

## ERRORES CONCEPTUALES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS CON O SIN DERIVE

### CONCEPTUAL MISTAKES IN THE LEARNING OF THE MATHEMATICS USING OR NOT DERIVE

Alicia Castellano García<sup>1</sup>  
acastellano@upcomillas.es  
Dra. Ángela Jiménez Casas<sup>1</sup>  
ajimenez@upcomillas.es  
Dra. Belén Urosa Sanz<sup>2</sup>  
burosa@chs.upcomillas.es

(1) *Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingeniería (ICAI).  
Departamento de Matemática Aplicada y Computación.*

*c/ Alberto Aguilera, 25. 28015 Madrid (España)*

(2) *Universidad Pontificia Comillas de Madrid. Facultad de Ciencias Humanas y Sociales.  
Grupo de investigación de la aplicación de las Tecnologías de la Información y la  
Comunicación (TIC) a los procesos de Enseñanza-Aprendizaje.*

*c/ Alberto Aguilera, 23. 28015 Madrid (España).*

*En este trabajo analizamos la influencia que ejercen los programas de cálculo simbólico en el aprendizaje de la asignatura de Cálculo que se imparte en el primer curso de Ingeniería Industrial de la Universidad Pontificia Comillas de Madrid.*

*Para ello analizamos los resultados obtenidos por los alumnos en las pruebas de Cálculo realizadas durante el curso, donde comparamos a aquellos que han cursado asignaturas que utilizan paquetes de cálculo simbólico con los que no las cursaron.*

*Como conclusión principal, afirmamos que los programas de cálculo simbólico ayudan al alumno en una mejor comprensión de algunos conceptos básicos matemáticos necesarios en la ingeniería.*

*Palabras clave: Enseñanza Aprendizaje, Conceptos de Cálculo en Ingeniería, Programas de cálculo simbólico.*

*In the present work the influence of symbolic computation programs in the learning process of the Calculus subject which is taught during the first year of Industrial Engineering at the Universidad Pontificia Comillas de Madrid has been studied.*

*The results obtained by students in the Calculus exams which took place during the semester are analyzed and a comparison is made between the groups who have not used the computer algebra packages with those who did not.*

*The main conclusion, the symbolic computation programs help students to better understand basic mathematical concepts required in engineering.*

*Keywords: Education Learning, Concepts of Calculation in Engineering, Programs of symbolic calculation.*

## 1. Introducción.

La aparición de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en el campo educativo, en concreto en la didáctica de las matemáticas, está ocasionando importantes modificaciones en la práctica docente, de ahí que nos hayamos planteado el estudio de la influencia de los paquetes de cálculo simbólico en el aprendizaje de las matemáticas.

Nuestro estudio está orientado a la adecuación de la metodología seguida hasta ahora en la asignatura de Cálculo del primer curso de Ingeniería Industrial al Espacio Europeo de Educación Superior, con el objetivo de mejorar la comprensión de los conceptos básicos matemáticos necesarios en Ingeniería.

Son numerosos los autores que han estudiado como afectan las TIC a la enseñanza, entre ellos destacamos a Guzmán (1991), Martínez y Prendes, (2004), Piattini y Mengual (2008), determinando las ventajas que aportan y los problemas que desencadenan al ser empleadas en este campo, llegando muchos de ellos a la misma conclusión que Vaquero (1997), para el que las TIC ofrecen grandes posibilidades al mundo de la educación, ya que, entre otros aspectos, pueden facilitar el aprendizaje de conceptos, ayudar a resolver problemas y contribuir a desarrollar habilidades cognitivas.

El Dr. Marqués (1999), señala que debemos «Innovar en las prácticas docentes y aprovechar las nuevas posibilidades didácticas que ofrecen las TIC para lograr que los alumnos realicen mejores aprendizajes», hecho por el que queremos analizar si los alumnos que asisten a las clases de asignaturas que utilizan soporte informático mejoran en el aprendizaje de las matemáticas.

Además el Dr. Monge (2004) nos dice que:

«La introducción física de las nuevas tecnologías no genera automáticamente cambios en los procesos de funcionamiento de las organizaciones, así como tampoco genera cambios en el aprendizaje de las matemáticas cuando no hay una buena planificación docente».

Al igual que este autor, también creemos que los problemas que se realizan en las asignaturas que utilizan soporte informático deben estar meticulosamente programados para que resulten más eficaces en el aprendizaje de las matemáticas.

Revisando la gran cantidad de los estudios realizados sobre la incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en los procesos educativos podemos afirmar que la utilización de las mismas da buenos resultados en general (Jaramillo, Castañeda & Pimienta, 2009; Montoliu & Abaitua, 2011) aunque existen pocos estudios experimentales relativos a los efectos que produce el contacto con los ordenadores sobre el aprendizaje de los alumnos. Así, en nuestro trabajo pretendemos realizar un estudio experimental sobre la influencia que ejercen los programas de cálculo simbólico en el aprendizaje de las matemáticas del primer curso de Ingeniería Industrial.

Existen autores que han estudiado la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas creando su propio software como Pizarro (2009) o utilizando algún soporte informático como Gómez García (2003), Murillo Ramón (2001), Ortega Pulido (2002), Rodríguez y Hoyos (2010).

En el trabajo realizado por el Dr. Ortega Pulido (2002) se estudia la influencia que ejerce el programa de cálculo simbólico Derive en el aprendizaje del Álgebra Lineal.

Nosotros también hemos utilizado el

programa de cálculo simbólico Derive para analizar si su utilización aporta mejoras en el aprendizaje de las matemáticas, en particular en la asignatura de Cálculo del primer curso de Ingeniería Industrial. La diferencia con nuestro estudio radica en que en este trabajo los alumnos eligieron participar libremente en esta experiencia, mientras que en el nuestro hemos realizado un estudio sobre el aprendizaje de los alumnos sin que éstos conocieran previamente dicho estudio.

Derive es uno de los llamados «Programas de Cálculo Simbólico», es un potente programa para el cálculo matemático avanzado: variables, expresiones algebraicas, funciones, vectores, matrices, trigonometría, derivadas, integrales, etc., también tiene capacidad de calculadora científica, y puede representar gráficas en dos y tres dimensiones en varios sistemas coordenados. La potencia del Derive es enorme y no resulta complicado de manejar, máxime teniendo en cuenta la gran cantidad de posibilidades que ofrece lo que le hace idóneo para iniciarse con este tipo de programas.

Así este trabajo tiene como principales objetivos:

- Analizar la influencia que ejercen los programas de cálculo simbólico en el aprendizaje de la asignatura de Cálculo que se imparte en el primer curso de Ingeniería Industrial.
- Describir y analizar las aportaciones de esta herramienta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de estas materias estudiadas en la universidad.
- Reflexionar sobre la metodología seguida a lo largo del curso para conseguir una mejora de la eficacia y la calidad de la enseñanza en estas disciplinas.

## 2. Método.

### 2.1. Muestra.

Los participantes de nuestra investigación fueron los alumnos del primer curso de Ingeniería Industrial de la Universidad Pontificia Comillas de Madrid del año académico 2007-08.

Todos los alumnos de primer curso de Ingeniería Industrial tuvieron que cursar obligatoriamente la asignatura de Cálculo, además de elegir algunas de las asignaturas de libre configuración que ofrece la universidad. De estas asignaturas nos interesan dos, que son las asignaturas que utilizan Derive como programa de cálculo simbólico, «Las Matemáticas desde el punto de vista experimental» (D1) impartida durante el primer cuatrimestre y «Modelado de problemas matemáticos con Derive» (D2) impartida durante el segundo cuatrimestre. Es importante para nuestra investigación distinguir que algunos alumnos eligieron las dos asignaturas que utilizan soporte informático (D1 y D2), otros eligieron sólo una (D1 o D2), y otros ninguna.

Tras algunas bajas, el número de participantes en nuestra investigación fue de 201. De ellos 54 eligieron la asignatura D1, 65 eligieron D2 y 21 alumnos eligieron las dos. Por tanto hemos utilizado a todos los alumnos que estuvieron matriculados en esas asignaturas en el curso 2007-08, es decir, no se aplicó ninguna técnica de muestreo al utilizar el 100% de los sujetos de la población de estudio. Pero aún así, para facilitar la lectura nos referimos a los sujetos implicados en el estudio como muestra. Además para la realización de los experimentos, este grupo de sujetos se desagregó en función del cumplimiento de condiciones experimentales

y al existir en los experimentos un desequilibrio entre los sujetos en los diferentes grupos (experimentales y control) se seleccionó por muestreo aleatorio simple un número similar de sujetos en el grupo de control del que teníamos en los grupos experimentales, equilibrando de esta manera el tamaño de los grupos que se comparan.

## 2.2. Diseño del estudio.

En este trabajo estudiamos la influencia que ejercen los programas de cálculo simbólico en la adquisición de conceptos matemáticos en la asignatura de Cálculo del primer curso de Ingeniería Industrial. Para ello se construyeron exámenes que estaban compuestos por problemas, a través de los cuales se verificaba la adquisición de conceptos. Cada concepto estaba asignado a un problema, a continuación se creó una plantilla de comprobación de la adquisición o no de conceptos para cada alumno y para cada examen. En total se realizaron 4 exámenes (N, F, A, J) a lo largo del curso identificado los conceptos correspondientes a cada periodo de recogida de información. Por último comparamos las respuestas entre los alumnos que tuvieron algún contacto con las asignaturas que utilizan soporte informático D1 y D2 y los que no tuvieron contacto con dichas asignaturas. Para llevar a cabo este estudio, realizamos 5 experimentos que pasamos a describir.

- Efecto D1: En primer lugar analizamos el efecto que produce en el aprendizaje de los alumnos cursar la asignatura D1. Para llevar a cabo este estudio elegimos como grupo experimental (GE1) al grupo de alumnos que cursaron la asignatura D1 y como grupo de control (GC1) a aquellos que no la cursaron.

- Efecto D2: En segundo lugar analizamos

el efecto que produce en el aprendizaje de los alumnos cursar la asignatura D2. Para analizar este efecto elegimos como grupo experimental (GE2) al grupo de alumnos que cursaron sólo D2 y como grupo de control (GC2) a aquellos que no cursaron D1 ni D2.

- Efecto Acumulado: En el tercer experimento estudiamos el efecto que produce en el aprendizaje de los alumnos cursar las dos asignaturas que utilizan soporte informático. Para ello elegimos como grupo experimental (GE3) a los alumnos que cursaron D1 y D2 y como grupo de control (GC3) a los que no cursaron D1 ni D2.

- Efecto D1 en el tiempo: En el cuarto experimento analizamos el efecto que se produce en el aprendizaje de los alumnos durante el segundo cuatrimestre, el haber cursado la asignatura D1 impartida durante el primer cuatrimestre. Para llevar a cabo este experimento realizamos dos pruebas.

1. En la primera prueba, consideramos como grupo experimental (GE41) al grupo de alumnos que sólo cursaron D1 y como grupo de control (GC41) a los alumnos que no cursaron D1 ni D2.

2. En la segunda prueba elegimos como grupo experimental (GE42) al grupo de alumnos que cursaron D1 y D2 y como grupo de control (GC42) al grupo de alumnos que sólo cursaron la asignatura D2.

- Efecto D1 frente a D2: Por último, analizamos el efecto que produce en el aprendizaje de las matemáticas el haber cursado sólo una de las dos asignaturas que utilizan soporte informático. Para elaborar dicho análisis, elegimos como grupo experimental (GE5) a los alumnos que sólo cursaron la asignatura D1 y como grupo de control (GC5) a los alumnos que sólo cursaron D2.

Experimento	Grupos	Asignaturas	Tamaño	Efecto	Periodo de exámenes	
1	GE1	D1	54	D1	Noviembre	Febrero
	GC1	Ni D1 ni D2	54			
2	GE2	Solo D2	44	D2	Abril	Junio
	GC2	Ni D1 ni D2	44			
3	GE3	D1 Y D2	21	Acumulado	Abril	Junio
	GC3	Ni D1 ni D2	21			
4	GE41	Solo D1	33	D1 en el tiempo	Abril	Junio
	GC41	Ni D1 ni D2	33			
	GE42	D1 Y D2	21			
	GC42	Solo D2	21			
5	GE5	Solo D1	33	D1 frente A D2	Abril	Junio
	GC5	Solo D2	33			

Tabla 1. Diseño experimental

En la Tabla 1 recogemos los 5 experimentos que acabamos de describir.

## 2.2. Variables e instrumentos de medida.

Como variables independientes tomamos las diferentes clasificaciones de los alumnos en función de si han cursado o no las asignaturas que utilizan soporte informático.

Como variables dependientes tomamos una serie de conceptos que los alumnos han debido ir adquiriendo a lo largo del primer curso de Ingeniería Industrial en la asignatura de Cálculo.

Dividimos los conceptos que los alumnos deben adquirir en 4 periodos. Estos 4 periodos corresponden al tiempo dedicado a la exposición de los conceptos que los alumnos deben alcanzar a lo largo del curso de forma que al final de cada periodo se realiza el examen correspondiente.

*Variables dependientes pertenecientes al primer periodo*

El primer periodo comienza en Octubre y finaliza a mediados del mes de Noviembre.

Durante este periodo se analizan los

siguientes conceptos: CN1= Concepto de infinitésimo, CN2= Concepto de derivada, CN3= Concepto de composición de funciones, CN4=Concepto de continuidad, CN5=Concepto de número complejo, CN6 =Módulo y argumento de un número complejo, CN7 =Concepto de función par e impar, CN8= Concepto de función periódica, CN9= Concepto de funciones elementales, CN10= Interpretación del teorema del valor medio de Lagrange.

*Variables dependientes pertenecientes al segundo periodo*

El segundo periodo se corresponde con el comienzo de las clases y finaliza en el mes de Febrero.

Durante este periodo se analizan los siguientes conceptos: CF1= Interpretación del teorema de Rolle, CF2 =Criterio del producto, CF3 =Criterio logarítmico, CF4= Concepto de integral impropia de tercera especie, CF5= Aplicación de los criterios de convergencia para una integral impropia de tercera especie, CF6 =Aplicación de los criterios de convergencia para una integral impropia de primera especie, CF7 =Cálculo de límites de

sucesiones, CF8= Órdenes de magnitud, CF9 =Concepto de integral como límite de una suma, CF10=Teorema fundamental del cálculo.

*Variables dependientes pertenecientes al tercer periodo.*

Durante el tercer periodo se estudia la adquisición de conceptos expuestos en clase desde el mes de Febrero hasta el mes de Abril y se analizan los siguientes conceptos: CA1=Concepto de límite de una función escalar, CA2=Concepto de continuidad de funciones escalares, CA3=Aplicación de infinitésimos, CA4=Concepto de derivada parcial de una función en un punto, CA5=Concepto de diferencial de una función, CA6=Concepto de función elíptica de primera especie, CA7=Concepto de integral elíptica de primera, CA8=Concepto de vector gradiente, CA9=Concepto de derivación de funciones compuestas, CA10=Concepto de matriz jacobiana.

*Variables dependientes pertenecientes al cuarto periodo*

Durante el cuarto periodo se estudia la adquisición de conceptos expuestos en clase desde el mes de Febrero hasta el mes de Junio. Durante este periodo se analizan los siguientes conceptos: CJ1=Concepto de función potencial, CJ2=Interpretación del teorema de Green, CJ3=Aplicaciones de simetrías en el recinto y paridad de la función para el cálculo de integrales dobles, CJ4=Cambios de variables en integrales dobles, CJ5=Aplicación de las propiedades de las integrales dobles, CJ6=Plano tangente a una superficie, CJ7=Cálculo de derivadas sucesivas, CJ8=Concepto de función elíptica de segunda especie (Amplitud), CJ9=Concepto de función elíptica de segunda especie (seno), CJ10=Concepto de función elíptica de segunda especie (coseno).

En este estudio han podido influir otras

variables extrañas como los distintos profesores en una misma asignatura, los diferentes niveles de aprendizaje de los alumnos, el horario en cada una de las clases, el ambiente en cada una de ellas, etc. No obstante, se ha intentado controlar el efecto de las mismas como por ejemplo, que el examen sea común a todos los grupos, a la misma hora y que la corrección se realizara de forma conjunta por el equipo de profesores.

### 2.3. Análisis estadístico.

El tratamiento de datos se ha realizado utilizando el programa de análisis estadístico SPSS versión 15.0, por medio del cual calculamos medias de los grupos de control y de los grupos experimentales (MC y ME), desviaciones típicas (DC y DE), la *t* de Student (*t*), la probabilidad asociada al estadístico (*p*) y el tamaño del efecto utilizando la fórmula de Cohen (COHEN), donde estudiamos si hay diferencias estadísticamente significativas en la adquisición de conceptos entre los alumnos que tuvieron contacto con las asignaturas que utilizan soporte informático y los que no.

### 3. Resultados.

Los resultados más relevantes del análisis estadístico realizado en cada uno de los experimentos se reflejan en las siguientes tablas, donde destacamos los conceptos que tienen diferencias estadísticamente significativas en su adquisición, los que tienen tendencias a obtener estas diferencias aunque no hayamos podido demostrarlo empíricamente, y los conceptos que se adquieren con una media más baja y que comentaremos en el apartado de conclusiones.

DIFERENCIAS      TENDENCIAS      MEDIAS MÁS BAJAS

*Tabla 2. Conceptos destacados en el estudio*

### 3.1. Efecto D1 (Producido por el hecho de cursar la asignatura D1)

#### *Primer periodo*

Conceptos	GC1	GE1	MC1	ME1	DC1	DE1	t	p	COHEN
<i>CN1</i>	54	54	0,500	0,593	0,505	0,496	-0,962	0,338	-0,185
<i>CN2</i>	54	54	0,315	0,444	0,469	0,502	-1,387	0,168	-0,267
<i>CN3</i>	54	54	0,259	0,407	0,442	0,496	-1,638	0,104	-0,315
<i>CN4</i>	54	54	0,500	0,630	0,505	0,487	-1,358	0,177	-0,261
<i>CN5</i>	54	54	0,426	0,537	0,499	0,503	-1,152	0,252	-0,222
<i>CN6</i>	54	54	0,222	0,315	0,420	0,469	-1,081	0,282	-0,208
<i>CN7</i>	54	54	0,259	0,352	0,442	0,482	-1,040	0,301	-0,200
<i>CN8</i>	54	54	0,111	0,148	0,317	0,359	-0,568	0,571	-0,109
<i>CN9</i>	54	54	0,167	0,241	0,376	0,432	-0,951	0,344	-0,183
<i>CN10</i>	54	54	0,093*	0,259	0,293	0,442	-2,309	0,023	-0,444

*Tabla 3. Diferencias de medias en los Conceptos de la prueba de Noviembre*

#### *Segundo periodo*

Conceptos	GC1	GE1	MC1	ME1	DC1	DE1	t	p	COHEN
<i>CF1</i>	54	54	0,741	0,833	0,442	0,376	-1,172	0,244	-0,226
<i>CF2</i>	54	54	0,222	0,333	0,420	0,476	-1,287	0,201	-0,248
<i>CF3</i>	54	54	0,037	0,093	0,191	0,293	-1,169	0,245	-0,225
<i>CF4</i>	54	54	0,481	0,611	0,504	0,492	-1,352	0,179	-0,260
<i>CF5</i>	54	54	0,278	0,315	0,452	0,469	-0,418	0,677	-0,080
<i>CF6</i>	54	54	0,352	0,426	0,482	0,499	-0,784	0,435	-0,151
<i>CF7</i>	54	54	0,204	0,407	0,407	0,496	-2,334	0,022	-0,449
<i>CF8</i>	54	54	0,333	0,574	0,476	0,499	-2,565	0,012	-0,494
<i>CF9</i>	54	54	0,222	0,278	0,420	0,452	-0,662	0,510	-0,127
<i>CF10</i>	54	54	0,537	0,722	0,503	0,452	-2,011	0,047	-0,387

*Tabla 4. Diferencias de medias en los Conceptos de la prueba de Febrero*

### 3.2. Efecto D2 (Producido por el hecho de cursar la asignatura D2)

Tercer periodo

Conceptos	GC2	GE2	MC2	ME2	DC2	DE2	t	p	COHEN
CA1	44	44	0,659	0,523	0,479	0,505	1,299	0,198	0,277
CA2	44	44	0,432	0,500	0,501	0,506	-0,635	0,527	-0,135
CA3	44	44	0,432	0,523	0,501	0,505	-0,847	0,399	-0,181
CA4	44	44	0,477	0,568	0,505	0,501	-0,847	0,399	-0,181
CA5	44	44	0,205	0,182	0,408	0,390	0,267	0,790	0,057
CA6	44	44	0,386	0,545	0,493	0,504	-1,498	0,138	-0,319
CA7	44	44	0,068	0,136	0,255	0,347	-1,050	0,297	-0,224
CA8	44	44	0,295	0,409	0,462	0,497	-1,111	0,270	-0,237
CA9	44	44	0,364	0,386	0,487	0,493	-0,218	0,828	-0,046
CA10	44	44	0,318	0,227	0,471	0,424	0,951	0,344	0,203

Tabla 5. Diferencias de medias en los Conceptos de la prueba de Abril GE2 y GC2  
Cuarto periodo

Conceptos	GC2	GE2	MC2	ME2	DC2	DE2	t	p	COHEN
CJ1	44	44	0,682	0,773	0,471	0,424	-0,951	0,344	-0,203
CJ2	44	44	0,659	0,682	0,479	0,471	-0,224	0,823	-0,048
CJ3	44	44	0,318	0,295	0,471	0,462	0,2286	0,82	0,049
CJ4	44	44	0,136	0,273	0,347	0,451	-1,59	0,116	-0,339
CJ5	44	44	0,409	0,614	0,497	0,493	-1,938	0,056	-0,413
CJ6	44	44	0,500	0,545	0,506	0,504	-0,422	0,674	-0,090
CJ7	44	44	0,455	0,545	0,504	0,504	-0,847	0,4	-0,180
CJ8	44	44	0,114	0,159	0,321	0,370	-0,616	0,54	-0,131
CJ9	44	44	0,114	0,136	0,321	0,347	-0,319	0,751	-0,068
CJ10	44	44	0,114	0,136	0,321	0,347	-0,319	0,751	-0,068

Tabla 6. Diferencias de medias en los Conceptos de la prueba de Junio GE2 y GC2

### 3.2.Efecto acumulado (Producido por el hecho de cursar las asignaturas D1 y D2)

Tercer periodo

Conceptos	GC3	GE3	MC3	ME3	DC3	DE3	t	p	COHEN
CA1	21	21	0,762	0,81	0,436	0,402	-0,368	0,715	-0,113
CA2	21	21	0,381	0,571	0,498	0,507	-1,229	0,226	-0,379
CA3	21	21	0,429	0,524	0,507	0,512	-0,606	0,548	-0,187
CA4	21	21	0,524	0,619	0,512	0,498	-0,611	0,544	-0,189
CA5	21	21	0,238	0,286	0,436	0,463	-0,343	0,733	-0,106
CA6	21	21	0,381	0,524	0,498	0,512	-0,917	0,365	-0,283
CA7	21	21	0,048*	0,19	0,218	0,402	-1,43	0,163	-0,441
CA8	21	21	0,286	0,476	0,463	0,512	-1,265	0,213	-0,39
CA9	21	21	0,429	0,476	0,507	0,512	-0,303	0,764	-0,093
CA10	21	21	0,333	0,333	0,483	0,483	0	1	0

Tabla 7. Diferencias de medias en los Conceptos de la prueba de Abril GE3 y GC3  
Cuarto periodo

Conceptos	GC3	GE3	MC3	ME3	DC3	DE3	t	p	COHEN
<i>CJ1</i>	21	21	0,667	0,810	0,483	0,402	-1,041	0,304	-0,321
<i>CJ2</i>	21	21	0,714	0,714	0,463	0,463	0,000	1,000	0
<i>CJ3</i>	21	21	0,286	0,381	0,463	0,498	-0,642	0,524	-0,198
<i>CJ4</i>	21	21	0,048*	0,286	0,218	0,463	-2,132	0,042	-0,658
<i>CJ5</i>	21	21	0,286	0,571	0,463	0,507	-1,907	0,064	-0,588
<i>CJ6</i>	21	21	0,476	0,810	0,512	0,402	-2,346	0,024	-0,724
<i>CJ7</i>	21	21	0,429	0,667	0,507	0,483	-1,558	0,127	-0,481
<i>CJ8</i>	21	21	0,143	0,286	0,359	0,463	-1,118	0,271	-0,345
<i>CJ9</i>	21	21	0,143	0,238	0,359	0,436	-0,773	0,444	-0,238
<i>CJ10</i>	21	21	0,143	0,238	0,359	0,436	-0,773	0,444	-0,238

Tabla 8. Diferencias de medias en los Conceptos de la prueba de Junio GE3 y GC3

### 3.4. Efecto D1 en el tiempo (Medimos en el 2º cuatrimestre el efecto producido por cursar la asignatura D1 del primer cuatrimestre)

#### 3.4.1. Primera prueba (Comparamos los resultados de los alumnos que han cursado sólo D1 con los que no han tenido ningún contacto con las asignaturas que utilizan soporte informático)

##### Tercer periodo

Conceptos	GC3	GE3	MC3	ME3	DC3	DE3	t	p	COHEN
<i>CA1</i>	33	33	0,697	0,667	0,467	0,479	0,26	0,795	0,064
<i>CA2</i>	33	33	0,424	0,576	0,502	0,502	-1,226	0,225	-0,302
<i>CA3</i>	33	33	0,424	0,636	0,502	0,489	-1,74	0,087	-0,428
<i>CA4</i>	33	33	0,545	0,545	0,506	0,506	0	1	0
<i>CA5</i>	33	33	0,242	0,333	0,435	0,479	-0,807	0,423	-0,199
<i>CA6</i>	33	33	0,333	0,606	0,479	0,496	-2,272	0,026	-0,559
<i>CA7</i>	33	33	0,03*	0,212	0,174	0,415	-2,32	0,025	-0,571
<i>CA8</i>	33	33	0,303	0,576	0,467	0,502	-2,286	0,026	-0,563
<i>CA9</i>	33	33	0,394	0,485	0,496	0,508	-0,736	0,465	-0,181
<i>CA10</i>	33	33	0,303	0,333	0,467	0,479	-0,26	0,795	-0,064

Tabla 9. Diferencias de medias en los Conceptos de la prueba de Abril GE41 y GC4 Cuarto periodo

Conceptos	GC41	GE41	MC41	ME41	DC41	DE41	t	p	COHEN
CJ1	33	33	0,606	0,727	0,496	0,452	-1,037	0,304	-0,255
CJ2	33	33	0,606	0,727	0,496	0,452	-1,037	0,304	-0,255
CJ3	33	33	0,303	0,394	0,467	0,496	-0,767	0,446	-0,189
CJ4	33	33	0,121*	0,333	0,331	0,479	-2,093	0,041	-0,515
CJ5	33	33	0,303	0,727	0,467	0,452	-3,750	0,000	-0,923
CJ6	33	33	0,485	0,636	0,508	0,489	-1,236	0,221	-0,304
CJ7	33	33	0,455	0,667	0,506	0,479	-1,750	0,085	-0,617
CJ8	33	33	0,152	0,273	0,364	0,452	-1,199	0,235	-0,295
CJ9	33	33	0,121	0,273	0,331	0,452	-1,552	0,126	-0,382
CJ10	33	33	0,121	0,242	0,331	0,435	-1,273	0,208	-0,313

Tabla 10. Diferencias de medias en los Conceptos de la prueba de Junio GE41 y GC41

### 3.4.2. Segunda prueba (Comparamos los resultados de los alumnos que han cursado D1 y D2 con los que sólo han cursado D2)

#### Tercer periodo

Conceptos	GC42	GE42	MC42	ME42	DC42	DE42	t	p	COHEN
CA1	21	21	0,524	0,810	0,512	0,402	-2,011	0,051	-0,621
CA2	21	21	0,476	0,571	0,512	0,507	-0,606	0,548	-0,187
CA3	21	21	0,476	0,524	0,512	0,512	-0,302	0,765	-0,093
CA4	21	21	0,619	0,619	0,498	0,498	0,000	1,000	0,000
CA5	21	21	0,143	0,286	0,359	0,463	-1,118	0,271	-0,345
CA6	21	21	0,667	0,524	0,483	0,512	0,930	0,358	0,287
CA7	21	21	0,190	0,190	0,402	0,402	0,000	1,000	0,000
CA8	21	21	0,429	0,476	0,507	0,512	-0,303	0,764	-0,093
CA9	21	21	0,429	0,476	0,507	0,512	-0,303	0,764	-0,093
CA10	21	21	0,190	0,333	0,402	0,483	-1,041	0,304	-0,321

Tabla 11. Diferencias de medias en los Conceptos de la prueba de Abril GE42 y GC42

#### Cuarto periodo

Conceptos	GE42	GC42	ME42	MC42	DE42	DC42	t	p	COHEN
CJ1	21	21	0,810	0,810	0,402	0,402	0	1	0
CJ2	21	21	0,714	0,714	0,463	0,463	0	1	0
CJ3	21	21	0,286	0,381	0,463	0,498	-0,642	0,524	-0,198
CJ4	21	21	0,238	0,286	0,436	0,463	-0,343	0,733	-0,106
CJ5	21	21	0,571	0,571	0,507	0,507	0,000	1,000	0
CJ6	21	21	0,571	0,810	0,507	0,402	-1,685	0,100	-0,52
CJ7	21	21	0,619	0,667	0,498	0,483	-0,315	0,755	-0,097
CJ8	21	21	0,143	0,286	0,359	0,463	-1,118	0,271	-0,345
CJ9	21	21	0,190	0,238	0,402	0,436	-0,368	0,715	-0,113
CJ10	21	21	0,190	0,238	0,402	0,436	-0,368	0,715	-0,113

Tabla 12. Diferencias de medias en los Conceptos de la prueba de Junio GE42 y GC42

### 3.5. Efecto D1 frente a D2 (Comparamos el efecto producido por el hecho de cursar sólo una de las distintas asignaturas D1 y D2)

*Tercer periodo*

Conceptos	GC5	GE5	MC5	ME5	DC5	DE5	t	p	COHEN
CA1	33	33	0,576	0,667	0,502	0,479	-0,753	0,454	-0,185
CA2	33	33	0,515	0,576	0,508	0,502	-0,488	0,627	-0,120
CA3	33	33	0,515	0,636	0,508	0,489	-0,988	0,327	-0,243
CA4	33	33	0,576	0,545	0,502	0,506	0,244	0,808	0,060
CA5	33	33	0,182	0,333	0,392	0,479	-1,407	0,164	-0,346
CA6	33	33	0,485	0,606	0,508	0,496	-0,981	0,330	-0,242
CA7	33	33	0,152	0,212	0,364	0,415	-0,630	0,531	-0,127
CA8	33	33	0,424	0,576	0,502	0,502	-1,226	0,225	-0,302
CA9	33	33	0,333	0,485	0,479	0,508	-1,248	0,217	-0,307
CA10	33	33	0,273	0,333	0,452	0,479	-0,529	0,599	-0,130

Tabla 13. Diferencias de medias en los Conceptos de la prueba de Abril GE5 y GC5

*Cuarto periodo*

Conceptos	GE5	GC5	ME5	MC5	DE5	DC5	t	p	COHEN
CJ1	33	33	0,727	0,727	0,452	0,452	0	1	0
CJ2	33	33	0,636	0,727	0,489	0,452	-0,784	0,436	-0,193
CJ3	33	33	0,242	0,394	0,435	0,496	-1,319	0,192	-0,325
CJ4	33	33	0,273	0,333	0,452	0,479	-0,529	0,599	-0,13
CJ5	33	33	0,606	0,727	0,496	0,452	-1,037	0,304	-0,255
CJ6	33	33	0,576	0,636	0,502	0,489	-0,497	0,621	-0,122
CJ7	33	33	0,515	0,667	0,508	0,479	-1,248	0,217	-0,408
CJ8	33	33	0,121	0,273	0,331	0,452	-1,552	0,126*	-0,382
CJ9	33	33	0,091	0,273	0,292	0,452	-1,940	0,058*	-0,478
CJ10	33	33	0,091	0,242	0,292	0,435	-1,661	0,102*	-0,409

Tabla 14. Diferencias de medias en los Conceptos de la prueba de Junio GE5 y GC5

#### 4. Discusión

Es importante para nuestra investigación aclarar que la materia impartida en la asignatura D1 coincide en gran parte con la estudiada durante el primer cuatrimestre en la asignatura de Cálculo del primer curso de Ingeniería Industrial, mientras que la materia impartida en la asignatura D2 consta básicamente de planteamientos y resolución de problemas relacionados con aplicaciones en la Ingeniería Industrial. Por tanto además de analizar la influencia que ejerce cursar las asignaturas que utilizan soporte informático, también comparamos cuál de ellas aporta más en el aprendizaje de los alumnos.

En primer lugar, para visualizar mejor los conceptos en los que hay diferencias estadísticamente significativas, los que tienen tendencias a obtenerlas, y los que se adquieren con medias más bajas que el resto, realizamos la Tabla 14 de acuerdo a los experimentos realizados.

Atendiendo a los resultados obtenidos y a los objetivos propuestos afirmamos en primer lugar que:

· *El uso de paquetes de cálculo simbólico ayuda a los alumnos a comprender mejor algunos de los conceptos expuestos en la asignatura de Cálculo.*

Esta afirmación se debe a la existencia de conceptos básicos en la formación de un ingeniero en los que hay diferencias estadísticamente significativas en su adquisición. Además, hemos encontrado también algunos conceptos en los que observamos tendencias a obtener estas diferencias, aunque no hayamos podido demostrarlo empíricamente, y que creemos que en los casos donde trabajamos comparando a los alumnos que han cursado las dos asignaturas que utilizan soporte informático (Efecto Acumulado y Efecto D1 en el tiempo) el tamaño de los grupos no era lo suficientemente grande. La razón de que disminuya la muestra en estos casos es debido a que sólo 21 alumnos de los 201 que cursaron primero de ingeniería industrial durante el año 2007-08 asistieron a las dos asignaturas que utilizan soporte informático. También hemos detectado otros conceptos que se adquieren con medias bastante más bajas que el resto, y algunos de ellos poco sensibles a la utilización de la herramienta de cálculo simbólico, por lo que necesitamos intentar mejorar el aprendizaje de los mismos.

· Efecto D1: Observando el cuadro de resultados afirmamos que cursar D1 es una gran ayuda para el aprendizaje de los alumnos en esta rama de la ciencia. Esta ayuda se ve

Efectos	Conceptos		
	DIFERENCIAS	TENDENCIAS	MEDIAS MÁS BAJAS
<b>D1</b>	CN10 CF7 CF8 CF10	CN2 CN3 CN4 CF4	CN8 CN10 CF3
<b>D2</b>		CA6 CA1 CJ4 CJ5	CA7 CJ4 CJ8 CJ9 CJ10
<b>Acumulado</b>	CJ4 CJ6	CA7 CJ5 CJ7	CA7 CJ4 CJ8 CJ9 CJ10
<b>D1 en el tiempo</b>	CA6 CA7 CA8 CJ4 CJ5	CA1 CA3 CJ6 CJ7 CJ9	CA5 CA7 CJ4 CJ8 CJ9 CJ10
<b>D1 frente a D2</b>		CA5 CJ3 CJ8 CJ9 CJ10	CA5 CA7 CJ8 CJ9 CJ10

Tabla 15. Cuadro de resultados

reflejada en el inicio del curso, coincidiendo temporalmente con su impartición, cuando los alumnos tienen un primer contacto con la universidad, donde se mejora la adquisición de los conceptos CN10, CF7, CF8, CF10, que tienen en común la propiedad de poderse visualizar mejor, utilizando expresiones analíticas para las representaciones gráficas en el ordenador, donde pueden cambiar el valor de las variables y así comprobar gráficamente el significado de las mismas.

- Efecto D1 en el tiempo: No obstante, lo más sorprendente es que cursar D1 también ayuda en el aprendizaje a lo largo de todo el curso, es decir se obtienen diferencias estadísticamente significativas en los conceptos correspondientes a los exámenes realizados en periodos distintos a la impartición de D1, donde se mejora la adquisición de los conceptos CA6, CA7, CA8, CJ4, CJ5, lo que nos lleva a advertir una mejor preparación para asimilar en un futuro conceptos matemáticos que tienen una mayor abstracción.

- Efecto D2: A diferencia de lo que ocurre con D1 no aparecen diferencias estadísticamente significativas ni tan siquiera en conceptos de los exámenes correspondientes al periodo de impartición de esta asignatura (segundo cuatrimestre), lo que nos lleva a sospechar que la metodología empleada en D1 es más eficiente que la empleada en D2, hecho que estudiamos en el efecto D1 frente a D2.

- Efecto D1 frente a D2: Además podemos observar en este experimento que los alumnos que sólo han cursado D1 presentan un mayor número de conceptos con tendencias a obtener diferencias estadísticamente significativas que aquellos que sólo han cursado D2, en las pruebas de los exámenes realizados durante el segundo

cuatrimestre.

Atendiendo a los otros dos objetivos propuestos, el análisis de las aportaciones de esta herramienta en el proceso de enseñanza aprendizaje, nos lleva en primer lugar a las siguientes conclusiones sobre la metodología seguida a lo largo del curso para terminar con las posibles mejoras de la eficacia y la calidad de la enseñanza en estas disciplinas.

La influencia en el aprendizaje de los alumnos de la misma herramienta de cálculo simbólico (Derive), al cursar dos asignaturas con metodologías distintas D1 y D2, es diferente. Por tanto, atendiendo a los resultados obtenidos, podemos afirmar que:

- *La metodología seguida en la asignatura D1 favorece el aprendizaje de los alumnos, por lo que debe ser la metodología seguida frente a la utilizada en D2*

La metodología seguida en la asignatura D1 consiste en trabajar los conceptos seleccionados estudiados en la asignatura de Cálculo a través del programa Derive, sin embargo en D2 no existe esta interconexión entre ambas asignaturas, y como además la metodología seguida en D1 favorece el aprendizaje de conceptos, por esta razón sería conveniente integrar los programas de cálculo simbólico en la asignatura de Cálculo, realizando y proponiendo problemas en la clase que se tengan que resolver utilizando dichos programas y como los realizados en la asignatura D1.

Por tanto, como consecuencia de este estudio sería aconsejable para mejorar en la docencia en esta área de las matemáticas «integrar los programas de cálculo simbólico en la asignatura de Cálculo», atendiendo a las siguientes consideraciones:

Debemos insistir en realizar problemas en la asignatura de Cálculo como los que están planteados en D1 y que tengan que ver con

los conceptos donde aparecen diferencias estadísticamente significativas (límites de sucesiones, órdenes de magnitud, teorema fundamental del cálculo, vector gradiente, propiedades de las integrales dobles, plano tangente a una superficie), así como de conceptos donde hemos detectado la existencia de tendencias a obtener estas diferencias (derivada, continuidad, composición de funciones, integrales impropias, límites de funciones escalares, aplicación de infinitésimos, cambios de variables en integrales dobles, aplicación de simetrías en el recinto y paridad de la función para el cálculo de integrales dobles).

Por último, nos ha llamado la atención la existencia de conceptos que aparecen en nuestro estudio con una media muy baja en su aprendizaje y además nada sensible al hecho de haber cursado D1 (funciones diferenciables, estudio del carácter de una serie). La razón puede ser que la adquisición de estos conceptos se ha medido por la respuesta acertada a un problema que relaciona varios conceptos básicos, algunos de ellos fáciles de visualizar en el ordenador y que el alumno los comprende bien por separado, pero que no llega a entender cuando estos conceptos se relacionan en un sólo problema.

Por esto creemos que sería aconsejable introducir nuevos problemas donde se concatenen estos conceptos que creemos imprescindibles en la formación de un ingeniero siempre después de haber trabajado con cada uno de ellos por separado.

## 5. Referencias bibliográficas.

Gómez García, M. (2003). *Estudio teórico, desarrollo, implementación y evolución de un entorno de enseñanza colaborativa con*

*soporte informático (CSCL) para matemáticas.* (Tesis doctoral). Recuperada de <http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucm-t26874.pdf>.

Guzmán, M. (1991). Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática. *Universidad Politécnica de Madrid*, 9-27.

Marqués Graells, P. (1999). Tecnologías de la información y la comunicación (TIC) aplicadas a la educación: Algunas de sus líneas de investigación. *Educar*, 25, 175-202.

Martínez, F. & Prendes, M.P. (2004). *Nuevas tecnologías y educación*. Madrid: Pearson.

Monge, S. (2005). *La escuela vasca ante el cambio tecnológico. Tecnologías de la información y la omunicación en la enseñanza.* (Tesis doctoral). Recuperada de <http://www.sergiomonge.com/doc/tesos-doctoral-sergio-monge.pdf>.

Montoliu, J. & Abaitua, C. (2011). Enseñar y aprender con las TIC. (Spanish). *Estudios Sobre Educacion*, 20, 9-19.

Murillo Ramón, J. (2001). *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO.* (Tesis doctoral). Recuperada de [http://www.thesisenxarxa.net/TESIS\\_UAB/AVAILABLE/TDX-0710101-030847/jmr](http://www.thesisenxarxa.net/TESIS_UAB/AVAILABLE/TDX-0710101-030847/jmr)

Jaramillo, P., Castañeda, P., & Pimienta, M. (2009). Qué hacer con la tecnología en el aula: inventario de usos de las TIC para aprender y enseñar. (Spanish). *Educación y Educadores*, 12(2), 159-179.

Ortega Pulido, P. (2002). Una estrategia didáctica para la enseñanza del Álgebra Lineal con el uso del sistema de cálculo algebraico derive. *Complutense de Educación*, 13(2), 645-678.

Piattini, M. & Mengual, M. (2008). *Libro Blanco de la Universidad Digital 2010*. Barcelona: Ariel.

Pizarro, R. A. (2009). *Las Tics en la enseñanza de las matemáticas. Aplicación al caso de Métodos numéricos*. (Tesis doctoral). Recuperada de: <http://postgrado.info.unlp.edu.ar/Carrera/Magister/Tecnologia%20Informatica%20Aplicada%20en%20Educacion/Tesis/TesisPizarro.pdf?subject=tesis>.

Rodríguez, G. & Hoyos, V. (2010). *Funcionalidad de juegos de estrategia virtuales y del software Cabri-Géomètre II en el aprendizaje de la simetría en secundaria*. (Spanish). *PNA*, 4(4), 161-172.

Vaquero, A. (1997). Informática y educación. *Panorama informático*, 65-97.

Fecha de recepción: 2011-04-07

Fecha de evaluación: 2011-04-12

Fecha de aceptación: 2011-07-05

Fecha de publicación: 2012-07-01

