

## Estudio De La Estabilidad Y De Las Bifurcaciones De Los Equilibrios De Un Sistema Dinámico. Aplicación Al Mercado Cervecerero Español

VELASCO MORENTE, F.\*; NADAL MORALES, P.\*; GONZÁLEZ ABRIL, L.\*; VÍLCHEZ LOBATO, M. L.\*\*

\*Grupo COSDE. Universidad de Sevilla. Dpto. Economía Aplicada I. Avda. Ramón y Cajal, 1. 41018 Sevilla. \*\*Universidad de Huelva. Dpto. de Economía General y Estadística. Plaza de la Merced, 11. 21071 Huelva.

E-mails: [velasco@us.es](mailto:velasco@us.es), [pnadal@us.es](mailto:pnadal@us.es), [luisgon@us.es](mailto:luisgon@us.es) - [lobato@uhu.es](mailto:lobato@uhu.es)

### RESUMEN

En este trabajo estudiamos la existencia de bifurcaciones de codimensión uno en un modelo dinámico económico, en tiempo discreto, que relaciona el mercado actual y potencial de una colectividad cualquiera. En primer lugar, se establecen condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad del único equilibrio del sistema, en función de los parámetros económicos del modelo. Esto nos permite la clasificación de dicho equilibrio en el espacio paramétrico. En este contexto, la estabilidad estructural es un punto clave a estudiar, esto es, si las propiedades dinámicas cualitativas del sistema persisten bajo pequeñas perturbaciones en su estructura. Este es el primer paso en el análisis de bifurcaciones. Los valores de los parámetros para los cuales el sistema no es estructuralmente estable, reciben el nombre de valores de bifurcación. Es por ello que en segundo lugar se analizan los cambios en el número y/o la estabilidad de los equilibrios del sistema, conforme a variaciones en los parámetros del mismo, centrando la atención en las bifurcaciones de codimensión 1 (Flip, Fold y Neimark-Sacker). Finalmente, se estudia el caso del mercado cervecero español, considerando como referencia la marca San Miguel. Se analiza su evolución y se da la interpretación económica de los resultados obtenidos.

*Palabras claves:* Estabilidad, Bifurcación de codimensión 1, Mercado cervecero español.

### Stability and bifurcations in a dynamical model of current and potential market. An application to the Spanish beer market

#### ABSTRACT

This paper deals with the theory of codimension one bifurcations applied to a discrete-time economic dynamic model, that relates the current and potential market of a collective anyone. First, some necessary and sufficient conditions are established for the stability of the only stationary state of the system, according to the values of the economic parameters of the model. This allow us to classify the equilibrium point in a parametric space. In this context, structural stability is a key point to study, that is, if the qualitative dynamic properties of the system persist when its structure is perturbed. The study of the structural stability is the first step to follow in the analysis of the bifurcations lying in the system. The values of the parameters for which the system is not structurally stable are called bifurcation values. So secondly, changes in the number and/or the stability of stationay states are analyzed, focussing our attention on codimension one bifurcations (Flip, Fold and Neimark-Sacker bifurcations). Finally, a numerical example is presented where results are applied to the Spanish beer market. A time evolution analysis is made and we give economic sense to the obtained results.

*Keywords:* Stability, Codimension one bifurcation, Spanish brewer market.

Clasificación JEL: C61,C62, M39.

Artículo recibido en Septiembre de 2005 y aceptado para su publicación en Enero de 2007.

Artículo disponible en versión electrónica en la página [www.revista-eea.net](http://www.revista-eea.net), ref.: e-25112.

## 1. INTRODUCCIÓN

Si hacemos referencia a una organización en cualquier sector económico, encontramos que un determinado producto del mercado posee, en un instante de tiempo dado, una cuota de participación, o lo que es lo mismo, tiene un determinado nivel de demanda, que es consecuencia de las compras que realizan sus clientes actuales. A su vez, existe para esta organización un mercado de clientes potenciales, compuesto por aquellos que compran a organizaciones competidoras y por otros, que teóricamente podrían ser clientes del producto pero que no lo son.

El mercado actual de la organización, en cada instante de tiempo, tendrá un determinado nivel de las relaciones de intercambio con el entorno y del propio esfuerzo de marketing que se realice. Los efectos positivos para la organización se traducen en un incremento de la demanda o lo que es lo mismo en un mayor acercamiento al mercado potencial. Este movimiento entre mercado potencial y actual, en cada instante de tiempo, constituye un modelo dinámico definido básicamente por las variaciones en el crecimiento, positivo o negativo, de clientes actuales y potenciales del producto del mercado y de la organización.

Por otro lado, es conocido que una parte importante de la información sobre la disponibilidad, precio y calidad de un producto viene dada por la interacción con otros individuos, más que por la información directa y la persuasión del vendedor. La facilidad con la que se pueden adquirir productos o servicios nuevos, que interactúan con otros menos innovadores, y la información verbal pueden influir en la decisión que se tome de la compra. En otras palabras, los flujos de información puros y la reputación juegan un papel muy importante en las ventas reiteradas de productos.

Por todo ello en el diseño del sistema dinámico, consideraremos una población compuesta de clientes actuales y potenciales de un producto o servicio. Se supone que ningún comprador potencial comprará el producto espontáneamente y que la población es homogénea. La intensidad de los contactos del cliente potencial con compras anteriores influye en la transformación de un individuo de “comprador potencial” a “comprador efectivo”. Se considera que hay una “comunicación sucesiva” entre un cliente potencial y un usuario real que suministra un estímulo extra para realizar una buena compra. Sin embargo, después de un periodo de tiempo, algunos usuarios dejan de comprar el producto y se convierten en pasivos, por ello, asumimos una “ley de realimentación” de publicidad que resulta de un teorema de Dorfman-Steiner en el que se afirma que la razón de dólar de publicidad a dólar de venta es igual a la razón de elasticidad de la demanda de publicidad a elasticidad negativa del precio y de aquí, se sigue que si las dos elasticidades son constantes, la razón óptima de publicidad a ventas permanece constante.

En el estudio de la estabilidad en los sistemas dinámicos es de vital importancia conocer cuál es la región paramétrica en la que dicho sistema tiene un comportamiento estable o inestable. En el ámbito de la economía, los trabajos de Tse et al.(1994),

Nagurney et al. (1996), Dong et al (1996), Jooster (1996), Perrings (1998), Bischi et al (2001), Vilchez et al. (2004), Landa y Velasco (2004) y Mitra y Nishimura (2005) entre otros, son ejemplos al respecto.

Por otro lado, las organizaciones mercantiles pueden mantener sus cuotas de mercado en equilibrio durante determinados periodos de tiempo. Sin embargo, esto no significa que esta situación de equilibrio sea permanente, ya que la estrategia de cada organización competitiva, en un mercado de referencia y para cualquier producto de ese mercado, ha de ir encaminada a conseguir una cuota de mercado lo más elevada posible. Aunque no es menos cierto que cualquier comportamiento competitivo encaminado a conseguir ese objetivo, será respondido por las organizaciones competidoras que defenderán sus respectivas posiciones de mercado. Por ello, un entorno agresivo, un esfuerzo de marketing mal orientado u otras causas desconocidas, hacen que las posiciones conseguidas por cada organización competitiva no permanezcan, necesariamente, en equilibrio estable.

De lo anterior se deduce que para cualquier organización es importante conocer con antelación si su devenir, en un entorno dado y para un determinado producto, va a pasar por aumentos o disminuciones de su cuota de mercado, de forma cíclica o, en su caso, si no va a ser así. En los trabajos de Velasco et al. (2002), Vilchez et al. (2002), Vilchez et al (2003), Vilchez et al (2004) o Landa y Velasco (2004) se encuentran recogidos ejemplos en los que se estudian bifurcaciones que provocan estos comportamientos cíclicos en modelos dinámicos económicos en tiempo continuo.

En este trabajo, se presenta un modelo dinámico económico y se analiza bajo qué condiciones, si se realizan pequeñas variaciones en los parámetros del modelo, el comportamiento de las trayectorias va a ser cualitativamente diferente en un entorno del punto fijo o de equilibrio. En particular, se estudian la estabilidad y bifurcaciones del modelo referido al mercado cervecero español.

El resto del artículo está estructurado como sigue: en la sección segunda se presenta el modelo en tiempo continuo propuesto por Feichtinger (1992) y ampliado por Landa y Velasco (2004) y se lleva a cabo la discretización del mismo. A continuación en la sección tercera, obtenemos condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad del único equilibrio del sistema, las cuales nos permiten determinar la naturaleza del mismo. En la sección cuarta introducimos el concepto de bifurcación y de codimensión en un sistema dinámico (Kuznetsov 1998) y estudiamos las bifurcaciones de codimensión 1 presentes en el modelo. Se finaliza con una sección de conclusiones y trabajo futuro.

## 2. EL MODELO

Según Feichtinger (1992) el mercado de un determinado producto se divide en clientes potenciales y actuales. Además, el número de clientes potenciales que comprarán

el producto y se harán clientes en algún intervalo corto de tiempo es proporcional al número actual de compradores potenciales, al número de clientes actuales y a la longitud del intervalo considerado. A esta constante de proporcionalidad se le llama *tasa de contacto global* y se puede incrementar llevando a cabo un aumento en los gastos de publicidad. Por este motivo se suele identificar la tasa de contacto con los gastos de publicidad en un momento  $t$  y se representa por  $a(t)$ .

Se asume, además, que los clientes actuales cambian a una marca rival en una proporción  $b$  (no dependiente del tiempo), aunque es cierto que las subidas de ventas de artículos semejantes de otras marcas o firmas afines influyen sobre el valor del parámetro, ya que los individuos pueden volver al producto original o permanecer en el grupo de los clientes potenciales.

Por último, se considera que algunos clientes dejan el mercado para siempre (por ejemplo, por muerte o emigración) a una tasa constante  $e$  y que hay un flujo continuo de nuevos clientes que entran en el mercado desde alguna fuente, tal por un aumento de ingresos, alguna otra forma de publicidad o cambios demográficos. De este modo, los individuos fluyen dentro del mercado a una tasa de input  $k$ .

Si se representan por  $x(t)$  e  $y(t)$  al número de compradores potenciales y al número de clientes actuales de una marca en el instante  $t$ , respectivamente, la variación en el crecimiento del mercado actual de clientes vendrá definida por aquellas personas que son atraídas al producto del mercado de la organización, debido al efecto que produce el contacto de las personas que componen el mercado actual con aquellas que constituyen el mercado potencial, es decir,  $a(t)x(t)y(t)$ . Como es natural, a ese poder de atracción habrá que restarle el número de clientes actuales que dejan el mercado de la organización para pasar al mercado potencial  $b y(t)$ , más los que dejan de ser clientes actuales por muerte o emigración  $e y(t)$ , ambos se consideran proporcionales al número de clientes actuales.

Por otra parte, la variación en el crecimiento del mercado potencial, viene dada por el número de personas que se incorporan al mercado potencial del producto, denotado por  $k$ , más aquellos clientes actuales que pasan a ser clientes potenciales de la misma,  $b y(t)$ , menos los clientes potenciales que pasan al mercado actual del producto  $a(t)x(t)y(t)$ .

Si se denotan por  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  las variaciones en el crecimiento del número de clientes potenciales y actuales respectivamente, el dinamismo entre lo potencial y lo actual se puede modelizar por el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = k - a(t)x(t)y(t) + b y(t) \\ \dot{y} = a(t)x(t)y(t) - b y(t) - e y(t). \end{cases} \quad (1)$$

Ahora bien, se puede realizar una segunda consideración sobre este modelo que consiste en asumir un precio de ventas constante para el producto del mercado y una tasa repetida de ventas para el cliente actual. Bajo estas consideraciones, si se denota por  $a$ , a la tasa de contacto uno a uno, se tiene que la tasa de publicidad (que se había identificado con la tasa de contacto global) es proporcional al número de clientes actuales. Denotando a esa constante de proporcionalidad por  $a$ , esta condición puede escribirse como:

$$a(t) = a y(t) \quad (2)$$

y combinando el sistema (1) con la ecuación (2), se obtiene el modelo no lineal con el que Feichtinger estableció la relación dinámica entre el mercado potencial y actual:

$$\begin{cases} \dot{x} = k - ax(t)y(t)^2 + b y(t) \\ \dot{y} = ax(t)y(t)^2 - b y(t) - e y(t). \end{cases} \quad (3)$$

Landa y Velasco (2004) ampliaron el modelo anterior al considerar la respuesta que se obtiene debido al esfuerzo de publicidad, en forma explícita, realizado por la organización sobre el mercado potencial, en el caso general de que dicho esfuerzo vaya encaminado a aumentar la demanda del producto del mercado. Denotamos por  $c$  al esfuerzo de publicidad y tenemos, por tanto, que la *información entre clientes* viene dada por  $a(t)x(t)y(t)$ . Además, ya que el esfuerzo de publicidad va encaminado a atraer hacia el mercado actual elementos que pertenecen al mercado potencial, en la ecuación que describe la variación del mercado potencial, debe restarse esa respuesta. Por el contrario, en la ecuación que describe la variación del mercado actual, la atracción del esfuerzo de publicidad sobre el mercado potencial debe considerarse en sentido positivo, ya que va dirigido a incrementar el número de clientes actuales del producto. En definitiva, el modelo establecido por Landa y Velasco (2004) es:

$$\begin{cases} \dot{x} = k - ax(t)y(t)^2 + by(t) - cx(t) \\ \dot{y} = ax(t)y(t)^2 - by(t) - ey(t) + cx(t) \end{cases} \quad a, b, k, e, c \geq 0$$

En problemas reales se observa que hay pocos fenómenos de este tipo que se producen en tiempo continuo, y por lo tanto, pensamos que los datos reales de ventas se ajustarán mejor si los cambios del mercado se realizan en unidades de tiempo discretas y no continuas, es decir, si el modelo se tratase como un modelo dinámico en tiempo discreto (ejemplos de modelos dinámicos continuos se encuentran en las referencias). Por este motivo, hemos discretizado el modelo anterior y obtenido el siguiente:

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + k - ax_t y_t^2 + by_t - cx_t \\ y_{t+1} = y_t + ax_t y_t^2 - by_t - ey_t + cx_t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}, \quad a, b, c, k, e \geq 0. \quad (4)$$

### 3. EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD

El mercado actual y potencial de una colectividad, cuando evolucionan a lo largo del tiempo tienden a encontrar momentos en el que quedan atrapados en unos determinados niveles, que hacen que permanezcan constantes o aproximadamente constantes cerca de esos niveles, es lo que se denomina un entorno estable. Así, es normal encontrar, en entornos estables, que las sociedades mantengan sus cuotas de mercado en equilibrio, o casi en equilibrio, durante determinados periodos de tiempo y, de ahí, que estemos interesados en estudiar bajo qué condiciones la relación dinámica, dada en (4), existente entre los dos mercados alcanza algún equilibrio.

**Proposición 3.1** El sistema (4) tiene un único punto fijo (o de equilibrio) si todos los parámetros son positivos.

*Demostración:*

Los puntos fijos del sistema (4) son las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x + k - axy^2 + by - cx \\ y = y + axy^2 - by - ey + cx \end{cases} \quad (5)$$

y se sigue que el único punto que verifica este sistema viene dado por:

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{e(b+e)k}{ce^2 + ak^2}, \frac{k}{e} \right). \quad (6)$$

Además, dicha solución no presenta ningún tipo de inconsistencia ya que todos los parámetros representan cantidades positivas y las componentes  $x^*$ ,  $y^*$  son no nulas y positivas, por lo que el equilibrio, en principio, tiene sentido económico para cualesquiera valores (positivos) asignados a los parámetros.

A continuación estudiamos la estabilidad local del punto fijo, es decir, en qué casos éste se comporta como un sumidero o como una fuente. Para ello analizamos el valor del módulo de los multiplicadores de la matriz Jacobiana del sistema (4) en dicho punto.

Consideramos el sistema lineal asociado (ver Kuznetsov (1998) o Guckenheimer y Holmes (1993))  $x \rightarrow Jx$ , donde  $J$  es la matriz Jacobiana del sistema (4) evaluada en el punto fijo (6). Dicha matriz tiene la expresión general:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - c - ay^{*2} & b - 2ax^*y^* \\ c + ay^{*2} & 1 - b - e + 2ax^*y^* \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico  $P_2(\mu)$  viene dado por:  $P_2(\mu) = \mu^2 + d_1\mu + d_0$  donde

$$d_1 = -2 + b + c + e + \frac{ak^2}{e^2} - \frac{2a(b+e)k^2}{ce^2 + ak^2} \text{ y}$$

$$d_0 = 1 - b - c - e + ce - \frac{ak^2}{e^2} + \frac{ak^2}{e} + \frac{2a(b+e)k^2}{ce^2 + ak^2}$$

Con el fin de simplificar las expresiones llevamos a cabo el siguiente cambio de pa-

rámetros:  $A = b + c + e + \frac{ak^2}{e^2} - \frac{2a(b+e)k^2}{ce^2 + ak^2} - 2$ ,  $B = ce + \frac{ak^2}{e}$ , y se sigue que:

$$P_2(\mu) \equiv \mu^2 + A\mu + (B - A - 1) = 0 \quad (10)$$

y los multiplicadores asociados son:

$$\mu_1 = \frac{-A + \sqrt{(A+2)^2 - 4B}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{-A - \sqrt{(A+2)^2 - 4B}}{2} \quad (11)$$

**Proposición 3.2** (*Condición necesaria y suficiente de estabilidad*) El punto fijo (6) del sistema (4) es estable si y sólo si está situado en la región del plano paramétrico  $AB$ , limitada por las rectas  $B = 0$ ,  $B = 2A$  y  $B = A + 2$  (ver Figura 1).

*Demostración:*

La condición de estabilidad de Schur (ver Gandolfo (1997)) para el polinomio característico dado por  $c_0\mu^2 + c_1\mu + c_2$ , asegura que los multiplicadores cumplen que  $|\mu_1| < 1$  y  $|\mu_2| < 1$  si se verifica simultáneamente:

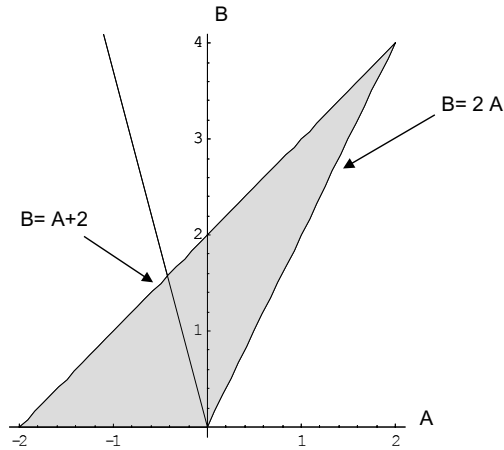
$$c_0 + c_1 + c_2 > 0, \quad c_0 - c_1 + c_2 > 0, \quad c_0 + c_2 > 0, \quad c_0 - c_2 > 0$$

y teniendo en cuenta las condiciones de nuestro problema se sigue:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = A, \quad c_2 = B - A - 1. \quad (12)$$

Como se tiene que  $B$  es siempre positivo, se llega a que el punto fijo es estable si:

$$2A < B < A + 2; \quad B > 0 \quad (13)$$



**Figura 1: Espacio paramétrico de estabilidad del sistema (4).**

Por otro lado, para la clasificación del punto fijo según los valores de los parámetros, es necesario además conocer si los multiplicadores son reales (el punto fijo es un nodo o un punto de silla), o complejos conjugados (el punto fijo es un foco), y para ello estudiamos el discriminante asociado al polinomio  $P_2(\mu)$ :  $\Delta = (A + 2)^2 - 4B$ .

**Proposición 3.3** Si el punto fijo (6) del sistema (4) verifica  $B = \frac{1}{4}(A + 2)^2$  entonces:

- Es un nodo estable si  $-2 < A < 2$ .
- Es un nodo inestable si  $A < -2$  ó  $A > 2$ .

Demostración:

El discriminante  $\Delta = (A + 2)^2 - 4B$  se anula sobre la parábola del espacio paramétrico:

$$B = \frac{1}{4}(A + 2)^2 \quad (14)$$

y en estos casos, los multiplicadores asociados son:  $\mu_1 = \mu_2 = \frac{-A}{2}$  y de ello la proposición.



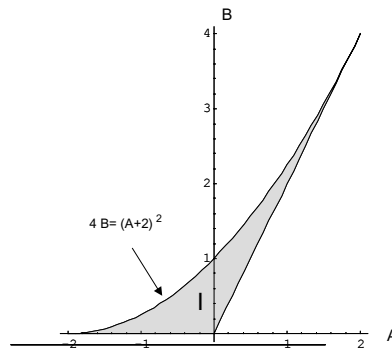
**Proposición 3.4** Si el punto fijo (6) del sistema (4) está situado en la región del plano paramétrico  $4B < (A+2)^2$ , entonces

- i) Es un nodo estable si  $\{2A < B < A+2, B > 0\}$  (Región I, Figura 2 y 5).
- ii) Es un nodo inestable si  $\{B < 0, B < 2A\}$  ó  $\{B > 2A, A > 2\}$  ó  $\{B > 0, A < -2\}$  (Región II, Figura 3 y 5).
- iii) Es un punto de silla si  $\{B > 0, B < 2A\}$  ó  $\{B < 0, B > 2A\}$  (Región III, Figura 3 y 5).

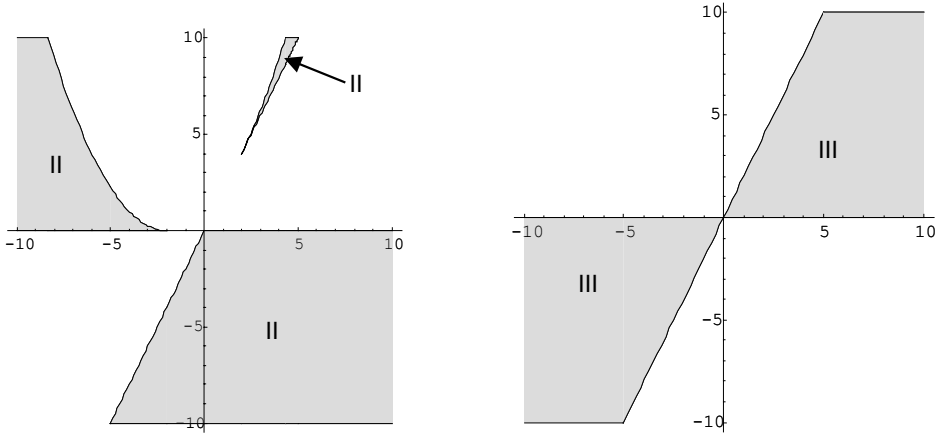
*Demostración:*

i) Si el punto fijo pertenece a la región del plano paramétrico  $4B < (A+2)^2$ , entonces los multiplicadores son reales, por lo que se tiene o bien un nodo o un punto de silla. Aplicando la condición necesaria y suficiente de estabilidad (13), tenemos que si  $2A < B < A+2, B > 0$ , el punto fijo es un nodo estable con lo que se cumple i).

Análogamente se prueban los apartados ii), iii).



**Figura 2. Región paramétrica de los nodos estables.**



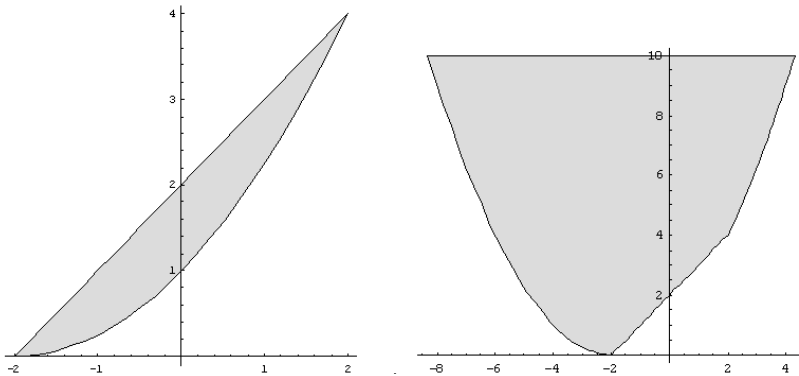
**Figura 3. Región paramétrica de los nodos inestables y de los puntos de silla.**

**Proposición 3.5** Si el punto fijo (6) del sistema (4) está situado en la región del plano paramétrico  $4B > (A + 2)^2$ , entonces:

- Es un foco estable si  $B < A + 2$  (región IV del plano paramétrico  $AB$ ).
- Es un foco inestable si  $B > A + 2$  (región V del plano paramétrico  $AB$ ).

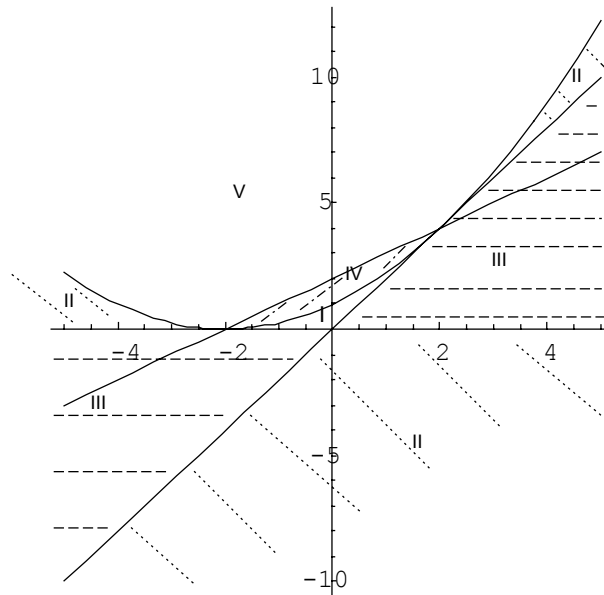
*Demostración:*

Si el punto fijo pertenece a la región del plano paramétrico  $4B > (A + 2)^2$ , entonces los multiplicadores son complejos conjugados, lo que indica que el punto fijo es un foco y por lo tanto, sólo queda analizar su estabilidad, la cual es clara sin más que aplicar la condición necesaria y suficiente de estabilidad.



**Figura 4. Región paramétrica de los focos estables e inestable**

Nota: Aunque siempre se verifica que  $B > 0$ , en la Figura 5 hemos llevado a cabo la representación gráfica de las proposiciones anteriores independientemente del signo de los parámetros  $A$  y  $B$ .



**Figura 5.** Representación gráfica de las regiones de estabilidad e inestabilidad de (4).

#### 4. BIFURCACIONES DE CODIMENSIÓN 1

Sea un sistema dinámico discreto:  $x \rightarrow f(x, \alpha)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  donde  $f$  es suave respecto a  $x, \alpha$ . Sea  $x_0$  un punto de equilibrio no hiperbólico (sus multiplicadores asociados  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son de modulo unidad) del sistema. A medida que varía el parámetro  $\alpha$ , el punto de equilibrio podría perder su hiperbolicidad en los casos en que:

- Un multiplicador simple y positivo se aproxima al círculo unidad alcanzándolo en  $\mu = 1$  (*bifurcación Fold*).
- Un multiplicador simple y negativo se aproxima al círculo unidad alcanzándolo en  $\mu = -1$  (*bifurcación Flip*).
- Un par de multiplicadores simples y complejos llegan al círculo unidad, teniéndose que  $\mu = e^{\pm i\theta_0}$ ,  $0 < \theta_0 < \pi$  (*bifurcación de Neimark-Sacker*).

A las anteriores bifurcaciones se les denominan bifurcaciones de codimensión 1 (Guckenheimer et al (1993), ver Anexo), y de su estudio en el modelo (4) resulta:

**Proposición 4.1** En el modelo (4) no puede ocurrir una bifurcación *Fold*.

*Demostración:*

Hemos de ver que no es posible que exista un único multiplicador real e igual a la unidad ( $\mu = 1$ ). Sabemos que los multiplicadores son números reales cuando los puntos  $(A, B)$  del plano paramétrico están situados por debajo de la parábola  $4B = (A + 2)^2$  (ver Figura 4). Por otra parte,  $\mu_1 = 1$  y  $\mu_2 = 1$  si  $B = 0$ , pero ello no es posible ya que  $B$  siempre es positivo, con lo que  $\mu_1 \neq 1$  y  $\mu_2 \neq 1$ .

*Nota:* En realidad, este resultado es evidente ya que para la existencia de una bifurcación *Fold* es necesario la existencia de más de un punto fijo.

**Proposición 4.2** La condición necesaria para que el modelo (4) presente una bifurcación *Flip* es que el punto fijo esté sobre la recta  $B = 2A$ .

*Demostración:*

En una bifurcación *Flip*, la matriz Jacobiana del sistema, particularizada en el punto fijo ha de tener un multiplicador  $\mu = -1$  y ningún otro multiplicador con  $|\mu| = 1$ . En el sistema (4) se tiene que  $\mu_1 = -1$  sobre la recta  $B = 2A$  del primer cuadrante del plano paramétrico, ya que  $B$  es positivo. Si en la expresión de  $\mu_2$  sustituimos  $B = 2A$  obtenemos que  $\mu_2 = 1 - A$ , por lo que si  $A \neq 2$  entonces  $\mu_2 \neq -1$  y la matriz Jacobiana en el punto fijo sólo tiene un autovalor real igual a  $-1$ .

**Proposición 4.3** La condición necesaria para que el modelo (4) presente una bifurcación *Neimark-Sacker* es que el punto fijo esté sobre la recta  $B = A + 2$ .

*Demostración:*

Si un punto fijo tiene un par de multiplicadores complejos conjugados  $\mu = e^{\pm i\theta_0}$ ,  $0 < \theta_0 < \pi$ , entonces, genéricamente, una curva invariante cerrada se bifurca desde el punto fijo cuando cruza el valor del parámetro en una u otra dirección, mientras el punto fijo cambia su estabilidad.

En la región  $-2 < A < 2$  del plano paramétrico, los multiplicadores de la matriz Jacobiana en el punto fijo son complejos conjugados cuando el punto fijo está situado por encima de la parábola  $(A + 2)^2 - 4B = 0$ , y así ocurre si el punto fijo está sobre la recta  $B = A + 2$ . Nos queda, por tanto, comprobar que los multiplicadores son unitarios. Al ser complejos conjugados, el módulo de los multiplicadores viene

dado por la expresión  $|\mu_{1,2}|^2 = \left(\frac{-A}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4B - (A + 2)^2}}{2}\right)^2 = B - A - 1$ . Por lo

cual, si  $B = A + 2$ , tenemos que  $|\mu_{1,2}| = 1$ , que es la condición necesaria para que el modelo presente una bifurcación de Neimark-Sacker.

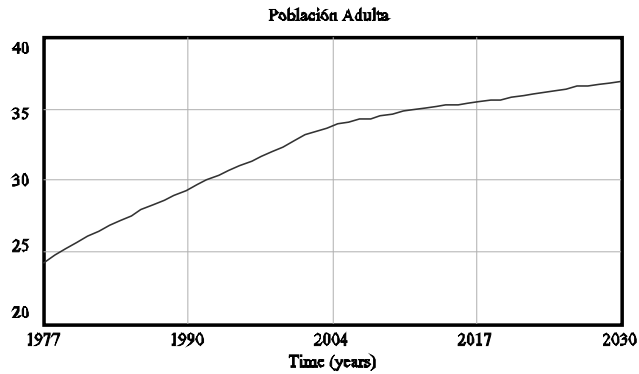
## 5. ESTUDIO DE LAS BIFURCACIONES LOCALES DE CODIMENSIÓN UNO EN EL MERCADO CERVECERO ESPAÑOL

El sistema (4) se ajusta adecuadamente a la realidad de la organización cervecera en España (Nadal (2004)) y por ello estudiamos si las cuotas de dicho mercado, para un determinado producto, tienden a estabilizarse o, si por el contrario, sufren aumentos o disminuciones periódicas.

Del modelo teórico del mercado actual y potencial se sigue que, aplicado al mercado cervecero, existe un único punto fijo (o de equilibrio) para cada grupo cervecero que lo forma y de ahí que comencemos el estudio de las bifurcaciones locales encontrando dicho punto de equilibrio para una determinada marca, en nuestro estudio la marca "San Miguel". Sin embargo, hemos considerado necesario incorporar en este estudio la población española mayor de edad (excluidos los inmigrantes) y, de esta forma, si suponemos que dicha población encuentra un equilibrio  $P$ , entonces el punto fijo (en este caso el número de personas que se incorporan al mercado potencial del producto se escribe como una proporción  $k$  de la población  $P$ , es decir,  $kP$ ) buscado es:

$$x^* = \frac{e(b+e)kP}{ce^2 + a(kP)^2}, \quad y^* = \frac{kP}{e} \quad (15)$$

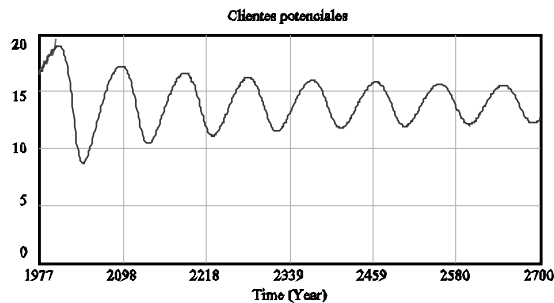
y puede apreciarse que el mercado actual encuentra su equilibrio cuando sus clientes son verdaderamente fieles a la marca en estudio, ya que ese equilibrio no se ve afectado por las variaciones que se puedan producir en el modelo debido a los cambios que experimenten parámetros tales como el paso a una marca rival, la tasa de contacto entre clientes o el esfuerzo de publicidad que se realice sobre el mercado. Tan sólo influyen sobre dicho equilibrio la tasa de entrada y salida del mercado cervecero. Así, nuestro problema se reduce a encontrar el punto de equilibrio de la población adulta y para lograrlo, hemos considerado la población española mayor de edad entre los años 1977 y su proyección hasta el año 2030 (datos obtenidos de la base Tempus del INE), cuya gráfica podemos observar en la Figura 7.

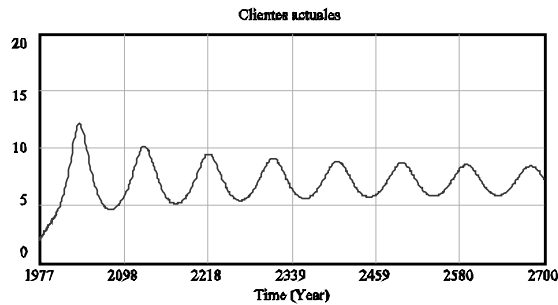


**Figura 7. Población adulta española.**

Por ello, consideramos el modelo de población donde la población adulta viene dada como la diferencia entre la *población elemental* mayor de edad y la *capacidad de población* para la misma (ver Braun (1990)). El modelo poblacional viene dado por  $\Delta p_t = \alpha p_t - \beta p_t^2$ .

Por otro lado, considerando la marca “San Miguel” y los valores de los parámetros de ajuste calibrados para dicha marca, podemos observar, sin más que proyectar dicho mercado, que los clientes potenciales tienden a alcanzar un valor de equilibrio situado entre los diez y quince millones de población adulta, mientras que los clientes actuales tienden a alcanzar un valor de equilibrio entre los cinco y diez millones de la misma población (ver Figura 8) (Nadal (2004)).





**Figura 8. Tendencia de los clientes potenciales y actuales de la marca San Miguel.**

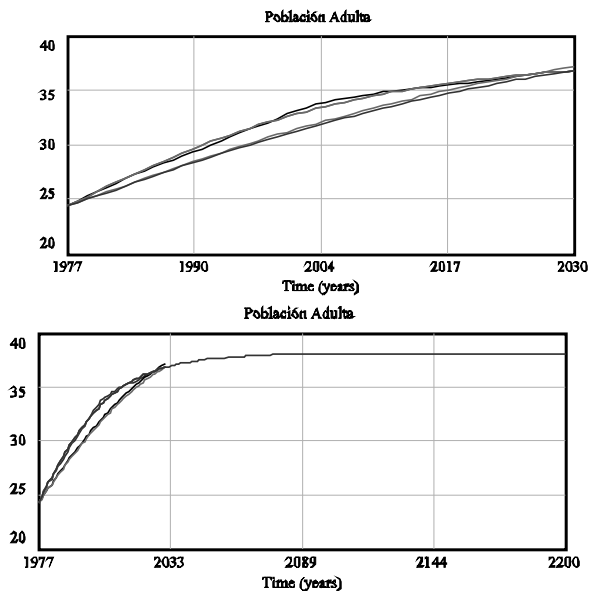
Por todo ello, hemos realizado el calibrado de los parámetros del modelo poblacional, a saber, la *tasa de crecimiento*  $\alpha$  de la población mayor de edad y el *coeficiente vital*  $\beta$  para dicha población y hemos obtenido los valores (se utiliza el programa Vensim):

$$\alpha = 0.0517391; \quad \beta = 0.00135784 \quad (16)$$

y unos intervalos de confianza al 95% (Nadal (2004)):

$$0.0513504 \leq \alpha \leq 0.0520967, \quad 0.00134577 \leq \beta \leq 0.00135784.$$

La bondad del ajuste puede observarse en la Figura 9.



**Figura 9. Ajuste y punto de equilibrio de la población adulta española.**

Por otro lado, un modelo de población que sigue una ley logística presenta un punto fijo no nulo en el valor  $P^* = \frac{\alpha}{\beta}$  y de aquí se sigue que la población adulta española presenta un punto de equilibrio (ver Figura (9.b)):

$$P^* = 38.103.973. \quad (17)$$

Sustituyendo este valor en (15) y los valores calibrados de los parámetros dados por (16) para la marca San Miguel, se tiene que el mercado potencial y el actual para dicha marca encuentra un equilibrio en

$$x^* = 12.766.700 \quad , \quad y^* = 8.327.820. \quad (18)$$

Para clasificar el punto fijo y analizar su estabilidad, calculamos los valores de  $A$  y  $B$ :

$$A = -1.9910595 \quad , \quad B = 0.0059497171 \quad (19)$$

y a partir de la proposición (3.5) se sigue que el punto de equilibrio (18) es un *foco estable* (región IV de la Figura 5), ya que verifica  $4B > (A + 2)^2$ ,  $B < A + 2$ .

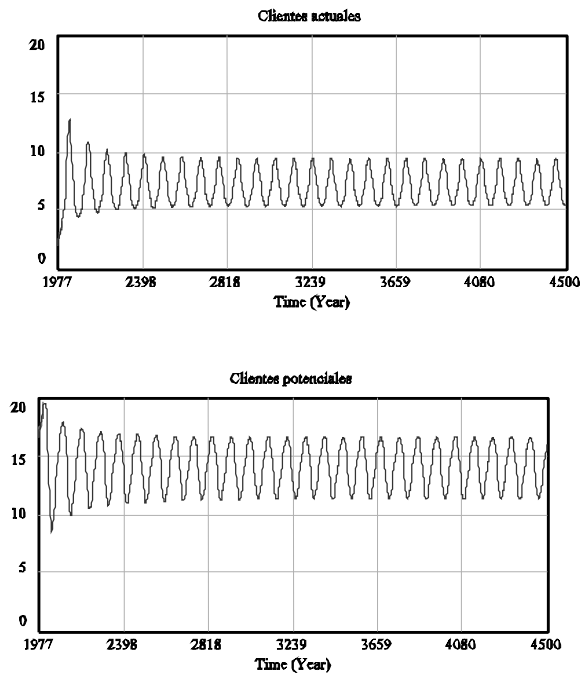
Para estudiar la continuación del punto de equilibrio debemos encontrar la curva de puntos de equilibrio en función de un parámetro determinado. Por otro lado, algunos de los parámetros de ajuste pueden presentar un valor, en cada momento, que traza el límite entre los valores de los parámetros que hacen que los mercados de un determinado sistema mercantil permanezcan constantes (los mercados tienden a alcanzar un equilibrio), y los que hacen que el sistema tienda hacia otra situación distinta. Ahora bien, los valores de los parámetros se alteran debido a cambios en el entorno que rodea al mercado o cambios del mercado en sí mismo, pudiendo aparecer nuevas situaciones donde el mercado actual presenta aumentos periódicos, frente a disminuciones periódicas del mercado potencial y viceversa (es decir, el sistema mercantil tiende a un comportamiento cíclico). Hay dos poderosas razones para que nos planteemos esta última hipótesis:

1. Este tipo de comportamiento puede observarse en la Figura 10, que reflejan el comportamiento de los mercados actual y potencial para la marca San Miguel cuando variamos ligeramente uno de los valores de los parámetros de ajuste. Además, si consideramos los valores de  $A$  y  $B$  dados en (19), podemos ver gráficamente que el punto  $(A, B)$  está muy próximo a la recta  $B = A + 2$  en el plano paramétrico, y además de la proposición (4.3) se sigue que la condición de que el punto  $(A, B)$  esté sobre la recta  $B = A + 2$ , en la región  $-2 < A < 2$ , es la condición necesaria para la existencia de la bifurcación de Neimark-Sacker.

2. Del cálculo de los multiplicadores de la matriz jacobiana en el punto de equilibrio, y utilizando las relaciones para  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , obtenemos:



$\mu_1 = 0.995529 + 0.077004 i$  ,  $\mu_2 = 0.995529 - 0.077004 i$  , con  $|\mu_1| = |\mu_2| = 0.998503$  , es decir, el módulo de los multiplicadores en el punto de equilibrio está muy próximo a la unidad, con lo que al variar ligeramente los valores de los parámetros de ajuste en un entorno del punto de equilibrio, uno o ambos multiplicadores pueden entrar en el círculo unidad, con lo cual se va a cumplir la condición necesaria para la existencia de bifurcaciones de codimensión 1.



**Figura 10. Oscilaciones de los clientes actuales y potenciales.**

De las dos razones anteriores se sigue que es necesario realizar el estudio de la existencia de bifurcaciones de codimensión 1, partiendo de los valores de los parámetros encontrados al ajustar el sistema a los datos obtenidos para la marca de cerveza San Miguel.

El punto de equilibrio del mercado cervecero para la marca San Miguel dado por (18) implica una cuota de mercado del 39.5%, y el análisis de las bifurcaciones puede ser enfocado de las siguientes dos maneras:

i. Analíticamente: estamos interesados en: a) obtener los valores de las variables y los parámetros de ajuste en el punto crítico, b) calcular los multiplicadores de

la matriz Jacobiana en el punto crítico para poder establecer el tipo de bifurcación, c) estudiar si se verifican las condiciones de no degeneración para poder asegurar que estamos ante una bifurcación de codimensión 1, y d) encontrar la forma normal asociada a la bifurcación en estudio

ii. Económicamente: el interés radica en: a) considerar si los valores de los parámetros de ajuste en el punto crítico están incluidos en los intervalos exigidos para la aplicación al mercado actual y potencial al mercado cervecero español, b) analizar las cuotas de mercado tanto para el mercado potencial como para el actual en el punto crítico para comprobar si el comportamiento de dichos mercados está integrado dentro de lo que se pudiera considerar como un proceso lógico y habitual de los mismos, y c) estudiar la evolución del mercado cervecero español, analizando si la conducta de esos mercados tiende hacia un comportamiento cíclico estable o inestable.

Para la realización de este estudio vamos a ir variando uno a uno los parámetros de ajuste del modelo siguiendo un orden decreciente a la sensibilidad que presenta el modelo a dichos cambios. Consideraremos primero los parámetros que no tienen influencia sobre el equilibrio del mercado actual (el esfuerzo de publicidad, el paso a una marca rival y la tasa de contacto) y proseguiremos con los que tienen una influencia activa sobre el equilibrio de dicho mercado (la tasa de entrada y de salida). Se utiliza el programa de simulación para sistemas dinámicos CONTENT (Kuznetsov y Levitin 2004), y se llevan a cabo una simulación numérica donde para cada punto crítico se encuentran: i) El valor del parámetro, los valores de ambos mercados y los valores de los multiplicadores, ii) si la bifurcación es Neimark-Sacker, el coeficiente  $a(0)$ , necesario para establecer la aparición de la curva cerrada invariante que acompaña a este tipo de bifurcación y el ángulo  $\theta$  de la forma normal asociada a la restricción a la variedad centro. Si la bifurcación es Flip, se tiene en cuenta el coeficiente del término cúbico de la forma normal asociada a la restricción a la variedad centro (Kuznetsov (1998)).

### 5.1. Continuación del equilibrio para el esfuerzo de publicidad

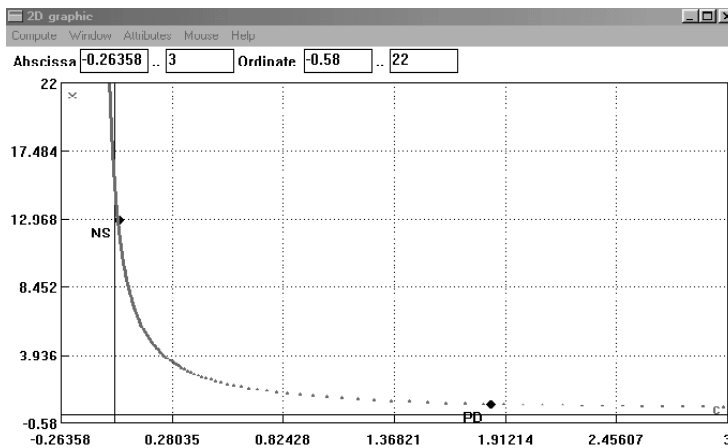
Iniciamos nuestro análisis viendo cómo se comportan los mercados respecto a este parámetro  $c$  y encontramos dos puntos críticos. Uno es un punto de bifurcación de Neimark-Sacker (N. S.) cuyos datos vienen dado por:

Tipo	Valor de $c$	Cientes Pot.	Cientes Act.	$a(0)$	$\theta$
N. S.	0.019101486	12.882.066	8.327.820	-0.000582054	0.0768072

El otro punto crítico obtenido es una bifurcación Flip (o duplicación de periodo (D. P.)) cuyos datos vienen dados por:

Tipo	Valor de $c$	Cientes Potenciales	Cientes Actuales	For. Normal
D. P.	1.8417928	652.694	8.327.820	-0.000489545

En la Figura 11, se muestra una continuación del equilibrio del parámetro  $c$  obteniendo el punto de equilibrio  $(x^*, y^*)$ , supuestos fijos el resto de los parámetros. En la simulación numérica con CONTENT, cuando para un valor del parámetro existe una bifurcación, el desarrollo de la gráfica se detiene y, en el caso de una bifurcación de Neimark-Sacker las letras NS sobre la gráfica indican el valor de la bifurcación. Análogamente ocurre con la bifurcación de duplicación de periodo pero ahora aparecen las letras PD sobre la gráfica. Veamos a continuación un análisis algo más detallado de esta figura.



**Figura 11. Punto de bifurcación N-S para el esfuerzo de publicidad.**

### 1. Para el punto de bifurcación Neimark-Sacker:

- El punto crítico se obtiene para  $c = 0.019101488$ , es decir ha disminuido ligeramente el valor de este parámetro (menos de nueve diezmilésimas). Esto significa que aunque los consumidores actuales siguen fieles a la marca San Miguel (ya que el equilibrio encontrado para esa marca no se ve afectado por el comportamiento de este parámetro), se produce un leve descenso, del 0.2 por ciento de la cuota de mercado para la marca en estudio. Esta disminución es absorbida por el mercado potencial que sufre un aumento de su cuota en la misma proporción. Por lo que podemos concluir

que el esfuerzo de marketing realizado por la marca San Miguel sobre el mercado cervecero, hasta ese momento, era suficiente.

- Analizamos, ahora, qué le ocurre a los mercados cuando se traspasa el valor crítico, es decir, si su equilibrio se hará inestable, tendiendo su comportamiento a ser cíclico (la bifurcación de Neimark-Sacker es supercrítica), o por el contrario, los mercados abandonan un comportamiento cíclico para tender a un equilibrio estable (la bifurcación de Neimark-Sacker es subcrítica). En este caso, como el coeficiente  $\alpha(0)$  es negativo y además se tiene la condición de no degeneración  $e^{i \cdot 0.0712892} \neq 1$ , estamos ante el caso supercrítico, es decir, después de la bifurcación se produce un cambio en la estabilidad del equilibrio y los mercados tenderán hacia un comportamiento cíclico estable.

- La matriz Jacobiana del sistema lineal asociado tiene dos multiplicadores complejos conjugados de módulo unitario,  $\mu_1 = 1_{4.4007292}$ ,  $\mu_2 = 1_{-4.4007292}$ . Además, el modelo lleva asociada la forma normal:  $\tilde{w} = e^{i \cdot 0.0712892} w \left( 1 - 0.000582054 |w|^2 \right) + O(|w|^4)$ ,  $w \in \mathbb{C}$

2. Respecto al punto de bifurcación de Flip, éste se presenta cuando  $c = 1.8417928$  y se observa que:

- El valor del parámetro en el punto crítico no verifica las condiciones que impusimos para realizar el ajuste del modelo al mercado cervecero español, esto es, no se encuentran entre 0 y 1.

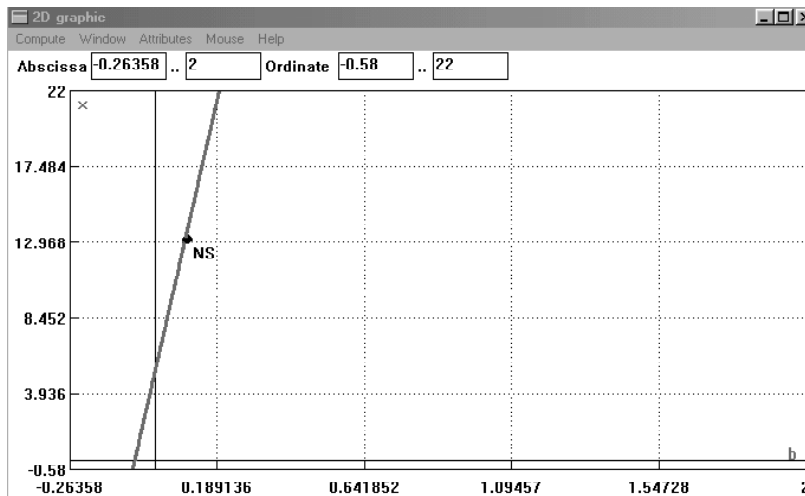
- El valor del parámetro encontrado implica la caída del mercado potencial para la marca San Miguel, mientras se conserva el mercado actual para dicha marca. Por tanto, no está integrado en un proceso habitual de los mercados.

- Ahora bien, desde el punto de vista analítico, podemos añadir que la matriz Jacobiana presenta dos multiplicadores reales,  $\mu_1 = 1_\pi$ ,  $\mu_2 = 0.94181181_0$ , es decir, se cumple la condición necesaria para la existencia de dicha bifurcación y su forma normal asociada viene dada por  $\tilde{\xi} = -\xi - 0.000489545 \xi^3 + O(\xi^4)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ .

## 5.2. Continuación del equilibrio para el paso a una marca rival

Para este estudio se ha obtenido un único punto de bifurcación de Neimark-Sacker (ver Figura 12) con valores:

Tipo	Valor de b	Cientes Pot.	Cientes Act.	$\alpha(0)$	$\theta$
N.S.	0.094908204	13.194.706	8.327.820	-0.000597801	0.0771535



**Figura 12. Puntos de bifurcación para el paso a una marca rival.**

A partir de los valores de la tabla se sigue que:

- Existe un punto de bifurcación para el valor crítico  $b = 0.094908204$  lo que significa que el paso a una marca rival ha aumentado en aproximadamente cinco milésimas. Dicho aumento lleva a un incremento de la población consumidora que, como era de esperar, no se traduce favorablemente en un aumento de la cuota de mercado. En efecto, comprobamos que el mercado actual pierde (aún manteniendo el número de sus consumidores habituales), un 0.8 por ciento de la cuota de mercado, es decir, el aumento de la población consumidora sólo revierte favorablemente para las marcas competidoras que vuelven a beneficiarse de esta pérdida de mercado al ver cómo aumentan el número de sus clientes habituales.

- Por otra parte, el coeficiente  $a(0)$  es negativo y se sigue verificando la condición de no degeneración, con lo cual podemos indicar que los mercados para la marca San Miguel pierden la estabilidad del equilibrio y tienden a comportarse de una forma cíclica.

- Por último, señalar que el valor de los multiplicadores en el punto crítico es:

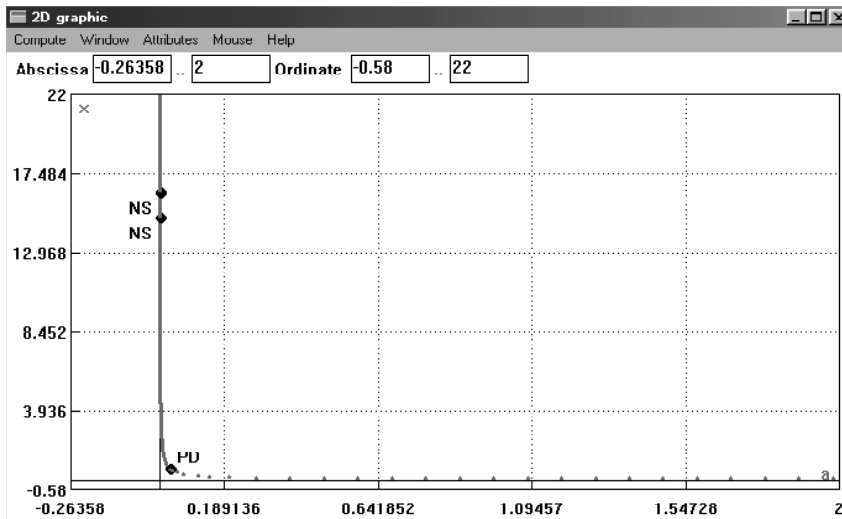
$\mu_1 = 1_{4.205724}$ ,  $\mu_2 = 1_{-4.205724}$  y que el modelo lleva asociada la forma normal:

$$\tilde{w} = e^{i 0.0771535} w \left( 1 - 0.000597801 |w|^2 \right) + O(|w|^4), \quad w \in \mathbb{C}.$$

### 5.3. Continuación del equilibrio para la tasa de contacto.

En este caso se encuentran los puntos de bifurcación (ver Figura 13) que reflejamos en la siguiente tabla:

Tipo	Valor de $a$	Cl. Pot.	Cl. Act.	$a(0)$	$\theta$
N.S.	0.000920348	14.952.463	8.327.820	-0.000537833	0.0712892
N.S.	0.000813196	16.407.228	8.327.820	-0.00051007	0.068054
Tipo	Valor de $a$	Cl. Pot.	Cl. Act.	For. Normal	
D.P.	0.0316482510	5.678.826	8.327820	-0.0462343	



**Figura 13. Puntos de bifurcación para la tasa de contacto.**

Del análisis de los resultados se sigue que para el primer punto de bifurcación:

- La tasa de contacto alcanza el valor crítico en  $a = 0.00092034816$ , es decir, ha disminuido aproximadamente en dos diezmilésimas. Esta disminución en el poder del marketing verbal que realizan los consumidores habituales de la marca San Miguel, se traduce, nuevamente, en una pérdida de la cuota de mercado del 3.7 % para dicha marca (aunque el número de consumidores habituales de la marca no sufre alteración). El aumento, que en consecuencia, se produce en el número de los consumidores de otras marcas rivales, lleva al mercado potencial de la marca en estudio a rozar la cifra de quince millones de personas adultas.

- Análogamente a lo que ocurre en las anteriores bifurcaciones de Neimark-Sacker para los otros parámetros, los mercados potencial y actual tienden a abandonar su posición de equilibrio y a comportarse de forma cíclica.

- Analíticamente, la matriz Jacobiana del sistema lineal asociado tiene dos multiplicadores complejos conjugados de módulo unitario:  $\mu_1 = 1_{4.0845693}$ ,  $\mu_2 = 1_{-4.0845693}$  y el modelo lleva asociada la forma normal:

$$\tilde{w} = e^{i 0.0712892} w \left( 1 - 0.000537833 |w|^2 \right) + O(|w|^4), \quad w \in \mathbb{C}.$$

Si seguimos disminuyendo el valor de la tasa de contacto entre clientes, encontramos otro punto crítico para el cual:

- El valor del parámetro para el que se produce la bifurcación es  $a = 0.00081319635$ , es decir, los clientes potenciales alcanzan un valor que ronda los dieciséis millones y medio de posibles consumidores, lo que indica, que aún conservando el número de clientes fieles a la marca, se produce una pérdida de cuota de mercado para San Miguel del 5.8%. La interpretación de los hechos es análoga al caso anterior.

- Como era de esperar, el comportamiento de ambos mercados también tenderá a ser cíclico, al obtener el mismo signo negativo en el coeficiente  $a(0)$  y cumplirse la condición de no degeneración.

- En este caso tenemos  $\mu_1 = 1_{3.8992055}$ ,  $\mu_2 = 1_{-3.8992055}$  y la forma normal del modelo es:

$$\tilde{w} = e^{i 0.068054} w \left( 1 - 0.00051007 |w|^2 \right) + O(|w|^4), \quad w \in \mathbb{C}.$$

En el caso de la bifurcación de duplicación de periodo que encontramos, vemos que:

- El punto crítico se alcanza para un valor de la tasa de contacto  $a = 0.031648251$  que es aceptable (está entre los valores 0 y 1) y significa un aumento de, aproximadamente, dos centésimas.

- Se produce el desplome de los clientes potenciales del mercado, mientras se mantienen los clientes actuales para la marca San Miguel. Este comportamiento no se mantiene dentro de la lógica del sistema de mercados.

- Desde el punto de vista analítico, podemos añadir que los multiplicadores en el punto crítico son  $\mu_1 = 1_\pi$ ,  $\mu_2 = 0.9328735_0$  y el modelo lleva asociada la forma normal:

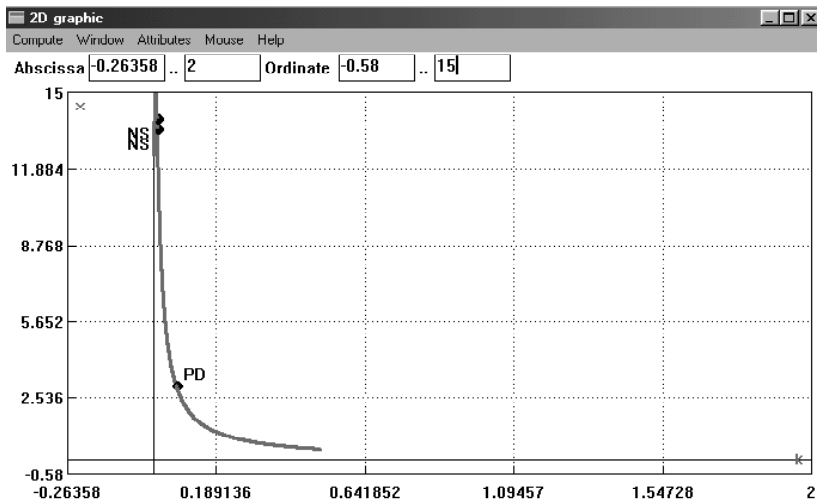
$$\tilde{\xi} = -\xi - 0.000462344 \xi^3 + O(\xi^4), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pasamos ahora a estudiar el comportamiento del sistema respecto a los cambios en los parámetros que nos indican la entrada y la salida del mercado cervecero y que influyen activamente sobre el equilibrio tanto del mercado potencial como del mercado actual para la marca en estudio.

#### 5.4. Continuación del equilibrio para la tasa de entrada en el mercado.

Al realizar la simulación numérica, encontramos (ver Figura 14) dos puntos de bifurcación de Neimark-Sacker y un punto de bifurcación de duplicación de periodo cuyos datos aparecen en la tabla siguiente:

Tipo	Valor de k	Cl. Pot.	Cl. Act.	$a(0)$	$\theta$
N.S.	0.011970261	13.510.783	7.524.900	-0.000658525	0.0712892
N.S.	0.011251839	13.935.617	7.073.302	-0.000706987	0.068054
Tipo	Valor de k	Cl. Pot.	Cl. Act.	For. Normal	
D.P.	0.070194209	2.987.919	44.126.557	-0.0462343	



**Figura 14. Puntos de bifurcación para la tasa de entrada.**

Respecto a estos puntos de bifurcación podemos hacer las siguientes reflexiones:

- 1) Respecto al primer punto de bifurcación de Neimark-Sacker observamos que:
  - La ligera disminución (aproximadamente una milésima) de la tasa de entrada en



el mercado hasta alcanzar el valor crítico  $k = 0.011970261$  influye directamente sobre el equilibrio alcanzado en los consumidores habituales de la marca San Miguel, haciendo que su número baje hasta aproximadamente siete millones y medio de clientes actuales. Esta pérdida de cuota de mercado, que vuelve a ser del 3.8%, se transforma en un aumento de la cuota de mercado de las marcas rivales, lo que se traduce en un aumento del número de los clientes potenciales hasta alcanzar los trece millones y medio de personas adultas. Debemos señalar que al disminuir la tasa de entrada en el mercado, la población consumidora sufre, como era previsible, una leve disminución.

- El comportamiento de los mercados cuando se traspasa este valor crítico vuelve a ser cíclico, tendiendo las trayectorias a formar una curva invariante cerrada.

- Por otro lado, la matriz Jacobiana del sistema lineal asociado tiene dos multiplicadores complejos conjugados de módulo unitario:  $\mu_1 = 1_{4.0845705}$ ,  $\mu_2 = 1_{-4.0845705}$  y la forma

normal del modelo es:  $\tilde{w} = e^{i 0.0712892} w \left( 1 - 0.000658525 |w|^2 \right) + O(|w|^4)$ ,  $w \in \mathbb{C}$

2) Para el segundo punto de bifurcación de Neimark-Sacker concluimos que:

- Si seguimos disminuyendo el valor de la tasa de entrada encontramos otro punto crítico en  $k = 0.011251839$ . En este caso la interpretación de los datos es similar al caso anterior y tan solo indicar que, ahora, la pérdida de cuota de mercado de la marca San Miguel es más significativa, el 5.8%, ya que sus clientes actuales bajan hasta los siete millones de usuarios. Por contra, el mercado potencial absorbe esta pérdida y, como resultado, roza los catorce millones de personas adultas. Como en el caso anterior, la población consumidora también acusa la nueva pérdida de entrada en el mercado.

- Como era de esperar, por la analogía con el caso anterior, el comportamiento de ambos mercados también tenderá a ser cíclico.

- En este caso, tenemos que:  $\mu_1 = 1_{3.8992058}$ ,  $\mu_2 = 1_{-3.8992058}$  y el modelo lleva asociado la forma normal:  $\tilde{w} = e^{i 0.068054} w \left( 1 - 0.000706987 |w|^2 \right) + O(|w|^4)$ ,  $w \in \mathbb{C}$

3) Analizamos el punto de bifurcación de duplicación de periodo:

- La bifurcación tiene lugar para el valor crítico  $k = 0.070194209$  y se ha producido, por tanto, un aumento de la tasa de entrada, aunque el valor crítico del parámetro sigue estando entre los valores exigidos para el ajuste.

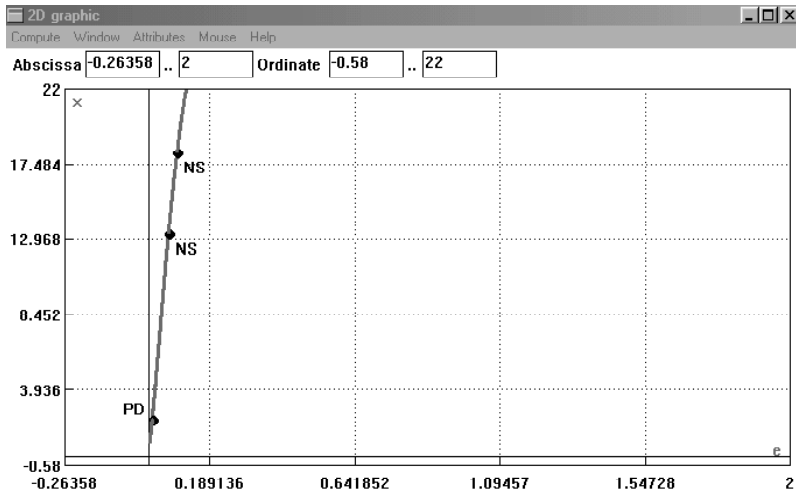
- Este aumento de la tasa de entrada se traduce en un aumento desmesurado del mercado actual (44.126.557) respecto al potencial (2.987.919), lo cual queda fuera de los cánones lógicos pre-establecidos para cualquier sistema mercantil.

-Desde el punto de vista analítico, podemos observar que los autovalores de la matriz Jacobiana en el punto fijo son  $\mu_1 = 1_\pi$  ,  $\mu_2 = 0.93287358_0$  y la forma normal del modelo es:  $\dot{\xi} = -\xi - 0.00164691\xi^3 + O(\xi^4)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  .

**5.5.- Continuación del equilibrio para la tasa de salida del mercado**

Por último, analizamos la continuación del punto de equilibrio cuando variamos la *tasa de salida del mercado*. Los resultados obtenidos (ver Figura 15) han sido:

Tipo	Valor de e	Cl. Pot.	Cl. Act.	a(0)	$\theta$
N.S.	0.062841223	13.230.293	8.032.663	-0.000612849	0.0763485
N.S.	0.089707084	18.149.888	5.627.007	-0.000898581	0.0706844
Tipo	Valor de e	Cl. Pot.	Cl. Act.	For. Normal	
D.P.	0.011717262	2.072.002	43.080.236	0.00162467	



**Figura 15. Puntos de bifurcación para la tasa de salida.**

1) Del análisis del primer punto de bifurcación de Neimark-Sacker obtenido se sigue:

- La tasa de salida del mercado alcanza un valor  $e = 0.062841223$ , que significa que ha aumentado en aproximadamente dos milésimas, lo cual se traduce en una pérdida del 1.7 % de cuota de mercado para la marca San Miguel, perdiendo casi trescientas mil personas adultas de sus consumidores habituales beneficiándose el mercado potencial. Observar que aunque aumenta la tasa de salida del mercado, no por ello disminuye la población consumidora, ya que debemos tener en cuenta que la tasa de entrada en el mercado aún se conserva por encima del doble de la tasa de salida.

- El coeficiente  $a(0)$  es negativo y se cumplen las condiciones de no degeneración, por ello podemos decir que el equilibrio de los mercados perderá su estabilidad y tenderá hacia un comportamiento cíclico estable.

-Bajo el enfoque analítico, podemos observar que los multiplicadores asociados a este punto crítico son:  $\mu_1 = 1_{4.3744458}$ ,  $\mu_2 = 1_{-4.3744458}$  y que el modelo lleva asociado la forma normal:  $\tilde{w} = e^{i 0.0763485} w (1 - 0.000612849 |w|^2) + O(|w|^4)$ ,  $w \in \mathbb{C}$ .

2) Para el segundo punto de bifurcación de Neimark-Sacker, tenemos que:

- El valor crítico del parámetro se alcanza para  $e = 0.089707084$ , el cual, aunque se encuentra entre los límites que exigimos para el ajuste de los parámetros, supone que la tasa de entrada aumenta en cerca de tres centésimas, lo que motiva una pérdida demasiado elevada, el 15.9% de cuota de mercado para la marca San Miguel. Como esta pérdida la absorbe el mercado potencial, eso implica el aumento de la población consumidora de cerveza en un 0.9 % por ciento, lo que parece excesivo cuando ha aumentado la tasa de salida del mercado cervecero.

- Igual que ocurre en el caso anterior, los mercados tenderán a exhibir un comportamiento cíclico.

- Los resultados analíticos son:  $\mu_1 = 1_{4.0499171}$ ,  $\mu_2 = 1_{-4.0499171}$  y el modelo lleva asociado la forma normal:  $\tilde{w} = e^{i 0.0706844} w (1 - 0.000898581 |w|^2) + O(|w|^4)$ ,  $w \in \mathbb{C}$ .

3) Por último, para el punto de bifurcación de duplicación de periodo tenemos que:

- El valor crítico  $e = 0.011717262$ , representa una fuerte disminución de la tasa de salida y esta disminución repercute en un aumento excesivo del mercado actual (43.080.236) y un hundimiento del mercado potencial (2.072.002). Es, por

tanto, un nuevo caso que queda fuera del comportamiento estructurado del sistema comercial.

- Los autovalores de la matriz Jacobiana en el punto fijo son  $\mu_1 = 1_\pi$ ,  $\mu_2 = 0.98762638_0$  y el modelo lleva asociada la forma normal:

$$\tilde{\xi} = -\xi - 0.0016247\xi^3 + O(\xi^4), \quad \xi \in \bar{\mathbb{R}}.$$

## 6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

La incorporación del estudio de las bifurcaciones constituye una aportación relevante en el análisis de los modelos económicos dinámicos, ya que es una herramienta útil para la determinación de los cambios de comportamiento cualitativo de las trayectorias, en función de los parámetros que define el modelo, lo que permite obtener información económica importante.

En este trabajo ha sido posible establecer una clasificación del equilibrio del sistema (4) en función de los valores (positivos) asignados a los parámetros del mismo. Dicha clasificación ha particionado el plano paramétrico  $(A, B)$  en cinco subregiones conectadas con unas fronteras que suponen, al traspasarlas, cambios en la naturaleza del equilibrio.

También, hemos analizado bajo qué condiciones, al realizar pequeñas variaciones en los parámetros del modelo, éstas van a hacer que el comportamiento del mismo sea cualitativamente diferente en un entorno del punto fijo. Las conclusiones en este punto se pueden resumir como sigue: Encontramos bifurcaciones Flip degeneradas (aparecen con las letras PD en las figuras) que están asociadas a la aparición de un multiplicador real igual a -1, pero que vulneran la condición de no degeneración al anularse el coeficiente del término cúbico de la forma normal a una bifurcación flip no degenerada. El comportamiento del sistema en un entorno del punto crítico para este tipo de bifurcación depende de la región del plano paramétrico en la que estemos situados, pudiendo incluso coexistir dos ciclos de periodo dos. Se puede apreciar gráficamente que, salvo en una de las bifurcaciones de este tipo, se produce el hundimiento del mercado potencial. Hay dos razones que nos impulsan a no considerar esta posibilidad: la primera es que esta bifurcación proviene de una situación que no está incluida en la lógica de un sistema de mercados y la segunda se debe a que los valores de los parámetros implicados (la *tasa de contacto* y el *esfuerzo de publicidad*) no pertenecen al intervalo exigido para el ajuste al mercado cervecero español.

En este trabajo ha quedado constancia de la aparición de bifurcaciones de Neimark-Sacker (ver anexo) para varios de los parámetros estudiados. En esta bifurcación surge o desaparece una curva invariante cerrada al pasar por el valor crítico de bifurcación

del parámetro en cuestión. Esto es suficientemente relevante, ya que nos da un indicio de comportamiento cíclicos, que son importantes en el ámbito económico.

Actualmente estamos desarrollando el estudio de las bifurcaciones de codimensión 2 que pueden obtenerse al variar dos parámetros de forma simultánea. Este tipo de bifurcación se siguen al no cumplirse algunas de las condiciones de no degeneración de las bifurcaciones de codimensión 1, obteniéndose comportamientos posiblemente extraños.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido parcialmente soportado por ayudas 2005/SEJ-442 , ACC-944-SEJ-2002, ACC-944-SEJ-2003 de la Junta de Andalucía. Así mismo ha sido soportado por los proyectos del Ministerio de Ciencia y Tecnología (TIN2004-07246-C03-03), (TSI2006-13390-C02-02). Los autores desean agradecer a los revisores su minuciosidad en la lectura de este trabajo, así como sus sugerencias relativas a la incorporación en el trabajo de un breve resumen acerca de las herramientas matemáticas empleadas y de sus comentarios sobre la relevancia de las bifurcaciones en los modelos dinámicos económicos.

## 7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BISCHI GI., DIECI R., RODANO G., SALTARI E. (2001). Multiple attractors and global bifurcations in a Kaldor-type business cycle model. *Journal of Evolutionary Economics* 11 (5): 527-554
- BRAUN, M. (1990), Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, Grupo editorial Americana, México D.F.
- DONG J., ZHANG D., NAGURNEY A. (1996). A projected dynamical systems model of general financial equilibrium with stability analysis. *Mathematical and computer Modelling*, 24 (2): 35-44
- FEICHTINGER, G. (1992), Hopf bifurcation in an advertising diffusion model, *Journal of Economic Behavior and Organization* 17, 401-411.
- GANDOLFO, G. (1997), *Economic Dynamics*, third edn, Springer Verlag, Berlin.
- GOVAERTS, W. J (2000), *Numerical Methods for Bifurcations of dynamical equilibria*, SIAM, Philadelphia.
- GUKENHEIMER, J. , HOLMES, P. (1993), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, fourth edn, Springer-Verlag, New York.
- GUKENHEIMER, J. , MYERS, M. , STURMFELS, B. (1997), Computing Hopff Bifurcations I, *Siam J. Numer. Anal.* 34 (1), 1-21

- JOOSTER R. (1996). Deterministic evolutionary dynamics: A unifying approach. *Journal of Evolutionary Economics*, 6 (3): 313-324
- KUZNETSOV, Y. A. (1998), *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences, second edn, Springer, New York.
- KUZNETSOV, Y. A. , LEVITIN, V. V. (2004), CONTENT: A multiplatform environment for analysing dynamical systems,  
<http://www.math.uu.nl/people/Kuznet/CONTENT>
- LANDA, J. , VELASCO, F. (2004), Análisis dinámico del mercado actual y potencial de las organizaciones. *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa* 13(1), 131-140.
- MITRA T., NISHIMURA K. (2005). Intertemporal complementarity and optimality study of a two-dimensional dynamical system, *International Economic Review* 46 (1): 93-131
- NADAL, P. (2004), *Bifurcaciones en modelos dinámicos discretos: Una aplicación al mercado cervecero*, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla.
- NAGURNEY A., ZHANG D. (1996), On the stability of an adjustment process for spatial price equilibrium modeled as a projected dynamical system, *Journal of Economics Dynamics & Control*, 20 (1-3): 43-62
- PERRINGS C. (1998), Resilience in the dynamics of economy-environment systems, *Environmental & Resource Economics*, 11 (3-4): 503-520
- TSE NSF., ROBB FF. (1994). Dynamical Systems Theory applied to Management Accounting- Chaos in cost behaviour in a standard costing system setting. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 16 (5): 269-279
- VELASCO, F., BEGINES, F., NADAL, P., CHAMIZO, C. , VÍLCHEZ, M. (2002), Continuación de los equilibrios de un sistema dinámico económico con bifurcaciones de codimensión 1 y 2, *Computación y Sistemas* 5(3), 169-179.
- VENSIM (1998), *Vensim dss32 version 3.0b*, Technical report, Vensim Product Center., <http://www.vensim.com>. Ventana Systems, Inc. 149 Waverley Street Belmont, MA 02178USA.
- VÍLCHEZ, M., VELASCO, F. , GARCÍA, J. (2002), Bifurcaciones transcricas y ciclos límite en un modelo dinámico de competición entre dos especies. Una aplicación a la pesquería de engraulis encrasicolus de la región suratlántica española, *Estudios de Economía Aplicada* 20(3), 651-677.
- VÍLCHEZ, M., VELASCO, F. , HERRERO, I. (2004), An optimal control problem with Hopf bifurcations and application to the striped venus fishery in the gulf of Cadiz, *Fisheries Research* 67(3), 295-306.
- VÍLCHEZ, M., VELASCO, F., GONZÁLEZ L. , ORTEGA, J. (2003), Bifurcaciones de Hopf: Análisis cualitativo y aplicación a un modelo bioeconómico de pesquerías, *Computación y Sistemas* 6(4), 273-283.

ANEXO

Variedad centro: Dado el sistema dinámico discreto:

$$x \rightarrow f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.1})$$

con  $f$  suficientemente suave. Sean  $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ , los multiplicadores (autovalores) de la matriz jacobiana  $A$  del sistema particularizada en el punto de equilibrio  $x_0$ . Si el punto de equilibrio es no hiperbólico, entonces hay multiplicadores sobre el círculo unidad. Sea  $n_0$  el número de multiplicadores sobre el círculo unidad y  $T^c$  el subespacio vectorial invariante de la matriz  $A$  correspondiente a la unión de los  $n_0$  multiplicadores sobre el círculo unidad.

Teorema de la variedad centro: Existe una variedad suave invariante  $n_0$  dimensional localmente definida  $W_{loc}^c(x_0)$  del sistema discreto que es tangente a  $T^c$  en  $x_0$ . Además existe un entorno  $U$  de  $x_0$ , tal que si  $f^k(x) \in U$  para cada iterada  $k$ -ésima, entonces  $f^k(x) \in W_{loc}^c(x_0)$ .

A la variedad  $W_{loc}^c(x_0)$ , se le denomina variedad centro. El teorema de la variedad centro nos indica que si el número de multiplicadores positivos  $n_+$  es nulo, entonces si conocemos a priori que todas las órbitas que salen de  $U$ , permanecen en esta región para siempre, entonces las órbitas se aproximan a  $W_{loc}^c(x_0)$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . En este caso la variedad es atractiva. La variedad centro se puede representar localmente como un grafo de una función suave  $W^c = \{(u, v) : v = V(u)\}$ , donde  $V : \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$  y debido a la propiedad de la tangente de  $W^c$ , se tiene que  $V(u) = O(\|u\|^2)$ .

Usando una base de autovectores asociados a la matriz  $A$ , el sistema dinámico se puede plantear en la forma:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Bu + g(u, v) \\ Cv + h(u, v) \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

donde la matriz  $B$  tiene todos sus autovalores sobre el círculo unidad y la matriz  $C$ , los tiene en el interior y exterior del círculo unidad, entonces se verifica que el sistema (A.2) es topológicamente equivalente localmente cerca de  $x_0$  al sistema

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Bu + g(u, V(u)) \\ Cv \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

La primera de las dos ecuaciones es la restricción del sistema (A.2) sobre la variedad centro. La dinámica del sistema (A.2) está determinada por esta restricción, ya que la segunda ecuación es lineal y tiene soluciones exponencialmente crecientes o decrecientes.

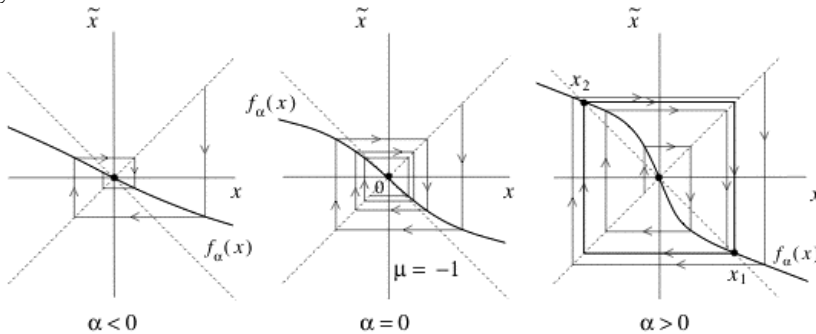
Bifurcaciones de codimensión1:

La aparición de un retrato fase no equivalente topológicamente con respecto a la variación de los parámetros se denomina bifurcación. Es decir, una bifurcación es un cambio topológico del sistema cuando sus parámetros pasan a través de un valor crítico llamado valor de bifurcación. La codimensión de una bifurcación es el número de condiciones independientes que determinan la bifurcación.

Bifurcación flip: La restricción a la variedad centro unidimensional tiene la forma:

$$\xi \rightarrow -\xi + c\xi^3 + O(|\xi|^4), \xi \in \mathbb{R} .$$

Si  $c \neq 0$  y el sistema depende genéricamente sobre el parámetro, entonces se bifurca un ciclo de período 2 desde el punto de equilibrio  $x_0$  el valor crítico del parámetro  $\alpha_0$ , mientras el punto fijo cambia su estabilidad. Su representación gráfica es la siguiente:



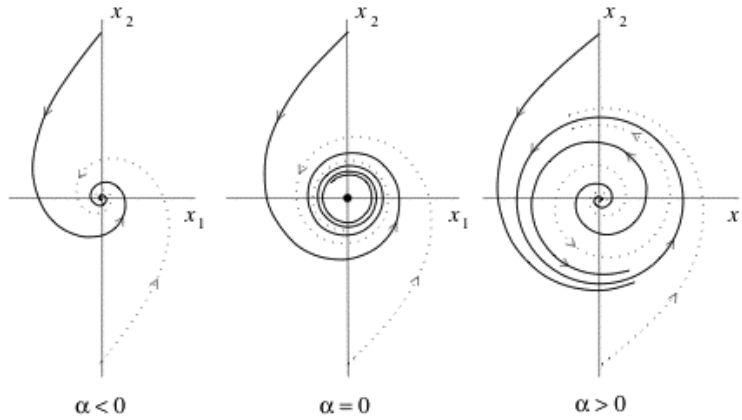
Bifurcación de Neimark-Sacker. La restricción a la variedad centro unidimensional tiene la forma:

$$w \rightarrow e^{i\theta_0} w(1 + d(\alpha_0)|w|^2) + O(|w|^4), w \in \mathbb{C} .$$



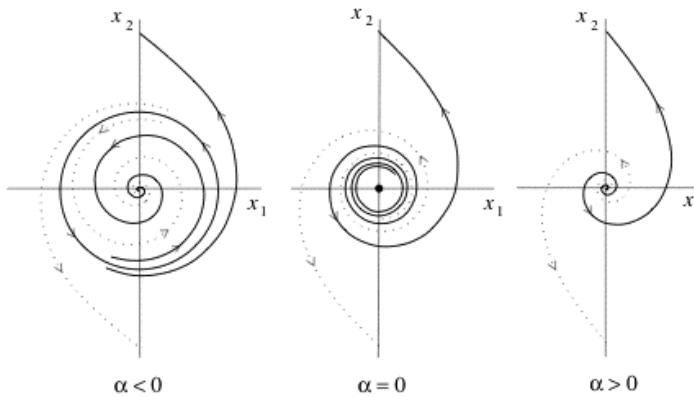
En este caso se bifurca una única curva cerrada invariante y estable si

$a(\alpha_0) = \text{Re}(d(\alpha_0)) < 0$  y la representación gráfica es la siguiente.



Bifurcación de Neimark-Sacker supercrítica.

Si  $a(\alpha_0) > 0$ , entonces la representación gráfica de la bifurcación es:



Bifurcación de Neimark-Sacker subcrítica.

