LAS INTERPRETACIONES NORMALES

ANGEL NEPOMUCENO FERNÁNDEZ

1. INTRODUCCIÓN

Con objeto de probar la completud de un sistema formal de teoría de los tipos, Henkin extiende en (2) el método que él mismo había desarrollado para la prueba correspondiente a un sistema de primer orden. El resultado es que la lógica de predicados de orden superior es completa en cierto sentido, siempre que se modifiquen las nociones semánticas. En (1) se aplica el método especificamente a segundo orden y se define una semántica, que podemos denominar en *sentido general* para distinguir de la que resultaría de sonsiderar una especial *familia de dominios* –cada uno de los cuales con *todos* los elementos posibles– y a la que se califica de en *sentido standard*. La noción básica para elaborar una y otra semántica es la de *interpretaciones* de un lenguaje formal de segundo orden sobre una familia de dominios.

Las características de las familias de dominios de interpretaciones son el objeto de este breve estudio. Prodríamos resumirlas usando en parte terminología de (4): Una interpretación (de un lenguaje formal de segundo orden) se define sobre una familia de dominios, la cual consta de un dominio no vacío y dominios cuyos miembros son relaciones de elementos del primero; pero serán *normales* únicamente las dos clases de interpretaciones siguientes. Una interpretación en *sentido* general es aquélla en que todas las relaciones definibles –en términos del propio lenguaje formal– son permisibles; una interpretación *en sentido standard* es aquella en que todas las relaciones posibles son permisibles. No obstante, es preferible llegar a una caracterización que descanse en nociones más precisas.

2. NOCIONES GENERALES

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden que contiene *parámetos*. Una *interpretación* de $\mathcal{L}$ se define como el par $<D, \mathcal{S}>$, donde $D \neq \emptyset$ – conocido como *universo de discurso* *o dominio de la interpretación* – y $\mathcal{S}$ es un conjunto de aplicaciones de signos de $\mathcal{L}$ a elementos de D y relaciones definidas en D, de acuerdo con las siguientes estipulaciones:

1) Si a es un parámetro de $\mathcal{L}$, $\mathcal{S}(a) \in$ D;

2) Si R es un signo predicativo n-ádico de $\mathcal{L}$, para $n \geq 1$, $\mathcal{S}(\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{D}^n$, o, lo que es lo mismo, $\mathcal{S}(\mathrm{R}) \in \mathcal{P}(\mathrm{D}^n)$.

Una interpretación < D, $\mathcal{S}$ > es diferente de otra < D, $\mathcal{S}'$ > si $\mathcal{S}$ no coincide con $\mathcal{S}'$, aunque se trate del mismo universo de discurso[1]. Para mayor facilidad, si $\mathcal{J}$ es < D, $\mathcal{S}$ >, designaremos < D, $\mathcal{S}'$ > mediante $\mathcal{J}'$ y, en general, escribiremos $\mathcal{J}(a)$, $\mathcal{J}(R)$ – en su caso, $\mathcal{J}'(a)$, $\mathcal{J}'(R)$ – en lugar de $\mathcal{S}(a)$ y $\mathcal{S}(\mathrm{R})$ - $\mathcal{S}'(a)$ y $\mathcal{S}'(\mathrm{R})$ –, respectivamente.

Para determinar el valor de una fórmula bajo una dada interpretación se procede de la manera habitual: 1) Se $\mathcal{J}$ es una interpretación, R un signo predicativo n-ádico, para $n \geq 1$, $a_1 \ldots, a_n$ una secuencia de n ocurrencias de parámetros (no necesariamente distintos); $(\mathrm{R}\, a_1 \ldots, a_n)_{\mathcal{J}} = 1$ si $< \mathcal{J}(a_1), \ldots, \mathcal{J}(a_n) > \in \mathcal{J}(\mathrm{R})$ –en caso contrario $(\mathrm{R}a_1 \ldots, a_n)_{\mathcal{J}} = 0$- ; 2) $(\neg\alpha)_{\mathcal{J}} = 1$ si y sólo $\alpha_{\mathcal{J}} = 0$, etc... Si nos hallamos ante una fórmula del tipo $\Lambda x\alpha$, diremos que su valor bajo $\mathcal{J}$ es 1 si y sólo si $(\mathrm{S}^{x}_{a}\alpha)_{\mathcal{J}'} = 1$, para toda $\mathcal{J}'$ que difiere de $\mathcal{J}$ a lo sumo respecto del valor dado al parámetro a[2].

Sea $\mathcal{L}_2$ un lenguaje de segundo orden –con variables *individuales* y *predicativas*, por tanto– que posee *parámetros* y *relatores*. Para interpretar $\mathcal{L}_2$ hemos de contar con un universo de discurso D, un conjunto R de relaciones definidas en dicho universo y el conjunto de asignaciones (de $\mathcal{L}_2$ al universo y conjunto de relaciones), siendo preciso, además, determinar la manera de interpretar la cuantificación predicativa. El valor de una fórmula del tipo $\Lambda x\alpha$, si x es una variable individual, es como en el caso anterior; en cambio si x es una variable predicativa de cierta aridad, $(\Lambda x\alpha)_{\mathcal{J}} = 1$ si sólo $(\alpha(s/x))_{\mathcal{J}'} = 1$ para toda $\mathcal{J}' \underset{s}{=} \mathcal{J}$, siendo s un relator de la misma aridad que x.

Desde un punto de vista semántico hay una diferencia esencial entre la cuantificación de primero y la de segundo orden. Sean las fórmulas $\Lambda x\alpha$ y $\Lambda \mathrm{P}\beta$, siendo x una variable individual y P una variable predicativa de cierta aridad. Dada la interpretación $\mathcal{J}$, para determinar $\Lambda x\alpha_{\mathcal{J}}$ y $\Lambda \mathrm{P}\beta_{\mathcal{J}}$, hemos de estudiar los valores $\alpha(b/x)_{\mathcal{J}^*}$ y $\beta(\mathrm{R}/\mathrm{P})_{\mathcal{J}^*}$, respectivamente, para cada $\mathcal{J}^* \underset{b,\mathrm{R}}{=} \mathcal{J}$, donde b representa un

---

1 Si D $\neq$ D', es obvio que < D, $\mathcal{S}$> $\neq$ < D', $\mathcal{S}'$> (en este supuesto necesariamente $\mathcal{S} \neq \mathcal{S}'$).

2 Si $\mathcal{L}$ no hubiera tenido parámetros podríamos decir $(\Lambda x\alpha)_{\mathcal{J}} = 1$ si y sólo si $\alpha_{\mathcal{J}} = 1$ para todos los valores posibles de x en D. $\mathrm{S}^{x}_{a}\alpha$ es la fórmula resultante de sustituir en α cada ocurrencia libre de x por a. Para mayor facilidad, en lo sucesivo haremos uso de las abreviaturas $\alpha(a/x)$ para la sustitución, e $\mathcal{J}' \underset{a}{=} \mathcal{J}$ para expresar que $\mathcal{J}'$ defiere de $\mathcal{J}$ a lo sumo respecto de a.

parámetro y R un relator de la misma aridad que P. Supongamos que el cardinal del universo de discurso $\mathscr{I}$ es ω_0; entonces el número de valores $\mathscr{I}^*(b)$ es ω_0, pero el número de valores posibles $\mathscr{I}^*(\mathsf{R})$ es 2^{ω_0}, puesto que se verifica que $\mathscr{I}^*(\mathsf{R}) \in \mathscr{P}(\mathsf{D}^n)$ –donde $n \geq 1$ representa la aridad de P y R·. Frente a este punto de vista se puede adoptar otro distinto, según el cual $\mathscr{I}^*(\mathsf{R}) \in \mathsf{R}_n \subseteq \mathsf{R}$, siendo $\mathsf{R} = \cup \mathsf{R}_i$, R_i un conjunto de relaciones *i-ádicas,* y $|\mathsf{R}_i| \leq \omega_0$, para cada $i \geq 1$ - $|\mathsf{R}_i|$ representa el *cardinal* de R_i-, con lo que el número de valores posibles $\mathscr{I}^*(\mathsf{R})$ es a lo sumo ω_0. Un punto de vista semejante se presenta en los próximos apartados. En este sentido se había pronunciado Henkin[3] al estudiar la completud del cálculo de orden superior.

3. INTERPRETACIONES NORMALES

La noción de interpretación de los lenguajes de segundo orden se puede presentar de la siguiente manera:

Definición 1: $\mathscr{I} =_{def} <\{\mathsf{D}, \mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 \ldots\}, \mathscr{S}>$,
donde $\{\mathsf{D}, \mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 \ldots\}$ es una *familia de dominios* tal que $\mathsf{D} \neq \emptyset$ y, para cada $i \geq 1$, $\mathsf{D}_i \subseteq \mathscr{P}(\mathsf{D}^i)$ y $\mathscr{S}$ es un conjunto de asignaciones a elementos del lenguaje $\mathscr{L}_2$ de la familia de dominios, según las cláusulas:

1) Si a es un parámetro de $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{I}(a) \in \mathsf{D}$;

2) Si R es un relator n-ádico, para $n \geq 1$, $\mathscr{I}(\mathsf{R}) \in \mathsf{D}_n$. La función *valor bajo* $\mathscr{I}$ - de modo similar a primer orden-, tiene como dominio el conjunto de las fórmulas de $\mathscr{L}_2$ y rango en $\{0, 1\}$. En particular, si P es una variable predicativa n-ádica y R un relator n-ádico, $n \geq 1$, y β es una fórmula en la que P ocurre libre, $\Lambda P\beta_{\mathscr{I}} = 1$ si y sólo $\beta(\mathsf{R}/\mathsf{P})_{\mathscr{I}^*} = 1$, para toda $\mathscr{I}^* =_{\mathsf{R}} \mathscr{I}$ - $\mathscr{I}^*(\mathrm{R}) \in \mathscr{P}(\mathsf{D}^n)$, aunque bien pudiera presentarse que $\mathscr{I}^*(\mathrm{R}) \notin \mathsf{D}_n$, si para esta $\mathscr{I}$ ocurriera que $\mathsf{D}_n \neq \mathscr{P}(\mathsf{D}^n)$ -.

Definición 2:
Una familia de dominios $\{\mathsf{D}, \mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 \ldots\}$, tal que $|\mathsf{D}| = \omega_0$ y que, para cada $i \geq 1$, $|\mathsf{D}_1| \leq \omega_0$, no es una familia de dominios *standard.*
Establecemos esta noción mediante la

Definición 3:
Una familia de dominios $\{\mathsf{D}, \mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2 \ldots\}$, *tal que* $\mathsf{D} \neq \emptyset$, *se dice standard si, y sólo si, para todo* $i \geq 1$, $\mathsf{D}_i = \mathscr{P}(\mathsf{D}^i)$.
Estas familias de dominios standard, en las que el cardinal del universo de discurso

3 En (2), como se indicó antes.

es ω_0, permiten definir interpretaciones en las que, para determinada aridad $n \geq 1$, el conjunto D_n de todas las relaciones *n-ádicas* posibles es tal que $|D_n| \leq \omega_0$.

Definición 4:

a) Si β es una fórmula cualquiera de $\mathcal{L}_2$ cuyas variables libres son a lo sumo $x_1, x_2 \ldots, x_n$, una n-pla de variables individuales distintas entre sí, para $n \geq 1$, $\mathcal{I}$ una interpretación; entonces,
$\mathcal{I}\,(\beta(x_1 \ldots x_n)) = \{<\mathcal{I}\,'(a_1), \ldots, \mathcal{I}\,'(a_n)>: \beta(a_i / x_i)_{\mathcal{I}'} = 1, i \leq n, \mathcal{I}\,' \underset{a_i}{=} \mathcal{I}\}$, donde $\beta\,(a_1 / x_i)_{\mathcal{I}}$, representa la fórmula resultante de sustituir en β cada ocurrencia libre de x_1 por el parámetro a_1, de x_2 por el parámetro a_2, y así sucesivamente[4].

b) Si β es una fórmula cualquiera de $\mathcal{L}_2$, que puede contener libres las variables $s_1, s_2, \ldots, s_m$, para $m \geq 1$, -individuales o predicativas, distintas de $x_1, x_2, \ldots, x_n$-; $r_1, r_2, \ldots, r_m$ son parámetros o relatores -si s_i es individual, r_i es un parámetro; si s_i es predicativa, r_i es un relator de la misma aridad, para cada $i \leq m$-; entonces, $\mathcal{I}\,(\beta\,(x_1 \ldots x_n)) = \cup\, \mathcal{I}^{\bullet}$ $(\beta\,(r_1, \ldots, r_m / s_1, \ldots, s_m)(x_1 \ldots x_n))$,
donde $\mathcal{I}^{\bullet} \underset{r_1, \ldots, r_m}{=} \mathcal{I}$.

Definición 5:

Una interpretación $\mathcal{I}$ cuya familia de dominios es $\{D, D_1, D_2, \ldots\}$ es una *interpretación general* si y sólo si, para toda n-pla de variables individuales $x_1, x_2, \ldots, x_n$, distintas entre sí para cada n ≥ 1, y para toda fórmula β, se verifica que $\mathcal{I}\,(\beta\,(x_1 \ldots x_n)) \in D_n$.

Definición 6:

Una interpretación general $\mathcal{I}$ es *una interpretación standard* si y sólo si su familia de dominios $\{D, D_1, D_2 \ldots\}$, es tal que para cada $i \geq 1$ se verifica que $D_i = \mathcal{P}\,(D^i)$.

4. CONDICIONES DE NORMALIDAD.

Teniendo en cuenta la definición 1, consideremos el siguiente caso. Sea $\mathcal{I}$ una interpretación de $\mathcal{L}_2$ definida sobre la familia de dominios $\{D, D_1, D_2 \ldots\}$; sea, por ejemplo, $D_1 = \{\mathcal{P}\,(D) - D^n\}$ y sea β una fómula tal que $\mathcal{I}\,(\beta\,(x)) \in D_1$; de acuerdo con la definición 4 se tiene $\mathcal{I}\,(\neg\beta\,(x)) = \{\mathcal{I}\,'(a){:}\neg\beta\,(a/x)_{\mathcal{I}'} = 1, \mathcal{I}\,' \underset{a}{=} \mathcal{I}\} = \{\mathcal{I}\,'(a){:}\,\beta(a/x)_{\mathcal{I}'} = 0, \mathcal{I}\,' \underset{a}{=} \mathcal{I}\}$; es decir, $\mathcal{I}\,(\neg\beta\,(x)) = D^n - \mathcal{I}\,(\beta\,(x))$; $\mathcal{I}\,((\beta \vee \neg\beta)\,(x)) = \mathcal{I}\,(\beta\,(x)) \cup \mathcal{I}\,(\neg\beta\,(x))$ e $\mathcal{I}\,(\beta\,(x)) \cup \mathcal{I}\,(\neg\beta\,(x)) = (D^n - \mathcal{I}\,(\beta\,(x))) \cup \mathcal{I}\,(\beta\,(x)) = D^n$, debido a lo cual $\mathcal{I}\,((\beta \vee \neg\beta)\,(x)) \notin D_1$, pues en este caso $n = 1$. Así pues, podemos hallar interpretaciones -según la noción de def. 1- las cuales no serían *normales*;entendiendo que es normal una interpretación cuando -como se

4 La operación se sustitución en el sentido habitual.

establece en (1) - satisface determinadas fórmulas, particularmente las instancias del esquema $\Lambda P\alpha \rightarrow S_{\beta}^{\vee P x_1 \dots x_n}\alpha$ [5]; pero en el ejemplo hay una fórmula cuya interpretación para la variable x no está en el correspondiente dominio relacional, a saber $\beta \vee \neg\beta$, por lo que cabe esperar que para alguna fórmula α, $\Lambda P\alpha_{\mathscr{I}} = (S_{\beta}^{\vee P x_1 \dots x_n}\alpha)_{\mathscr{I}} = = 0$ –basta considerar la fórmula ΛP ($\vee xPx \rightarrow \vee x\neg Px$) y sustituir con $\beta \vee \neg\beta$–.

Definición 7

Una interpretación $\mathscr{I}$ cuya familia de dominios es $\{D, D_1, D_2 \dots\}$ es una *interpretación general* si y sólo si:

1º) $D \in D_1$

2º) Para todo $n \geq 1$, para cada n-pla de variable individuales distintas entre si $x_1, x_2, \dots, x_n$,

i) *Si* $S \in D_n$ y existe una fórmula β tal que $\mathscr{I}$ $(\beta\ (x_1 \dots x_n)) = S$, entonces $(D^n - S) \in D_n$;

ii) Si S y $S' \in D_n$ y existen fórmulas β y β' tales que $\mathscr{I}$ $(\beta(x_1 \dots x_n)) = S$ e $\mathscr{I}$ $(\beta'(x_1 \dots x_n)) = S'$, entonces $S \cup S' \in D_n$;

iii) Si $S_1 \in D_1$, $S_n \in D_n$, y existen fórmulas β y β' tales que $\mathscr{I}$ $(\beta\ (x)) = D_1$ -siendo x una variable individual distinta de x_i, para cada $i \leq n$- e $\mathscr{I}$ $(\beta(x_1 \dots x_n)) = S_n$, entonces, y sólo entonces, $S_1 \times S_n \in D_{n+1}$;

iv) Si $C \subseteq D_n$ y

a) existe una fórmula γ, con la variable individual x libre, tal que $S \in C$ si y sólo si hay al menos una $\mathscr{I}' \underset{a}{=} \mathscr{I}$ -donde a representa un parámetro que no ocurre en γ– tal que $\mathscr{I}'(\gamma(a/x)(x_1 \dots x_n)) = S$; o

b) existe una fórmula γ, con la variable predicativa P libre tal que $S \in C$ si y sólo si hay al menos una $\mathscr{I}' \underset{R}{=} \mathscr{I}$ -donde R representa un relator que no ocurre en γ– tal que $\mathscr{I}'(\gamma(R/P)(x_1 \dots x_n)) = S$, entonces, $\bigcup C \in D_n$.

Proposición:

Las definiciones 5 y 7 son equivalentes.

Demostración:

1) $\Rightarrow$) Sea $\mathscr{I}$ una interpretación, definida sobre la familia de dominios $\{D, D_1, D_2, \dots\}$, tal que para todo $n \geq 1$, toda n-pla de variables individuales $x_1, x_2, \dots, x_n$, distintas entre si, toda fórmula β, se verifica que $\mathscr{I}$ $(\beta\ (x_1 \dots x_n)) \in D_n$; entonces:

1) Por definición, $\mathscr{I}$ $((\vee P\ P\ x)\ (x)) \in D_1$. Pero $\mathscr{I}$ $((\vee P\ P\ x)\ (x)) = D$.

2) i) Sea $S \in D_n$ y $S = \mathscr{I}$ $(\beta\ (x_1 \dots x_n))$. Por definición $\mathscr{I}$ $(\neg\beta\ (x_1 \dots x_n)) \in D_n$. Pero $\mathscr{I}$ $(\neg\beta\ (x_1 \dots x_n)) = D^n - S$.

ii) Sean las fórmulas β y β', S y $S' \in D_n$ tales que $\mathscr{I}$ $(\beta\ (x_1 \dots x_n)) = S$ e

5 Cfr. (1) p. 192 y ss. y 295 y ss.

$\mathscr{I}(\beta'(x_1 \dots x_n)) = S'$.

Por definición, $\mathscr{I}((\beta \vee \beta')(x_1 \dots x_n)) \in D_n$, pero $\mathscr{I}((\beta \vee \beta')(x_1 \dots x_n) = S \cup S'$.

iii) Sean las fórmulas β y β', $S \in D_1$ y $S' \in D_n$ tales que $\mathscr{I}(\beta(x)) = S$ e $\mathscr{I}(\beta'(x_1 \dots x_n)) = S'$.

Por definición, $\mathscr{I}((\beta \wedge \beta')(x, x_1 \dots x_n)) \in D_{n+1}$, pero $\mathscr{I}((\beta \wedge \beta')(x, x_1 \dots x_n) = S \times S'$.

Por otra parte, para cada fórmula β, cada $n + 1$ variables individuales $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ -distintas entre si- por definición $\mathscr{I}(\beta(x)) \in D_1$, $\mathscr{I}(\beta(x_1 \dots x_n)) \in D_n$ y por último, $\mathscr{I}(\beta'(x, x_1 \dots x_n)) \in D_{n+1}$. Pero $\mathscr{I}(\beta'(x, x_1 \dots x_n)) = \mathscr{I}(\beta(x)) \times \mathscr{I}(\beta(x_1 \dots x_n))$.

iv) a) Sea $C \subseteq D_n$. Sea γ una fórmula tal que $S \in C$ si y sólo si hay una $\mathscr{I}' \underset{a}{=} \mathscr{I}$ tal que $\mathscr{I}'(\gamma(a/x))(x_1 \dots x_n)) = S$; por definición $\mathscr{I}((\bigvee x \gamma)(x_1 \dots x_n)) \in D_n$. Pero $\mathscr{I}((\bigvee x \gamma)(x_1 \dots x_n)) = \bigcup C$.

b) Sea $C \subseteq D_n$, γ una fórmula tal que $S \in C$ si y sólo si hay una $\mathscr{I}' \underset{R}{=} \mathscr{I}$ de manera que $\mathscr{I}'((\gamma(R/P))(x_1 \dots x_n)) = S$; por definición $\mathscr{I}((\bigvee P \gamma)(x_1 \dots x_n)) \in D_n$. Pero $\mathscr{I}((\bigvee P \gamma)(x_1 \dots x_n)) = \bigcup C$.

2) $\Leftarrow$ Sea una interpretación $\mathscr{I}$ tal que verifica las condiciones 1) y 2) establecidas; probamos que para cada n-pla de variables individuales $x_1, x_2 \dots, x_n$, distintas entre si, $n \geq 1$, para toda fórmula β, $\mathscr{I}(\beta(x_1 \dots x_n)) \in D_n$,

1) Analizamos los casos que se pueden presentar si β es atómica:

A) En β no ocurre ninguna variable individual libre. Entonces $\mathscr{I}(\beta(x_1 \dots x_n))$ es $\emptyset$ o D^n; por la primera condición y sucesivas aplicaciones de 2) iii) $D^n \in D_n$ y $\emptyset \in D_n$.

B) En β ocurren libres las variables individuales $y_1, y_2 \dots y_i$, siendo $i < n$ *y, para* $r \leq i$, y_r *es una* x_k, para $k \leq n$. Supongamos, para simplificar, que $y_1, y_2 \dots y_i$, sean, respectivamente, $x_1, x_2 \dots x_i$. *En tal caso,* $\mathscr{I}(\beta(x_1 \dots x_n)) = \mathscr{I}(\beta(x_1 \dots x_i)) \times D^{n-i}$; puesto que $D^{n-i} \in D_{n-i}$, mediante i aplicaciones de la clausula 2) iii), se concluye que $(\mathscr{I}(\beta(x_1 \dots x_i)) \times D^{n-i}) \in D_n$.

C) En β estan libres las variables $x_1, x_2 \dots, x_n$ y sólo éstas. Supongamos, para simplificar, que β es $Ra_1 \dots a_m x_1 \dots x_n$, donde $a_1, a_2, \dots, a_m$ son parámetros. Por definición, de interpretación, $\mathscr{I}(R) \in D_{m+n}$; por sucesiva aplicación de 2) iii), $\mathscr{I}((Ra_1 \dots a_m x_1 \dots x_n)(x_1 \dots x_n)) \in D_n$.

D) En β estan libres las variables $y_1, y_2 \dots, y_m$, para $m > n$, *y cada* x_i es y_j, para $i \leq n$ y $j \leq m$. Supongamos para simplificar que β es $Rx_1 \dots x_n y_{n+1} \dots y_m$. Por definición, $\mathscr{I}(R) \in D_m$; por sucesiva aplicación de 2) iii), $\mathscr{I}((Rx_1 \dots x_n y_{n+1} \dots y_m)(x_1 \dots x_n)) \in D_n$.

Proseguimos la prueba por inducción sobre la longuitud de β, refiriéndonos en el paso de la inducción a los casos correspondientes a $\neg$, $\vee$, y $\bigvee$ solamente puesto que, para los restantes signos lógicos, podemos obtener la demostración desde sus definiciones y los casos mencionados.

2) Sea β de la forma $\neg\alpha$ e $\mathscr{I}(\beta(x_1 \dots x_n)) \in D_n$. De acuerdo con 2) i)

$(D^n - \mathcal{I}(\alpha(x_1 \ldots x_n))) \in D_n$. Pero $(D^n - \mathcal{I}(\alpha(x_1 \ldots x_n))) = \mathcal{I}(\neg\alpha(x_1 \ldots x_n))$.

3) Sea β de la forma $\alpha \vee \gamma$ e $\mathcal{I}(\alpha(x_1 \ldots x_n)) \in D_n$ e $\mathcal{I}(\gamma(x_1 \ldots x_n)) \in D_n$. De acuerdo con 2) ii) $(\mathcal{I}(\alpha(x_1 \ldots x_n)) \cup \mathcal{I}(\gamma(x_1 \ldots x_n))) \in D_n$. Pero $(\mathcal{I}(\alpha(x_1 \ldots x_n)) \cup \mathcal{I}(\gamma(x_1 \ldots x_n))) = \mathcal{I}((\alpha \vee \gamma)(x_1 \ldots x_n))$.

4) Hemos de contemplar dos subcasos correspondientes a cuantificación de variable individual y variable predicativa:

A) Sean: β de la forma $\mathsf{V}\, x\, \alpha$, x una variable individual, a un parámetro que no ocurre en α, y un determinado número -no necesariamente finito- de interpretaciones $\mathcal{I}'$ tales que $\mathcal{I}'((\alpha(a/x)(x_1 \ldots x_n)) \in D_n$ e $\mathcal{I}' \underset{a}{=} \mathcal{I}$. De acuerdo con la condición 2) iv), si C es el conjunto de los $\mathcal{I}'((\alpha(a/x)(x_1 \ldots x_n))$, entonces $\bigcup C = \mathcal{I}((\mathsf{V}x\alpha)(x_1 \ldots x_n))$. *B)* Sean: β de la forma $\mathsf{V}\, P\, \alpha$, P una variable predicativa, R un relator de la misma aridad que P que no ocurre en α, y un determinado número -no necesariamente finito- de interpretación $\mathcal{I}'$ tales que $\mathcal{I}' \underset{R}{=} \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'(\alpha(R/P)(x_1 \ldots x_n)) \in D_n$. De acuerdo con la condición 2)iv), si C es el conjunto de los $\mathcal{I}'(\alpha(R/P)(x_1 \ldots x_n))$, entonces $\bigcup C \in D_n$. Pero $\bigcup C = \mathcal{I}((\mathsf{V}P\alpha)(x_1 \ldots x_n))$.

De acuerdo con la definición 6, todas las interpretaciones standard son interpretaciones generales. Por otra parte, segun se ha comentado más arriba, sólo son normales las interpretaciones generales, las cuales han sido debidamente definidas; una vez probada la proposición anterior, podemos afirmar que únicamente son normales las interpretaciones que se ajustan a la definición 5 o a la definición 7.

BIBLIOGRAFÍA

(1) A. CHURCH, *Introducción to Mathematical Logic*, Princeton, P. University Press, 1970 (6ª reimp.)

(2) L. HENKIN, "Completeness in the Theory of Types", *The Philosophy of Mathematics* (Ed. by J. Hintikka), pp. 42-63.

(3) M. MANZANO, *Sistemas intermedios*, Madrid, Fundación Juan March, 1978.

(4) J. MOSTERIN, *Un Cálculo deductivo para la lógica de segundo orden*, Valencia, Cuadernos Teorema, 1989.