el valor de la línea FI en unidades en las que la línea FD, el radio terrestre, vale 1. [42] Ya se ha dicho que en unidades en las que FD es 1 la línea FG es aproximadamente 62;32,58,16,24,8,29. [43] Y puesto que en unidades de las que la línea DF contiene 0;54,57,32,47 la línea GH vale 0;42, si DF mide 1, GH mide aproximadamente 0;45,51,8,11,5,52. [44] Dado que la línea GH es casi igual a la paralela a FD trazada desde el punto G hasta DI, se sabe que la razón entre las líneas IF e IG es casi la que existe entre DF y GH. [45] Como consecuencia, la razón entre IG y GF es casi la misma que entre GH y la diferencia entre DF y GH. [46] Pero, como se ha dicho, esta razón es igual a la que existe entre 0;45,51,8,11,8,52 y su complemento sobre 1, que es 0;14,8,51,48,51,8. [47] Y esta razón es casi igual a la de 3;14,27,28,15,51,33 respecto a 1. [48] Pero en unidades en las que el radio terrestre mide 1, la línea GF mide aproximadamente 62;32,58,16,24,8,29. [49] De lo que se deriva que en las mismas unidades la línea GI mide aproximadamente 202;43,14,43,10,37. [50] A partir de ahí sabemos que en las mismas unidades la línea FI es aproximadamente 265;16,12,59,34,45,29. [51] Y si la línea FI mide 60, la línea DF mide 0;13,34,15,49,51. [52] De donde se deriva que el ángulo DIF es aproximadamente 0;12,57,32,47,2°, que es también el valor del ángulo AIC. [53] Pero durante el mencionado eclipse del 3 de octubre el ángulo CEB era, como se ha dicho, aproximadamente 0;14,34,59,24,12°. [54] De donde en unidades en las que la línea EC mide 60, la línea CB -que es el seno del ángulo CEB- vale 0;15,16,14,25,49, [55] y si la línea CI es 60, la línea CA -que es el seno del ángulo CIA- es 0;13,34,15,49,55. [56] Y puesto que las líneas CA y CB son iguales, porque ambas son radios del sol, se sabe también que la razón entre CE y CI es igual que la razón entre 0;13,34,15,49,55 y 0;15,16,14,25,49. [57] Y si dividimos, sabemos que la razón entre EC y EI es igual a la razón entre 0;13,34,15,49,55 y 0;1,41,58,35,54. [57] Y esta razón es idéntica a la de 7;59,5,18,29,39 respecto a 1. [59] Pero, como se dijo más

arriba, en unidades en las que el radio terrestre es 1, la línea EI mide 266;16,12,59,34,45,29. [60] En consecuencia, en las mismas unidades, EC mide aproximadamente 2126;7,1,9,12,15,43. [61] De donde CEF, en las mismas unidades, mide aproximadamente 2127;7,1,9,12,15,42, y si CF vale 60, FD vale 0;1,41,32,45,13,30. [62] Se sigue de esto que el ángulo de la paralaje es aproximadamente 0;1,36,57,58°.

[63] Y esto discrepa en algo del valor de la paralaje solar supuesto más arriba. [64] Es necesario en consecuencia que utilizando razonamientos heurísticos supongamos un valor para la paralaje solar que no esté en contradicción con el supuesto anteriormente, de tal manera que nos permita, en la medida de nuestras posibilidades, conocer las restantes cantidades mencionadas. [65] Utilizando un razonamiento heurístico suponemos entonces que el valor máximo de la paralaje sea 1;37°.

[66] De lo que se sigue que en unidades en las que la distancia entre el centro de la tierra y la luna en el momento de la conjunción y oposición es 60, el radio terrestre es 0;57,32,26,0,53. [67] Y en unidades en las que el radio terrestre -esto es, la línea FD en esta figura- es 1, la distancia anterior -esto es, la línea FG en la figura- es 62;33,52,25,43,29. [68] Puesto que en las mismas unidades la línea GH, el radio de la sombra, es 0;45,51,35,33,35, es evidente que la razón de GH respecto a la diferencia entre el radio terrestre y GH es idéntica a la razón entre 3;14,35,40,52,13,26 y 1. [69] Se sabe por tanto que en las mismas unidades la línea GI en la figura es 202;54,43,53,47,58. [70] Se sigue de ello que también en las mismas unidades la línea FI vale 265;28,36,19,31,27,5. [71] Y si consideramos que la línea FI es 60, la línea DF es 0;13,33,37,49,58,55. [72] La razón entre CE y CI es por tanto idéntica a la que existe entre 0;13,33,37,49,58,55 y 0;15,16,14,25,49. [73] Y si dividimos, la razón entre CE y EI es igual a la razón entre 0;13,33,37,49,58,55 y 0;1,42,36,35,50,5. [74] Y esta razón es la misma que la de 7;55,45,40,15,17,5 respecto a 1. [75] Pero ahora el valor de la línea EI es 266;28,36,19,31,27. [76] En las mismas unidades, la línea EC es por tanto 2113;59,17,48,47,25. [77] Se sigue de ello que en la figura y también en las mismas unidades la línea CF es aproximadamente 2114;59,17,48,47,25. [78] Y si suponemos que la línea CF vale 60, la línea FD vale 0;1,42,17,4,37. [79] En consecuencia, el valor máximo de la paralaje solar es ahora aproximadamente 0;1,37,31,19,36°.

[80] Y esto es 0;0,0,31,19,36° mayor que lo supuesto. [81] Pero cuando supusimos que el valor máximo era 0;1,37,32,47°, el valor que se obtenía era 0;0,0,34,49° menor que lo supuesto. [82] De lo que se sigue que, utilizando un razonamiento heurístico, debemos tomar proporcionalmente de esos 0;0,0,32,47° una parte tal que nos permita obtener un valor máximo para la paralaje que no sea contradictorio con lo que se sigue de él. [83] Y cuando lo calculamos, encontramos que debíamos suponer 0;1,37,17° para ese valor máximo, porque ese valor es consistente con lo que se deriva de él.

[84] Se sigue de lo anterior que la paralaje lunar máxima en conjunción y oposición es 0;54,57,17°. [85] A partir de lo cual conocemos que, si consideramos

que el valor de la distancia entre el centro de la tierra y la luna es entonces 60, el radio terrestre es 0;57,32,43,48,58,26. [86] Y si el radio terrestre, que es la línea FD en la figura, se considera igual a 1, la línea FG, que es la distancia mencionada de la luna, es 62;33,33,4,28,33,18. [87] En las mismas unidades la línea GH, que es el radio de la sombra, mide 0;45,51,21,21,17,28. [88] Del mismo modo sabemos que la razón entre el radio de la sombra, GH, y la diferencia entre el radio terrestre y el de la sombra, es como la existente entre 3;14,31,25,10,51 y 1. [89] Sabemos entonces que en las mismas unidades la línea GI vale 202;49,14,31,53,16,26. [90] De lo que se sigue que la línea FI vale 265;22,47,36,21,49,44. [91] Y si se considera FI como 60, DF es 0;13,33,55,25,6,22. [92] Del mismo modo conocemos que la razón entre CE y EI es igual a la de 0;13,33,55,25,6,22 respecto de 0;1,42,19,0,42,38. [93] Y esta razón es la misma que la que existe entre 7;57,17,45,12,53 y 1. [94] En las mismas unidades, la línea EI, como se ha dicho más arriba, es 266;22,47,36,21,49,44. [95] Se sigue de ello que EC en las mismas unidades es aproximadamente 2119;2,1,39,52,24,30. [96] Y si consideramos que CF es 60, la línea FD es aproximadamente 0;1,41,53,6,36. [97] Se sigue de ello que el valor máximo para la paralaje solar es aproximadamente 0;1,37,17,22°; [98] lo que prácticamente coincide con lo que supusimos más arriba.

[99] Es necesario ahora establecer una de las suposiciones iniciales, esto es, que la línea GH es casi igual a la línea paralela a FD trazada entre el punto G y la línea DI. [100] Y por más claridad, prescindamos en la figura anterior de lo que no sea el triángulo FDI. [101] Sea GH el radio de la sombra y trácese desde el punto H la línea HK paralela a GF, que corta a DF en el punto K. [102] Trácese desde G la línea GL, perpendicular a DI. [103] Es obvio que los ángulos DHK y DIF son iguales. [104] Puesto que, como se ha dicho, en unidades de las que FI es 60, FD vale 0;13,33,55,25,6,22, se sabe que el ángulo DIF es 0;12,57,13,17°. [105] Por consiguiente, lo mismo vale el ángulo DHK. [106] Puesto que el arco correspondiente al radio de la sombra es 0;42°, lo mismo vale el ángulo HFG. [107] Dado que el triángulo HFG es isósceles, puesto que tanto FH como FG son la distancia de la luna al centro de la tierra, se sigue de ello que el ángulo FHG, que es igual al ángulo FGH, vale 89;39°. [108] Se sabe que los ángulos FHK y HFG son iguales. [109] Por tanto, el ángulo KHG vale 90;21°, del cual, junto con el ángulo DHK, obtenemos el ángulo DHG, que es 90;33,57,13,17°. [110] El ángulo GHL es entonces su suplementario, esto es, 89;26,2,46,43°. [111] Y puesto que el triángulo HGL tiene un ángulo recto, se sabe que en unidades de las que la línea HG contiene 60, GL mide 59;59,50. [112] Y en unidades en las que GH es 0;42, la línea GL es 0;41,59,53. [113] Y esto prácticamente coincide con el valor de GH, porque la diferencia no puede medirse con ninguno de los instrumentos utilizados en las observaciones, [114] con los que determinamos el radio de la sombra en este eclipse. [115] Por consiguiente, poco hay que preocuparse de esta diferencia.

Capítulo 91

[En el capítulo 91 investigaremos la distancia entre el centro de la tierra y el sol cuando está situado en el apogeo o en el perigeo.]

[1] Es necesario establecer ahora la distancia al centro de la tierra del sol situado en su apogeo y su *sephel*, [2] porque de la diferencia de estas distancias se deriva la diversidad del radio de la sombra en los eclipses. [3] Ya se ha establecido que la distancia entre los centros de la tierra y el sol durante el eclipse del 3 de octubre del año 1335 de la era cristiana era 59;25,5 en unidades en las que el radio de la esfera del sol mide 60. [4] Y, como se ha dicho, esa distancia era, medida en radios terrestres, aproximadamente 2120;2. [5] Y puesto que, en unidades de las que el radio de su esfera es 60, sus distancias al centro de la tierra en el *sephel* y en el apogeo son 57;46 y 62;14, respectivamente, [6] sabemos que la razón entre su distancia en el *sephel* y su distancia durante el eclipse es como la de 57;46 respecto de 59;25,5, [7] y que la razón entre su distancia en el apogeo y su distancia durante el eclipse es como la de 62;14 respecto de 59;25,5. [8] De donde derivamos que la distancia del sol en el *sephel* es aproximadamente 2061;4,25,40,7,55 radios terrestres, y en el apogeo aproximadamente 2220;28,59,3,37,39 radios terrestres. [9] Y eso es lo que queríamos demostrar.

Capítulo 92

[En el capítulo 92 investigaremos la razón que mantienen entre sí los volúmenes del sol, la luna y la tierra.]

[1] Podemos ahora establecer con facilidad a partir de lo anterior la razón de los volúmenes del sol y la luna respecto al de la tierra. [2] Dado que en el lugar y momento del mencionado eclipse el radio del sol era el correspondiente a un ángulo de 0;14,34,59,24,12°, y que, como se ha dicho, el ángulo bajo el que aparecía el radio terrestre respecto a la esfera del sol era aproximadamente 0;1,37,17°, [3] y dado también que en esos ángulos pequeños la razón entre las cuerdas es casi igual a la razón entre los arcos, como Ptolomeo afirma y se deriva también con poco esfuerzo de nuestro capítulo sobre arcos y cuerdas, [4] sabemos que la razón entre los radios del sol y de la tierra es como la que existe entre 0;14,34,59,24,12° y 0;1,37,17°. [5] Y esta razón es la misma que la de 8;59,39,16,45 respecto de 1. [6] Y como la razón entre los volúmenes de dos esferas es como la existente entre los cubos de sus diámetros, se sabe que considerando el volumen de la tierra como unidad, el volumen del sol es aproximadamente 727;36,8.

[7] De lo anterior puede derivarse un valor mínimo para el espesor de las esferas del sol; [8] porque si añadimos a la distancia máxima solar el valor del radio del sol y lo sustraemos de la distancia mínima, se sigue que el valor mínimo para la diferencia entre

la parte más distante de la convexidad y la más cercana de la concavidad de esas esferas es de aproximadamente 177;24. [9] Y no tenemos en cuenta los espesores de las esferas cuyas superficies [convexa y cóncava] son paralelas, porque no hay vía que nos permita acceder al conocimiento de su espesor. [10] Puede ocurrir que su espesor sea 0;1, o mayor, o menor. [11] Es conveniente que pensemos que su espesor no es muy grande, porque les basta un espesor escaso para cumplir su función y para la naturaleza nada debe suponerse en vano. [12] Y por la misma razón no conviene que supongamos para la esfera que transporta el sol un espesor mayor que el diámetro de ese cuerpo.

[13] Del mismo modo que hemos derivado la razón entre los volúmenes del sol y la tierra llegaremos a conocer la razón entre el volumen de la luna y el de la tierra. [14] Y a partir de ahí la razón entre los volúmenes de la luna y el sol.

[15] Lo hacemos del siguiente modo. [16] Se ha establecido ya que en el momento del eclipse el ángulo bajo el que aparece el radio terrestre respecto de la luna es aproximadamente 0;54,57,17°. [17] Puesto que el ángulo bajo el que se observa el radio lunar es 0;13,55,30°, se sabe sin dificultad, como se ha establecido a partir de la distancia entre los centros de la tierra y la luna durante los eclipses, que ese ángulo, considerado respecto al centro de la esfera de la luna durante los eclipses, vale aproximadamente 0;13,42,8,33°. [18] Se sigue de ello que la razón entre los radios de la luna y la tierra es casi idéntica a la razón entre los ángulos, como se ha dicho; [19] esto es, casi como la razón entre 0;13,42,8,33° y 0;54,57,17°. [20] Esta razón es igual a la de 1 respecto de 4;0,38,9,10. [21] Del mismo modo, por tanto, sabremos que la razón entre los volúmenes de la luna y la tierra es como la de 1 respecto de aproximadamente 64;30,36,11,22. [22] Y si el volumen de la tierra es 1, el de la luna es aproximadamente 0;0,55,48,19. [23] A partir de lo cual se deriva que si consideramos el volumen de la luna igual a 1, el del sol es aproximadamente 46937;40.

[24] A partir de lo anterior podemos derivar también el espesor mínimo de las esferas de la luna. [25] Sumamos, pues, a la distancia máxima entre los centros de la luna y la tierra el radio lunar, que es 0;15,9,32. [26] Usando como unidad el radio terrestre, la distancia máxima de la convexidad de la esfera superior de la luna es aproximadamente 62;48,42,36. [27] Y como la razón entre las distancias mínima y máxima de estas esferas -una vez sustraída a la distancia máxima el radio de la luna- es igual a la que existe entre 54;44 y 65;16, se sabe que la distancia al centro de la tierra de la inferior de las esferas de la luna no es mayor que 52;27,46. [28] De donde se deriva que el espesor de las esferas de la luna no puede ser menor que 10;20,56. [29] Podría ser, desde luego, mayor, a causa del espesor de las dos esferas inferiores cuyas superficies son paralelas. [30] Pero no podemos conocer con certeza ese espesor, aunque parece que no debe ser muy grande dado que la naturaleza no hace nada en vano. [31] Sea como sea, no hay ninguna vía que nos permita acceder a un conocimiento exacto de ello. [32] Y es sabido que es conveniente al hombre dedicado al conocimiento científico poder distinguir en su disciplina entre lo que puede y lo que no puede ser establecido.

[33] Así, en la medida de nuestras posibilidades, hemos establecido aquí lo que pretendíamos acerca de la razón entre los mencionados volúmenes y acerca de los espesores de las esferas del sol y la luna.

REFERENCIAS

CURTZE, M. 1989. «Die Abhandlungen des Levi ben Gerson über Trigonometrie und den Jacobstab», *Bibliotheca Mathematica*, 12:97-112.

CURTZE, M. 1901. «Die Dunkelkammer», *Himmel und Erde*, 13:225-236.

GOLDSTEIN, B. R., SWERDLOW, N., 1970-71. «Planetary Distances and Sizes in an Anonymous Arabic Treatise Preserved in Bodleian Ms. Marsh 621», *Centaurus*, 15:135-170.

GOLDSTEIN, B.R., 1972. «Levi ben Gerson's Lunar Model», *Centaurus*, 16: 257-283.

Goldstein, B. R., 1974a. *The Astronomical Tables of Levi ben Gerson*. Hamden, CT: Archon Books.

GOLDSTEIN, B. R., 1974b. «Levi ben Gerson's Preliminary Lunar Model», *Centaurus*, 18:275-88.

GOLDSTEIN, B. R., 1975. «Levi ben Gerson's Analysis of Precession», *Journal for the History of Astronomy*, 6:31-41.

GOLDSTEIN, B. R., 1977. «Levi ben Gerson: On instrumental Errors and the Transversal Scale», *Journal for the History of Astronomy*, 8:102-12.

GOLDSTEIN, B. R., 1979. «Medieval Observations of Solar and Lunar Eclipses», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 29:101-56.

GOLDSTEIN, B. R., 1985. *The Astronomy of Levi ben Gerson (1288-1344). A Critical Edition of Chapters 1-20 with Translation and Commentary*. Berlin, New York: Springer-Verlag.

GOLDSTEIN, B. R., 1986. «Levi ben Gerson's Theory of Planetary Distances», *Centaurus*, 29:272-313.

GOLDSTEIN, B. R., 1988. «A New Set of Fourteenth Century Planetary Observations», *Proceedings of the American Philosophical Society*, 132:371-399.

MANCHA, J. L., 1989. «Egidius of Baisiu's Theory of Pinhole Images», *Archive for History of Exact Sciences*, 40:1-35.

MANCHA, J. L., 1992a. «Astronomical Use of Pinhole Images in William of Saint-Cloud's *Almanach planetarum* (1292)», *Archive for History of Exact Sciences*, 43:275-98.

MANCHA, J. L., 1992b. «The Latin Translation of Levi ben Gerson's *Astronomy*», en G. Freudenthal (ed.), *Studies on Gersonides - A Fourteenth-Century Jewish Philosopher-Scientist*. Leiden: E. J. Brill, pp. 21-46.

NEUGEBAUER, O., 1957. *The Exact Sciences in Antiquity*. 2nd ed. Providence: Brown University Press.

NEUGEBAUER, O., 1975. *A History of Ancient Mathematical Astronomy*. Berlin, New York: Springer-Verlag.
PEDERSEN, O., 1974. *A Survey of the Almagest*. Odense: University Press.
RENAN, E., NEUBAUER, A., 1893. «Les Ecrivains Juifs Français du XIV[e] Siècle», *Histoire littéraire de la France*, 31:351-789. Paris: Imprimerie Nationale.
SALIBA, G., 1979. «The First non-Ptolemaic Astronomy at the Maragha School», *Isis*, 70:571-79.
SWERDLOW, N., 1968. *Ptolemy's Theory of Planetary Distances and Sizes. A Study of the Scientific Foundations of Medieval Cosmology*, unpublished dissertation, Yale University.
TOOMER, G. J., 1984. *Ptolemy's Almagest*. London: Duckworth.