Actas del Tercer Congreso Nacional de Historia de la Construcción, Sevilla, 26-28 octubre 2000, eds. A. Graciani, S. Huerta, E. Rabasa, M. Tabales, Madrid: I. Juan de Herrera, SEdHC, U. Sevilla, Junta Andalucía, COAAT Granada, CEHOPU, 2000.

Un paseo matemático por las bóvedas a través de la Historia

María José Chávez de Diego
Pastora Revuelta Marchena

De la antigüedad a la época del hierro

El gran arquitecto Marco Lucio Polión Vitruvio (siglo I a. C.), que tanta influencia ha tenido no sólo en su época, sino cuando posteriormente se publicara sus *Diez Libros de Arquitectura*, en 1486 en Roma, afirma que es necesario conocer la Geometría y la Aritmética. Estos conocimientos matemáticos no son otros que los que se recogen en el monumental tratado geométrico *Los Elementos* de Euclides de Alejandría (siglo III a. C.). Euclides recopila en trece libros nociones como rectas, ángulos, triángulos, círculo, polígonos, planos, pirámides, prismas, cilindros, esfera, cono, octaedro, icosaedro, dodecaedro, cubo, paralelismo, semejanza, teoría de la proporción y teoría de número entre otras. Durante dos milenios, este magno tratado, *Los Elementos,* ha sido el más utilizado y estudiado a excepción de la Biblia, y, además de ejercer una enorme influencia en el pensamiento científico, determinó la enseñanza de la geometría hasta nuestros días.

Si analizamos la Historia de la Geometría desde Euclides y su aplicación a las artes, distinguiremos dos corrientes: la *geometría teórica* y la *geometría práctica*. La primera nos enseña el rigor y la belleza de las formas simples reproducibles, pero lejos de la contingencia de la técnica de construir y de las leyes de la gravitación. Nuestro interés se centrará en la segunda, según Ruiz de la Rosa, la *«geometría fabrorum»*, que es la que se utiliza para la construcción y se transmite casi intacta sin incorporar conocimientos nuevos desde la Antigüedad hasta bien entrado el siglo XVIII.

Desde Roma hasta la época de la construcción en hierro, (siglo XIX), en las bóvedas se usa la geometría de regla y compás, la teoría de la proporción y muy lentamente se va incorporando la trigonometría y el álgebra.

La esfera, el cilindro circular, los polígonos regulares y el círculo son los rudimentos geométricos euclídeos que mediante procedimientos empíricos permiten construir las diferentes bóvedas a lo largo de estos siglos.

Señalamos, por ejemplo, las cúpulas termales romanas cuyo modelo, en esencia, es una semiesfera asentada sobre un tambor cilíndrico de la misma altura que su radio. El Panteón, obra cumbre de la arquitectura romana, sigue el modelo de la cúpula termal; se asienta sobre un tambor perfectamente circular con un casquete capaz de inscribir una esfera completa.

Así mismo, los constructores bizantinos no necesitan de nuevas nociones geométricas para resolver múltiples problemas tales como la utilización de pechinas como elemento perfecto de transición del cuadrado al círculo, la acumulación de cúpulas y bóvedas para compensar los empujes de cúpulas esféricas asentadas sobre plantas cuadradas.

Es bien sabido que los árabes tuvieron el mérito de haber sabido conservar para la humanidad las matemáticas griegas e indias; pero además contribuyeron de forma original al desarrollo de la trigonometría plana y esférica, así como el álgebra. Ahora bien, no parece que estos avances tengan una relación directa con la aportación fundamental de los árabes a la construcción de bóvedas. Las cúpulas nervadas que ellos construyen ponen de manifiesto que conocen el principio de que *una forma se comporta según los elementos resistentes de su interior*. Sin embargo, tienen que pasar siglos hasta que aparezca el cálculo diferencial que le dará justificación en la teoría de estructura. La geometría aparentemente compleja que aparece en las cúpulas estrelladas, cúpulas de nervios vistos u ocultos, cúpulas poligonales, etcétera, se obtiene con las mismas nociones de geometría básica que ya hemos mencionado.

La bóveda de medio cañón o apuntada, característica del románico es una solución fácil de construir y trazar con arcos de circunferencias y tangencias pero los empujes laterales presentan serios problemas de estabilidad. El gótico aporta como solución las bóvedas de crucería que reducen el volumen y, por lo tanto, el peso de la cubierta. Los muros dejan de ser un elemento imprescindible en el equilibrio del conjunto. Con la bóveda de crucería se pueden conseguir superficies alabeadas; pero el problema radica en el tallado exacto de la piedra en sus tres dimensiones para que las nervaduras aparezcan como arcos puros sin sinuosidad.

Obsérvese que aún cuando no se tiene la *geometría descriptiva*, que los sistemas de medidas no están unificados. Las únicas herramientas matemáticas siguen siendo la geometría elemental euclídea, la simetría y la teoría de la proporción. Las matemáticas no se entienden como algo abstracto, sino como instrumentos útiles a la hora de resolver problemas concretos de la construcción. Otras herramientas inseparables a éstas son el compás, la regla, la escuadra o norma, la plomada o cateto, el nivel y el cartabón.

Como es sabido, la construcción de las catedrales góticas da lugar a la masonería o gremio de albañiles constructores de catedrales que desarrollaran bajo la base del esoterismo todo el saber constructor medieval, reencarnando con mucha exactitud la tradición de las sectas pitagóricas griegas. Los maestros de la masonería convirtieron la geometría en secreto por lo que eran conocimientos muy valorados.

La *geometría práctica* de los masones no incorpora los nuevos conocimientos matemáticos bien conocidos y asentados ya en su época como los que aporta Leonardo de Pisa Fibonacci (1170-1240) en su libro *Liber abaci*. Asimismo, en el siglo XIII aparecen las primeras traducciones de las obras clásicas, ya se tienen a mano tanto la estática de Arquímides como la cinemática de Aristóteles. Pero no se utilizan para resolver los inmensos problemas del crecimiento en altura de las naves y la complejidad de las soluciones de cubierta.

La catedral de Milán es un buen ejemplo de todo lo que estamos afirmando. En ella se conjuga la Geometría de regla y compás, simetría y proporción. Por sus actas tenemos conocimientos de las dudas estructurales de los maestros a lo largo de su construcción hasta el momento de iniciar las bóvedas.

En el Renacimiento algo, aún poco, empieza a cambiar. Las Matemáticas avanzan considerablemente; se tienen contribuciones importantes en el campo de la geometría, del álgebra y la trigonometría. La geometría pura se desarrolla según nuevas orientaciones con el descubrimiento de las primeras nociones de la geometría descriptiva y proyectiva. Desde el milenio III a. C. las técnicas constructivas de los edificios llevaban la utilización de la proyección ortogonal sobre el plano horizontal. Como es sabido, Vitruvio, ya utiliza simultáneamente la proyección horizontal y la vertical, pero sin asociarla a una misma figura. En la Edad Media se utilizan planos y alzada de distintas partes de catedrales, pero no se aplican simultáneamente a un mismo objeto.

Los precursores de la geometría descriptiva y proyectiva son entre otros los arquitectos Filippo Brunelleschi (1377-1446) y León Battista Alberti (1404-1472) y los pintores Leonardo da Vinci (1452-1519) y Piero de la Francesca (1416-1492).

Brunelleschi tuvo la idea de representar objetos en tres dimensiones sobre un plano. Alberti una de cuyas obras es la Iglesia de Santa María Novella, es el autor del primer estudio de la perspectiva científica «Della Pictura» 1446. Los pintores introducen la perspectiva lineal en sus talleres. Dice Leonardo al comienzo de su *Trattado della pintura*: «*Nadie que no sepa matemáticas lea mis obras*», imitando la frase que Platón mandó escribir en la entrada de la Academia.

¿A qué matemáticas se refiere Leonardo? A las que se enseñan en las Escuelas de Ábaco dónde acuden los artesanos y comerciantes. Si tomamos uno de los tratados de ábaco más importante como es la *Summa de Aritmética Geometría Proportioni et Proportinaliti* (1494) de Luca Pacioli (1445-1517), observamos cómo en él se recogen los conocimientos existentes hasta la fecha de aritmética teórica y práctica, geometría teórica y práctica y álgebra. La parte geométrica que aparece en la *Suma* es poco importante en cuanto a nuevos conocimientos, de donde se deduce fácilmente que las formas geométricas de las bóvedas renacentistas siguen siendo las mismas que las utilizadas en el pasado. Ahora bien, las dimensiones de las cúpulas y sus estructuras son más audaces, contrastando las deficiencias técnicas con la fuerte invención. Es el caso de Brunelleschi con la catedral de Florencia, donde defiende una técnica nueva para dar respuesta a las dificultades de construcción de la cúpula. La solución del doble cascarón le permite integrar en un solo movimiento la composición, la estructura y los medios de realización de la misma.

Es sabido que para los pitagóricos y sus sucesores hasta prácticamente el siglo XVII, los fenómenos de la naturaleza obedecían a una armonía universal asociada al círculo, el cuadrado y el número de oro. Galileo Galilei (1564-1662), a principios del siglo XVII, supera esta física basada en la geometría y la proporción dando las primeras explicaciones del equilibrio sin evidencia, *equilibrio in harmónico*. Expone que el equilibrio no es un estado amorfo de los sólidos, sino las coincidencias dinámicas de las fuerzas contrarias que anulan mutuamente sus efectos.

Esta ciencia mecánica se desarrolla justamente con Isaac Newton (1642-1727) y Robert Hooke (1635-1703) sin una verdadera influencia sobre las construcciones pues los materiales de construcción permanecen demasiado inertes y pesados para que las nuevas leyes físicas hagan posible la elección de nuevas curvas y superficies en las cubiertas. Será necesario esperar a la incorporación del hierro, material deformable y elástico, para encontrar aplicaciones basadas en estas nuevas teorías.

Explícitamente, Galileo se preguntaba por la flexión de un pilar y Hooke aportaba la ley de deformación de los materiales, dando origen a la teoría de la resistencia de los materiales. Aunque los principios en que había de basarse la Teoría Matemática de la Elasticidad fueron esbozados por Galileo y Hooke en el siglo XVIII, como hemos mencionado antes, y se fueron concretando con las investigaciones de Euler, Coulomb y los Bernouilli, su planteamiento definitivo no fue posible hasta que estuvo plenamente desarrollado su principal instrumento, el cálculo diferencial e integral. En 1821 exactamente, cuando Navier y Cauchy obtienen las ecuaciones diferenciales básicas de la Elasticidad, es cuando evoluciona rápidamente dicha teoría.

Hasta finales del siglo XVIII se construía con técnicas que descendían de manera natural de las de la Alta Edad Media y Renacimiento. Pero en el pasaje del siglo XVIII al XIX, se tornó posible el uso del hierro como material de construcción; primero, la fundición y luego los distintos tipos de acero. Con gran rapidez el hierro invade y revoluciona toda la técnica de construir. Con el hierro eran posibles estructuras que no hubieran podido intentarse con las técnicas del pasado; que se adaptaban muy bien a las necesidades de los programas típicos de las grandes concentraciones propias de la era industrial: almacenes, amplios talleres, estaciones. El mismo proceso de montaje de las piezas de hierro hacía que el edificio pudiera descomponerse en entramados planos, y éstos eran calculables. Los grandes avances de la ciencia de la construcción son contemporáneos de esta revolución técnica.

La aparición de estos nuevos materiales de construcción con la Revolución Industrial hace que sean los primeros ingenieros de principio del siglo XIX los que en las construcciones de los puentes, el ferrocarril y sus grandes estaciones, comiencen a utilizar nuevas formas geométricas con el apoyo del cálculo diferencial. Señalamos como ejemplo en Inglaterra, A. Derby construye (1777-1779) el primer puente totalmente de hierro. La Estación del ferrocarril de Paddington en Londres (1852-1854) del ingeniero I.K. Brunel y el arquitecto M.D. Wyatt, que es totalmente de acero y cristal. Y la cúpula metálica del antiguo mercado de trigo de París (1806-1813) construida por el arquitecto F. J. Belanger y el ingeniero F. Brunet. El record en bóveda se alcanza en la exposición de París en 1889. La sala de máquinas construida por C. Huincin, ingeniero, y Dutert, arquitecto, tiene arcos con una luz de 115 metros. Las cubiertas de grandes luces han irrumpido en la construcción.

La edad del hormigón: Gaudí, Candela y Dieste

El siglo XIX representa el triunfo de la ciencia pura y de su aplicación práctica o tecnología. Es un período de intenso desarrollo matemático. La renovación de la geometría pura está asegurada por los trabajos de Poncelet (1788-1867), que marcan la verdadera creación de la geometría proyectiva como rama autónoma de la geometría. La geometría analítica conoce una expansión brillante marcada por los trabajos de la escuela francesa y por el papel dominante de Plucker (1801-1868) y su introducción a la geometría reglada. Aparece una nueva disciplina, la geometría algebraica, y la renovación de los métodos de estudio de las curvas y superficies desde un punto de vista algebraico, que tomará su forma definitiva en el siglo XX. La geometría diferencial moderna será obra de los trabajos de Monge (1746-1818), Gauss (1777-1855) y Riemmann (1826-1866). Pero, indudablemente, las figuras matemáticas dominantes de la época son Gauss y Cauchy (1789-1857). Gauss desarrolló un marcado interés por la geometría general y, en particular, por la geometría no euclídea. La publicación, en 1827, de sus *Disquisitiones circa generales superficies curvas*, supone una contribución definitiva a la geometría diferencial en el espacio de tres dimensiones. Cauchy, entre sus muchas otras contribuciones a las diferentes ramas de las matemáticas, mejoró y clarificó los conceptos de la teoría de curvas en el espacio de sus *Leçons sur les aplications du calcul infinitesimal a la géometrie* en 1826. Su desarrollo de la geometría de curvas es prácticamente moderno. Deduce fórmulas modernas para los cosenos directores, la curvatura de curvas, además de introducir el plano oscilador como el formado por la tangente y la normal principal.

Pero la revolución técnica continuó y en la segunda mitad del siglo XIX se descubre el *hormigón armado*, que llega a ser uno de los materiales con más vitalidad de hoy.

Fruto conjunto, del amplio desarrollo de las matemáticas y de su aplicación a las técnicas de construcción, y del descubrimiento del hormigón armado, habría que resaltar una nueva revolución por la que se reencontrarían formas de trabajo superficiales de la materia, más expresivas y racionales. De aquí nace la vuelta de las bóvedas, las cúpulas, las estructuras plegadas, primero de hormigón armado, luego de cerámica.

Cuando la humanidad se ha enfrentado con el problema de la cubierta, ha desarrollado, en cada época, los más nobles e impresionantes ejemplos de arquitectura, y ha encontrado disposiciones formales y métodos constructivos con los que superar las limitaciones de los materiales existentes y utilizar al máximo sus posibilidades.

El estudio de los ejemplos de la naturaleza, en busca de inspiración para resolver problemas de cubiertas, es aún más oportuno, cuando un material, el hormigón armado, que puede fundirse en cualquier forma, se ha vuelto de uso común en construcción. Este material, muy similar al de los cascarones naturales, tiene la ventaja adicional de poder resistir esfuerzos de tracción. La primera lección que la naturaleza nos enseña es que los cascarones pétreos son siempre de doble curvatura. Ello se justifica al considerar la ventaja de evitar momentos flectores en ellos. Pero la prevención de flexiones y, en general, la función resistente depende esencialmente de la forma.

El estudio de la Historia de la Ciencia explica cómo estas formas se determinaron y estudiaron a partir de la geometría analítica, intuida por Desargues (1591-1661) en el siglo XVII, y se halló la manera de dibujarlas a partir de la geometría descriptiva de Gaspar Monge.

Ambas geometrías permitieron determinar una serie de propiedades de las superficies alabeadas regladas, que encuentran su aplicación en el campo de la arquitectura.

Así nos encontramos con la genialidad de tres grandes constructores A. Gaudí, F. Candela y E. Dieste, cuyo amplio conocimiento matemático-científico hizo que encontraran en las superficies regladas el ideal para las construcciones de sus impresionantes cubiertas.

Gaudí (1852-1926)

De su atenta observación de la naturaleza, Gaudí dedujo que la geometría reglada se produce espontáneamente en la tierra por causa tan universal y continua como es la ley de gravedad. Si ésta, combinada con el esfuerzo eólico o la fuerza del crecimiento orgánico de los seres vivos, genera con tanta frecuencia superficies regladas, quiere decir que éstas se pliegan fácilmente al cumplimiento de las leyes, siguiendo un estricto principio de funcionalidad. La naturaleza no produce obras de arte sino elementos estrictamente funcionales, ya que si llega a producir alguno que no sea funcional, pronto lo elimina. Sucede que estas formas funcionales resultan a los ojos del hombre de gran belleza. Gaudí utilizó en su arquitectura las formas alabeadas en el espacio de la geometría reglada:

el hiperboloide, el conoide, el paraboloide hiperbólico o el helicoide.

Se alejó de la vía común de los arquitectos, formados desde siempre en la geometría clásica de líneas, planos y sólidos regulares que son fáciles de trazar con regla, escuadra y compás, pero que rara vez se encuentran en la naturaleza. Dejó el campo del dibujo sobre el plano por creerlo convencional y poco representativo, y se convirtió en un modelista que construía sus edificios con maquetas y modelos de yeso, arcilla o madera, elaborando sólidos que serían de complicado dibujo pero que nacen entre las manos del modelista que se inspira en la geometría de las montañas, los árboles o los animales. Las formas estructurales utilizadas por Gaudí son radicalmente distintas de las que emplearon sus contemporáneos. Debido a su innato sentido de la forma y la estabilidad, utilizó desde sus primeras obras el arco parabólico o catenárico como elemento lineal más próximo a la curva de presiones. Es el arco llamado funcional o mecánico y que utilizó siempre sin tener en cuenta si su forma podía parecer bonita o fea, ya que creía que por el hecho de cumplir su función era automáticamente el mejor de todos, puesto que dibuja la forma que espontáneamente toman los arcos al ser cargados. También empleó el falso arco formado por hiladas sucesivas de ladrillo en voladizo y que tiene una forma asimilable a la parabólica. Fue muy común en la arquitectura islámica y Gaudí lo utilizó repetidamente. Estos arcos parabólicos muy delgados, de ladrillo *picholín* o *de rasilla*, le permitieron hacer techos sin vigas, como es el caso de Bellesguard, las Teresianas o el desván de la Pedrera.

En la colonia Guell, utilizó el sistema empírico de cálculo con la famosa maqueta *estereostática*, por cordeles y saquitos de perdigones, de gran ingenio y simplicidad. Gaudí hizo el diseño de la iglesia y determinó las cargas que se producirían en arcos y bóvedas. La determinación de la forma de la estructura se consiguió suspendiendo, con cordeles o bramantes, sacos de lona conteniendo perdigones cuyo peso era proporcional a las cargas calculadas. Los cordeles así cargados dibujaron espontáneamente las formas del esqueleto de la futura iglesia. La maqueta de la colonia Guell contiene todas las soluciones estructurales previamente estudiadas por Gaudí.

En el pórtico de esta cripta, construyó las primeras bóvedas tabicadas de paraboloide hiperbólico, así como los muros que adoptan esta misma forma de superficie alabeada reglada.

Cabe mencionar en este punto que estas formas presentan extraordinarias ventajas estructurales y constructivas. Son superficies de doble curvatura, lo que hace posible que las fuerzas externas, las cargas, se transformen en esfuerzos directos o de membrana, es decir, esfuerzos que en cada punto de la superficie están contenidos en el plano tangente a ésta, con la exclusión de flexiones en la lámina y, de este modo, el material trabaja de la manera más eficiente posible. Desde el punto de vista constructivo, la propiedad de estas superficies de poseer dos sistemas de generatrices rectilíneas simplifica considerablemente la ejecución de la cimbra o encofrado en el que no intervienen más que piezas rectas. Plásticamente, basta con variar la curvatura o alabeo para conseguir una extensa gama de formas, de aspecto cambiante con el punto de vista, que permiten una gran libertad de adaptación a las exigencias arquitectónicas.

Quizás el primero en emplearla fue Gaudí, que buscaba para la bóveda en piedra del Templo de la Sagrada Familia de Barcelona una forma a tono con la construcción. Imbuido aún de las concepciones del siglo XIX, Gaudí veía en el paraboloide hiperbólico no sólo una forma constructiva, sino una figura simbólica, una alegoría de la Santísima Trinidad (dos rectas directrices idénticas e infinitas —Padre e Hijo—, una tercera recta, la generatriz —Espíritu Santo—). Nos encontramos también con la estructura arborescente de la nave central de la Sagrada Familia. En la última maqueta del templo los pilares de las naves son inclinados y se descomponen en forma de ramas y hojas de tipo arborescente. Se trata de composiciones naturalistas pero simplificadas a la geometría reglada dando lugar a espacios internos de aspecto arquitectónicamente inédito aunque recuerden la disposición de los bosques. Las bóvedas, perforadas en las claves, tienen forma hiperboloidal para permitir el mejor paso de la luz natural.

En la segunda cúpula del palacio Guell tenemos las bóvedas helicoidales y en la cubierta de las Escuelas de la Sagrada Familia nos encontramos con las bóvedas de conoides de plano director.

Candela (1910-1997)

A principios del siglo XX, el ideal estético era la piedra tallada, con sus caras planas bien delimitadas; el volumen estaba constituido a partir de un sistema ortogonal y por lo tanto no podía hallar un lugar adecuado para las construcciones de cubiertas laminares ni para sus superficies de doble curvatura. Sin embargo, casi todas las formas constructivas empleadas en la actualidad, incluso las cubiertas laminares en forma de paraboloide hiperbólico, fueron desarrolladas entre los años veinte y treinta del siglo XX. Este desarrollo, fue el resultado de la aplicación de los grandes avances matemáticos ocurridos en el siglo anterior y de la obra de un círculo de constructores con el objetivo común de conseguir volúmenes adecuados con el mínimo consumo de materiales. Destacamos entre ellos a F. Aimond, que en 1936, publicó en las *Memorias de la Asociación Internacional de Puentes y Estructuras*, de Zurich, su *Estudio estático de las velarias ligeras de paraboloide hiperbólico trabajando sin flexión*. En este trabajo, Aimond desarrolla los métodos de cálculo de cubiertas laminares en forma de paraboloide hiperbólico y ofrece sugerencias sobre las formas que deben tener tales cubiertas. En Félix Candela, influido por los trabajos de Gaudí y Aimond, nos encontramos con el maestro de la construcción de cascarones. Utilizaba todas las formas de láminas en principio conocidas: la lámina en forma de cúpula o la lámina cilíndrica y sobre todo la lámina reglada, como las superficies alabeadas, los cascarones paraboloides hiperbólicos (*hypar*).

Candela construía también láminas onduladas y láminas que semejaban papel plegado, las llamadas *plegadas*. Todas sus láminas son extremadamente finas. Están hechas de mortero reforzado o de hormigón, y se preparan sobre un encofrado de madera.

Alrededor del año 1950, la lámina cilíndrica disfrutaba de gran éxito y se utilizaba para las cubiertas de soportales o naves industriales. Necesitaba refuerzos en los apoyos, debía tener al menos 8 cm de espesor y requería una armadura compleja. Su resistencia igualaba a la de una viga. En Alemania, esta lámina cilíndrica presentaba una forma sencilla, pero su construcción era complicada; sólo en raras ocasiones se la abordaba.

Los cascarones de Candela tienen formas complejas pero son fáciles de construir. Tienen menos de la mitad de espesor y su armadura es relativamente sencilla. Para estas construcciones, que se levantan sobre los pantanos de Ciudad de México y que de vez en cuando son sacudidas por duros terremotos, la ligereza es una gran ventaja. En ellas, la cimentación está reducida, y en consecuencia se aminoran las cargas sísmicas.

Las gruesas cubiertas *alemanas* se verían en dificultades para sobrevivir en México.

Las delgadas superficies de los cascarones están a menudo sometidas a esfuerzos de compresión. Los esfuerzos de compresión dan lugar a plegamientos y abolladuras en la superficie de las láminas. Especialmente sensible es la lámina cilíndrica; menos sensibles son, por el contrario, las láminas en cúpula y la bóveda de aristas.

Los hypars y los hiperboloides eran las nuevas estrellas en el firmamento de las cubiertas de los años treinta y cuarenta. Eran rígidas y de fácil construcción, al tiempo que podían ser delgadas. Su contracurvatura reglada proporcionaba la esperada rigidez.

De forma totalmente independiente uno de otro, y sin sospecharlo, proyectaron Candela y Frei Otto dos construcciones parecidas. Candela, su lámina ondulada en estrella sobre las aguas de los jardines flotantes de Xochimilco, terminada en 1958; Otto, la cubierta ondulada en estrella sobre el agua del Tanzbrunn en Colonia, terminada en 1957. Ambas construcciones tienen cometidos parecidos y el mismo tamaño con una forma similar. En la construcción yace la diferencia fundamental: la obra de Candela es una estructura laminar fuerte, duradera pero delgada; el techo del Tanzbrunn es una cubierta transparente, proyectada sólo para un verano. Las dos construcciones permanecen aún hoy.

Destacamos que las obras de Candela nos presentan una personalidad artística donde convergen el Arquitecto, el Ingeniero, el Constructor, el Maestro de Obras,... y junto a la definición formal que éstas puedan tener, subyace el carácter experimental impregnado de su presencia a lo larga de todo el proceso, desde la idea conceptual, pasando por la ejecución hasta llegar a la obra acabada, siguiendo el criterio del *Magister operi* clásico. Además de ser un pionero de las estructuras delgadas, de las estructuras laminares, etc..., aparece una personalidad que recoge el hormigón como único material de trabajo, utilizando geometrías muy precisas en un esfuerzo de síntesis, haciendo recordar quizá la idea de Cezanne «hay que aprender a mirar la naturaleza en forma de conos, cilindros, esferas y pirámides».

Otro aspecto paralelo, es la proyección de la obra de Candela dentro del ámbito de la arquitectura y la construcción como concepto científico o teórico-mecánico. El campo de trabajo elegido, a pesar de tener una base artesanal muy profunda, está impregnado por el uso de conceptos geométricos avanzados, como son la geometría del paraboloide hiperbólico, del elipsoide, de la esfera, del conoide, del cilindro,...; su obra tiene, por tanto, una gran carga de análisis geométrico y matemático. Encontramos, junto a una importante componente intuitiva, un análisis estructural muy complejo. Hoy en día, estos cálculos requerirían métodos muy avanzados, con la ayuda de un ordenador, que difieren de los métodos de análisis que utilizaba Candela, pero que subrayan la importancia de su formación académica en el marco de las Escuelas Técnicas Superiores españolas en las que el aprendizaje de las matemáticas y de la geometría descriptiva impregnaba toda la enseñanza. La paradoja que se establece entre la intensa base científica del Maestro y los medios de los que disponía en México para la construcción de encofrados, dosificación de hormigones, etc... refleja un carácter extremadamente audaz que subyace en todos los aspectos de su obra.

Desde 1945 muchos arquitectos e ingenieros han experimentado con las estructuras laminares. Sólo un hombre, Félix Candela, logró convertirlas en una obra maestra. Se concentró especialmente en las cubiertas hypars y sus combinaciones. Así nos encontramos con el paraguas, resultado de combinar cuatro segmentos de hypar. Gracias a su simplicidad demostró ser uno de los medios más económicos para cubrir el espacio, y permitió competir en precio con los sistemas más baratos de techos industriales. El encofrado de cada paraguas se divide en cuatro partes fácilmente movibles, incluso con medios mecánicos primitivos, lo que permite la construcción en serie de cubiertas formadas por repetición de estos elementos. Mediante diversas combinaciones de los paraguas (inclinándolos en diente de sierra, en dos niveles, prolongándolos hacia el centro y formando otro invertido entre ellos, prolongándolos hacia los extremos, etc.) se construyeron miles de paraguas en edificios industriales.

Otra combinación de cuatro segmentos de hypar, haciendo horizontales las aristas de unión entre ellos y apoyándose en las esquinas, produce los techos a cuatro aguas formados por hypars. Los apoyos han de ir atirantados perimetralmente. Al construirse muchas unidades, éstas se separan dejando entradas de luz que acaban configurándose como «pasillos de iluminación» colgados de las vigas de borde. También se utilizaron los paraguas invertidos, que, como zapatas de cimentación, proporcionaron una solución muy económica al frecuente problema de los cimientos en suelos de baja capacidad de carga. Exagerando la altura o flecha de los paraguas, desimetrizándolos y llevando a cabo otras simples manipulaciones de los hypars, se consiguieron espectaculares estructuras de formas alabeadas, todas ellas paraboloides hiperbólicos. Así surgió la iglesia de la Medalla de la Virgen Milagrosa, que tanto impacto causó en su momento, como aún lo hace en nuestros días.

Nos encontramos también con dos paraboloides hiperbólicos retorcidos 90 grados, en planta triangular, con la base horizontal y el extremo totalmente vertical. Uniendo varios de estos últimos se consiguen las estructuras llamadas por el autor «en abanico», que se utilizaron en las espectaculares cubiertas de la estación de Metro Candelaria.

La configuración más sencilla del paraboloide hiperbólico es en la que aparece limitado por generatrices rectas. Utilizando láminas con esta forma, construyó bastantes edificios, generalmente estructuras religiosas. Formalmente, la utilización de este tipo de estructuras va desde la más sencilla formada por una simple hoja de hypar, hasta combinaciones de dos, tres, cuatro o seis hojas, iguales o desiguales, de hypars. El principal problema con que se encuentra Candela en este tipo de estructuras aparece ya en la primera de ellas, la capilla del Altillo. La cubierta de esta iglesia es una hoja de hypar de planta romboidal como lo serán las plantas de hypars combinados en las estructuras de las demás iglesias de este tipo, lo que significa que el eje Z no es vertical y, por lo tanto, el peso muerto de la losa de 4 cm tiene componentes según los tres ejes del hypar. Tuvieron que ser generalizadas las ecuaciones de esfuerzo de membrana del hypar para poder usarse en esta estructura y en las siguientes. Este desarrollo teórico no tenía precedentes en la literatura técnica.

El hypar limitado por parábolas principales constituye la típica configuración de este tipo de superficie, también llamada *silla de montar*. El hypar, considerado como superficie de traslación, se genera por una parábola que se mueve, paralela a sí misma, a lo largo de otra parábola situada en un plano perpendicular.

El Pabellón de Rayos Cósmicos, de 1951, fue el primero en que se utilizaba el hypar para dar mayor rigidez a una bóveda casi cilíndrica de tan escaso espesor. Fue esta estructura la primera que dio gran prestigio a Candela, tanto por la gracia de su sencillez formal, como por el alarde técnico que suponía su extrema delgadez. El espesor de este cascarón oscila entre 1,5 y 2 cm, requisito funcional para dejar pasar a través de él los rayos cósmicos que se registraban en el interior.

Nos encontramos también con bóvedas por arista con hypars. El ejemplo más sencillo de este tipo de estructuras es una bóveda creada por la intersección de dos segmentos de hypar en forma de silla de montar. Su encofrado es más simple que el de una bóveda formada por intersección de cilindros, por tener dos sistemas de generatrices rectas. Además, al estar constituida por superficies no desarrollables, es mucho más rígida y permite construirla con espesores menores.

La primera bóveda de este tipo la construirá para la Bolsa de Valores de México, y durante su ejecución, Candela empezó a intuir la posibilidad del borde libre, que se experimentó por primera vez en la iglesia de San Antonio de las Huertas Isin (utiliza vigas o nervaduras de borde y manteniendo por tanto un espesor constante de 4 cm en toda la losa). Como cada punto del borde curvo está conectado a las aristas por dos líneas rectas, si consideramos éstas como piezas de compresión o tracción, es posible dejar los bordes curvos libres de esfuerzos tangenciales o normales y llevar todas las cargas a los apoyos a través de las aristas.

A partir de esta obra se construyeron muchas bóvedas por arista, siempre con el borde libre, y se experimentó todo tipo de combinaciones triangulares, cuadradas, pentagonales, hexagonales, octogonales. Quizás la más famosa de estas estructuras sea el cascarón del restaurante Los Manantiales en Xochimilco, de planta octogonal, formada por la intersección de cuatro hypars; otro ejemplo destacable, bellísimo, de esta familia estructural, y que ha inspirado a muchos arquitectos, es la planta embotelladora de la destilería Bacardi en Cuautitlán. Esta cubierta está compuesta por seis bóvedas por arista cuadradas y con bordes volados, que se separan en las esquinas formando lucernarios. Estas bóvedas son las mayores construidas por Candela, con 30 m de lado, y son un ejemplo exquisito del cascarón delgado aplicado a grandes claros.

Con la experiencia de más de quince años construyendo cascarones de distintas formas, se pudo definir la luz máxima que puede cubrirse, de manera sensata, con un cascarón de hormigón armado. Este límite estaba en torno a los 30 m. Para mayores luces aumentaba el costo del encofrado y del volumen interno, así como el peligro de pandeo al tener que disminuir la curvatura. Los cálculos se volvían más largos y dificultosos, pues no se podían despreciar las deformaciones, y los cálculos de esfuerzos de membrana no eran, por tanto, de fiar. Prefería utilizar estructuras convencionales para cubiertas mayores y utilizar los cascarones como elementos secundarios que rellenarán los espacios entre la trama principal.

Dieste (1917)

Hacia mediados del siglo XX nos encontramos con la figura de Eladio Dieste que ha legado a la industria de la construcción un nuevo material, la cerámica armada, invención que se vio alentada por un hecho fortuito: el asesoramiento al arquitecto español Antonio Bonet para la definición estructural de una vivienda realizada hacia 1946 en el balneario uruguayo de Portezuelo, y que se basó en un fundamento sencillo: la factibilidad y conveniencia de amalgamar el ladrillo, el mortero y el hierro para hacerlos trabajar en forma solidaria. Toda su obra está vinculada al uso de este material, especialmente adecuado para estructuras laminares que necesitan particulares cualidades de rigidez y peso. Pero es la forma la que confiere al material su capacidad para resistir y cómo hacerlo. Como características destacables dentro de su obra nos encontramos con las bóvedas gausas y las bóvedas autoportantes.

La bóveda gausa se obtiene desplazando una curva catenaria de cuerda fija y flecha variable, contenida en un plano vertical móvil que se traslada, manteniéndose paralelo a otro plano vertical fijo, de modo que los arranques de estas catenarias recorran dos rectas paralelas entre sí, en general contenidas en un mismo plano horizontal.

Partiendo de esta forma básica puede obtenerse otro tipo de superficie gausa, cuando se desea iluminación convenientemente orientada. El resultado es una cubierta parecida a los conoides en diente de sierra, pero con posibilidades, en cuanto a las luces que se pueden salvar, que no se alcanzan económicamente con los conoides corrientes de hormigón armado.

La forma de techo descrita es conveniente por la economía de materiales que permite, pero tendría grandes dificultades constructivas si se hiciera con las técnicas usuales del hormigón armado, que obligarían a un encofrado total o a un molde móvil de dimensiones importantes que permitiera la forma de trabajo y los plazos de desencofrado propios de esta manera de construir. Estas dificultades desaparecen si se construye la cubierta con ladrillos del modo siguiente: se dispone de un molde cuya forma fuera la ya descrita y que se hubiera construido una estructura resistente capaz de soportar los esfuerzos que haya de transmitirle la bóveda. Llenando este molde con dovelas perfectamente talladas y que estas dovelas estén vinculadas longitudinalmente, de manera que la lámina de doble curvatura pueda actuar como una unidad. Si las dovelas tuvieran la necesaria resistencia a la compresión, si la lámina como conjunto no pandeara y si la estructura de sostén resistiera los esfuerzos que le transmite la bóveda, se puede retirar el molde inmediatamente después de haberlo llenado.

Las características principales de las bóvedas gausas se pueden resumir en que el complejo ladrillo-mortero-hierro se comporta como una unidad estructuralmente viable y puesto que se elige como directriz la curva catenaria, el peso produce compresión simple, y esta compresión hace capaz a la estructura de resistir flexiones. Además las tensiones de compresión debidas al peso propio son independientes de la sección, ya que la fuerza directa es proporcional al peso por unidad de desarrollo, o sea, a la sección y la armadura mínima asegura que una importante longitud de la cáscara (ampliamente suficiente para asegurar tensiones admisibles con hipótesis sencillas de cálculo) reacciona como una unidad elástica frente a las cargas concentradas. Teniendo en cuenta que el único material a endurecer es el de las juntas y que el «tirado» de la mezcla hace que el mortero tome rápidamente una resistencia que, aún siendo pequeña, puede ser suficiente, para descimbrar la bóveda, no es necesario esperar el endurecimiento normal del mortero.

Si se quiere aumentar las luces a salvar, lo que acabamos de decir nos muestra que el problema no está en las tensiones debidas al peso propio; está en las flexiones y en el riesgo de pandeo. El aspecto analítico de este problema no es simple, pero es obvio que para hacer frente al pandeo y a las flexiones conviene aumentar la rigidez de la cáscara. Lo corriente es (o era) disponer arcos de rigidez por arriba o por debajo de la bóveda, lo que no es una buena solución porque crea discontinuidades bruscas de sección que afectan inconvenientemente el régimen elástico de la membrana, complican el molde y el proceso de desencofrado si se disponen en el intradós, y si lo hacen en el extradós, son fuente de fisuras entre los dos elementos, lámina y arco, de espesores tan diferentes. Es mejor ondular la bóveda longitudinalmente, con lo que se aumenta su rigidez sin aumentar más que levemente su desarrollo y su peso, sin crear discontinuidades en la sección transversal.

Pero la ondulación constante en todo el desarrollo transversal no resuelve bien el problema porque obliga a apoyar la bóveda sobre elementos resistentes de un ancho igual a la amplitud de la onda más el espesor de la bóveda, que son antieconómicos y pesados, o a complicados sistemas de descarga de los esfuerzos.

Dieste resuelve estas dificultades haciendo variable la amplitud de la onda de la bóveda desde un máximo en la clave a cero contra los elementos resistentes de borde, que pueden entonces hacerse económicamente, de un espesor tan pequeño como el de la bóveda misma.

En cuanto a las bóvedas autoportantes es posible hacerlas de cerámica armada, con encofrado móvil, usando técnicas que tienen parentesco con las ya descritas hasta ahora.

Supongamos que se tienen un conjunto de bóvedas cilíndricas como cubierta de un local y siendo éstas de directriz la curva catenaria. Se construyen una serie de moldes, uno por bóveda, de pequeña longitud, que pueden correrse a lo largo de caminos paralelos a las generatrices. Las luces importantes son aquí las que se tienen según estas generatrices, las transversales son modestas. Los moldes son entonces livianos y baratos y su manejo sencillo y económico. Se construyen las bóvedas dejando en las juntas, entre los ladrillos, la armadura necesaria para que puedan trabajar cuando haya endurecido totalmente el mortero, como autoportantes, y los anclajes para los cables de postensionado si los hay. Como al desencofrar el mortero de las juntas está fresco, puede retocarse muy fácilmente, lo que da un acabado muy bueno. En los valles los empujes de las bóvedas se neutralizan y dan sólo una carga vertical que es resistida por el apuntalamiento que, dada la liviandad de la estructura, es muy económico. Para las bóvedas extremas las vigas horizontales previamente construidas resisten los empujes, siendo aquí también tomada la carga vertical por el apuntalamiento previamente dispuesto.

Cuando se acaba de construir la parte cerámica de las bóvedas, se termina con un enlucido de arena y cemento en el que se deja embebida una fina malla electrosoldada para control de las fisuras de retracción, la eventual armadura adicional para el cortante y aquélla en la que se anclan los extremos de los cables de precomprimido, si los hay. Basta esperar a que haya terminado el fraguado (realizada la postensión si las bóvedas son postensionadas) para poder retirar el apuntalamiento de los valles y de las vigas extremas, quedando la estructura trabajando como bóveda autoportante que se ha construido con un molde muy barato, ya que es una parte muy pequeña de la superficie a techar.

Entre sus obras principales destacamos como cáscaras de doble curvatura la Iglesia de Atlántida en Uruguay y el Mercado de Maceio en Brasil. Como cáscaras autoportantes el Gimnasio de Maldonado en Uruguay y las bóvedas de la Agroindustria Domingo Massaro S.A. de 10.000 metros cuadrados, 33 metros de luz y volados de hasta 16,40 metros. En cuanto a estructuras plegadas destacamos la Iglesia de Durazno cuyos plegados son interdependientes de gran luz.

Así concluimos nuestro paseo matemático por la historia de la construcción, donde hemos ido observando las bóvedas, cubiertas o cascarones como formas geométricas que han ido evolucionando con las aportaciones de las distintas técnicas matemáticas.

Bibliografía

Alsina, C; Trillas, E.: *Lecciones de Álgebra y Geometría*. Ed. Gustavo Gili S.A. Barcelona,1984.

Antonio Gaudí (1852-1926). Catálogo. Ed. Fundación Caja de Pensiones. Barcelona, 1989.

Candela, F: *En defensa del formalismo y otros escritos*. Xarait Ediciones. Bilbao, 1985.

Collette, J.P.: *Historia de las Matemáticas* (Tomos I y II). Ed. Siglo veintiuno. Madrid,1985.

Eladio Dieste (1943-1996). Catálogo. Ed. Junta de Andalucía. Sevilla, 1998.

Escrig, F.: *Las grandes estructuras de los edificios históricos: desde la antigüedad hasta el gótico*. Instituto Universitario de Ciencias de la Construcción. Sevilla, 1997.

Martín Casalderrey, F.: *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. Ed. Nivola. Madrid, 2000.

Ruiz de la Rosa, J.A.: *Traza y simetría de la Arquitectura en la Antigüedad y Medievo*. Publicaciones de la Universidad de Sevilla, 1987.

Ruiz de la Rosa, J.A.: *Libro de Arquitectura de Hernán Ruiz*. Fundación Sevillana de Electricidad. Sevilla, 1998.

Torrija Herrera, R.: *Arquímides. Alrededor del círculo*. Ed. Nivola. Madrid, 1999.