Vol. XVI, Nº 1, Junio (2008)
Matemáticas: 11–22

Matemáticas: Enseñanza Universitaria

Algunas aplicaciones de las curvas de Bertrand

Antonio González Herrera
Universidad de Sevilla

Juan Núñez Valdés
Universidad de Sevilla

Recibido Abr. 18, 2007 Aceptado Dic. 14, 2007

Abstract

This paper deals with Bertrand curves. Some proofs of its main properties simplifying the habitual ones are shown. Some concepts of previous papers by several authors, relating Bertrand curves with other different types of curves and with some surfaces, are also improved.

Keywords: Bertrand curves, Ruled surfaces, Minimal Surfaces.

MSC(2000): 53A04, 53A05, 53A10.

Resumen

El estudio de las curvas de Bertrand constituye el objetivo principal del presente trabajo. En el mismo, se dan demostraciones de algunas de sus propiedades, que simplifican a las ya existentes, y se continúan trabajos previos de otros autores, que relacionan este tipo de curvas con otros tipos diferentes de curvas, particularmente las hélices, y con otras superficies, particularmente las regladas.

Palabras y frases claves: Curvas de Bertrand, Superficies regladas, Superficies mínimas.

Introducción

El problema de encontrar una curva cuyas rectas normales principales fueran también las rectas normales principales de otra curva diferente fue, al menos, aparentemente, propuesto por el matemático francés Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (Seine-et-Marne, 1797 - Loir-et-Cher, 1886), aunque fue finalmente resuelto por el también matemático francés Joseph Louis François Bertrand (París 1822 - París 1900), en 1850, en su libro titulado *Traité élémentaire d'algèbre*, destinado curiosamente a alumnos de enseñanza secundaria. Por esta razón, a estas curvas se les denomina actualmente como *curvas de Bertrand*, precisamente en honor de este último.

No obstante, estas curvas no suelen estar suficientemente tratadas en los textos usuales de Geometría Diferencial, a pesar de tener, como se verá en lo que sigue, una profunda relación tanto con otros tipos de curvas como con determinadas superficies. Por otra parte, no son tampoco muy abundantes las aportaciones que existen en la literatura que traten sobre ellas. El objetivo principal de este trabajo que se presenta es entonces intentar paliar, al menos parcialmente, esta situación.

Para ello, en la primera sección del mismo se recuerdan y se demuestran las principales propiedades de estas curvas, presentándose en algunos casos demostraciones diferentes de las habituales, que simplifican el procedimiento. Es conveniente indicar al respecto, que no es usual encontrar las demostraciones de estas propiedades en los textos más conocidos de Geometría Diferencial, en los que, en su mayoría, únicamente aparece la definición de estas curvas, mientras que sus propiedades únicamente aparecen como ejercicios a resolver por el lector, no resultando estas resoluciones, por lo general, triviales.

En la segunda sección se comenta un método de construcción de este tipo de curvas a partir de las curvas esféricas, utilizándose para ello la *base de Sabban* tampoco excesivamente habitual en los textos de esa disciplina. Esta construcción está basada en un trabajo previo de Kasap (véanse [5, 6]) y en otros trabajos previos de varios autores, como pueden ser Izumiya y Takeuchi, y Osman, Handan y Mahmut. Los dos primeros relacionan este tipo de curvas con otros tipos diferentes, como las curvas esféricas, las hélices, las curvas paralelas, las evolutas y las evolventes (véase [4]) y con las superficies regladas (véase [3]). Los tres últimos citados trabajan sobre superficies regladas en el espacio tridimensional de Minkowski (véase [7]).

Finalmente, se utilizan en la última sección algunas propiedades de estas curvas, en particular su relación con las hélices circulares, para probar que el helicoide recto es, además del plano, la única superficie mínima, que es además reglada.

En el trabajo se hace uso de las definiciones y resultados propios de un conocimiento elemental de la Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. Para una visión completa de los mismos, el lector puede consultar [2] o [1], por ejemplo.

1 Curvas de Bertrand

En esta sección se recuerda la definición de curvas de Bertrand y se prueban sus propiedades más importantes. Algunas de las demostraciones que se muestran simplifican bastante las que en escasas ocasiones, por lo general, aparecen en algunos textos de Geometría Diferencial.

Definición 1.1. *Una curva parametrizada regular (no necesariamente por la longitud de arco) $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha = \alpha(t)$, con $k(t) \neq 0$ y $\tau(t) \neq 0$, $t \in I$, se dice* curva de Bertrand *si existe una curva regular $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta = \beta(t)$, de forma que las normales de α y β en $t \in I$ son iguales. En este caso, se dice que β es una* representación de Bertrand (o curva asociada) *de α, y se puede escribir:*

$$\beta(t) = \alpha(t) + u\,\boldsymbol{n}_\alpha(t).$$

Las propiedades más conocidas de estas curvas de Bertrand son las siguientes:

Proposición 1.2. *La distancia entre puntos homólogos de dos curvas de Bertrand es constante.*

Demostración. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha = \alpha(s)$ una curva alabeada regular que supondremos parametrizada naturalmente. Si α es de Bertrand, existe para cada $s \in I$ el homólogo del punto $\alpha(s)$, que designaremos por $\beta(s)$. Como $\beta(s)$ pertenece a la normal principal a α en $\alpha(s)$, tenemos que:

$$\beta(s) = \alpha(s) + u(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s) \tag{1}$$

donde $u(s)$ denota, en valor absoluto, la distancia entre puntos homólogos. Tenemos así que β es una curva asociada a α.
Para probar que la distancia entre puntos homólogos es constante veremos que la función $u(s)$ es constante, para ello comprobaremos que $u'(s) = 0 \ \forall s \in I$. Derivando en (1) y teniendo en cuenta las Ecuaciones de Frenet, se tienen:

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \mathbf{t}_\alpha(s) + u'(s)\mathbf{n}_\alpha(s) + u(s)\dot{\mathbf{n}}_\alpha(s) \\ &= \mathbf{t}_\alpha(s) + u'(s)\mathbf{n}_\alpha(s) + u(s)[-\kappa_\alpha(s)\mathbf{t}_\alpha(s) + \tau_\alpha(s)\mathbf{b}_\alpha(s)] \\ &= [1 - u(s)\kappa_\alpha(s)]\mathbf{t}_\alpha(s) + u'(s)\mathbf{n}_\alpha(s) + \tau_\alpha(s)u(s)\mathbf{b}_\alpha(s) \end{aligned} \tag{2}$$

Multiplicando ahora la expresión (2) por $\mathbf{n}_\alpha(s)$ y teniendo en cuenta que dicho vector es proporcional a $\mathbf{n}_\beta(s)$, y por tanto ortogonal a $\beta'(s)$, obtenemos:

$$0 = u'(s) \implies u(s) \text{ constante.}$$

$\square$

Nótese que es necesario exigir la condición de ser α una curva alabeada (es decir, $\tau(t) \neq 0$ con $t \in I$) en la Definición 1 para que se garantice la dependencia continua de puntos homólogos, ya que en caso de no contemplarse esta exigencia, la proposición anterior no sería válida. Como ejemplo de esto que decimos, bastaría tomar como curva α media circunferencia centrada en el origen y como curva β una curva conexa que fuese la unión de varios trozos de circunferencias centradas también en el origen, cada uno de esos trozos con diferente radio, y de otras curvas que conectasen entre sí esos trozos.

Proposición 1.3. *El ángulo que forman las tangentes en puntos homólogos de dos curvas de Bertrand es constante.*

Demostración. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha = \alpha(s)$ una curva alabeada regular parametrizada naturalmente (en adelante, CARPN). Si suponemos que α es de Bertrand, tenemos que existe otra curva $\beta : I' \to \mathbb{R}^3$, $\beta = \beta(\sigma)$ (que también supondremos parametrizada naturalmente) verificando que para cada $s \in I$ existe $\sigma \in I'$ tal que $\mathbf{n}_\alpha(s) = \pm\mathbf{n}_\beta(\sigma)$. Sean $\alpha(s_0)$ y $\beta(\sigma_0)$ dos puntos homólogos. Se probará que el ángulo que forman los vectores $\mathbf{t}_\alpha(s_0)$ y $\mathbf{t}_\beta(\sigma_0)$ es constante viendo que el producto escalar de dichos vectores es constante, y ello se hará probando que la derivada de tal producto es nula:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\mathbf{t}_\alpha(s_0) \cdot \mathbf{t}_\beta(\sigma_0)) &= \frac{d\mathbf{t}_\alpha(s_0)}{ds}\mathbf{t}_\beta(\sigma_0) + \mathbf{t}_\alpha(s_0)\frac{d\mathbf{t}_\beta(\sigma_0)}{ds} \\ &= \kappa_\alpha(s_0)\mathbf{n}_\alpha(s_0)\mathbf{t}_\beta(\sigma_0) + \mathbf{t}_\alpha(s_o)\frac{d\mathbf{t}_\beta(\sigma_0)}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_{\sigma=\sigma_0} \\ &= \kappa_\alpha(s_0)\mathbf{n}_\alpha(s_0)\mathbf{t}_\beta(\sigma_0) + \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_{\sigma=\sigma_0}\kappa_\beta(\sigma_0)\mathbf{t}_\alpha(s_0)\mathbf{n}_\beta(\sigma_0) \end{aligned}$$

Ahora bien, por ser $\alpha(s_0)$ y $\beta(\sigma_0)$ puntos homólogos, los vectores $\mathbf{n}_\alpha(s_0)$ y $\mathbf{n}_\beta(\sigma_0)$ son proporcionales, y por ello $\mathbf{t}_\alpha(s_0) \perp \mathbf{n}_\alpha(s_0) \| \mathbf{n}_\beta(\sigma_0)$ y lo mismo para $\mathbf{t}_\beta(\sigma_0)$, de donde si sigue el resultado. □

Corolario 1.4. *Dadas dos curvas de Bertrand (asociadas), el ángulo que forman los planos osculadores en puntos homólogos es constante.*

Demostración. Por la proposición anterior, sabemos que el ángulo que forman los vectores tangentes a las curvas en puntos homólogos es constante, pero además, por la definición de curva de Bertrand, sabemos que el ángulo que forman los vectores normales principales también es constante, pudiendo valer 0 o π ($\mathbf{n}_\alpha = \pm\mathbf{n}_\beta$). Como el vector binormal viene determinado unívocamente por los vectores tangente y normal principal, tenemos que los vectores binormales, en puntos homólogos, forman un ángulo constante, por lo que los planos osculadores (caracterizados por dicho vector) forman un ángulo constante. □

Teorema 1.5 (Teorema de Caracterización de curvas de Bertrand)**.** *Una curva con funciones de torsión y curvatura no nulas en cada punto es de Bertrand si y sólo si existe una relación lineal entre dichas funciones.*

Demostración de la condición necesaria. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha = \alpha(s)$ una CARPN que, por hipótesis, suponemos de Bertrand. Como vimos en la demostración de la proposición 1, una curva asociada a α es de la forma $\beta(s) = \alpha(s) + u\mathbf{n}_\alpha(s)$. Si σ es el parámetro natural de β, tenemos que:

$$\mathbf{t}_\beta(\sigma)\mathbf{t}_\alpha(s) = \frac{d\beta(\sigma)}{d\sigma}\mathbf{t}_\alpha(s) = \frac{d\beta(s)}{ds}\frac{ds}{d\sigma}\mathbf{t}_\alpha(s) = \frac{ds}{d\sigma}(1 - u\kappa_\alpha(s)) = \cos\theta$$

que es constante para ciertos s y σ.
Por otra parte

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}\theta| &= |\mathbf{t}_\beta(\sigma) \wedge \mathbf{t}_\alpha(s)| \\ &= \left|\frac{ds}{d\sigma}[(1 - u\kappa_\alpha(s))\mathbf{t}_\alpha(s) - u\tau_\alpha(s)\mathbf{b}_\alpha(s)] \wedge \mathbf{t}_\alpha(s)]\right| = \left|\frac{ds}{d\sigma}u\tau_\alpha(s)\right| \end{aligned}$$

Como suponemos $\tau_\alpha \neq 0$, llamando $A = \frac{1-u\kappa_\alpha(s)}{u\tau_\alpha(s)} \equiv cte$, obtenemos de las dos relaciones anteriores que:

$$\frac{1 - u\kappa_\alpha(s)}{u\tau_\alpha(s)} = \frac{A}{u} \implies u\kappa_\alpha(s) + A\tau_\alpha(s) = 1.$$

Obtenemos así, una relación lineal entre torsión y curvartura.
Demostración de la condición suficiente. Dada la curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha = \alpha(s)$ CARPN, suponemos que existe una relación lineal entre sus funciones de curvatura y torsión:

$$A\kappa_\alpha(s) + B\tau_\alpha(s) = 1.$$

Sea $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta = \beta(s)$ dada por la expresión $\beta(s) = \alpha(s) + A\mathbf{n}_\alpha(s)$. Veremos que esta curva es asociada a α y que por tanto α es de Bertrand. Para ello será suficiente ver que el vector $\mathbf{n}_\alpha(s)$ es proporcional a $\mathbf{n}_\beta(s)$. Se trata pues de comprobar que $\mathbf{n}_\alpha(s)$ es ortogonal a los vectores $\beta'(s)$ y $\beta'(s) \wedge \beta''(s)$. Puesto que el vector $\beta'(s)$ viene dado por:

$$\beta'(s) = [1 - A\kappa_\alpha(s)]\mathbf{t}_\alpha(s) + A\tau_\alpha(s)\mathbf{b}_\alpha(s)$$

es obvio que éste es perpendicular a $\mathbf{n}_\alpha(s)$. Si además usamos la relación de la que partimos por hipótesis, obtenemos:

$$\beta'(s) = \tau_\alpha(s)[B\mathbf{t}_\alpha(s) + A\mathbf{b}_\alpha(s)]$$

y por derivación:

$$\beta''(s) = \tau'_\alpha(s)[B\mathbf{t}_\alpha(s) + A\mathbf{b}_\alpha(s)] + \tau_\alpha(s)[B\kappa_\alpha(s) - A\tau_\alpha(s)]\mathbf{n}_\alpha(s).$$

Para ver que $\mathbf{n}_\alpha(s) \perp (\beta'(s) \wedge \beta''(s))$ observamos que:

$$(\mathbf{n}_\alpha(s)\ \beta'\ \ \beta'') = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau_\alpha(s)B & 0 & \tau_\alpha(s)A \\ \tau'_\alpha(s)B & \tau_\alpha(s)[B\kappa_\alpha(s) - A\tau_\alpha(s)] & A\tau'_\alpha(s) \end{vmatrix} = 0,$$

lo que prueba el aserto. □

Corolario 1.6. *Sea α una curva con torsión y curvatura no nulas. Son equivalentes:*

a) α es una hélice circular. b) α posee infinitas curvas asociadas. c) α posee dos curvas asociadas.

Demostración. $\boxed{a \Longrightarrow b}$ Suponemos que la curva $\alpha = \alpha(s)$ es una hélice circular, por lo que $\kappa_\alpha(s) = \kappa_0$ y $\tau_\alpha(s) = \tau_0$. Para cada u que tomemos existe un $B \neq 0$ tal que $u\kappa_0 + B\tau_0 = 1$. Por tanto, el teorema de caracterización nos asegura la existencia de infinitas curvas asociadas a α.

$\boxed{b \Longrightarrow c}$ Trivial.

$\boxed{c \Longrightarrow a}$ Supongamos que existen dos curvas distintas asociadas a α dadas por:

$$\beta(s) = \alpha(s) + u\mathbf{n}_\alpha(s), \qquad \gamma(s) = \alpha(s) + u'\mathbf{n}_\alpha(s)$$

Por tanto, por el teorema de caracterización, tenemos que existen B y B', unívocamente determinados por u y u' respectivamente, que verifican:

$$\begin{cases} u\kappa_\alpha(s) + B\tau_\alpha(s) &= 1, \\ u'\kappa_\alpha(s) + B'\tau_\alpha(s) &= 1. \end{cases}$$

Derivando el sistema anterior se obtiene:

$$\begin{cases} u\kappa'_\alpha(s) + B\tau'_\alpha(s) &= 1, \\ u'\kappa'_\alpha(s) + B'\tau'_\alpha(s) &= 1. \end{cases}$$

Entonces, como $\beta(s)$ es distinta de $\gamma(s)$, $u \neq u'$ y por tanto $B \neq B'$, de donde se deduce que tanto $\kappa'_\alpha(s)$ como $\tau'_\alpha(s)$ son nulos y por tanto $\kappa_\alpha(s)$ y $\tau_\alpha(s)$ son constantes, hecho que caracteriza a las hélices circulares. $\square$

Proposición 1.7. *Toda curva plana es de Bertrand y posee infinitas curvas asociadas.*

Demostración. Procedemos del mismo modo que en la condición suficiente del teorema de caracterización. Dada $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha = \alpha(s)$ una CARPN cuya función de torsión es nula en todo punto, definimos la curva $\beta = \beta(s)$ como:

$$\beta(s) = \alpha(s) + u\mathbf{n}_\alpha(s)$$

siendo u constante.

Comprobaremos ahora que para cualquiera que sea el valor de u, la curva β es asociada a α. Para ello veremos que el vector $\mathbf{n}_\alpha(s)$ es ortogonal a $\beta'(s)$ y a $\beta'(s) \wedge \beta''(s)$. Lo primero es obvio, pues $\beta'(s) = [1 - u\kappa_\alpha(s)]\mathbf{t}_\alpha(s)$ por ser $\tau_\alpha(s) = 0$ $\forall s \in I$. Si ahora derivamos $\beta'(s)$ tenemos:

$$\beta''(s) = -u\kappa'_\alpha(s)\mathbf{t}_\alpha(s) + \kappa_\alpha(s)[1 - u\kappa_\alpha(s)]\mathbf{n}_\alpha(s).$$

Finalmente, es inmediato comprobar que $\beta'(s) \wedge \beta''(s)$ es ortogonal a $\mathbf{n}_\alpha(s)$ viendo que el producto mixto $(\mathbf{n}_\alpha(s)\, \beta'(s)\, \beta''(s))$ es nulo.

Por tanto, para cada valor de u obtenemos una curva asociada a α y por tanto, ésta es de Bertrand. $\square$

Teorema 1.8 (Teorema de Schell)**.** *El producto de las torsiones de dos curvas de Bertrand en puntos homólogos, es constante y no negativo.*

Demostración. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha = \alpha(s)$ una CARPN. Como suponemos que α es de Bertrand, existe un escalar A tal que la curva $\beta(s) = \alpha(s) + A\mathbf{n}_\alpha(s)$ es asociada a α. Para ver que $\tau_\alpha(s)\tau_\beta(s)$ es constante, calculamos la expresión de $\tau_\beta(s)$.

Podemos suponer desde el principio que $\tau_\alpha(s) \neq 0$, ya que en caso contrario el teorema se verifica trivialmente, puesto que $\tau_\alpha\tau_\beta = 0$ es constante y no negativo. Si suponemos $\tau_\alpha(s) \neq 0$, podemos aplicar la condición necesaria del teorema de caracterización, y entonces tenemos la relación $A\kappa_\alpha(s) + B\tau_\alpha(s) = 1$, para un cierto B no nulo. Busquemos entonces la expresión de τ_β:

$$\beta' = \tau_\alpha[B\mathbf{t}_\alpha + A\mathbf{b}_\alpha], \qquad \beta'' = \tau'_\alpha[B\mathbf{t}_\alpha + A\mathbf{b}_\alpha] + \tau_\alpha[B\kappa_\alpha - A\tau_\alpha]\mathbf{n}_\alpha$$

$$\begin{array}{rcl} \beta''' & = & [\tau''_\alpha B - \kappa_\alpha\tau_\alpha(B\kappa_\alpha - A\tau_\alpha)]\mathbf{t}_\alpha \\ & + & [2\tau'_\alpha B\kappa_\alpha - 3A\tau_\alpha\tau'_\alpha + B\kappa'_\alpha\tau_\alpha]\mathbf{n}_\alpha \\ & + & [A\tau''_\alpha + \tau^2_\alpha(B\kappa_\alpha - A\tau_\alpha)]\mathbf{b}_\alpha \end{array}$$

$$\beta' \wedge \beta'' = \tau_\alpha^2 B[B\kappa_\alpha - A\tau_\alpha]\mathbf{b}_\alpha - \tau_\alpha^2 A[B\kappa_\alpha - A\tau_\alpha]\mathbf{t}_\alpha$$
$$\|\beta' \wedge \beta''\|^2 = \tau_\alpha^4[B\kappa_\alpha - A\tau_\alpha]^2[B^2 + A^2]$$

$$\begin{aligned}\{\beta', \beta'', \beta'''\} &= \{\beta''', \beta', \beta''\} = \beta'''(\beta' \wedge \beta'') \\ &= -A\tau_\alpha^2(B\kappa_\alpha - A\tau_\alpha)[\tau_\alpha'' B - \kappa_\alpha\tau_\alpha(B\kappa_\alpha - A\tau_\alpha)] \\ &= B\tau_\alpha^2(B\kappa_\alpha - A\tau_\alpha)[\tau_\alpha'' A - \tau_\alpha^2(B\kappa_\alpha - A\tau_\alpha)]\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\tau_\beta &= \frac{\{\beta', \beta'', \beta'''\}}{\|\beta' \wedge \beta''\|^2} = \frac{-A(\tau_\alpha'' B - \kappa_\alpha\tau_\alpha(B\kappa_\alpha - A\tau) + B(A\tau_\alpha'' + \tau_\alpha^2(B\kappa_\alpha - A\tau_\alpha)}{\tau_\alpha^2(B\kappa_\alpha - A\tau_\alpha)(A^2 + B^2)} \\ &= \frac{\tau_\alpha \overbrace{(A\kappa_\alpha + B\tau_\alpha)}^{1}(B\kappa_\alpha - A\tau)}{\tau_\alpha^2(B\kappa_\alpha - A\tau_\alpha)(A^2 + B^2)} = \frac{1}{\tau_\alpha}\frac{1}{(A^2 + B^2)}\end{aligned}$$

Por tanto $\tau_\alpha\tau_\beta = \frac{1}{A^2+B^2}$, que es constante y no negativo. □

Corolario 1.9. *El signo de las torsiones de dos curvas asociadas es el mismo.*

Demostración. Inmediata, en virtud del Teorema de Schell. □

2 Método para construir curvas de Bertrand

El objetivo de este apartado es mostrar un método, ideado por Kasap y Kuruoglu [6], que permite construir curvas de Bertrand a partir de curvas esféricas, así como demostrar que toda curva de Bertrand puede obtenerse por este método.

Comenzamos recordando algunas definiciones ya conocidas e introduciendo otras más novedosas:

Definición 2.1. *Se denomina* curva esférica *a toda curva alabeada contenida enteramente en una superficie esférica (que coincide con la esfera osculatriz a la curva en todo punto).*

Normalmente, al tratarse las curvas esféricas de curvas alabeadas, podría usarse la base de Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, Sin embargo, en el caso particular de estas curvas, puede suponerse sin pérdida de generalidad que el radio de la superficie esférica es la unidad, por lo que el vector de posición de cada punto será módulo 1 y ortogonal al vector tangente. Esta propiedad nos sirve para definir una nueva base según:

Definición 2.2. *Sea $\gamma : I \longrightarrow S^2$ una curva esférica paramerizada por la longitud de arco σ. Sea $\boldsymbol{t}(\sigma) = \dot\gamma(\sigma)$ y definamos el vector $\boldsymbol{s}(\sigma)$ como $\boldsymbol{s}(\sigma) = \gamma(\sigma) \wedge \boldsymbol{t}(\sigma)$. Se define la* base o triedro de Sabban *en cada punto de γ como $\{\gamma(\sigma), \boldsymbol{t}(\sigma), \boldsymbol{s}(\sigma)\}$, que es claramente ortonormal (véase [8]).*

Una vez obtenida la base de Sabban podemos derivar sus componentes, obteniéndose así unas ecuaciones similares a las de Frenet-Serret para curvas esféricas.

Teorema 2.3. *En las condiciones de la definición anterior, se tienen:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\gamma} & = & \boldsymbol{t}, \\ \dot{\boldsymbol{t}} & = & -\gamma + \kappa_g \boldsymbol{s}, \\ \dot{\boldsymbol{s}} & = & -\kappa_g \boldsymbol{t}, \end{array}\right.$$

donde κ_g denota la curvatura geodésica de γ en S^2.

Demostración. Por una parte, se tienen:
$\|\gamma\| = 1 \Longrightarrow \gamma\dot{\gamma} = 0 \overset{\text{Derivando}}{\Longrightarrow} \gamma\ddot{\gamma} = -1$. $\|\dot{\gamma}\| = 1 \Longrightarrow \dot{\gamma}\ddot{\gamma} = 0$. $\kappa_g =$

$\{\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \gamma\} = \{\ddot{\gamma}, \gamma, \dot{\gamma}\} = \ddot{\gamma}(\gamma \wedge \dot{\gamma}) = \ddot{\gamma}\mathbf{s}$.

1) Por definición, $\dot{\gamma} = \mathbf{t}$. 2) Como queremos expresar el vector $\dot{\mathbf{t}}$ en función de la base de Sabban, imponemos que $\dot{\mathbf{t}} = \lambda\gamma + \mu\mathbf{t} + \nu\mathbf{s}$ y multiplicamos la expresión por γ, $\mathbf{t}$ y $\mathbf{s}$ respectivamente, obteniéndose:

$$\lambda = \dot{\mathbf{t}}\gamma = \ddot{\gamma}\gamma = -1, \qquad \mu = \dot{\mathbf{t}}\mathbf{t} = \ddot{\gamma}\dot{\gamma} = 0, \qquad \nu = \dot{\mathbf{t}}\mathbf{s} = \ddot{\gamma}\mathbf{s} = \kappa_g.$$

Por tanto, $\dot{\mathbf{t}} = -\gamma + \kappa_g\mathbf{s}$. 3) Por definición, $\mathbf{s} = \gamma \wedge \mathbf{t}$, por lo que:

$$\dot{\mathbf{s}} = (\gamma \dot{\wedge} \mathbf{t}) = \dot{\gamma} \wedge \mathbf{t} + \gamma \wedge \dot{\mathbf{t}} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{t} + \gamma \wedge (-\gamma + \kappa_g\mathbf{s}) = \kappa_g\gamma \wedge \mathbf{s} = -\kappa_g\mathbf{s} \wedge \gamma = -\kappa_g\mathbf{t}$$

□

Centrándonos ya en nuestro objetivo, vamos a encontrar, dada una curva esférica, una curva que sea de Bertrand, y después probaremos que toda curva de Bertrand puede hallarse a partir de este procedimiento.

Proposición 2.4. *Sea $\gamma : I \longrightarrow S^2$ una CARPN esférica con parámetro natural σ. Se define la curva $\tilde{\gamma}$ según:*

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a\int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(\tau)d\tau + a\cot\theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} \boldsymbol{s}(\tau)d\tau + \boldsymbol{c}$$

donde a y θ son constantes reales y $\mathbf{c}$ es una constante vectorial. Entonces, en estas condiciones, la curva $\tilde{\gamma}$ es de Bertrand.

Demostración. Probaremos el resultado calculando las funciones de curvatura y torsión de la curva $\tilde{\gamma}$ y comprobando que existe una relación de dependencia lineal entre ambas.

$$\tilde{\gamma}' = a(\gamma + \cot\theta\mathbf{s}) \longrightarrow \|\tilde{\gamma}'\| = \sqrt{a^2 + a^2\cot^2\theta} = \sqrt{\frac{a^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}$$
$$\tilde{\gamma}'' = a\dot{\gamma} + a\cot\theta\dot{\mathbf{s}} = a(1 - \cot\theta\kappa_g)\mathbf{t}$$
$$\tilde{\gamma}''' = -a\cot\theta\dot{\kappa}_g\mathbf{t} + a(1 - \cot\theta\kappa_g)(-\gamma + \kappa_g\mathbf{s})$$

$$\tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}'' = a^2(1 - \cot\theta\kappa_g)\mathbf{s} + a^2\cot^2\theta(\cot\theta - 1)\gamma$$
$$\|\tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}''\|^2 = a^4(1 - \cot\theta\kappa_g)^2(1 + \cot^2\theta) = \frac{a^4(1 - \cot\theta\kappa_g)^2}{\operatorname{sen}^2\theta}$$
$$\|\tilde{\gamma}'\|^3 = \varepsilon\frac{a^3}{\operatorname{sen}^3\theta} \qquad \text{donde } \varepsilon = \pm 1$$

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'', \tilde{\gamma}'''\} &= \begin{vmatrix} a & 0 & a\cot\theta \\ 0 & a(1 - \cot\theta\kappa_g) & 0 \\ -a(1 - \cot\theta\kappa_g) & -a\cot\theta\dot{\kappa}_g & a(1 - \cot\theta\kappa_g)\kappa_g \end{vmatrix} \\
&= a^3(1 - \cot\theta\kappa_g)^2\kappa_g + a^3(1 - \cot\theta\kappa_g)^2\cot\theta \\
&= a^3(1 - \cot\theta\kappa_g)^2(\kappa_g + \cot\theta)
\end{aligned}$$

Aplicando ahora las fórmulas para la curvatura y la torsión en función de cualquier parámetro, se tienen:

$$\tilde{\kappa} = \frac{\|\tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}''\|}{\|\tilde{\gamma}'\|^3} = \varepsilon\frac{\operatorname{sen}^2\theta(1 - \kappa_g\cot\theta)}{a} \qquad \tilde{\tau} = \frac{\{\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'', \tilde{\gamma}'''\}}{\|\tilde{\gamma}' \wedge \tilde{\gamma}''\|^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta(\kappa_g + \cot\theta)}{a}.$$

De las expresiones anteriores se sigue que $a(\varepsilon\tilde{\kappa} + \cot\theta\tilde{\tau}) = 1$ y por tanto, $\tilde{\gamma}$ es una curva de Bertrand. □

Teorema 2.5. *Toda curva de Bertrand puede construirse a partir de una curva esférica siguiendo el método descrito en la proposición anterior.*

Demostración. Si $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(s)$ una CARPN es de Bertrand, el teorema de caracterización nos asegura la existencia de dos números reales no nulos A y B tales que $A\tilde{\kappa}(s) + B\tilde{\tau}(s) = 1$. Tomamos $a = A$ y $\cot\theta = B/a$. Sabemos, por la demostración del teorema de caracterización, que $A \geq 0$, por lo que suponemos $a > 0$ y escogemos $\varepsilon = \pm 1$ tal que $\varepsilon\frac{\operatorname{sen}\theta}{a} > 0$. En base a lo anterior, definimos entonces la curva esférica:

$$\gamma(s) = \varepsilon(\operatorname{sen}\theta\tilde{\mathbf{t}}(s) - cos\theta\tilde{\mathbf{b}}(s)).$$

Demostraremos que $\tilde{\gamma}(s)$ es una curva de Bertrand correspondiente a $\gamma(s)$ mediante el método descrito antes:

$$\gamma'(s) = \varepsilon(\operatorname{sen}\theta\tilde{\kappa}(s) + cos\theta\tilde{\tau}(s))\tilde{\mathbf{n}}(s) = \varepsilon\frac{\operatorname{sen}\theta}{a}\tilde{\mathbf{n}}(s); \qquad \|\gamma'(s)\| = \varepsilon\frac{\operatorname{sen}\theta}{a}$$

Si denotamos por σ al parámetro natural de γ, obtenemos $\frac{d\sigma}{ds} = \varepsilon\frac{\operatorname{sen}\theta}{a}$. Por otra parte:

$$a\gamma(s)\frac{d\sigma}{ds} = a\varepsilon(\operatorname{sen}\theta\tilde{\mathbf{t}}(s) - cos\theta\tilde{\mathbf{b}}(s))\varepsilon\frac{\operatorname{sen}\theta}{a} = \operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta\tilde{\mathbf{t}}(s) - cos\theta\tilde{\mathbf{b}}(s))$$

$$\begin{aligned} a\cot\theta\gamma(s)\wedge\frac{d\gamma}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} &= a\cot\theta\varepsilon(\operatorname{sen}\theta\tilde{\mathbf{t}}(s)-cos\theta\tilde{\mathbf{b}}(s))\wedge\varepsilon\frac{\operatorname{sen}\theta}{a}\tilde{\mathbf{n}}(s) \\ &= cos\theta(\operatorname{sen}\theta\tilde{\mathbf{b}}(s)+cos\theta\tilde{\mathbf{t}}(s)) \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{s}=\gamma\wedge\dfrac{d\gamma}{ds}$, obtenemos:

$$a\int_{\sigma_0}^{\sigma}\gamma(\tau)d\tau+a\cot\theta\int_{\sigma_0}^{\sigma}\mathbf{s}(\tau)d\tau=\int_{s_0}^{s}\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta\tilde{\mathbf{t}}(t)-\cos\theta\tilde{\mathbf{b}}(t))dt$$

$$+\int_{s_0}^{s}cos\theta(\operatorname{sen}\theta\tilde{\mathbf{b}}(t)+\cos\theta\tilde{\mathbf{t}}(t))dt=\int_{s_0}^{s}\tilde{\mathbf{t}}(t)dt=\tilde{\gamma}(s)+\mathbf{c}$$

Finalmente, basta despejar $\tilde{\gamma}(s)$ para obtener el resultado. □

Corolario 2.6. *Una curva esférica es una circunferencia si y sólo si sus curvas de Bertrand correspondientes, según el método descrito anteriormente, son hélices circulares.*

Demostración. Una curva esférica es una circunferencia si y sólo es plana, esto es, su torsión es nula. Dada la curva esférica $\gamma: I\longrightarrow S^2$ parametrizada naturalmente, su torsión es $\tau=\frac{\{\dot\gamma,\ddot\gamma,\dddot\gamma\}}{\kappa^2}$. Por otra parte, $\kappa_g=\{\gamma,\dot\gamma,\ddot\gamma\}$. Derivando y teniendo en cuenta las propiedades del producto mixto, obtenemos $\dot\kappa_g=\{\dot\gamma,\ddot\gamma,\dddot\gamma\}$, por lo que $\tau=0$ si y sólo si $\dot\kappa_g=0$.

En la demostración de la proposición 4 se obtuvieron unas expresiones de $\tilde\kappa$ y $\tilde\tau$ (referentes a $\tilde\gamma$), a partir de las cuales, por derivación, se llega a:

$$\dot{\tilde\kappa}=-\varepsilon\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{a}\dot\kappa_g \qquad \dot{\tilde\tau}=\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{a}\dot\kappa_g$$

Por tanto:

$$\tau=0\Longleftrightarrow\dot\kappa_g=0\Longleftrightarrow\dot{\tilde\kappa}=\dot{\tilde\tau}=0$$

Y esto ocurre si y sólo si $\tilde\gamma$ es una hélice circular. □

3 Una aplicación de las curvas de Bertrand

En esta sección se añaden algunas notas aclaratorias a la demostración que hacen Izumiya y Takeuchi [3] para probar, por aplicación de las curvas de Bertrand, que el helicoide recto es la única superficie mínima, aparte del plano euclídeo, que es reglada. Para ello, aparte de la propiedad de estas curvas que caracteriza a las hélices circulares, se requerirán también algunos resultados previos de superficies regladas. Entre ellos, el que se enuncia y demuestra en el siguiente Lema 1 y el que afirma que *la curvatura de Gauss de una superficie reglada mínima se anula, a lo sumo, en puntos aislados*, cuya demostración puede ser consultada en la Sección 3 de [4].

Lema 3.1. *Sea M una superficie y $p \in M$ tal que $K(p) < 0$ y $H(p) = 0$, entonces p admite un par de direcciones asintóticas ortogonales.*

Demostración. Dado $p \in M$, tenemos por hipótesis que $H(p) = 0$ y $K(p) < 0$. Por el teorema de Euler, dado $Y \in T_pM$

$$\kappa_n(Y) = \kappa_1(p)\cos^2\theta + \kappa_2(p)\operatorname{sen}^2\theta,$$

siendo $\theta = (\widehat{X^{(1)}, Y})$, donde $\theta \in [0, 2\pi)$. Puesto que las direcciones asintóticas son aquellas con curvatura normal nula

$$\begin{aligned} \kappa_n(Y) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \kappa_n(Y) = \kappa_1(p)\cos^2\theta + \kappa_2(p)\operatorname{sen}^2\theta \\ &\Longleftrightarrow \quad \kappa_1(p) + \kappa_2(p)\tan^2\theta = 0 \overset{\mathrm{K(p)<0}}{\Longleftrightarrow} \tan\theta = \pm\sqrt{-\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \\ &\overset{\mathrm{H(p)=0}}{\Longrightarrow} \quad \tan\theta = \pm 1 \Longrightarrow \begin{cases} \theta_1 &= \frac{\pi}{4} \\ \theta_2 &= 3\frac{\pi}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces, hemos encontrado dos direcciones asintóticas que forman un ángulo θ_1 y θ_2 respectivamente con la dirección principal $X^{(1)}$ y además difieren en un ángulo de $\frac{\pi}{2}$, por lo que son ortogonales. □

Teorema 3.2. *Con excepción del plano, el helicoide recto es la única superficie reglada que es además, mínima.*

Demostración. Supondremos ya conocido que el helicoide recto es una superficie reglada y además mínima, es decir, que $H = 0$. Se va a demostrar entonces que es la única superficie reglada que es además mínima.

Para ello, supongamos que tenemos una superficie reglada M que es mínima, siendo M distinta de un plano. Entonces, $\kappa_1 = -\kappa_2$, por lo que $K = -\kappa_1^2 \leq 0$. De aquí sigue que, como la curvatura de Gauss de una superficie reglada mínima sólo se anula en puntos aislados, podemos encontrar un entorno W de puntos hiperbólicos en M.

Por el Lema 1, el entorno W está recubierto por dos familias de curvas asintóticas que se cortan ortogonalmente. Como M es reglada, por cada punto pasará una recta generatriz que será una de las dos líneas asintóticas que pasen por ese punto, pues por el teorema de Meusnier se tiene $\kappa_n = \kappa\cos\theta$ con $\theta = (\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}})$, y como la curvatura κ de una recta es nula, tenemos que su curvatura normal κ_n tambien es nula. Como las generatrices son líneas asintóticas y M no es un plano, podemos elegir un punto $p \in M$ tal que la línea asintótica que no es generatriz tenga torsión no nula en p.

Recordamos que las líneas asintóticas de una superficie se caracterizan porque su vector binormal $\mathbf{b}$ es paralelo al vector normal a la superficie $\mathbf{N}$, por tanto, el vector normal principal $\mathbf{n}$ tendrá la dirección de la recta generatriz en cada punto de W, por ser las líneas asintóticas ortogonales. Existe entonces un entorno

$V \subset W$ tal que las generatrices de V son normales principales de la familia de curvas asintóticas no rectilíneas. Por tanto, las líneas asintóticas no rectilíneas comparten las mismas rectas normales, por lo que podemos afirmar que son asociadas. Como vimos anteriormente, una curva que tiene más de una curva asociada es necesariamente una hélice circular. Tenemos entonces que V es parte de un helicoide recto, ya que éste se obtiene como la superficie reglada de las normales principales de una hélice circular. Como la torsión de éstas curvas es constante, es obvio que toda la superficie es parte de un helicoide recto. □

Referencias

[1] Bloch, E.D.: A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry. Birkäuser, 1997.

[2] Do Carmo, M.P. Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. Alianza Editorial, 1990.

[3] Izumiya, S.;Takeuchi, N. Special curves and ruled surfaces Contributions to Algebra and Geometry 44:1 (2003), 203-212.

[4] Izumiya, S.;Takeuchi, N. Generic properties of Helices and Bertrand curves. Journal of Geometry 1 y 2 (2002), 97-109.

[5] Kasap, E. A method of the determination of a geodesic curve on ruled surface with time-like rulings. Novi Sad Journal of Mathematics 35:2 (2005), 103-110.

[6] Kasap, E.; Kuruoglu, N. The Bertrand offsets of ruled surfaces in R13. Vietnamese Academy of Science and Technology, Institute of Mathematics. Personal Communication.

[7] Osman, O.A.; Handan, B.; Mahmut, E.: On the Ruled surfaces in Minkowski 3-space R13. Journal of Zhejiang University SCIENCE A 7:3 (2006), 326-329

[8] website: http://www.uv.es/∼monterde/pdfs/GDC-cap16.pdf (Sobre la base de Sabban)

Dirección de los autores

Antonio González Herrera — Universidad de Sevilla, Facultad de Matemáticas, Dpto. Geometría y Topología, Aptdo 1160. 41080-Sevilla (España)

e-mail: `antgonher@alum.us.es`

Juan Núñez Valdés — Universidad de Sevilla, Facultad de Matemáticas, Dpto. Geometría y Topología, Aptdo 1160. 41080-Sevilla (España)

e-mail: `jnvaldes@us.es`