

Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura, 2004, Vol. X, No. 1 (ene-jun), pp. 123-142
recibido: 24-09-03 / arbitrado: 22-01-03

DETECCIÓN DE COMPORTAMIENTOS CAÓTICOS EN MODELOS TAR APLICADOS A SERIES TEMPORALES DE COYUNTURA ECONÓMICA ESPAÑOLA

R. Gimeno¹, R. Mateos²,
UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS UNIVERSIDAD SAN PABLO-CEU
DE MADRID,
L. Escot³, E. Olmedo⁴,
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE UNIVERSIDAD DE SEVILLA
P. Grau⁵,
UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS

Resumen:

Las series temporales de coyuntura económica, dada la frecuencia de observación y su tamaño, generalmente escapan al análisis no lineal clásico para la detección de comportamiento caótico. En el presente trabajo se introduce una nueva metodología de tipo paramétrico para la detección del comportamiento caótico en dichas series temporales, basado en la estimación económica de modelos econométricos y en la elaboración de gráficos de árboles de bifurcación para el rango de variación permitido por los intervalos de confianza a los que ha dado lugar la estimación de los modelos. Dicha metodología es probada con un modelo autorregresivo con umbral (TAR). A continuación se ha comprobado con 66 series temporales de la coyuntura económica española como en 32 de ellas se rechaza la hipótesis de linealidad, siendo preferible el ajuste del modelo tar. En doce de éstas no se puede rechazar la presencia de comportamiento caótico.

Palabras claves: Series temporales, modelos TAR, caos.

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DEL CAOS

Comencemos definiendo intuitivamente lo que se entiende por caos determinista. Aunque todavía no hay una definición universalmente aceptada de caos determinista (o, simplemente, caos), puede adoptarse la que reflejan Medio (1992) y Shaffer (1996), "*Comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinista*". Esta misma idea es reflejada por Blank (1996), "*La teoría del caos trabaja con procesos deterministas que parecen aleatorios (estocásticos) pero*

Correo electrónico: ¹ rgimeno@upco.es, ² matcab@ceu.es, ³ grau@fcsj.urj.es,
⁴ escot@ccee.ucm.es, ⁵ olmedo@us.es

cuya dimensión es finita", Yang y Brorsen (1996), "Procesos deterministas que parecen estocásticos son definidos como caos determinista", Baumol y Quandt (1996), "El caos se define como un comportamiento totalmente determinista que es, al menos en algunos aspectos, indistinguible de un proceso aleatorio o, más bien, de un proceso perturbado por elementos sustancialmente aleatorios", y Barnett y Choi (1989), "El caos matemático puede verse como un medio de producir un origen determinista para un proceso estocástico. Por tanto, la literatura sobre el caos determinista puede producir una explicación teóricamente profunda para los fenómenos estocásticos".

Aparentemente, en estas definiciones existe una contradicción entre aleatoriedad y determinismo. Sin embargo, esta contradicción se rompe por la propiedad característica de los sistemas caóticos, la sensibilidad a las condiciones iniciales. El sistema verifica esta propiedad cuando trayectorias generadas a partir de condiciones iniciales infinitesimalmente próximas se separan exponencialmente conforme transcurre el tiempo, siendo la no linealidad una condición necesaria, aunque no suficiente, para la existencia de una dinámica caótica.

En definitiva con esta propiedad se pone de manifiesto que es posible generar un comportamiento tan complejo como el observado en la realidad económica utilizando modelos deterministas con pocos grados de libertad. Esto no implica que se deba prescindir de la modelización mediante variables aleatorias ya que, especialmente en la economía son usuales los errores de medida, la existencia de información asimétrica, de perturbaciones exógenas al sistema, etc. Al mismo tiempo resulta complicado defender la existencia de relaciones lineales en un mundo tan complejo como el económico. Por todo lo anterior, actualmente se está desarrollando y potenciando la modelización estocástica no lineal para analizar la economía.

Las técnicas que se han desarrollado para la detección de caos en un sistema dinámico se basan, o bien en la detección de la propiedad de dependencia sensible mediante la medición de la separación exponencial de las órbitas que se encuentran inicialmente próximas (exponentes de Lyapunov) o bien en la medición de la complejidad geométrica del sistema (dimensión fractal).

Cuando se trabaja con series temporales los métodos de detección de caos pasan primero por reconstruir la dinámica del sistema original generador de datos utilizando el Teorema de Takens (Takens, 1986), y posteriormente utilizar los exponentes de Lyapunov o la dimensión de correlación para la cuantificación del caos. El problema es que la aplicación de estas herramientas requiere disponer de tamaños muestrales del orden de 10^5 o superiores. Para series más reducidas, los resultados obtenidos la mayoría de las veces no son concluyentes. La cuestión que distingue las series económicas de las series utilizadas en otros

campos de la ciencia es, fundamentalmente, su corta duración. En este tipo de series, con periodicidad rara vez inferior a la mensual, resulta difícil superar las 200 observaciones, cifra muy alejada de los requisitos de estos métodos, que apenas se alcanza para las series financieras en las que se logran obtener datos de menor frecuencia.

En el presente trabajo se propone un primer paso para analizar las series de reducido tamaño: la estimación de modelos estocásticos no lineales denominados Threshold Autorregresivo (TAR) para verificar, utilizando diagramas de bifurcación, la posible existencia de caos en el sistema y, mediante técnicas de simulación, estudiar sus implicaciones para la estimación y predicción.

La ventaja de este método radica en la facilidad de estimación de los modelos TAR y en la posibilidad de hacer inferencia estadística. También resulta posible dar un grado de fiabilidad a un posible comportamiento caótico, y analizar mediante simulación las implicaciones para la estimación y posterior predicción. Esta metodología se ha probado con series temporales de la coyuntura económica.

RELACIÓN ENTRE EL MODELO TAR Y LA FUNCIÓN TIENDA DE CAMPAÑA

Comencemos analizando la relación entre el modelo Threshold Autorregresivo (TAR) y la función tienda de campaña (tent map).

La noción de umbral (Tong, 1990) ha sido muy utilizada en numerosas disciplinas, y siempre asociada a la existencia de niveles de saturación. Como señala el mismo autor:

“Existen numerosos ejemplos de diversas disciplinas en los que es dominante la noción de un umbral: radio-ingeniería, ingeniería marina, servo-sistemas, oceanografía, biología de poblaciones, economía, hidrología, ingeniería, médica... Estos ejemplos muestran una característica común, que no es otra que la predominancia de un umbral, que es simplemente una reflexión acerca del hecho de que ‘la saturación está presente en todos sitios’.

“La idea básica de estos modelos es la aproximación local, es decir, la introducción de diferentes regímenes vía umbrales. Por conveniencia, nos referimos a esta idea como ‘principio umbral’, que permite el análisis de un sistema complejo descomponiéndolo en subsistemas más simples.”

El modelo umbral general se basa, por tanto, en el tratamiento del problema bajo un punto de vista no lineal, introduciendo la no linealidad a través de aproximaciones locales, introduciendo diferentes tipos de comportamiento dependiendo de la pertenencia a situaciones diferentes. En concreto, el modelo umbral autorregresivo más sencillo distingue dos comportamientos autorregresi-

vos con un retardo dependiendo de si los valores anteriores de la variable analizada superan o no un determinado nivel (umbral). En concreto, la formalización matemática de este modelo TAR sería la siguiente:

$$x_t = \begin{cases} \beta_1^1 + \beta_2^1 x_{t-1} + a_t & \text{si } x_{t-1} < \text{umbral} \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 x_{t-1} + a_t & \text{si } x_{t-1} \geq \text{umbral} \end{cases}$$

donde x_t y a_t denotan, respectivamente, los valores que toman la variable x y la perturbación aleatoria en el instante t , teniendo las perturbaciones las propiedades usuales.

Este modelo es muy similar a la función tienda de campaña

$$x_t = \begin{cases} \beta_1^1 + \beta_2^1 x_{t-1} & \text{si } x_{t-1} < \text{umbral} \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 x_{t-1} & \text{si } x_{t-1} \geq \text{umbral} \end{cases}$$

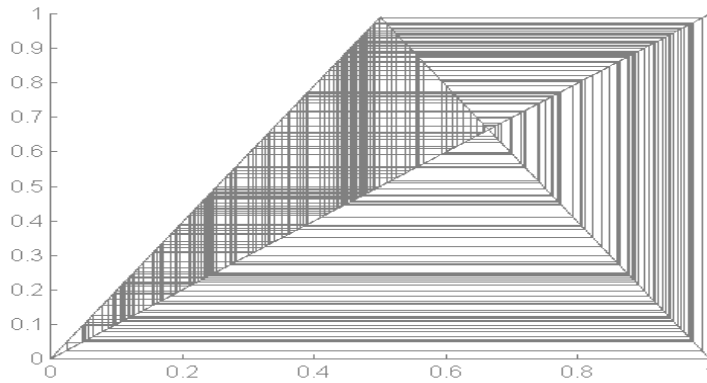
De hecho, el modelo TAR puede considerarse como una generalización econométrica de la función tienda de campaña. De hecho, si las variables aleatorias a_t fueran degeneradas y tomaran el valor nulo con probabilidad unidad, ambos modelos serían iguales con probabilidad 1.

Si se representa, mediante un gráfico de telaraña, la dinámica de la función tienda de campaña siguiente:

$$x_t = \begin{cases} 2 \cdot \beta \cdot x_{t-1} & \text{si } x_{t-1} < \text{umbral} \\ 2 \cdot \beta - 2 \cdot \beta \cdot x_{t-1} & \text{si } x_{t-1} \geq \text{umbral} \end{cases}$$

tomando $\beta = 0.99$ y $\text{umbral} = 0.5$ el resultado es el de la Figura No.1.

Figura No. 1. Gráfico de telaraña de la función tienda de campaña

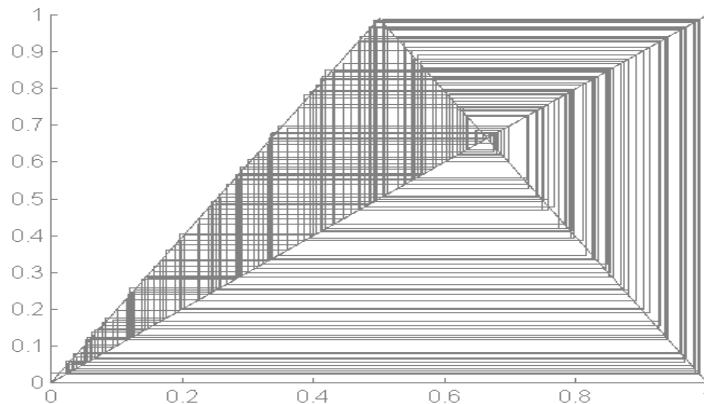


El resultado es muy similar al obtenido con el modelo TAR

$$x_t = \begin{cases} 2 \cdot \beta \cdot x_{t-1} + a_t & \text{si } x_{t-1} < \text{umbral} \\ 2 \cdot \beta - 2 \cdot \beta \cdot x_{t-1} + a_t & \text{si } x_{t-1} \geq \text{umbral} \end{cases}$$

tomando $\beta = 0.99$, $\text{umbral} = 0.5$ y siendo la desviación típica de la perturbación a_t igual a 0.01. En este caso el gráfico de telaraña resultante es el mostrado en la Figura No. 2.

Figura No. 2. Gráfico de telaraña de un modelo TAR



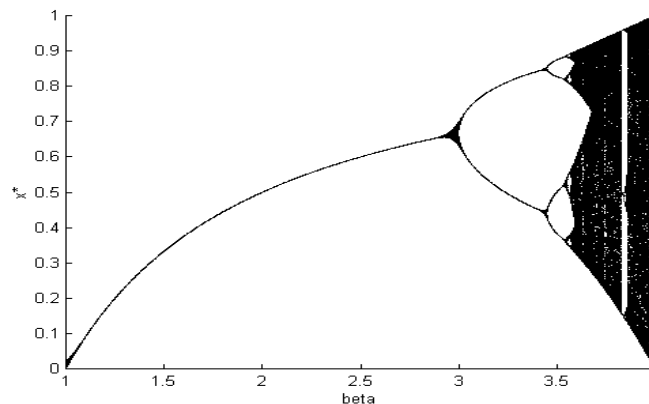
En estos gráficos de telaraña resulta obvio que el modelo genera una dinámica sumamente complicada. La relación entre la complicación observada y los valores que toma el parámetro β puede analizarse utilizando el diagrama de bifurcación, en el que en el eje de abscisas los valores del parámetro β y en el eje de ordenadas el espacio de fases y para cada valor de β los puntos (β, x_k) correspondientes a puntos suficientemente avanzados de la órbita de un punto x_0 que se elige de forma arbitraria dentro del intervalo $(0,1)$ en el sistema dinámico dado por la tienda de campaña

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot \beta \cdot x & \text{si } x < \text{umbral} \\ 2 \cdot \beta - 2 \cdot \beta \cdot x & \text{si } x \geq \text{umbral} \end{cases}$$

Este diagrama se conoce con el nombre de diagrama de Feigenbaum, ya que está muy unido a las ideas proporcionadas por este físico. Proporciona una idea muy clara de la dinámica del sistema y por este motivo, debido a su poder de síntesis ha sido muy utilizado para el análisis de modelos teóricos, como es el caso de Hommes (1994 y 1996).

Para comprender el significado de este diagrama suele ser útil trabajar con la función logística $f(x) = \beta x(1-x)$, cuyo diagrama de bifurcación se representa en la Figura No. 3.

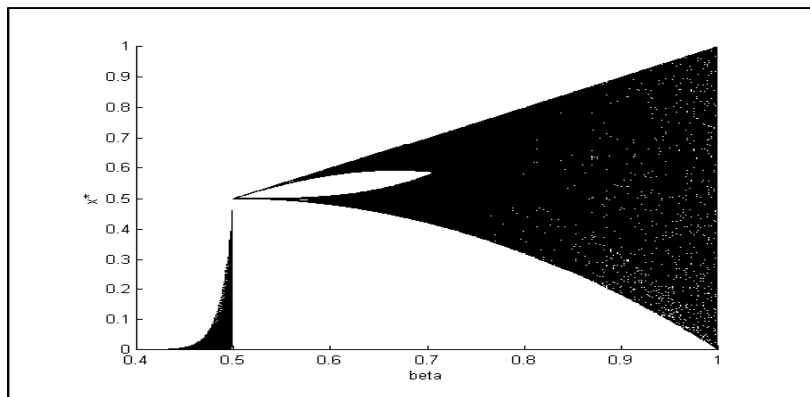
Figura No. 3. Diagrama de bifurcación de la función logística



Su explicación es la siguiente: los puntos de corte de la gráfica obtenida con una recta vertical levantada sobre cierto valor de β corresponden a los puntos límites de la órbita de casi todos los puntos del intervalo $(0,1)$ en el sistema dinámico $((0,1), f_\beta(x))$. De esta forma, la recta levantada sobre cualquier valor de β anterior al que produce la primera bifurcación corta a la gráfica en un único punto, lo cual quiere decir que casi todos los puntos iniciales que pertenecen al intervalo $(0,1)$ se ven atraídos hacia este punto que será un punto fijo. La recta levantada sobre un valor de β situado entre los necesarios para la primera y segunda bifurcación corta a la gráfica en dos puntos, lo que significa que la órbita de casi todos los puntos pertenecientes al intervalo $(0,1)$ convergen a la órbita periódica de período 2 constituida por este par de puntos, y así sucesivamente. Para los valores de β para los que la recta vertical corta a la gráfica en una nube de puntos que llena un subintervalo de $(0,1)$ lo que ocurre es que la órbita de casi todos los puntos de $(0,1)$, en el sistema dinámico asociado a este valor del parámetro, vaga de forma errática llenando densamente este subintervalo. En otras palabras, se produce una dinámica caótica.

El diagrama de bifurcación correspondiente a la función tienda de campaña muestra un comportamiento caótico para valores del parámetro superiores a 0.5; en caso contrario la dinámica converge a un punto fijo estable igual a 0 (ver Figura No. 4).

Figura No. 4. Diagrama de bifurcación de la función tienda de campaña



ESTIMACIÓN DE UN MODELO TAR

Una de las principales ventajas del modelo TAR se refiere a su estimación puesto que, al tratarse de un modelo lineal a trozos, puede estimarse sin problemas por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios. Simplemente debe trabajarse con una matriz extendida de regresores, para separar las dos regresiones lineales dependiendo de si el valor que toma la variable en el instante anterior es mayor o menor que el umbral establecido.

Por ejemplo, trabajando con un vector de longitud igual a 5, y suponiendo que el tercer valor es el único que toma valores por encima el umbral, la regresión sería la siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & x_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^1 \\ \beta_2^1 \\ \beta_1^2 \\ \beta_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$$

que de manera resumida utilizando notación matricial se escribiría como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}$$

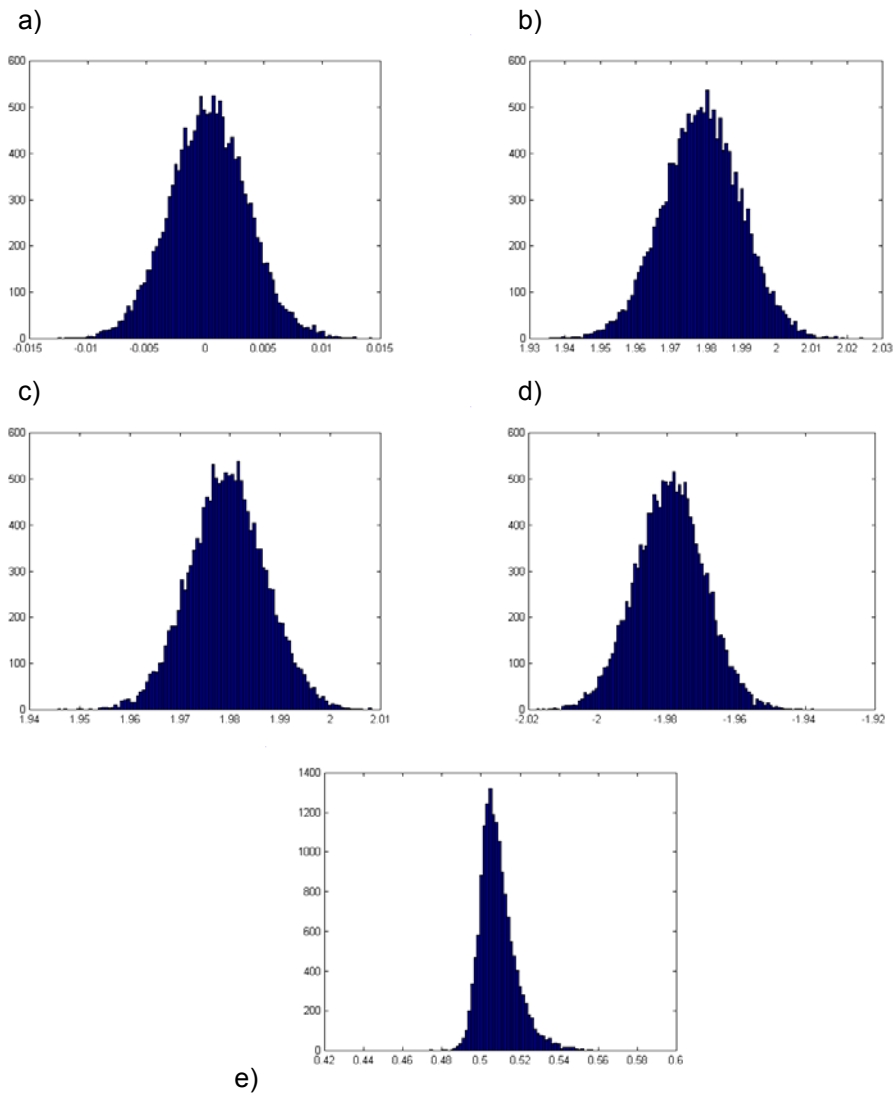
El vector de estimadores mínimo-cuadrático sería, por tanto,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Para estimar el parámetro umbral se calcula el error cuadrático medio del estimador tomando como posible valor umbral cada uno de los valores de la serie, y se elige aquel que minimiza el error.

Para comprobar el comportamiento de los estimadores, se han realizado 20.000 simulaciones del modelo TAR antes visto, manteniendo la misma varianza de las perturbaciones. Los histogramas de los resultados de las estimaciones paramétricas obtenidas a partir de las simulaciones son los mostrados en la Figura 5 donde se representan, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, los histogramas correspondientes a las estimaciones de los parámetros β , y abajo el histograma correspondiente al umbral.

Figura No. 5. Estimaciones de los parámetros del modelo TAR. De izquierda a derecha y de arriba abajo: a) β_1^1 , b) β_1^2 , c) β_2^1 , d) β_2^2 y e) el umbral



Los histogramas obtenidos son simétricos alrededor del verdadero valor del parámetro, excepto en el caso del umbral en el que se observa un histograma ligeramente asimétrico a la derecha con un sesgo negativo de estimación. Respecto a si se observa o no un comportamiento normal, parece corroborarse esta

hipótesis en el caso de los parámetros β y no así en el caso del umbral debido al excesivo apuntamiento del histograma. Contrastando la hipótesis de normalidad se confirman los anteriores resultados.

Así, salvo en el caso del parámetro umbral, el comportamiento de los estimadores se corresponde con la teoría econométrica usual de la estimación por MCO.

CONTRASTE DE NO-LINEALIDAD

La metodología de estimación desarrollada en el apartado anterior puede servir como base para realizar un contraste de no linealidad suponiendo que la no linealidad es del tipo TAR.

En concreto, dado

$$x_t = \begin{cases} \beta_1^1 + \beta_2^1 x_{t-1} + a_t & \text{si } x_{t-1} < \text{umbral} \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 x_{t-1} + a_t & \text{si } x_{t-1} \geq \text{umbral} \end{cases}$$

si se verifica que $\beta_1^1 = \beta_1^2$ y $\beta_2^1 = \beta_2^2$ ambas ecuaciones lineales son idénticas y, por consiguiente, puede afirmarse que el umbral carece de sentido y que el modelo TAR no aporta nada a la explicación del comportamiento de la serie temporal x_t .

Por este motivo un contraste sencillo de no linealidad, tomando como hipótesis nula que el modelo es lineal y la hipótesis alternativa es que el modelo es TAR. Formalmente,

$$H_0 : \begin{cases} \beta_1^1 = \beta_1^2 \\ \beta_2^1 = \beta_2^2 \end{cases}$$

$$H_1 : \exists i \mid \beta_i^1 = \beta_i^2 \quad i = 1, 2$$

que se traduce, utilizando notación matricial, en el siguiente contraste de hipótesis:

$$H_0 : \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$$

$$H_1 : \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{r}$$

En este caso,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 \\ \beta_2^1 \\ \beta_1^2 \\ \beta_2^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando la metodología general del contraste de hipótesis en el marco de la estimación de una regresión lineal por MCO se llega a la definición del siguiente estadístico

$$\frac{1}{2 \cdot \hat{\sigma}^2} (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{r})' \left(\mathbf{R} \cdot (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{R}' \right)^{-1} (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{r}) \square F_{2,T-4}$$

donde $\hat{\sigma}^2$ denota el estimador de la varianza de las perturbaciones y T es la longitud de la serie temporal.

Consecuencias del Comportamiento Caótico en la Predicción de un Modelo TAR

Una vez ajustado el modelo es interesante comprobar, mediante simulación, el efecto que tiene sobre la predicción la existencia de una dinámica caótica. Para ello hemos realizado predicciones utilizando para ello el ajuste de dos modelos TAR diferentes, uno con parámetro que da lugar a comportamiento caótico y otro con comportamiento estable.

Si representamos los histogramas de los errores para ambos casos vemos comportamientos muy diferentes. En la Figura No. 6 se representan el caso caótico para horizontes de predicción 1, 5, 10 y 20, y en la Figura No. 7 se representa el caso no caótico para los mismos horizontes de predicción. Se detecta que, mientras que en el caso de inexistencia de dinámica caótica los errores siguen una distribución simétrica y aproximadamente normal, en el caso de existencia de caos los errores no recuerda en absoluto a la normal. Para horizontes de predicción 1 y 5, tanto en el caso caótico como en el no caótico se detecta cierta asimetría a la izquierda, correspondiente a la asimetría a la derecha presente en el histograma de estimaciones del umbral: el umbral se estima por exceso, lo que conduce a una mayor importancia de los errores negativos (sesgo por defecto). En cualquier caso, este efecto es mucho más marcado en el caso caótico, en el que además se percibe una mayor diferenciación entre el comportamiento de los errores positivos y negativos. Podría incluso hablarse de dos regímenes, uno para sesgos por defecto y otro para sesgos por exceso, manteniéndose el comportamiento de los errores aproxima-

damente uniforme dentro de cada uno de ellos. Esta marcada diferenciación se va suavizando conforme aumenta el horizonte de predicción, hasta ser completamente inapreciable en las dos últimas gráficas. Dicha uniformidad es consecuencia de la presencia de una dinámica caótica que, conforme aumenta el horizonte a predecir va incluso enmascarando la presencia de dos regímenes distintos. Por este motivo, mientras que el comportamiento de los errores en el caso no caótico sigue recordando a una normal (aunque excesivamente apuntada) esto no ocurre en el caso caótico, en el que el comportamiento, aunque simétrico en torno al cero, responde a una gráfica triangular, siendo mucho mayor la magnitud de los errores.

Figura No. 6. Histograma de los errores de predicción de un modelo TAR con comportamiento caótico para horizontes de predicción 1, 5, 10 y 20

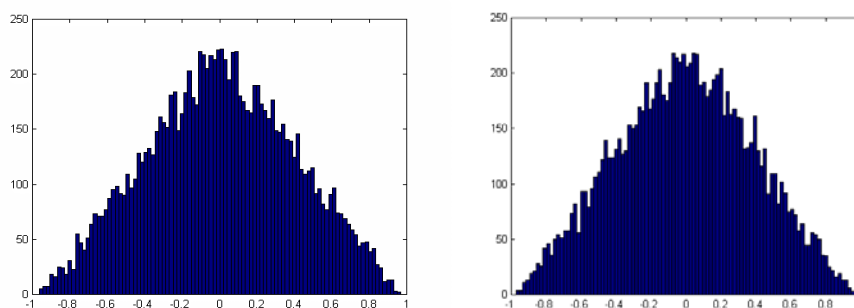
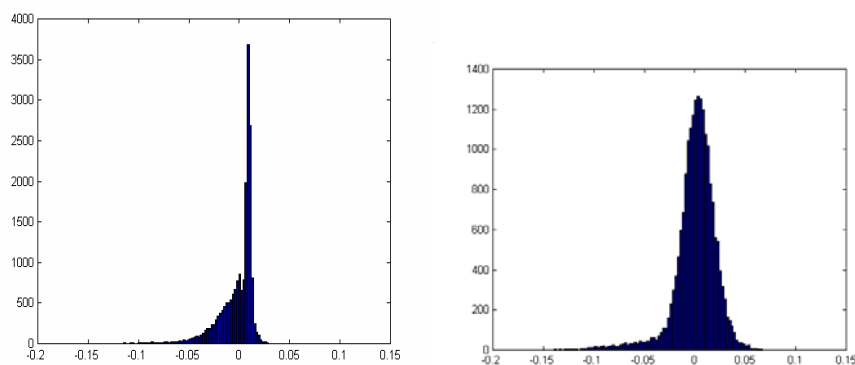
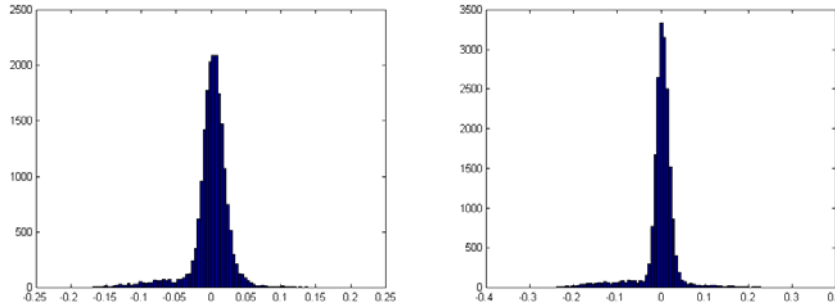


Figura No. 7. Histograma de los errores de predicción de un modelo TAR sin comportamiento caótico para horizontes de predicción 1, 5, 10 y 20





BÚSQUEDA DE COMPORTAMIENTO CAÓTICO

Una vez estimado el modelo TAR se utilizará su diagrama de bifurcación para verificar la existencia de comportamiento caótico, para lo cual es necesario previamente haber estimado el modelo. De esta manera, para cada modelo estimado se realizarán cinco diagramas de bifurcación. Cada uno de ellos se obtendrá fijando cuatro parámetros (se considerarán las estimaciones obtenidas) y dejando variar el quinto dentro de su intervalo de confianza correspondiente. Por este motivo es necesario calcular los intervalos de confianza para cada parámetro estimado.

Como se ha comprobado, mediante simulación, que los estimadores de los parámetros β siguen una distribución normal se puede utilizar como intervalo de confianza el usual $(\hat{\beta} - 1.96 \cdot \sigma, \hat{\beta} + 1.96 \cdot \sigma)$ donde σ es el error estándar del estimador. En cuanto al estimador del parámetro umbral, para el cual se rechazaba la hipótesis de normalidad, se soluciona el problema calculando, mediante simulación, los cuantiles de la distribución que se utilizarán para definir un intervalo de valores probables para el parámetro.

La estimación del modelo TAR:

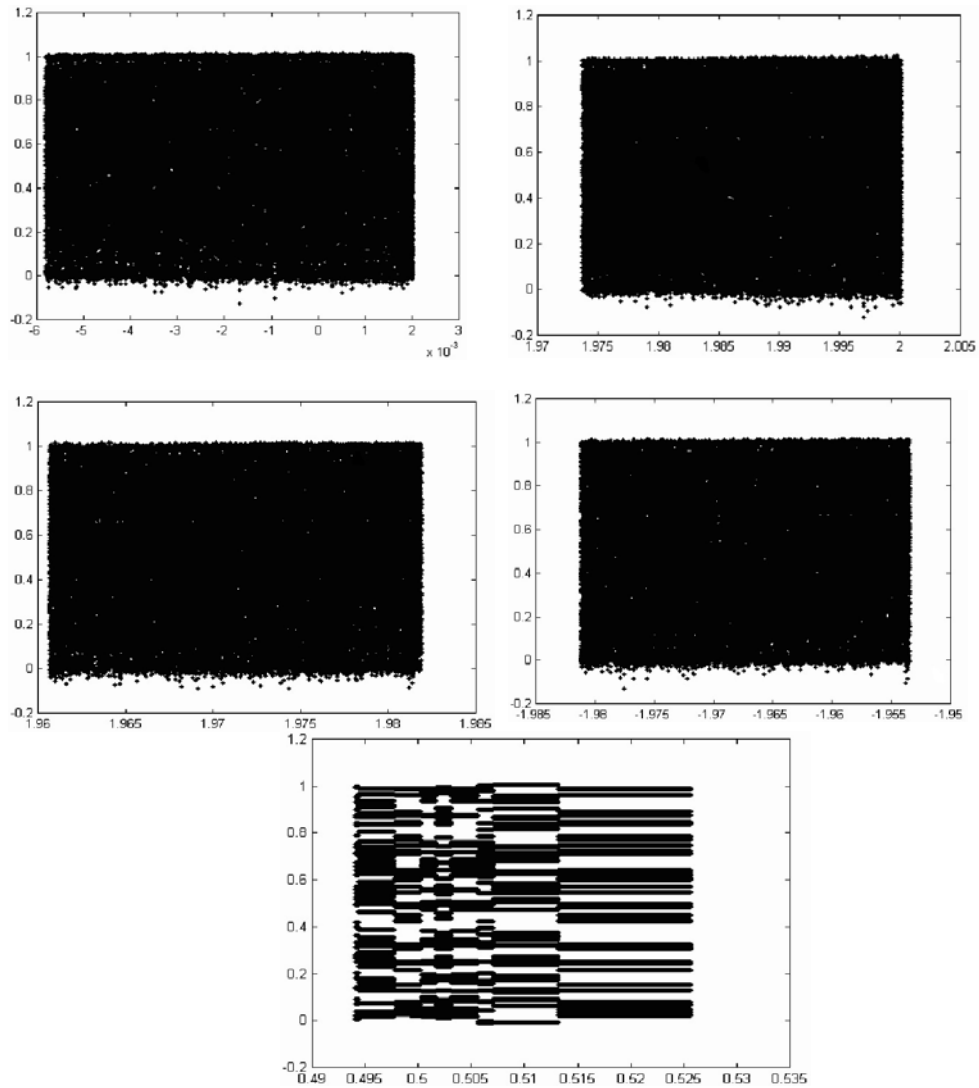
$$x_t = \begin{cases} 1.98 \cdot x_{t-1} + a_t & \text{si } x_{t-1} < 0.5 \\ 1.98 - 1.98 \cdot x_{t-1} + a_t & \text{si } x_{t-1} \geq 0.5 \end{cases}$$

es la siguiente:

$$x_t = \begin{cases} -0.0019 + 1.9869 \cdot x_{t-1} & \text{si } x_{t-1} < 0.5123 \\ 1.9713 - 1.9674 \cdot x_{t-1} & \text{si } x_{t-1} \geq 0.5123 \end{cases}$$

y los diagramas de bifurcación obtenidos (en la Figura 8, de izquierda a derecha y de arriba abajo) muestran, salvo en el caso del umbral, indicios de comportamiento caótico.

Figura No. 8. Diagramas de bifurcación de los parámetros estimados del modelo TAR. De izquierda a derecha y de arriba abajo β_1^1 , β_1^2 , β_2^1 , β_2^2 y el umbral.



APLICACIÓN A DATOS DE COYUNTURA DE LA ECONOMÍA ESPAÑOLA

Para finalizar, se ha utilizado la metodología desarrollada en el trabajo para analizar series temporales de coyuntura económica española. Se trata de 66 series mensuales (todas desde enero de 1986 a diciembre de 1997). En 32 de esas 66 series se rechaza la hipótesis de linealidad, es decir, el modelo TAR es mejor que el modelo lineal. Además, en muchas de ellas se detecta la posible existencia de caos en el sistema. A modo de resumen de los distintos tipos de comportamiento detectados se pueden presentar los siguientes diagramas de bifurcación en los que se pasa de comportamientos estables (Figura No. 9), a claros comportamientos caóticos como los detectados en los diagramas de bifurcación de la Figura No. 10. En las Figuras No. 11 a la No. 13 se puede comprobar toda una serie de casos en los que no es posible decantarse ni por el comportamiento caótico ni por el estable, pues ambos regímenes están incorporados en los intervalos de confianza de los parámetros, por lo que no resulta posible rechazar ninguna hipótesis.

Figura No. 9. Comportamientos estables de las siguientes series temporales:
 Matriculación de Turismos (β_1^1), Producción de Bienes de Equipo (β_1^1),
 Índice de Precios Industriales de Bienes de Consumo (β_2^1)
 e Importaciones Nominales de Bienes de Equipo (β_1^1)

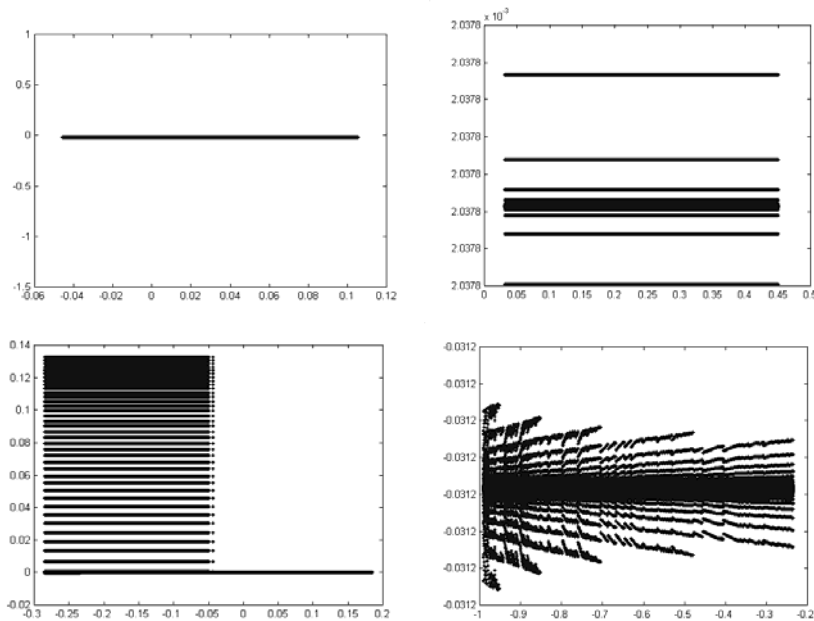


Figura No. 10. Comportamientos caóticos detectados en las series temporales de: afiliados a la seguridad social (asalariados industria) (umbral), disponibilidades de bienes de consumo (no alimentación) (umbral), exportaciones nominales de bienes intermedios no energéticos (umbral), exportaciones nominales de bienes de equipo (umbral) e ingresos por turismo (β_2^1)

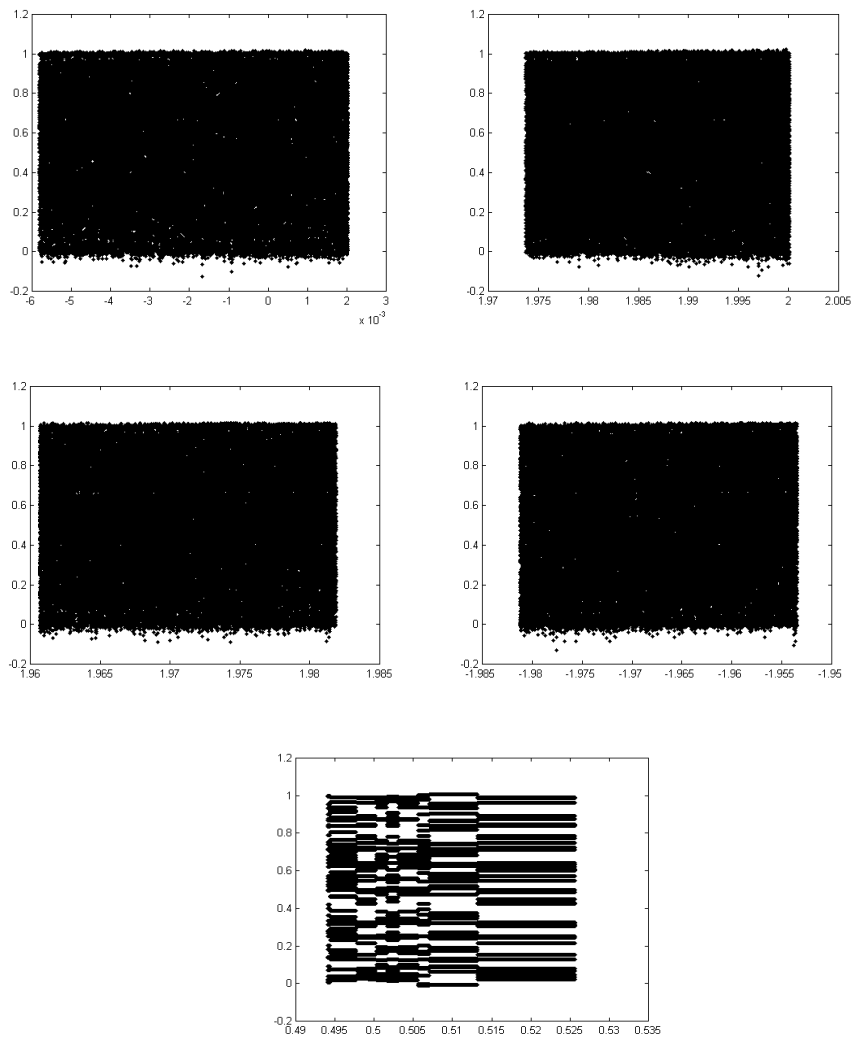


Figura No. 11. Comportamientos caóticos en parte de los intervalos de confianza de las series temporales de importaciones nominales de bienes de consumo (umbral), importaciones nominales de bienes intermedios (umbral), producción de energía eléctrica y gas (umbral) y producción de industrias extractivas (umbral)

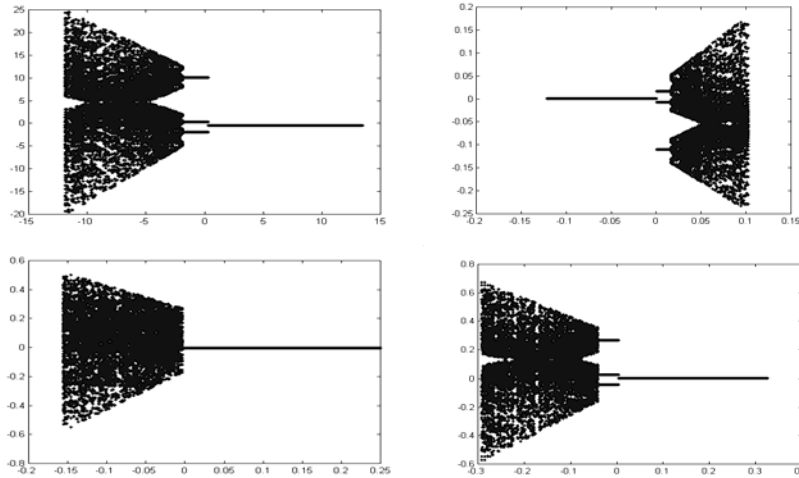


Figura No. 12. Comportamientos caóticos en parte de los intervalos de confianza de las series temporales de producción de productos metálicos (umbral), producción de transformados metálicos (umbral), exportaciones nominales de bienes intermedios no energéticos (β_1^1) e importaciones nominales totales (β_2^1)

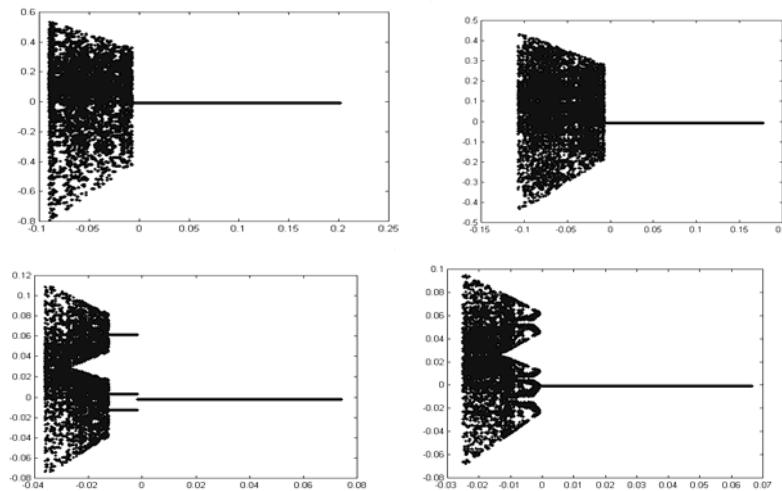
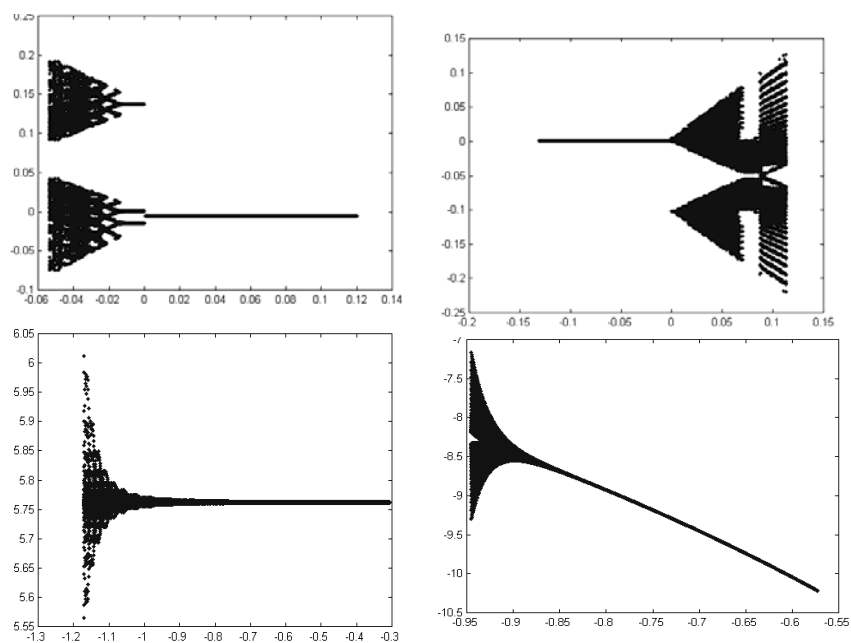


Figura No. 13. Comportamientos caóticos en parte de los intervalos de confianza de las series temporales de importaciones reales energéticas (β_1^1), total de ventas en grandes superficies en madrid (β_1^1), importaciones nominales no energéticas (β_1^2) y producción de transformados metálicos (β_1^1)



CONCLUSIONES

Como conclusiones interesantes de este trabajo se pueden extraer las siguientes:

1. Existe una clara conexión entre el modelo umbral autorregresivo y la función tienda de campaña de la cual se conoce su comportamiento caótico.
2. Es posible realizar la estimación de los parámetros del modelo TAR por el método de mínimos cuadrados ordinarios, lo cual facilita la estimación, el contraste de hipótesis y permite además realizar un contraste de no linealidad.
3. Los parámetros β estimados se comportan según un modelo normal, no ocurriendo lo mismo con el parámetro umbral.

4. El comportamiento del error de predicción difiere según si el modelo ajustado se comporta según un régimen caótico o no.
5. La estimación de los intervalos de confianza para los parámetros permite la utilización de los diagramas de bifurcación para analizar el posible surgimiento de comportamiento caótico en el modelo umbral estimado.
6. Se han analizado 66 series mensuales de coyuntura económica desde enero de 1986 hasta diciembre de 1996. En 32 de esas series se rechaza la hipótesis de linealidad, siendo preferible el ajuste del modelo umbral. En muchas de ellas se detectan comportamientos interesantes, incluso caóticos, utilizando los diagramas de bifurcación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barnett, W. A. y S.S. Choi (1989), *A comparison between the conventional econometric approach to structural inference and the nonparametric chaotic attractor approach*, en W.A. Barnett, J. Geweke, J. y K. Shell (eds.), *Economic complexity: chaos, sunspots, bubbles, and nonlinearity*; Cambridge University Press.
- Baumol, W.J. y R.E. Quandt (1996), *Chaos and their implications for forecasting*, en Trippi, R.R. (ed.), *Chaos & nonlinear dynamics in the financial markets*; Irwin Professional Publishing.
- Blank, S.C. (1996), *"Chaos" in futures markets? A nonlinear dynamical analysis* en Trippi, R. R. (ed.), *Chaos & nonlinear dynamics in the financial markets*; Irwin Professional Publishing.
- Hommes, C.H. (1996), *Adaptative learning and roads to chaos, the case of the cobweb*, en R.R. Trippi (ed.), *Chaos and nonlinear dynamics in the financial market*; Irwin Professional Publishing.
- (1994), "Dynamics of the cobweb model with adaptative expectations and nonlinear supply and demand", *Journal of economic behavior and organizations*, Vol. 24.
- Medio, A. (1992), *Chaotic dynamics. Theory and applications to Economics*, Cambridge University Press.
- Shaffer, S. (1996), *Structural shifts and the volatility of chaotic markets*, en R. R. Trippi (ed.), *Chaos & nonlinear dynamics in the financial markets*, Irwin Professional Publishing.
- Takens, F. (1986), *Detecting strange attractors in turbulence*, en D.A. Rand y L.-S. Young (eds.), *Lecture notes in mathematics, dynamical systems and turbulence*; Springer-Verlag.

Yang, S.-R. y B.W. Brorsen (1996), *Nonlinear dynamics of daily futures prices, conditional heteroskedasticity or chaos*, en R.R. Trippi (ed.), *Chaos & nonlinear dynamics in the financial markets*; Irwin Professional Publishing.

Tong, H. (1990), *Non-linear time series. A dynamical system approach*, Oxford, Clarendon Press Oxford.