



Computación y Sistemas

ISSN: 1405-5546

[computacion-y-sistemas@cic.ipn.mx](mailto:computacion-y-sistemas@cic.ipn.mx)

Instituto Politécnico Nacional

México

Velasco M., Francisco; Bejines B., Francisco; Nadal M., Purificación; Chamizo G., Cristóbal; Vilchez L., Ma. Luisa

Continuación de los Equilibrios de un Sistema Dinámico Económico con Bifurcaciones de Codimensión 1 y 2

Computación y Sistemas, vol. 5, núm. 3, enero-marzo, 2002, pp. 169-179

Instituto Politécnico Nacional

Distrito Federal, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=61550302>

- [Cómo citar el artículo](#)
- [Número completo](#)
- [Más información del artículo](#)
- [Página de la revista en redalyc.org](#)

 redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

# Continuación de los Equilibrios de un Sistema Dinámico Económico con Bifurcaciones de Codimensión 1 y 2

## *Continuation of Equilibriums and Cycles of an Economic Dynamic System and Their 1 and 2 Codimension Bifurcations*

Francisco Velasco M.<sup>1</sup>, Francisco Begines B.<sup>1</sup>, Purificación Nadal M.<sup>1</sup>,  
Cristóbal Chamizo G.<sup>1</sup> y Ma. Luisa Vilchez L.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Economía Aplicada I, Universidad de Sevilla  
Avda. Ramón y Cajal 1. Sevilla, España

<sup>2</sup>Departamento de Economía Aplicada I, Universidad de Huelva, España  
e-mail : {velasco,fbegines,pnadal,chamizo}@us.es, lobato@uhu.es

*Artículo recibido en mayo 30, 2001; aceptado en septiembre 25, 2001*

## Resumen

*En este trabajo presentamos la continuación de las soluciones de equilibrio de un sistema dinámico económico, así como las bifurcaciones de codimensión 1 y 2 obtenidas. En primer lugar se encuentra una superficie sobre la que pueden estar las bifurcaciones de Hopf para luego obtener las curvas de continuación de estos puntos de bifurcación. Acompañados a los puntos de bifurcación de Hopf se obtienen los ciclos límite, así como las continuaciones de los ciclos y sus cambios a otras ramas, que nos indican los distintos comportamientos que existen en el modelo.*

**Palabras clave:** Sistemas Dinámicos no Lineales y Bifurcaciones.

## Abstract

*This paper deals with a continuation study of codimension one and two bifurcations, applied to an economic dynamical system. First, continuation curves of Hopf bifurcations are calculated with the subsequent appearance of limit cycles. Secondly, we carry out a continuation analysis of these cycles, focusing our attention in new branches switching at a double Hopf point*

**Keywords:** Nonlinear Dynamical Systems and Bifurcations.

## 1 Introducción

En los últimos años han aparecido diversos trabajos<sup>1</sup> sobre estudios cualitativos aplicados a los modelos dinámicos no lineales económicos. Así, autores como Day (1994,[4]), Brock (1989,[3]), Medio (1993,[16]), Vilchez (1999,[17]), Hilborn (1994,[11]), Barnett-Gandolfo(1996,[2]), Gandolfo(1997,[6]), Lorenz (1997,[14]), Feitchinger (1992,[5]) se dedican a estudiar no sólo la estabilidad de las soluciones de equilibrio, sino también a comprobar para que valores de los parámetros, dichos equilibrios tienen comportamientos cualitativos distintos. Hoy por hoy, conceptos tales como bifurcaciones, codimensión, o equivalencia topológica son utilizados por los investigadores económicos también. Además el acceso a programas informáticos tal como (CONTENT (2000) [13]), nos permiten la obtención numérica de los puntos de bifurcación ó de los ciclos límites de los sistemas dinámicos. En este trabajo se realiza un estudio de un modelo de publicidad Feitchinger (1992,[5]) en el que se obtienen los puntos de equilibrio del sistema. Partiendo de un punto de equilibrio, se hace una continuación del punto de equilibrio con respecto a un parámetro, es decir, vamos obteniendo una curva de puntos de equilibrio en función del valor del parámetro en cuestión, con lo que se puede realizar continuaciones del punto de equilibrio en función de cada uno de los parámetros del modelo. A medida que se va realizando la continuación, se obtienen los posibles valores de bifurcación de codimensión 1 para el parámetro en cuestión, en el que una función test nos indica que hay una condición, que ha de cumplir la bifurcación, que se cumple para ese valor. Estos valores paramétricos, en los que se

<sup>1</sup>Este trabajo está soportado parcialmente con los fondos de la Junta de Andalucía (Acc. Coord. 2001 (LCJ/GGM-55706)(ACC-354-SEJ-2001))

encuentran las bifurcaciones de nuestro sistema, nos indican que a un lado de ese valor, el sistema tiene un comportamiento y al otro lado otro comportamiento distinto. Las bifurcaciones de codimensión 1 son la bifurcación Fold (LP) y la bifurcación de Hopf (H). A partir de un punto de bifurcación de codimensión 1 se continúa también con respecto a otro parámetro del sistema, con lo que la curva obtenida está formada por puntos de bifurcación de codimensión 1 en función de ese segundo parámetro y de esa manera se obtienen las bifurcaciones de codimensión 2 posibles para nuestro sistema, que en el caso que exponemos en las secciones siguientes pueden ser la bifurcación cúspide, Bogdanov-Takens o la bifurcación de Bautin (Hopf generalizada), que se comentan brevemente en la sección 2.2.

Este trabajo está desarrollado en la forma siguiente: En la sección segunda se comienza con el planteamiento económico del modelo y se comentan brevemente los conceptos matemáticos teóricos necesarios para la obtención de los puntos relevantes que se obtienen de forma práctica en la sección tercera utilizando herramientas informáticas como son Mathematica y CONTENT. En esta sección se calculan los puntos de equilibrio del modelo de Feitchinger y de forma simbólica se comprueba que no puede haber puntos de bifurcación de Fold de codimensión 1, pero sí puntos de Hopf de codimensión 1. Esto nos lleva emparejado la aparición de ciclos límite, que pueden ser estables o inestables, donde la estabilidad de estos ciclos límite vienen determinados por el primer coeficiente de Liapunov. Al realizar la continuación de la bifurcación de Hopf se encuentra una bifurcación de Bautin o de Hopf generalizada en el que el primer coeficiente de Liapunov se anula surgiendo una bifurcación de codimensión 2. Esta sección tercera termina con la continuación de los ciclos límite, pudiendo aparecer también las bifurcaciones de los ciclos límite en las que hemos encontrado bifurcaciones Fold (LPC) de los ciclos límite y cambios de rama (BPC), cuyos valores hemos representado en las tablas correspondientes. Terminamos con la sección cuarta con conclusiones y trabajo futuro en la que exponemos las posibilidades de ampliaciones de este modelo.

## 2 Bifurcaciones en sistemas dinámicos no lineales

### 2.1 Modelo de publicidad

El Modelo de publicidad por contacto (Feitchinger, 1992 [5]) entre usuarios de una marca y compradores potenciales viene dado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= k - a(t)X_1(t)X_2(t) + \beta X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= a(t)X_1(t)X_2(t) - \delta X_2(t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde el número de personas en un mercado se compone de  $X_1(t)$ , que es el número de compradores potenciales de una marca específica en un instante  $t$ , y  $X_2(t)$ , que es el número de usuarios de la marca en ese momento. Se supone que el número de compradores potenciales que comprarán y además se harán clientes en algún intervalo corto de tiempo es proporcional al número actual de compradores potenciales y al número de usuarios. A la constante de proporcionalidad  $a(t)$  se le llama *tasa de contacto*, con lo que se tiene el término  $a(t)X_1(t)X_2$ . Además se asume que dicha tasa se puede incrementar por un aumento en los gastos de publicidad y que esa tasa de publicidad es proporcional al número de compradores, con lo que  $a(t) = \alpha X_2(t)$ . Se supone, además, que los clientes actuales cambian a una marca rival en una proporción  $\beta$ . La subida de ventas de artículos semejantes de otras marcas o firmas afines influyen sobre el valor de este parámetro. Como los individuos pueden volver a la marca original, entonces permanecen en el grupo de clientes potenciales. Además, se asume que algunos clientes dejan el mercado para siempre (por ejemplo por muerte o emigración) a una tasa constante  $\varepsilon$ . A la suma de ambos parámetros se le denota por  $\delta$ ;  $\delta = \beta + \varepsilon$ . Se supone que un flujo continuo de nuevos clientes potenciales entran en el mercado desde alguna fuente, tal como por un aumento de los ingresos, alguna otra forma de publicidad o cambios demográficos. De este modo, los individuos fluyen dentro del mercado de firmas con una tasa constante de input  $k$ . Pretendemos entonces, estudiar los puntos fijos o soluciones de equilibrio del sistema (1), donde hemos de tener en cuenta que  $k, \alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas y,  $\delta - \beta = \varepsilon \geq 0$ . El sistema queda por tanto expresado en las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= k - \alpha X_1(t)X_2^2(t) + \beta X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= \alpha X_1(t)X_2^2(t) - \delta X_2(t) \end{aligned} \quad (2)$$

### 2.2 Puntos de equilibrio. Bifurcaciones

Los puntos fijos o de equilibrio (EP)<sup>2</sup> de un sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k, \quad (3)$$

se obtienen resolviendo el sistema  $f(x, \alpha) = \theta$ . Si el sistema es polinómico, como es el caso que nos ocupa, se resuelve por medio de las bases de Gröebner (Barnett 1983)[1]). La pregunta que nos hacemos ahora es respecto de la estabilidad o no de este punto de equilibrio y si la estabilidad<sup>3</sup> de dicho punto depende de los parámetros  $\alpha$ . Sabemos que si el punto fijo

<sup>2</sup>Cada punto característico tiene una notación que se utiliza más tarde. En este caso EP representa a un punto de equilibrio del sistema

<sup>3</sup>Para una visión más amplia de esta sección se pueden consultar (Wiggins 1990 [18], Guckenheimer 1993 [9], Govaerts 2000 [7] ó Kuznetsov 1998 [12] )

es hiperbólico (ninguno de los autovalores de la matriz Jacobiana  $D_x f(x_0, \alpha_0)$  del sistema tiene parte real nula), entonces la estabilidad del sistema 3 viene determinada por la del campo vectorial lineal

$$\dot{\xi} = D_x f(x_0, \alpha_0)\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

ya que los puntos fijos hiperbólicos son estructuralmente estables, es decir al variar ligeramente  $\alpha$  no cambia la naturaleza de la estabilidad del punto fijo. El problema surge cuando el punto fijo no es hiperbólico, ya que entonces puede ocurrir que el comportamiento del sistema sea distinto. En este caso se dice que hay una bifurcación. Es decir, una bifurcación es un cambio del sistema, de tipo topológico, cuando su parámetro pasa a través de un valor (crítico) de bifurcación. La codimensión de una bifurcación en el sistema (3) es el número de condiciones independientes que determinan la bifurcación. Los puntos de equilibrio hiperbólicos son de codimensión 0, ya que no hay ninguna condición. Las bifurcaciones de codimensión 1 están determinadas por la matriz Jacobiana  $D_x f(x, \alpha)$  y son los puntos Fold y los puntos de Hopf. Una solución de equilibrio del sistema (3) con  $\alpha \in \mathbb{R}$  es llamado un punto límite (LP) o Fold si  $D_x f(x_0, \alpha_0)$  es de rango deficiente 1, es decir tiene un único autovalor nulo y un punto de equilibrio es un punto de Hopf (H) si  $D_x f(x_0, \alpha_0)$  tiene un único par de autovalores imaginarios puros. Estas bifurcaciones se detectan en un entorno del equilibrio y se les dice, por tanto, que son locales.

También hay bifurcaciones que no pueden detectarse al estudiar los entornos de los puntos fijos o de los ciclos y son denominadas globales, tales como las bifurcaciones homoclínicas o las heteroclínicas. Si hay una trayectoria que sale de un punto fijo y termina en el mismo punto fijo se dice que es una órbita homoclínica, y si la órbita une dos puntos fijos distintos se dice que es heteroclínica.

Si se toma un valor  $\alpha = \alpha_0$  y considerando un conjunto paramétrico conexo maximal (llamado estrato) que contiene a  $\alpha_0$  y compuesto por aquellos puntos para los cuales el sistema tiene un retrato fase que es topológicamente equivalente a  $\alpha_0$ , entonces tomando todos los estratos en el espacio paramétrico  $\mathbb{R}^k$ , se obtiene el retrato paramétrico del sistema, que con sus correspondientes retratos fase constituye lo que se denomina un diagrama de bifurcación. Es deseable tener el diagrama de bifurcación ya que entonces se tiene el estudio cualitativo del sistema. No obstante, los diagramas de bifurcación no siempre son fáciles de construir ya que pueden tener un número infinito de estratos, pues puede haber valores de bifurcación que sean densos en algunas regiones paramétricas y el retrato fase pueda tener una estructura de Cantor. Sin embargo, los diagramas de bifurcación no siempre son extremadamente complicados pudiendo ser similares, ya que si tenemos dos sistemas, se dice que son

topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo que transforma el retrato paramétrico del primer sistema en el espacio paramétrico del segundo sistema y otro homeomorfismo que transforma los correspondientes retratos fases. Se tiene entonces el problema de clasificar todos los posibles diagramas de bifurcación de los sistemas genéricos, al menos, localmente; de esta manera con estos diagramas locales se utilizan para tratar de construir el diagrama de bifurcación global de cualquier sistema. Ahora bien, teniendo en cuenta que el número de parámetros libres requeridos para encontrar una bifurcación de codimensión  $k$  en un sistema dependiente de parámetros, y como es suficiente estudiar una bifurcación de codimensión  $k$  en un sistema genérico  $k$ -paramétrico, los diagramas generales  $m$ -paramétricos ( $m > k$ ), se pueden obtener consiguiendo los diagramas cerca de las fronteras de bifurcación, al cambiar el diagrama  $k$ -paramétrico en las direcciones complementarias. Para las bifurcaciones de los equilibrios y de los puntos fijos, los diagramas de bifurcación universales vienen dadas por las *formas normales topológicas*. Es decir, en ocasiones es posible construir un sistema polinomial

$$\dot{\xi} = g(\xi, \beta; \sigma), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^k, \quad \sigma \in \mathbb{R}^l, \quad (5)$$

que tiene un equilibrio  $\xi = \theta_n$  en  $\beta = \theta_k$ , que satisface las  $k$  condiciones de bifurcación que determinan una bifurcación de codimensión  $k$  de este equilibrio y donde  $\sigma$  es un vector de los coeficientes  $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, l$  de los polinomios que aparecen en (5). En definitiva, el sistema de la forma normal es topológicamente equivalente al sistema original en un entorno del equilibrio.

Cuando el punto fijo no es hiperbólico y si  $n_c$  es el número de autovalores de la matriz Jacobiana del sistema, con  $T^c$  el subespacio lineal asociado a los autovalores, entonces el Teorema de la variedad centro (ver Guckenheimer 1993 [9]), asegura que hay una variedad invariante  $W_{loc}^c(x_0)$ ,  $n_c$  dimensional, definida localmente, que es tangente a  $T^c$  en  $x_0$ , donde los flujos del sistema original en un entorno del punto fijo  $x_0$  tienden a la variedad  $W_{loc}^c(x_0)$ , denominada variedad centro. La variedad centro cumple que si el número de autovalores con parte real positiva es nulo, entonces dicha variedad es atractiva. Al restringir el sistema a esta variedad centro, se obtiene un sistema

$$\dot{u} = \Phi(u, \alpha), \quad u \in \mathbb{R}^{n_c} \quad (6)$$

en el que el comportamiento del sistema original en un entorno de la bifurcación es el del sistema (6)<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>La bifurcación Fold, de codimensión 1, tiene como forma normal en la variedad centro  $\dot{\omega} = \beta + a\omega^2$ ; dependiendo de los valores de  $\beta$  y  $a$ , se tienen la Fold, Flip o transcritical, según las condiciones de transversalidad que cumplan. La bifurcación Hopf de codimensión 1 tiene en la variedad centro una forma normal compleja equivalente a  $\dot{\omega} = i\omega_0\omega + \ell_1\omega|\omega|^2$ , donde el coeficiente  $\ell_1$  de la forma normal es conocido por el primer coeficiente de Liapunov.

El teorema de bifurcación de Hopf (ver Wiggins 1990 [18], Guckenheimer 1993 [9] ó Hassard 1981 [10]) establece que se origina una curva de órbitas periódicas en un punto de Hopf aislado si no hay otros autovalores sobre el eje imaginario y el primer coeficiente de Lyapunov,  $\ell_1$ , no es nulo. Si  $\ell_1 < 0$ , entonces la bifurcación se dice que es supercrítica ya que en este caso, para valores del parámetros anterior al valor de bifurcación se tiene un punto fijo estable y al pasar por el punto de bifurcación este punto fijo se hace inestable y se obtienen ciclos límite estables para los valores del parámetro que están por encima del valor de bifurcación. En caso contrario se dice que es subcrítica ya que el ciclo límite inestable, rodeando el punto fijo estable, existe antes de la bifurcación y por encima del valor de la bifurcación hay un punto fijo estable.

Si  $\ell_1 = 0$ , obtenido en la bifurcación de Hopf, entonces surge una bifurcación de codimensión 2, denominada de Hopf generalizada o también de Bautin (GH). Otras bifurcaciones relacionadas con la bifurcación de Hopf, de codimensión 2, son: la de Bogdanov-Takens (BT) (los dos autovalores son nulos, es decir  $n_c = 2$ ); la bifurcación (ZH) (un único autovalor nulo y dos únicos autovalores imaginarios puros); la bifurcación (DH) (dos pares de autovalores imaginarios puros únicos). La bifurcación cúspide (CP) en el que el término de la forma normal reducida de la bifurcación Fold se anula. Se puede notar también que la bifurcación (BT) está relacionada también con la bifurcación Fold. De igual manera las bifurcaciones de codimensión 3 están relacionadas<sup>5</sup> con las de codimensión 2. Algo más complicado es la obtención de las bifurcaciones de codimensión 1 de los ciclos límite. Así, si  $L_0$  es un ciclo límite del sistema (3) con  $n = 3$ ,  $k = 1$  para un valor del parámetro, digamos  $\alpha = 0$  y  $P_\alpha : \Sigma \rightarrow \Sigma$  es su correspondiente map de Poincaré, donde  $\Sigma$  es su correspondiente sección de cruce y el ciclo  $L_0$  no es hiperbólico, con  $n_c$  multiplicadores sobre el círculo unidad, entonces si el ciclo tiene un multiplicador simple  $\mu_1 = 1$  y el otro multiplicador cumple  $0 < \mu_2 < 1$  (bifurcación fold de ciclos o punto límite del ciclo (CLP)), en el map se tiene la colisión y desaparición de dos puntos fijos cuando  $\alpha$  pasa por  $\alpha = 0$ , con lo que en el sistema continuo se tendrá que hay una colisión entre dos ciclos límite uno estable y otro silla y que desaparecen en el sistema en el punto de bifurcación. Si por el contrario en  $\alpha = 0$  el ciclo tiene un multiplicador  $\mu_1 = -1$  y el otro multiplicador es  $-1 < \mu_2 < 0$  (bifurcación flip de ciclos o de duplicación del período (PD)), entonces en el map aparece un ciclo de período 2 y el punto fijo cambia su estabilidad convirtiéndose en un punto de silla y el ciclo de período 2 que aparece es estable, con lo que en el sistema dinámico el ciclo de período 2 del map corresponde a un ciclo límite único estable con un periodo aproximadamente el do-

ble del período del ciclo  $L_0$ . La última bifurcación de codimensión 1 surge cuando los multiplicadores son complejos y unitarios (bifurcación de Neimark-Sacker (NS)), entonces el map de Poincaré tiene una variedad bidimensional parámetro-dependiente sobre la que se bifurca una curva invariante cerrada desde el punto fijo, con lo que esta curva cerrada se corresponde con un toro bidimensional invariante, habiendo ciclos de diferentes tipos de estabilidad localizados sobre el toro. En el caso en que  $n = 2$  no puede darse este último caso y se tiene sólo las posibilidades de que  $\mu = 1$  ó  $\mu = -1$  ó que pueda haber algún cambio de rama (BPC). Para la detección y computación de estas bifurcaciones se pueden consultar (Kuznetsov 1998 [12], Govaerts [7]) y para la obtención práctica de estas bifurcaciones hemos utilizado el programa CONTENT ([13]).

Para ir obteniendo los puntos de bifurcación se actúa de la siguiente manera. Dado el sistema (3), con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , en primer lugar hemos de obtener un punto de equilibrio, y después se continúa el punto de equilibrio para un valor paramétrico (se suele decir que se activa un parámetro). Se obtiene entonces una variedad unidimensional suave  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . La computación de la curva de equilibrio da la dependencia de un equilibrio de la curva

$$f(x, \alpha) = \theta. \quad (7)$$

Al ir continuando la curva se pueden detectar las bifurcaciones de codimensión 1: a saber la bifurcación Fold y la de Hopf. Para ello se utilizan unas funciones test que cambian de signo cuando se llega a una bifurcación de este tipo. Estos puntos de bifurcación son generalmente no degenerados. Además la curva de equilibrio (7) puede tener puntos de ramificación (BP), es decir puntos de equilibrio por los que pasan dos curvas de equilibrio suaves que son diferentes. Para la obtención de un ciclo límite, se puede partir de un punto de Hopf y conociendo el valor de  $\ell_1$  podemos saber si es subcrítica o supercrítica, con lo que se puede hacer la integración hacia adelante (forward) o hacia atrás (backward) para la obtención del ciclo límite, según que el ciclo sea estable o inestable. Para hacer la continuación del ciclo se activa el parámetro correspondiente y se van obteniendo los ciclos correspondientes a los distintos valores del parámetro activo y a la vez se detectan las posibles bifurcaciones de los ciclos límite. Análogamente, si se obtiene un punto de bifurcación de codimensión 1, se continua la correspondiente bifurcación con lo que se pueden obtener sobre esta curva, bifurcaciones de codimensión 2 con sus correspondientes ramas de bifurcación si son posibles. Hay que tener en cuenta que al continuar la bifurcación de Hopf, debemos prestar atención ya que podemos obtener un punto de Bogdanov Takens o un punto de equilibrio neutral (autovalores  $\lambda$  y  $-\lambda$ ). Los ciclos límite se obtienen a partir de puntos cercanos a un punto de Hopf.

<sup>5</sup>Hay un grafo en Govaerts 2000 [7] pp 300 en el que se recogen las relaciones que existen entre estas bifurcaciones.

### 3. Puntos de equilibrio del modelo. Continuación y bifurcaciones

Para la obtención de los puntos de equilibrio hemos utilizado el paquete Mathematica ([15]), obteniendo un único punto fijo  $(x_0, \alpha_0) = (\frac{\epsilon(\beta+\epsilon)}{k\alpha}, \frac{k}{\epsilon})$  del sistema (2). Hemos considerado unos valores de los valores de los parámetros acorde con el modelo de difusión que podríamos poner como  $k = 0.15, \epsilon = 0.1, \beta = 0.125, \alpha = 0.1$ , con lo que se obtiene el punto de equilibrio  $(x, y) = (1.5, 1.5)$ . En general, la obtención de estos parámetros se realiza haciendo una calibración del modelo a datos obtenidos del mundo real, como pueden ser los porcentajes de ventas de una determinada marca con respecto a otra. No obstante, aquí hemos preferido dar valores a los parámetros, de manera que la representación gráfica sea clara. Para el cálculo de las posibles bifurcaciones Fold, se anula el Jacobiano del sistema diferencial en el punto de equilibrio, obteniendo  $\frac{k^2\alpha}{\epsilon}$ . Ahora como los valores de los parámetros los hemos supuestos positivos, el Jacobiano no se anula para ningún valor, con lo que no hay bifurcaciones tipo fold en el ortante paramétrico positivo. Para la obtención de los puntos de Hopf se ha de cumplir como condición necesaria que el coeficiente de primer grado del polinomio característico de la matriz Jacobiana del sistema dinámico sea nulo y que el coeficiente independiente sea positivo <sup>6</sup>. El polinomio característico de la matriz Jacobiana es  $P_2(\lambda) = \frac{k^2\alpha}{\epsilon} - (\beta - \frac{k^2\alpha}{\epsilon^2} + \epsilon)\lambda + \lambda^2$ . Luego se ha de cumplir que  $\beta - \frac{k^2\alpha}{\epsilon^2} + \epsilon = 0$  y que  $\frac{k^2\alpha}{\epsilon} > 0$ . Por lo tanto se verifica la segunda condición para los valores del parámetro. Se tiene entonces una superficie de bifurcación de Hopf (ver figura 1). Hay que tener en

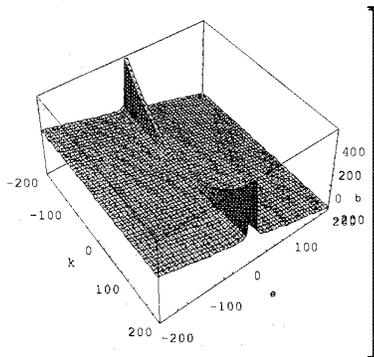


Figura 1: superficie de bifurcación de Hopf  $\beta = \frac{k^2\alpha}{\epsilon^2} - \epsilon, \alpha = 0.1$

cuenta que en esta superficie puede haber otros puntos

<sup>6</sup>En Guckenheimer 1997 [8], hay un desarrollo bastante completo de distintas técnicas de detección de bifurcaciones que luego se han aplicado en CONTENT.

| $\alpha$ | $\beta^*$ | $x^*$ | $y^*$ | $\omega$ | $\ell_1$ | $T$   |
|----------|-----------|-------|-------|----------|----------|-------|
| 0.05     | 0.0125    | 1.5   | 1.5   | 0.106    | -0.092   | 59.27 |
| 0.1      | 0.125     | 1.5   | 1.5   | 0.125    | -0.148   | 50.26 |
| 0.15     | 0.2375    | 1.5   | 1.5   | 0.183    | -0.189   | 34.33 |

Tabla 1: Puntos de bifurcación de Hopf de la figura (2).

degenerados tales como puntos de silla con autovalores iguales pero de signo contrario o puntos de bifurcación de Takens Bogdanov, e incluso puntos de Hopf generalizados o de Bautin. En la figura (2) tenemos la proyección de los puntos de equilibrio<sup>7</sup> en el plano  $(\beta, x)$ , para tres valores distintos del parámetro  $\alpha$ .

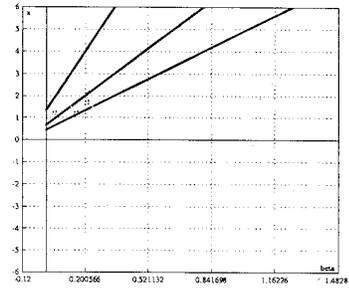


Figura 2: continuación de los puntos de equilibrio  $(\beta, x)$ .

La proyección más a la izquierda nos indica como se va moviendo la variable  $x$  a medida que el parámetro  $\beta$  va creciendo desde cero, llegando a obtener un punto de bifurcación de Hopf, que viene reseñado en la tabla 1, teniendo un par de autovalores complejos conjugados  $\lambda_{1,2} = 0 \pm 0.106066i$ , y con un primer coeficiente de Lyapunov  $\ell_1 = -0.0928416$ , con lo que la bifurcación es supercrítica, es decir antes del valor de bifurcación de  $\beta^*$ , hay un punto de equilibrio que es estable y al pasar de este valor de bifurcación se convierte en inestable, surgiendo entonces un ciclo límite que es estable. La segunda curva es la representación de los puntos de equilibrio para el valor de  $\alpha = 0.1$  y la tercera curva para  $\alpha = 0.15$ . En esta tabla 1, hemos representado varios puntos de bifurcación de Hopf, suponiendo constante los parámetros  $k = 0.15$ , y  $\epsilon = 0.1$  y hemos variado  $\alpha = 0.05, 0.1, 0.15$  y obtenido los correspondientes valores del parámetro  $\beta$  en el que surge el punto de Hopf, así mismo como los valores de la forma normal para cada uno de los tres puntos de Hopf obtenidos. Los valores de la forma normal vienen dados por  $\omega$  y los valores del primer coeficiente de Lyapunov, que como se puede apreciar, ha salido siempre negativo, con lo que las bifurcaciones de Hopf para estos tres valores es supercrítica.

<sup>7</sup>En las representaciones gráficas la variable  $x$  representa a  $X_1$  y la variable  $y$  a la  $X_2$

### 3.1 Continuación de Hopf según los parámetros

En la figura (2) hemos encontrado un punto de Hopf, para cada valor de  $\alpha$  fijo, al variar el parámetro  $\beta$  y teniendo fijos los otros parámetros. Así, hemos considerado el punto de Hopf más a la izquierda, es decir el obtenido para la curva con  $\alpha = 0.05$  y hemos hecho la continuación de los puntos de Hopf activando otro parámetro. De esta manera obtenemos una curva que depende de los dos parámetros que se active cada vez. Hemos activado dos de los tres parámetros,  $k$ ,  $\epsilon$  y  $\alpha$ , y hemos obtenidos diferentes curvas que pasamos a comentar.

-  $\beta$  y  $k$ . En la figura (3) tenemos los tres puntos de Hopf sobre una línea, ya que  $k$  es constante y  $\beta^*$  son los valores de la tabla 1, obtenidos al continuar los puntos de equilibrio.

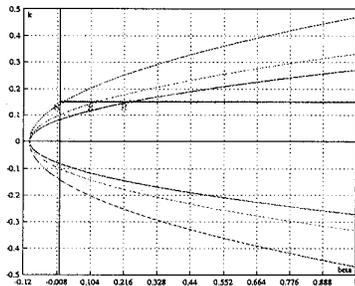


Figura 3: continuación puntos de Hopf ( $\beta, k$ ).

En primer lugar continuamos el primer punto de Hopf más a la izquierda obtenido para  $\alpha = 0.05$ , teniendo una rama parabólica y a continuación se ha hecho la continuación de los puntos de bifurcación de Hopf para los otros dos valores  $\alpha$ . Sobre la curva encontrada, todos los puntos de ella tienen sus autovalores imaginarios puros, o bien pueden ser sillas neutrales, es decir la mayoría de esos puntos son puntos de Hopf. En nuestro caso hemos comprobado que todos los puntos de la curva, encontrados numéricamente, han sido puntos de Hopf. La gráfica (4), representa la continuación de los puntos de Hopf en función de los parámetros  $\beta$  y  $k$ , y la representación es de  $x$  frente a  $\beta$ .

En esta continuación no hemos obtenido ninguna bifurcación de codimensión 2, como se puede apreciar en la figura.

-  $\beta$  y  $\epsilon$ . En la figura (5) está la continuación de los puntos de Hopf en función de los parámetros  $\beta$  y  $\epsilon$ , con la representación de  $x$  frente a  $\beta$  y como se puede apreciar tampoco hay bifurcaciones de codimensión 2 respecto a estos dos parámetros.

-  $\beta$  y  $\alpha$ . De la figura (2) hemos considerado el primer punto de bifurcación de Hopf y realizando la continuación se obtiene una bifurcación de Hopf genera-

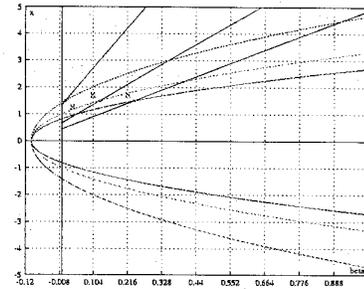


Figura 4: continuación puntos de Hopf ( $\beta, x$ ).

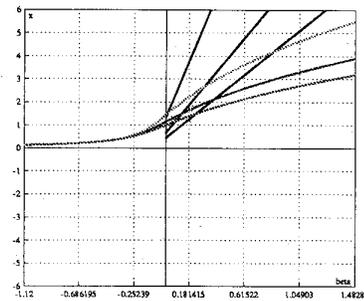


Figura 5: continuación puntos de Hopf ( $\beta, x$ ).

lizado (GH) o de Bautin <sup>8</sup> para los valores de  $\alpha = 2.72493e - 6$  y  $\beta = -0.0999939$ , con  $\dot{\omega} = 0.000783$ ,  $l_1 = 0$ , luego en este punto el primer coeficiente de Lyapunov cambia de signo. De forma análoga sucede en los otros dos puntos de Hopf, obteniéndose puntos (GH) para valores de  $\beta$  negativos. La figura (6) representa lo expuesto. En este caso el valor de  $\alpha$  es muy

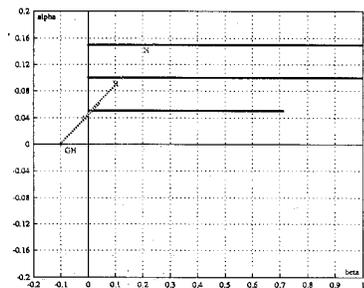


Figura 6: continuación puntos de Hopf ( $\beta, \alpha$ ).

cercano a cero y el valor de  $\beta$  es negativo; esto nos indica que si la tasa de publicidad es muy pequeña y si los clientes no sólo no cambian a una marca rival, sino que acaban entrando en la marca a partir de la marca rival, entonces tenemos puntos de bifurcación de Hopf

<sup>8</sup>Un punto de bifurcación (GH) es un punto de Hopf donde  $l_1$  se anula. Una forma normal para la bifurcación de Bautin en las coordenadas reducidas es  $\dot{\omega} = (\beta_1 + i\omega_0)\omega + \beta_2\omega|\omega|^2 + l_2\omega|\omega|^4$  - Govaerts (2000).  $l_2$  es el segundo coeficiente de Liapunov que es real.

generalizado. En los puntos de la curva de Hopf en el que  $\ell_1$  cambia de signo surge la bifurcación de Hopf generalizada. En el lado en el que  $\ell_1 < 0$ , entonces las órbitas estables nacen en la dirección en el que la parte real de los autovalores críticos es positiva. De forma similar en el lado en el que  $\ell_1 > 0$  nacen órbitas inestables en la dirección en el que la parte real de los autovalores críticos es negativo. Dependiendo del signo del segundo coeficiente de Liapunov  $\ell_2$  se tendrá un comportamiento de las trayectorias u otro. El significado geométrico de la bifurcación de Hopf generalizada es el siguiente: La característica más notable es la presencia de una curva en el espacio paramétrico, que se origina en el punto (GH), a lo largo de la cual el sistema dinámico tiene un punto de retorno de órbitas periódicas; es decir, colisionan un par de órbitas periódicas, una estable y otra inestable, y desaparecen (ver figura (7)).

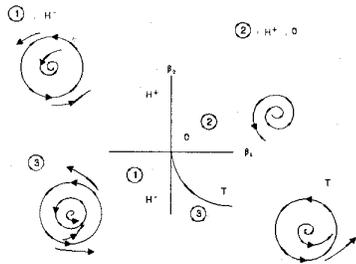


Figura 7: bifurcación (GH) o de Bautin para  $\ell_2 > 0$ .

Así, en la región (3) de esta gráfica hay dos ciclos límite, uno estable y otro inestable, que al pasar por la curva T colisionan, surgiendo entonces en esta curva un ciclo límite silla, ya que por encima del ciclo las trayectorias son repelidas, pero por debajo del ciclo las trayectorias son atraídas hacia él y repelidas del equilibrio, para a continuación, al pasar a la región (2) desaparece el ciclo límite, obteniéndose un equilibrio inestable. Otra característica a destacar de esta bifurcación es que al pasar los dos ciclos límite de la región (3) por  $H^-$ , los dos ciclos límite colisionan en esta curva y se obtiene un ciclo límite inestable que perdura al entrar en la región (1) y el punto de equilibrio pasa a ser estable y sólo cuando cruce por  $H^+$  desaparece el ciclo límite inestable pasando el equilibrio a ser inestable.

En nuestro caso, sobre la curva de Hopf, tomamos un punto  $P_1$  anterior al punto de bifurcación de Bautin,  $x = 1.5$ ,  $y = 1.5$ ,  $\alpha = 0.045955467$ ,  $\beta = 0.0033998$ . Sabemos que  $\ell_1 < 0$ , ya que aún no hemos llegado al punto de bifurcación de Bautin, con lo que la bifurcación de Hopf nos dice que al pasar por ella surge un ciclo límite estable y el punto de equilibrio pasa a ser inestable. Para encontrar los autovalores; computamos una curva de equilibrio

desde el último punto de equilibrio computado  $P_1$ , con  $\beta$  como parámetro libre y obtenemos los autovalores  $\lambda_{1,2} = 0.00438616 \pm i0.10159105$  y el punto de equilibrio inestable es  $x = 1.627258$ ,  $y = 1.5$ ,  $\alpha = 0.4595547$ ,  $\beta = 0.0121721$ ,  $k = 0.15$ ,  $\epsilon = 0.1$ . Comenzando cerca del punto, por ejemplo  $x = 1.6$  y el resto de los valores iguales, la trayectoria se ha de alejar del punto de equilibrio, ya que éste es inestable (ver gráfica (8)).

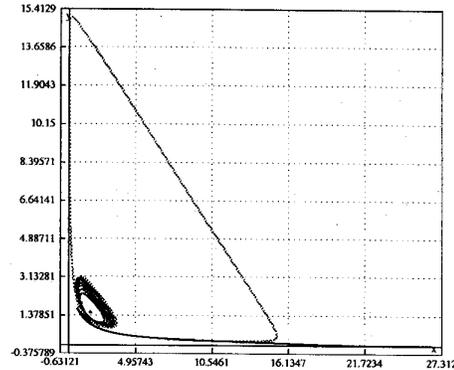


Figura 8: dos ciclo límite uno estable, otro inestable ( $\beta, \alpha$ ).

No obstante, observando la gráfica (8) y su ampliación (9) comprobamos que el punto de equilibrio es inestable, yendo las trayectorias cercanas a él hacia el exterior hasta introducirse en el ciclo límite que es estable. De igual manera las curvas que empiezan fuera

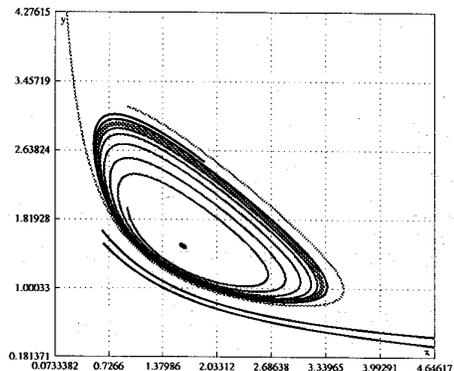


Figura 9: dos ciclo límite uno estable, otro inestable ( $\beta, \alpha$ ).

del ciclo límite son atraídas hacia él. Ahora bien, mirando la región (3) de la gráfica (7) y desde el punto de vista del (GH), para el mismo parámetro ha de haber un ciclo límite inestable. La órbita inestable puede ser comenzada desde un punto de bifurcación de Hopf, pero no puede ser computada por una simulación simple. Sin embargo, en las gráficas (8) y (9), observamos como hay una trayectoria exterior al ciclo límite que va

hacia él y una trayectoria que comienza muy cerca de la anterior que se aleja del ciclo límite. Esto nos da a entender que existe un ciclo límite inestable entre estas dos trayectorias. Con esto, se tiene que el comportamiento de los consumidores de la marca, dependiendo del punto de partida y de los parámetros encontrados pueden tener los comportamientos siguientes: 1) ser atraídos, con el tiempo, hacia un comportamiento cíclico, es decir, hacia el ciclo límite estable, 2) si en un principio están en el ciclo límite inestable, entonces permanecen en él y 3) pueden descontrolarse hacia un punto exterior de estas trayectorias. Esto es, en definitiva, los comportamientos que vienen reflejados por la bifurcación de Bautin, como se puede apreciar en la gráfica (7)

Pasamos ahora a encontrar los ciclos límite y a realizar la continuación de los ciclos límite.

### 3.2 Continuación de los ciclos límite

Para la continuación del ciclo límite, se ha de obtener uno. Para ello y utilizando el punto  $P_1$  anterior en el que habíamos obtenido un ciclo límite, construimos su gráfica (10) en el que se ha partido del punto  $x = 2.148045$ ,  $y = 2.2285623$ ,  $k = 0.15$ ,  $\alpha = 0.04595547$ ,  $\beta = 0.0121721$ ,  $\epsilon = 0.1$ . El período obtenido es  $T = 67.75$ .

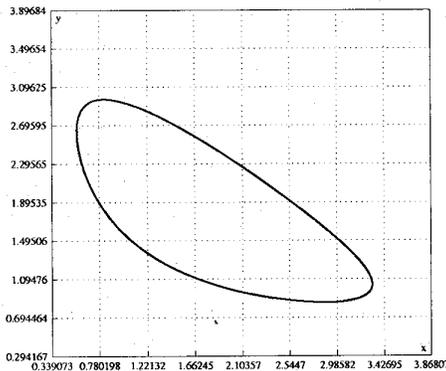


Figura 10: ciclo límite  $(\beta, \alpha)$ .

Se ha comentado que la obtención del ciclo límite inestable no se puede computar por simulación simbólica. Sin embargo, se puede computar como la solución a un problema de valor frontera (Kuznetsov 1998 [12]). Nosotros lo realizamos utilizando CONTENT, computando la curva de órbitas periódicas con parámetro libre  $\beta$  y obtenemos en primer lugar una bifurcación (PD), es decir, una duplicación del período en  $\beta = 0.023247798$ , con multiplicador  $\mu_1 = -1$ . A continuación se obtiene una bifurcación (LPC) en  $\beta = 0.023417755$ , en el que dos ciclos colisionan y desaparecen. Continuando con la computación, obte-

nemos un (BPC) en  $\beta = 0.023424$ , en el que se puede hacer un cambio de rama a otro ciclo límite y más adelante otro (PD) y luego una serie de (BPC) y (PD) que se pueden ver en las gráficas (11), (12).

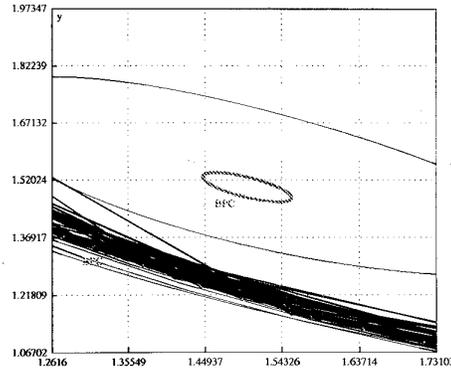


Figura 11: ciclo límite  $(\beta, \alpha)$ .

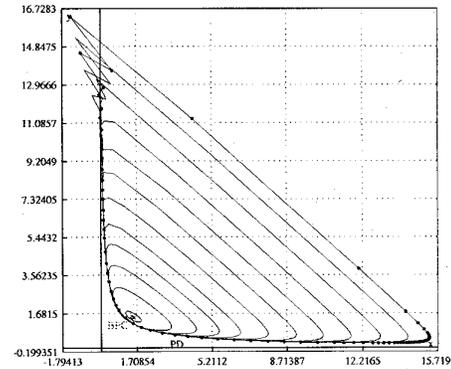


Figura 12: ciclo límite  $(\beta, \alpha)$ .

También hemos considerado el tercer punto de la tabla 1 y buscamos un ciclo límite. Como  $\ell_1 < 0$ , antes del valor de bifurcación,  $\beta^*$  el punto fijo es estable y después de cruzarlo pasa a ser inestable surgiendo un ciclo límite estable. El ciclo límite lo hemos encontrado para  $\beta^* = 0.2377$ , partiendo de  $(x, y) = (1.581847, 1.435172)$ ,  $T = 34.05$  (ver figura 13). Para hacer la continuación del ciclo límite activamos el parámetro  $\beta$  y tomamos como punto inicial  $(x, y) = (1.48, 1.48)$ ,  $\beta = 0.237$  y el resto de los valores igual. Como estamos en un sistema de orden 2, tenemos como posibles bifurcaciones en los ciclos límite encontrados un Fold (LPC) y también algún cambio de rama (BPC). Haciendo la computación en Forward, se obtiene dos trayectorias con los puntos (BPC) que vienen representados en la tabla 2. La figura (14) nos da la continuación del ciclo límite, así como los (BPC) obtenidos, en el que los ciclos límite van aumentando sus períodos desde el punto de bifurcación.

A continuación se ha realizado un cambio de rama en

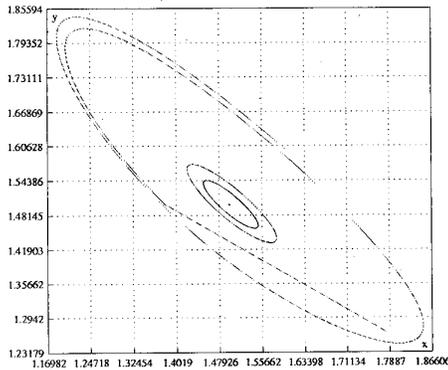


Figura 13: ciclo límite  $(\beta, \alpha)$ .

| Punto | $x$    | $y$    | $\beta^*$ | $T$     |
|-------|--------|--------|-----------|---------|
| (BPC) | 1.5393 | 1.4599 | 0.237562  | 34.2167 |
| (BPC) | 1.6017 | 1.3993 | 0.237923  | 34.2354 |

Tabla 2: Tabla con (BPC).

el punto (BPC) más alto y se han obtenido los siguientes puntos representados en la tabla 3 y la figura (15) nos representa estos puntos en sus ciclos límite.

En este caso en la tabla 3, se puede apreciar como en este cambio de rama, a medida que  $\beta$  va decreciendo, el período  $T$  también decrece hasta el punto (LPC) y a continuación  $\beta$  crece haciendo que  $T$  también crezca.

Hemos realizado lo mismo con el parámetro  $\epsilon$  (figura (16)), obteniendo dos puntos (BPC) que vienen en la tabla 4 y tomando el (BPC) más bajo, hemos realizado un cambio de rama obteniendo los puntos de la tabla 5, donde sucede lo mismo que en la tabla 3.

## 4 Conclusiones y trabajo futuro

El modelo de publicidad tiene una superficie paramétrica en la que se encuentran los puntos de bifurcación de Hopf. Éstos puntos de bifurcación de Hopf los hemos encontrado por dos caminos, uno de forma simbólica ([15]) y la otra numéricamente ([13]). Tenemos entonces que se alcanza un punto de equilibrio estable entre los usuarios de la marca y los compra-

| Punto | $x$    | $y$    | $\beta^*$ | $T$     |
|-------|--------|--------|-----------|---------|
| (BPC) | 1.5981 | 1.4026 | 0.237896  | 34.299  |
| (BPC) | 1.5337 | 1.4655 | 0.237546  | 34.2127 |
| (LPC) | 1.4995 | 1.5005 | 0.2375    | 34.2013 |
| (BPC) | 1.4886 | 1.5119 | 0.237505  | 34.2026 |
| (BPC) | 1.4602 | 1.542  | 0.237564  | 34.217  |
| (BPC) | 1.3927 | 1.6161 | 0.237955  | 34.3139 |

Tabla 3: Puntos notables en el cambio de rama.

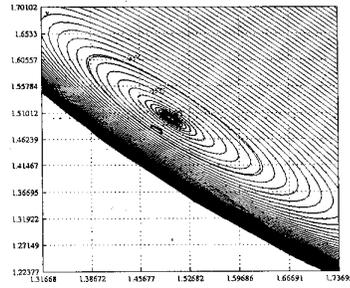


Figura 14: continuación del ciclo límite con  $\beta$ , coord= $(x, y)$ .

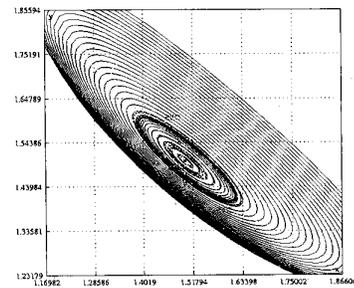


Figura 15: cambio en un (BPC) y continuación  $(x, y)$ .

dores potenciales. Ahora bien, a medida que variamos un parámetro (continuación del equilibrio),  $\beta$  en este caso, encontramos que el equilibrio se hace inestable y obtenemos comportamientos cíclicos de los consumidores. Se han realizado diversas continuaciones activando distintos parámetros y se ha encontrado un punto de Bautin (GH), en el que el primer coeficiente de Lyapunov se hace nulo. Para poder realizar un estudio del comportamiento del sistema en un entorno de este punto de bifurcación es necesario obtener el segundo coeficiente de Lyapunov,  $l_2$ , y dependiendo de su signo tendrá comportamientos distintos en el espacio paramétrico. Así, en la figura (7), con  $l_2 < 0$ , en la región 3, hay dos ciclos límite, uno estable y el otro inestable, es decir tenemos dos posibilidades en el comportamiento entre los consumidores y los potenciales y al pasar por la superficie  $T$ , uno de los dos ciclos desaparece, quedando un ciclo silla y al pasar a la región 1, desaparece el ciclo límite (ver [7] pp 312) y volvemos a obtener un único punto de equilibrio. De igual manera se continúa el ciclo límite, y obtenemos distintos puntos de ramificación y un punto de bifurcación (LPC), en el que antes de él, los ciclos límite decrecen en período y amplitud y después de él, cre-

| Punto | $x$     | $y$     | $\epsilon^*$ | $T$     |
|-------|---------|---------|--------------|---------|
| (BPC) | 1.51863 | 1.4807  | 0.100002     | 34.2051 |
| (BPC) | 1.55048 | 1.44817 | 0.100014     | 34.2296 |

Tabla 4: Tabla con (BPC).

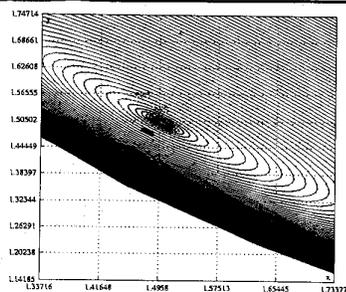


Figura 16: continuación del ciclo límite con  $\epsilon$ , coord= $(x, y)$ .

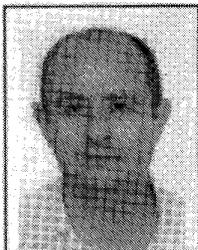
| Punto | $x$      | $y$     | $\epsilon^*$ | $T$     |
|-------|----------|---------|--------------|---------|
| (BPC) | 1.51652  | 1.4830  | 0.100001     | 34.2042 |
| (LPC) | 1.499994 | 1.50006 | 0.099999     | 34.2013 |
| (BPC) | 1.4407   | 1.5096  | 0.1          | 34.2022 |
| (BPC) | 1.47636  | 1.5245  | 0.100003     | 34.2072 |
| (BPC) | 1.44768  | 1.5547  | 0.100014     | 34.2301 |

Tabla 5: Puntos notables en el cambio de rama.

cen en período y amplitud. Con esto, se tiene que el comportamiento de los usuarios varía de conducta con períodos distintos, a medida que el parámetro varía ligeramente. Queda, por tanto, realizar el estudio de calcular el segundo coeficiente de Lyapunov que nos determinará en que región del espacio paramétrico de la figura (7) nos estamos moviendo, con lo que el comportamiento de los consumidores puede tener distintas posibilidades. No obstante, se está trabajando también en introducir en el modelo algún comportamiento distinto al reflejado en las ecuaciones, como puede ser, una actuación directa sobre los compradores potenciales, con unas tasas específicas para ello.

## Referencias

- [1] BARNETT, S. *Polynomials and Linear Control Theory*. Marcel Dekker, New York, 1983.
- [2] BARNETT, W. A., GANDOLFO, G., AND HILLINGER, C. *Dynamic Disequilibrium Modeling*, cambridge university press. ed. Cambridge University Press, 1996.
- [3] BROCK, W. A., AND MALLIARIS, A. *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*, vol. 27 of *Advanced TextBooks in Economics*. North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [4] DAY, R. H. *Complex Economic Dynamics. An Introduction to Dynamical Systems and Market Mechanisms.*, vol. 1. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass, etc, Londres, 1994.
- [5] FEICHTINGER, G. Hopf bifurcation in an advertising diffusion model. *Journal of Economic Behavior and Organization* 17 (1992), 401–411.
- [6] GANDOLFO, G. *Economic Dynamics*, third ed. Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [7] GOVAERTS, W. J. *Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria*. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [8] GUCKENHEIMER, J., MYERS, M., AND STURMFELS, B. Computing hopff bifurcations i. *Siam J. Numer. Anal.* 34, 1 (February 1997), 1–21.
- [9] GUKENHEIMER, J., AND HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, fourth ed. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [10] HASSARD, B., KAZARINOFF, N., AND Y.H.WAN. *Theory and Apllicactions of Hopf Bifurcations*. Cambridge University Press, London, 1981.
- [11] HILBORN, R. C. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press, New York, 1994.
- [12] KUZNETSOV, Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, second ed. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 1998.
- [13] KUZNETSOV, Y. A., AND LEVITIN, V. V. Content: A multiplatform environment for analyzing dynamical systems. Tech. rep., Dynamical Systems Laboratory,CWI, (ftp.cwi.nl/pub/CONTENT) Amsterdam, 1995–1997.
- [14] LORENZ, H.-W. *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Springer-Verlag, Berlin-Heildeberg, 1997.
- [15] MATHEMATICA. Mathematica 3.0. Tech. rep., Wolfrang Resarch., <http://www.wolfram.com>. The Mathematica Archive Wolfram Research, Inc. 100 Trade Center Drive Champaign, IL 61820, USA, 1996.
- [16] MEDIO, A. *Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [17] VILCHEZ, M. L., AND VELASCO, F. *Some types of bifurcations in a bioeconomic model*. Progress in Simulation, Modeling, Analysis and Synthesis of Modern Electrical and electronic Devices and Systems. World Scientific and Engineering Society, Athens, 1999.
- [18] WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York, 1990.



**Francisco Velasco Morente** es Profesor Titular de la Universidad de Sevilla en el Dpto. de Economía Aplicada I de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Es Ldo., en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Dr., en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Su Tesis Doctoral la dirigió a las Bifurcaciones en Modelos Dinámicos y de Control Óptimo Aplicados a Pesquerías. Sus Líneas de Investigación son: 1) Localización de Centros de servicio atractivos y repulsivos. 2) Estudio de las bifurcaciones de los modelos dinámicos continuos y discretos aplicados a la economía.



**Francisco Begines Bejines** es Profesor del Departamento de Economía Aplicada I de la Universidad de Sevilla. Actualmente colabora con el Dr. D. Francisco Velasco Morente en el estudio de bifurcaciones de un modelo macroeconómico en tiempo continuo.



**Purificación Nadal Morales** es Profesora del Departamento de Economía Aplicada I de la Universidad de Sevilla. Actualmente labora bajo la dirección del Dr. D. Francisco Velasco Morente. Su línea de Investigación es el estudio de las bifurcaciones en modelos dinámicos discretos aplicados a la economía.



**Cristóbal Chamizo Guerra** es Profesor del Departamento de Economía Aplicada I de la Universidad de Sevilla. Su línea de investigación, es la localización de centros de servicios, así como el estudio de las funciones de distancias utilizadas. Actualmente realiza su Tesis Doctoral, en la que utiliza algoritmos de ramificación y poda para localizar centros atractivos y repulsivos, así como búsqueda de los mejores parámetros para adaptar la función de distancia a la red de carreteras de la provincia de Sevilla.



**Mª Luisa Vilchez Lobato** es Profesora Asociada Tipo III del Dpto., de Economía General y Estadística de la Universidad de Huelva. Es Lic., en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Dra., en Ciencias Económicas y Empresariales por la Universidad de Huelva. Su Tesis Doctoral lleva el título "Bifurcaciones en Modelos Dinámicos y de Control Óptimo Aplicados a Pesquerías", sus directores fueron los Drs. Francisco Velasco Morente y Juan J. García del Hoyo.

