Rect@ Vol 10 Diciembre 2009. Pp 179 - 195

Recibido

30/10/2009

Revisado

23/11/2009

Aceptado

4/12/2009

Soluciones utilitarias de compromiso en problemas multi-objetivo con información parcial

Hinojosa, M. A. (*)
Mármol A. M. (**)

(*)Universidad Pablo de Olavide. Sevilla
(**)Universidad de Sevilla.

RESUMEN

En este trabajo se analizan problemas de optimización multi-objetivo en situaciones en que las preferencias del agente decisor pueden representarse por funciones aditivas y solo se dispone de información parcial sobre los pesos de importancia de los objetivos. Este análisis puede interpretarse también en términos de decisión en grupo, cuando distintos agentes proporcionan pesos distintos para los objetivos, y a partir de ahí hay que llegar a un consenso sobre la solución a elegir. En este contexto de información parcial se introduce una clase de soluciones que pueden considerarse un compromiso entre las soluciones del tipo maximin y las soluciones utilitarias. También se analizan algunas de sus principales propiedades

Palabras claves: Problemas multi-objetivo, pesos de importancia, información parcial, conceptos de solución.

ABSTRACT

We analyze multiple objective optimization problems in situations in which the preferences of the decision maker can be represented by additive functions and only partial information about the importance of the objectives is available. This analysis can also be interpreted in terms of group decision-making when different agents provide different weights for the objectives, and a consensus about the solution to choose has to be reached. In this context of partial information we introduce a class of solutions that can be considered as a compromise between the solutions based on a maxmin criterion and the utilitarian solutions. We also analyze some of their main properties.

Keywords: Multi-objective problems, importance weights, partial information, solution concepts

1.- Introducción

Con objeto de motivar el análisis del problema multi-objetivo y las soluciones que se presentan a continuación, comenzamos este trabajo con un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo 1: Un modelo de producción con incertidumbre sobre los precios.
Consideremos una empresa que fabrica dos productos, Z_1 y Z_2, de acuerdo a una tecnología que le permite producir en un *conjunto de producción posible* (CPP) como el representado en la Figura 1.

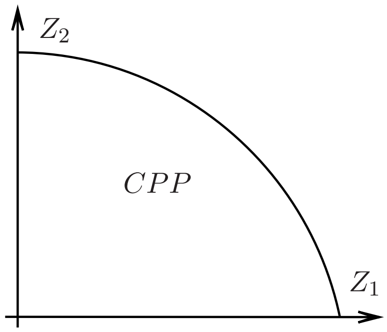

Figura 1: CPP en un ejemplo con dos productos.

Supondremos que el CPP es *compacto* (las producciones están acotadas y además las combinaciones de productos en la frontera del CPP son producibles en la tecnología considerada), *comprehensivo* (si la combinación de productos $z = (z_1, z_2)$ se puede producir, también se puede producir cualquier combinación $z' = (z'_1, z'_2)$, con $z'_1 \leq z_1$ y $z'_2 \leq z_2$) y *convexo* (cualquier combinación convexa de dos posibles puntos en el CPP pertenece también al CPP). Estos supuestos son habituales en distintos modelos de negociación y de producción existentes en la literatura.

El problema que se plantea es elegir, de entre las alternativas en el CPP, la producción que maximice una determinada función de utilidad que está basada en los precios. Si se conocieran los máximos precios, λ_1 y λ_2, que el mercado es capaz de absorber para los productos Z_1 y Z_2 respectivamente, la producción óptima estaría automáticamente determinada al maximizar la función de utilidad $f(z) = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$. Esta solución es conocida en la literatura como la *solución utilitaria*. La denotamos por S_u y la representamos en la Figura 2.

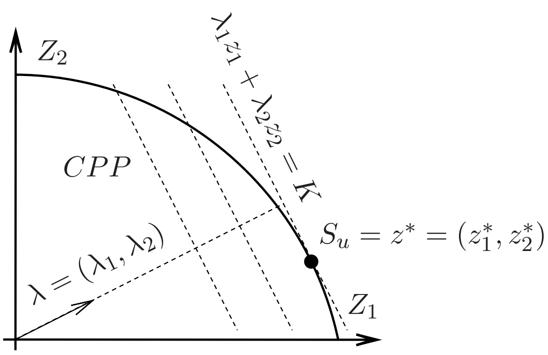

Figura 2: Solución utilitaria.

Normalmente es difícil predecir los precios que el mercado absorberá, pero, en muchos casos sí se puede asumir cierta información imprecisa sobre dichos precios. En este ejemplo supondremos que se sabe que el producto Z_1 es más caro o a lo sumo tiene el mismo precio que el producto Z_2 y que, por otro lado, el precio del producto Z_1 a lo más duplica el precio del producto Z_2.[1]

En este trabajo, con la información imprecisa facilitada, definiremos una nueva solución que llamaremos *solución utilitaria de compromiso (SUC)* y denoretamos por S_{uc}. Está basada en un principio conservador según el cual, se asigna a cada combinación de productos factible la peor de las valoraciones posibles, teniendo en cuenta todos los precios admisibles incluidos en el conjunto de información, y se elige entonces, la producción que maximiza estas peores valoraciones.[2]

Gráficamente, la SUC en este ejemplo, considerando la información mencionada, se representa en la Figura 3.

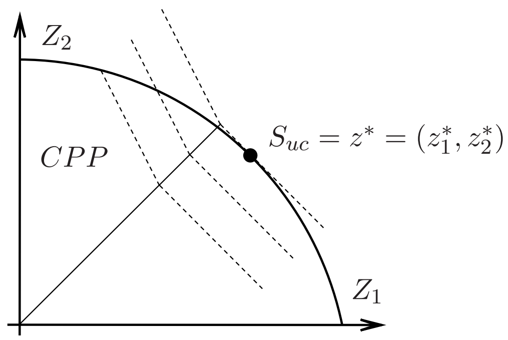

Figura 3: CPP con información imprecisa sobre los precios.

El nombre de solución utilitaria de compromiso se justifica porque puede ser considerada un compromiso entre la solución utilitaria, S_u, de la Figura 2 y la *solución maximin* basada en un principio igualitario (Rawls, 1971), que aconseja producir la misma cantidad de cada producto. Si los precios que el mercado es capaz de absorber son conocidos, la SUC coincide con la solución utilitaria; en cambio, si no hay ninguna información sobre dichos precios hay que considerar como poliedro de información todo el simplex y la SUC coincide con la solución maximin, que denotamos por S_m. En la Figura 4 se representan, para el ejemplo considerado, las tres soluciones: La solución maximin, la SUC y la solución utilitaria.

[1] Si los precios los suponemos normalizados para pertenecer al simplex $\Delta^1 = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$, la información imprecisa disponible en este caso puede representarse mediante el poliedro $\Lambda = \{\lambda \in \Delta^1 \mid \lambda_1 \geq \lambda_2,\ \lambda_1 \leq 2\lambda_2\}$, que llamaremos *poliedro de información*. Los puntos extremos de este poliedro de información son $\lambda^1 = (1/2, 1/2)$ y $\lambda^2 = (2/3, 1/3)$.

[2] Un punto $z = (z_1, z_2)$ del CPP es preferido a otro $z' = (z_1', z_2')$, con respecto al poliedro de información Λ, si $\min_{\lambda \in \Lambda} \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \geq \min_{\lambda \in \Lambda} \lambda_1 z_1' + \lambda_2 z_2'$. Esto es equivalente a imponer la desigualdad para los puntos extremos de Λ, es decir, $1/2 z_1 + 1/2 z_2 \geq 1/2 z_1' + 1/2 z_2'$ y $2/3 z_1 + 1/3 z_2 \geq 2/3 z_1' + 1/3 z_2'$.

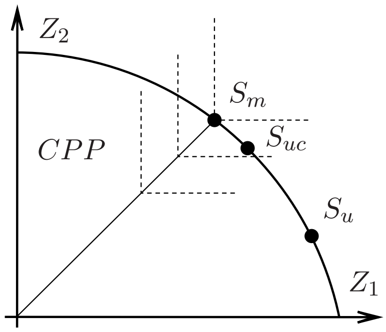

Figura 4: SUC, solución utilitaria y solución maximin.

Obsérvese que a medida que se incorpora información sobre los precios la SUC se adapta mejor a la tecnología de cada problema, es decir, toma en consideración la forma que tiene el CPP. En los dos ejemplos que se representan en la Figura 5, la solución maximin no tiene en cuenta la capacidad que tiene la empresa de producir de un producto más que del otro. Sin embargo, con la información sobre los precios facilitada, la SUC tiene en cuenta que en estos problemas es posible una pequeña disminución en la fabricación de un producto a cambio de un incremento mayor en la producción del otro.

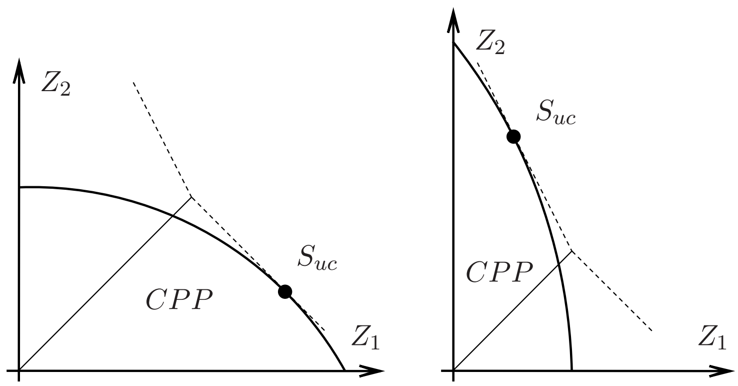

Figura 5: SUC en dos CPP correspondientes a tecnologías diferentes.

En este Ejemplo 1, con el que hemos decidido comenzar la redacción del trabajo, estamos ignorando el análisis económico del problema, centrándonos en en problema matemático de maximización de ambas producciones (objetivos) dentro de un conjunto factible y utilizando los precios como pesos de importancia de los dos objetivos considerados que se agregan en una función de utilidad lineal a trozos.

Este es el marco en el que se desarrolla el trabajo: problemas de decisión multiobjetivo en situaciones en las que las preferencias del agente decisor pueden representarse por funciones aditivas, y donde se permite imprecisión en los pesos de los objetivos; más concretamente, se dispone de información parcial sobre los pesos de los objetivos que se formaliza por medio de restricciones lineales.

El análisis que se presenta en este trabajo puede interpretarse también en términos de decisión en grupo, cuando un grupo de agentes decisores tiene que resolver un problema multi-objetivo y cada uno de ellos proporciona un vector de pesos diferente, la falta de consenso en estas situaciones puede interpretarse como información parcial sobre la importancia de los objetivos.

Los trabajos previos sobre el tratamiento de problemas multi-objetivo con información parcial tratan principalmente de la reducción del conjunto de soluciones Pareto-óptimas, de acuerdo con la información disponible (véase, por ejemplo, Weber (1987), Carrizosa et al. (1995), Mármol et al. (2002)). Hay también bastante literatura sobre problemas lineales multi-objetivo en los que los coeficientes de la función objetivo no están perfectamente determinados, sino que vienen dados por intervalos o por medio de relaciones lineales (por ejemplo, Mármol y Puerto (1997), Hansen y otros (1989) y Wendell (1985, 2004)). La mayoría de estos trabajos se centran en analizar la sensibilidad de una solución dada ante cambios factibles en los parámetros. En un sentido diferente Hinojosa y Mármol (2009) investigan las soluciones que surgen para problemas de decisión multi-objetivo con información parcial cuando las preferencias del agente decisor se representan por funciones utilitarias o igualitarias y estudian los principios de racionalidad que los sustentan.

En el presente trabajo se supone que las preferencias del agente decisor pueden representarse mediante una función aditiva y desde un punto de vista conservador, se proponen la soluciones utilitarias de compromiso (SUC) para problemas multi-objetivo con información parcial. En nuestro modelo, la información parcial se representa mediante un conjunto de información poliédrico formado por los pesos de los objetivos que se pueden considerar en la función utilitaria.

Presentamos también la caracterización de la SUC para problemas lineales multi-objetivo mediante la resolución de un problema escalar lineal.

El resto del trabajo se estructura como sigue: En la Sección 2 se formaliza el modelo lineal continuo de optimización multi-objectivo y se definen formalmente las soluciones SUC. En la Sección 3 se estudian algunas propiedades que cumple dicha solución. Finalizamos el trabajo con unos comentarios a modo de conclusiones.

2.- Soluciones utilitarias de compromiso en problemas multi-objetivo con informacion parcial

Consideremos un problema de optimización con s objetivos que reflejan los propósitos diferentes del agente decisor. Este problema lo representamos en su forma general como sigue:

$$\begin{array}{ll} max & z = f(x) = [f_1(x), \ldots, f_r(x), \ldots, f_s(x)] \\ s.t: & x \in \Omega \end{array}$$

donde Ω es el conjunto factible en el espacio de decisión, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, que consideramos compacto, comprehensivo y convexo, y f es una función, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, donde f_r, $r = 1, 2, \ldots, s$, son funciones objetivo continuamente diferenciables. Asumimos, sin pérdida de generalidad, que todos los objetivos son de maximización. Si consideramos problemas lineales multi-objetivo, entonces f_r, $r = 1, 2, \ldots, s$, son funciones lineales de x y Ω y $f(\Omega) = \{ z \in \mathbb{R}^s \mid z = f(x), x \in \Omega \}$ son conjuntos poliédricos.

Un *problema multi-objetivo (PMO)* lo denotamos por un par (Ω, f). Un punto $x \in \Omega$ se denomina una *solución factible* del problema. Se trata de seleccionar un subconjunto de soluciones factibles (preferiblemente una única) que sea considerada deseable por el agente decisor o por el grupo de agentes decisores.

El requisito de Pareto-optimalidad es básico para las soluciones en los problemas multi-objetivo. Una solución factible es Pareto-óptima si los valores de los objetivos no pueden mejorarse componente a componente.[3]

Definición 2.1. Una solución factible $x^* \in \Omega$ es Pareto-óptima o eficiente si no existe otra, $x \in \Omega$, tal que $f_r(x) > f_r(x^*)$ para todo $r = 1, \ldots, s$. Una solución factible $x^* \in \Omega$ es fuertemente Pareto-óptima o fuertemente eficiente si no existe ninguna otra solución factible , $x \in \Omega$, tal que $f_r(x) \geq f_r(x^*)$ para todo $r = 1, \ldots, s$, con al menos una desigualdad estricta.

Para cada PMO (Ω, f), el conjunto de soluciones Pareto-óptimas (fuertemente Pareto-óptimas) lo denotamos por $PO(\Omega, f)$ $(FPO(\Omega, f))$.

En la literatura hay distintos procedimientos para generar soluciones eficientes (ver, por ejemplo, Chankong y Haimes(1983) y Yano y Sakawa(1989)). La escalarización mediante una suma ponderada es uno de los mas extendidos. No obstante, en la práctica, el conjunto de soluciones eficientes de un PMO suele contener demasidas alternativas para permitir al agente decisor realizar la elección de la más preferida. En nuestro contexto, asumiremos inicialmente que las preferencias del agente decisor (o agentes decisores) se pueden representar por una función aditiva[4], $\lambda \cdot f(x) = \sum_{r=1}^{s} \lambda_r f_r(x)$, y por lo tanto, es posible seleccionar soluciones eficientes maximizando una función lineal de las funciones objetivo. En este caso, los parámetros, λ_r, se pueden interpretar como pesos de importancia de los objetivos y el conjunto completo de soluciones Pareto-optimas puede generarse considerando todos los pesos en el $\mathbb{R}^s$-simplex $\Delta^{s-1} = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^s_+ \mid \sum_{r=1}^{s} \lambda_r = 1\right\}$.

Cuando se puede determinar un único vector de pesos, $\lambda \in \Delta^{s-1}$, el PMO es un problema *con información completa* y se representa por la terna (Ω, f, λ). Resolviendo el problema ponderado correspondiente se obtiene un subconjunto de puntos eficientes (en muchos casos un único punto). La solución obtenida, que se define formalmente a continuación, se denomina *solución utilitaria*.

Definición 2.2. La solución utilitaria, S_u, selecciona para cada problema (Ω, f, λ) el conjunto

$$S_u(\Omega, f, \lambda) = \arg\max_{x \in \Omega} \lambda \cdot f(x).$$

Ejemplo 2: Consideremos dos problemas bi-objetivo con información completa, (Ω, f, λ^1) y (Ω, f, λ^2). En el primero, el primer objetivo se considera el doble de importante que el segundo, es decir, $\lambda^1 = (2/3, 1/3)^t$, y en el segundo se da la misma importacia a ambos objetivos, es decir, $\lambda^2 = (1/2, 1/2)^t$. Entonces

[3]Usaremos el término Pareto-óptimo y también el término eficiente para referirnos a las soluciones en el espacio de decisión, Ω. Cuando no haya lugar a confusión, usaremos también el término eficiente para referirnos a los correspondientes valores en el espacio de objetivos.

[4]Dados z^1, $z^2 \in \mathbb{R}^s$, denotamos por $z^1 \cdot z^2$ al producto escalar de z^1 y z^2, es decir, $z^1 \cdot z^2 = \sum_{r=1}^{s} z^1_r z^2_r$.

$$S_u(\Omega, f, \lambda^1) = \arg\max_{x\in\Omega}\{(2/3)f_1(x) + (1/3)f_2(x)\},$$
$$S_u(\Omega, f, \lambda^2) = \arg\max_{x\in\Omega}\{(1/2)f_1(x) + (1/2)f_2(x)\}.$$

En la Figura 6 se representan las soluciones a dichos problemas en el espacio de objetivos.

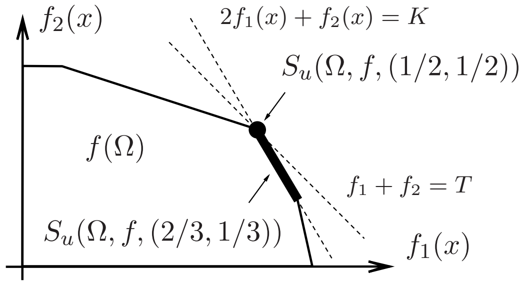

Figura 6: Solución utiltaria.

Sin embargo, el problema de la determinación de los pesos dista bastante de ser trivial. De ahora en adelante vamos a considerar situaciones en las que la importancia de los objetivos no esta establecida de manera precisa, pero el agente decisor es capaz de proporcionar un conjunto de información en el que deben estar los pesos de los objetivos. Sea Λ un poliedro de pesos que representa la información disponible sobre la importancia de los objetivos, $\Lambda \subseteq \Delta^{s-1}$. Un *problema multi-objetivo con información parcial* es una terna (Ω, f, Λ).

En este tipo de problemas con información parcial, vamos a extender la noción de solución utilitaria definiendo una solución de compromiso, que está basada en la siguiente relación de dominancia en el espacio de objetivos.

Definición 2.3. Dados $z^1, z^2 \in \mathbb{R}^s$, z^1 domina a z^2 con respecto a la relación de dominancia $\succ_\Lambda$, $z^1 \succ_\Lambda z^2$, si $\min_{\lambda\in\Lambda} \lambda \cdot z^1 > \min_{\lambda\in\Lambda} \lambda \cdot z^2$.

Definición 2.4. El punto $z^* \in f(\Omega)$ es no dominado respecto a $\succ_\Lambda$ si no existe otro, $z \in f(\Omega)$, que lo domine con respecto a dicha relación.

Definición 2.5. La solución utilitaria de compromiso, S_{uc}, selecciona para cada problema (Ω, f, Λ) los puntos factibles correspondientes a las soluciones no dominadas respecto de $\succ_\Lambda$, es decir,

$$S_{uc}(\Omega, f, \Lambda) = \arg\max_{x\in\Omega} m_\Lambda(x),$$

donde $m_\Lambda(x) = \min_{\lambda\in\Lambda} \lambda \cdot f(x)$.

Sean λ^1, λ^2, . . . , λ^k, los puntos extremos del poliedro Λ. En el siguiente resultado se prueba que la relación de dominancia $\succ_\Lambda$ puede establecerse en función de los puntos extremos del poliedro Λ.

Proposición 2.6. *$z^1 \succ_\Lambda z^2$ si, y solo si,* $\min_{h=1,\dots,k}\{\lambda^h \cdot z^1\} > \min_{h=1,\dots,k}\{\lambda^h \cdot z^2\}$.

Demostración: Vamos a probar que $\min_{h=1,\dots,k}\{\lambda^h \cdot z\} = \min_{\lambda\in\Lambda} \lambda \cdot z$.
En primer lugar, es fácil ver que $\min_{h=1,\dots,k}\{\lambda^h \cdot z\} \geq \min_{\lambda\in\Lambda} \lambda \cdot z$. Sea ahora $\lambda^* \in \Lambda$, tal que $\lambda^* \cdot z = \min_{\lambda\in\Lambda} \lambda \cdot z$. Se cumple $\lambda^* = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda^i$, con $0 \leq \alpha_i \leq 1$ y $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$. Por tanto,

$$\lambda^* \cdot z = \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda^i\right) \cdot z = \sum_{i=1}^k \alpha_i \left(\lambda^i \cdot z\right) \geq \sum_{i=1}^k \alpha_i \min_{h=1,\dots,k}\{\lambda^h \cdot z\} = \min_{h=1,\dots,k}\{\lambda^h \cdot z\}.$$

De donde se sigue la igualdad. □

Como consecuencia, se obtiene una representación alternativa de la función m_Λ, como $m_\Lambda(x) = \min\{\lambda^1 \cdot f(x), \lambda^2 \cdot f(x), \dots, \lambda^k \cdot f(x)\}$.

Como se comentó en el Ejemplo 1, en el caso de máxima información sobre los pesos de importancia de los objetivos, cuando el conjunto de información consiste en un único vector de pesos, la SUC coincide con la solución utilitaria. En el caso en que no hay ninguna información sobre dichos pesos de importancia, el conjunto de información consiste en todos los pesos posibles en el simplex s-dimensional, ya que la ausencia de información no permite descartar ninguno. En este caso la SUC coincide con la solución maximín del problema multiobjetivo.

En este sentido la SUC se considera un compromiso entre la solución utilitaria y la noción igualitaria que subyace en la solución maximin. Obsérvese que dicho compromiso pueder forzarse para que sea un compromiso entre la solución maximin ponderada por el vector p y la solución utilitaria. Este vector p representa la dirección que dirige la solución maximin ponderada con la que coincide la SUC en ausencia de información. Puede considerarse como una ponderación a priori que determina el rayo en el que confluyen las curvas de nivel lineales a trozos que dirigen la SUC. Dado un vector de componentes estrictamente positivas, p, que llamaremos de ponderación a priori, el concepto de solución utilitaria de compromiso puede generalizarse de la siguiente forma:

Definición 2.7. La solución utilitaria de compromiso con ponderación a priori p, que denotamos por $S^p_{uc}(\Omega, f, \Lambda)$, es para cada problema (Ω, f, Λ)

$$S^p_{uc}(\Omega, f, \Lambda) = \arg\max_{x\in\Omega} m^p_\Lambda(x),$$

donde $m^p_\Lambda(x) = \min\left\{\frac{\lambda^1\cdot f(x)}{\lambda^1\cdot p}, \frac{\lambda^2\cdot f(x)}{\lambda^2\cdot p}, \dots, \frac{\lambda^k\cdot f(x)}{\lambda^k\cdot p}\right\}$.

Ejemplo 1 (Continuación): Supongase que en el modelo de producción con incertudumbre sobre los precios del Ejemplo 1, el agente decisor quiere que la producción se mantenga en el ratio que se viene haciendo en campañas anteriores, dos unidades del producto 1 por cada unidad producida del producto 2, a no ser que la información imprecisa sobre los precios de mercado aconseje otra cosa. Por tanto, la ratio $p = (2, 1)$ se considera una ponderación a priori, que debe respetarse en ausencia de información. En la Figura 7 se observa cómo con el mismo conjunto de información propuesto en el Ejemplo 1, que representa los posibles precios que el mercado puede absorber, la utilización de la SUC no aconseja modificar, en este ejemplo, el ratio de producción $p = (2, 1)$.

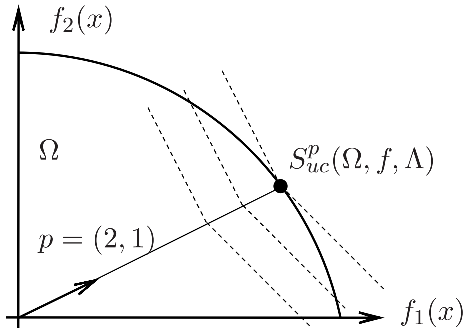

Figura 7: SUC con informacion imprecisa sobre los precios y ponderación a priori.

El siguiente resultado caracteriza la SUC como la solución de un problema de optimización uni-objetivo que depende de los puntos extremos del poliedro de pesos de importancia de los objetivos. Obsérvese que este problema es lineal siempre que el conjunto de soluciones factibles, Ω, sea un poliedro y f sea lineal.

Proposición 2.8. *Dado el poliedro $\Lambda \subseteq \Delta^{s-1}$, con puntos extremos λ^j, $j = 1, 2, \dots, k$ y la ponderación a priori p. El punto factible x^* es una solución utilitaria de compromiso, $x^* \in S^p_{uc}(\Omega, f, \Lambda)$, si, y solo si, existe t^*, tal que (t^*, x^*) es solución del problema de optimización:*

$$\left.\begin{array}{lll} max & t & \\ s.a: & \frac{\lambda^j \cdot f(x)}{\lambda^j \cdot p} \geq t & j = 1, 2, \dots, k \\ & x \in \Omega & \end{array}\right\}.$$

Demostración: Es consecuencia de que m^p_Λ sólo depende de los puntos extremos de Λ, esto es, $m^p_\Lambda(x) = \min \left\{ \frac{\lambda^1 \cdot f(x)}{\lambda^1 \cdot p}, \frac{\lambda^2 \cdot f(x)}{\lambda^2 \cdot p}, \dots, \frac{\lambda^k \cdot f(x)}{\lambda^k \cdot p} \right\}$. $\square$

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento de obtención de estas soluciones.
Ejemplo 3: Una empresa fabrica los productos P1 y P2 con los recursos R1 y R2 de forma que x unidades del recurso R1 e y unidades del recurso R2 proporcionan respectivamente $5x - y$ unidades del producto P1 y $3y$ unidades del producto P2. Si las restricciones técnicas del problema son $y \leq 5x$, $x \leq 1$ y $x + y \leq 2$, el problema para maximizar la producción es:

$$\left.\begin{array}{ll} max & (f_1(x,y) = 5x - y, \quad f_2(x,y) = 3y) \\ s.a: & y \leq 5x \\ & x \leq 1 \\ & x + y \leq 2 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

En la Figura 8 se representa la región factible en el espacio de decisión y el correspondiente CPP en el espacio de objetivos:

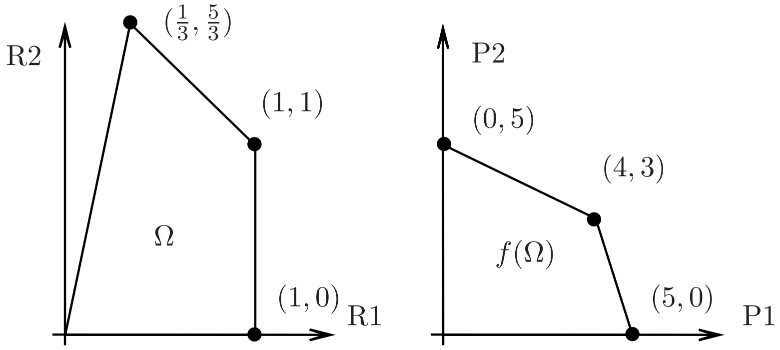

Figure 8: Region factible en el espacio de decisión y en el espacio de objetivos.

Cualquier solución factible en los segmentos que unen los puntos $(1/3, 5/3)$ y $(1, 1)$ y $(1, 1)$ y $(1, 0)$ respectivamente proporcina una producción eficiente. Una manera de elegir entre ellas es tener en cuenta los precios de los productos sobre los que vamos a imponer distintos grados de incertidumbre:

<u>Caso 1</u>: Se supone el mismo precio para los dos productos. En este caso la SUC coincide son la solución utilitaria cuando $\lambda = (1/2, 1/2)$. En la Figura 9 se representa la solución en el espacio de objetivos. En el espacio de decisión la solución es $x = 1$, $y = 1$, lo que lleva a producir 4 unidades del primer producto y 3 del segundo.

$$\begin{array}{ll} max & \frac{5}{2}x + y \\ s.a: & y \leq 5x \\ & x \leq 1 \\ & x + y \leq 2 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

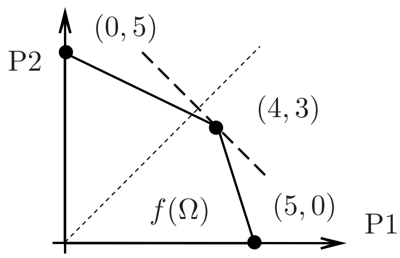

Figure 9: Solución utilitaria.

<u>Caso 2</u>: Se espera que el producto P1 tenga, por lo menos, el mismo precio que el producto P2. En este caso el conjunto de información sobre los precios, Λ, tiene dos puntos extremos, $\lambda = (1, 0)$ y $\lambda = (1/2, 1/2)$. El problema lineal a resolver y la representación gráfica de la solución en el espacio de objetivos se muestran en la figura 10. Obsérvese que con esta información la solución coincide con la solución utilitaria.

$$\begin{array}{ll} max & t \\ s.a: & 5x - y \geq t \\ & \frac{5}{2}x + y \geq t \\ & y \leq 5x \\ & x \leq 1 \\ & x + y \leq 2 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

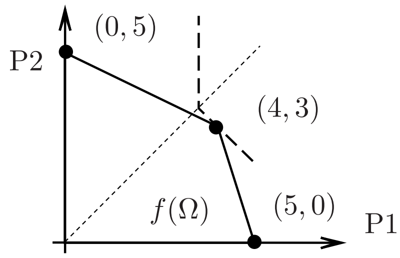

Figure 10: SUC cuando $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Caso 3: Se espera que el producto P2 tenga, por lo menos, el mismo precio que el producto P1. En este caso el conjunto de información sobre los precios, Λ, tiene dos puntos extremos, $\lambda = (0, 1)$ y $\lambda = (1/2, 1/2)$. El problema lineal a resolver y la representación gráfica de la solución en el espacio de objetivos se muestran en la figura 11. La solución es $x = 8/9$ e $y = 10/9$ y lleva a producir 10/3 de cada producto.

$$\begin{array}{ll} max & t \\ s.a: & 3y \geq t \\ & \frac{5}{2}x + y \geq t \\ & y \leq 5x \\ & x \leq 1 \\ & x + y \leq 2 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

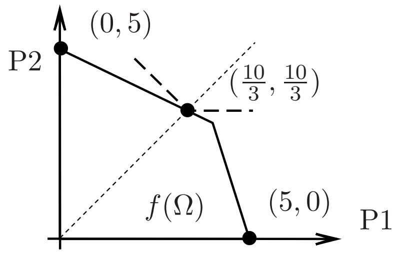

Figure 11: SUC cuando $\lambda_2 \geq \lambda_1$.

Por último, vamos a replantear los Casos 2 y 3 imponiendo que la producción se mantenga en la ratio dos unidades del producto P1 por cada unidad fabricada de P2, siempre que la información sobre los precios no aconseje otra cosa.

Caso 2': El problema lineal a resolver y la representación gráfica de la solución en el espacio de objetivos se muestran en la figura 12. Solución $x = 1$, $y = 5/7$.

$$\begin{array}{ll} max & t \\ s.a: & \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}y \geq t \\ & \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y \geq t \\ & y \leq 5x \\ & x \leq 1 \\ & x + y \leq 2 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

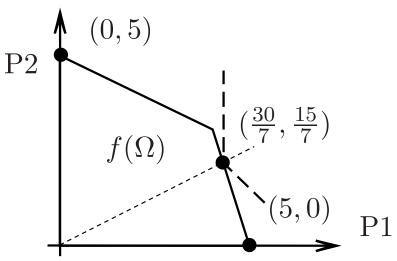

Figure 12: SUC cuando $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Caso 3': El problema lineal a resolver y la representación gráfica de la solución en el espacio de objetivos se muestran en la figura 13. Obsérvese que de nuevo, en este caso la SUC coincide con la solución utilitaria.

$$\begin{array}{ll} max & t \\ s.a: & 3y \geq t \\ & \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y \geq t \\ & y \leq 5x \\ & x \leq 1 \\ & x + y \leq 2 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$

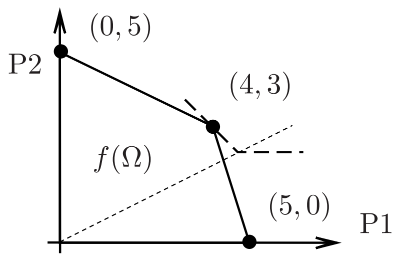

Figure 13: SUC cuando $\lambda_2 \geq \lambda_1$.

3.- Propiedades

Los distintos conceptos de solución en problemas de decisión multi-objetivo se basan en ciertos principios de racionalidad comúnmente aceptados. Pareto-optimalidad es un principio básico, otros requisitos resultan deseables en determinadas situaciones y en función de ellos el agente decisor puede realizar la elección del concepto de solución más apropiado.

Denotemos por $\mathcal{P}$ al conjunto de los PMO con información parcial. De una forma general, una solución, S, en $\mathcal{P}$ es una correspondencia que a cada problema $(\Omega, f, \Lambda) \in \mathcal{P}$ le asigna un subconjuto de puntos de Ω.

En lo que sigue vamos a enumerar algunos de los requisitos y propiedades que pueden o deben cumplir las soluciones de los problemas multi-objetivo.

Pareto optimalidad: Para cada problema $(\Omega, f, \Lambda) \in \mathcal{P}$,

$$S(\Omega, f, \Lambda) \subseteq PO(\Omega, f).$$

Pareto optimalidad fuerte: Para cada problema $(\Omega, f, \Lambda) \in \mathcal{P}$,

$$S(\Omega, f, \Lambda) \subseteq FPO(\Omega, f).$$

La propiedad que introducimos ahora en este contexto de decisión multi-objetivo con información parcial requiere que el resultado sea independiente de las reducciones del conjunto de soluciones factibles, es decir, si el conjunto de puntos obtenidos con la región factible Ω' tiene elementos en común con un subconjunto suyo compacto, comprehensivo y convexo, Ω, $\Omega \subset \Omega'$, entonces dichos elementos en común deben ser también los puntos obtenidos con la solución para el problema con región factible Ω. De esta forma las decisiones irrelevantes se pueden descartar de la solución. En el contexto de la teoría de la negociación, esta propiedad se conoce como el Axioma de elección de Arrow y coincide con la propiedad de Indepencia de las Alternativas Irrelevantes de Nash (Nash (1950)) para soluciones que asignan a cada problema un único elemento en el conjunto factible.

Independencia de decisiones irrelevantes: Para todo $(\Omega, f, \Lambda), (\Omega', f, \Lambda) \in \mathcal{P}$, si $\Omega \subseteq \Omega'$ y $S(\Omega', f, \Lambda) \cap \Omega \neq \emptyset$, entonces $S(\Omega, f, \Lambda) = S(\Omega', f, \Lambda) \cap \Omega$.

Proposición 3.1. *En la clase de problemas multi-objetivo con información parcial $\mathcal{P}$, S_{uc}^{p} cumple Pareto-optimalidad e Independencia de Decisiones Irrelevantes para cualquier p de componentes positivas.*

Demostración: S_{uc}^{p} es Pareto-óptima porque si para un problema $(\Omega, f, \Lambda) \in \mathcal{P}$ existiera $x \in S_{uc}^{p}(\Omega, f, \Lambda) \setminus PO(\Omega, f)$, entonces existiría $y \in \Omega$ tal que $f_r(y) > f_r(x)$ para todo $r = 1, 2, \ldots, s$ y, por tanto:

$$\min_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \frac{\lambda \cdot f(y)}{\lambda \cdot p} \right\} = \frac{\lambda^* \cdot f(y)}{\lambda^* \cdot p} > \frac{\lambda^* \cdot f(x)}{\lambda^* \cdot p} \geq \min_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \frac{\lambda \cdot f(x)}{\lambda \cdot p} \right\}$$

y esto contradice la definición 2.7.

Para probar que S^p_{uc} verifica Independencia de Decisiones Irrelevantes, consideremos $\Omega \subseteq \Omega'$ y $x \in S^p_{uc}(\Omega', f, \Lambda) \cap \Omega$. Como $m^p_\Lambda(x) = \max_{y\in\Omega'} m^p_\Lambda(y)$ y $x \in \Omega$, entonces $m^p_\Lambda(x) = \max_{y\in\Omega} m^p_\Lambda(y)$ y $x \in S^p_{uc}(\Omega, f, \Lambda)$. Por lo tanto, $S^p_{uc}(\Omega', f, \Lambda) \cap \Omega \subseteq S^p_{uc}(\Omega, f, \Lambda)$.
Recíprocamente, consideremos $x \in S^p_{uc}(\Omega, f, \Lambda)$. Obviamente se verifica que $m^p_\Lambda(x) = \max_{y\in\Omega} m^p_\Lambda(y) \leq \max_{y\in\Omega'} m^p_\Lambda(y)$. Pero como $S^p_{uc}(\Omega', f, \Lambda) \cap \Omega \neq \emptyset$, entonces $m^p_\Lambda(x) = \max_{y\in\Omega'} m^p_\Lambda(y)$ y $x \in S^p_{uc}(\Omega', f, \Lambda, p)$. Por lo tanto, $S^p_{uc}(\Omega, f, \Lambda) \subseteq S^p_{uc}(\Omega', f, \Lambda) \cap \Omega$ y se tiene el resultado. □

La siguiente es una propiedad de simetría. La Neutralidad requiere que si

i) el agente decisor es neutral con respecto a los objetivos, de forma que si se da una cierta relación entre la importancia de éstos, la relación se sigue manteniendo si los objetivos se renombran. Esto se traduce en que el conjunto de información es simétrico[5], y

ii) si puede obtenerse una determinada combinación de valores de los objetivos, también puede obtenerse cualquier permutación de ella, es decir, el conjunto factible en el espacio de objetivos es simétrico,

entonces, la solución debe proporcionar un punto donde todos los objetivos alcanzan el mismo valor.

Neutralidad Para cada $(\Omega, f, \Lambda) \in \mathcal{P}$, tal que $f(\Omega)$ y Λ sean simétricos y Λ tenga más de un elemento, si $x \in S(\Omega, f, \Lambda)$, entonces $f_r(x) = f_l(x)$ para todo $r, l = 1, \ldots, s$.

Proposición 3.2. *El la clase de problemas multi-objetivo con información parcial $\mathcal{P}$, S^p_{uc} cumple la propiedad de Neutralidad si, y sólo si, $p = \alpha e$ para algún $\alpha > 0$.*[6]

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que S^p_{uc} es neutral y consideremos un problema $(\Omega^*, f, \Lambda^{s-1}) \in \mathcal{P}$ donde $f(\Omega^*) = \{z \in \mathbb{R}^s_+ \mid \sum_1^s z_r \leq k\}$, $k > 0$. Como el simplex s-dimensional es simétrico y $f(\Omega^*)$ también lo es, por la neutralidad de S^p_{uc}, si $x \in S^p_{uc}(\Omega^*, f, \Lambda^{s-1})$, entonces $f(x) = \beta e$, para algún $\beta > 0$. Como, por otro lado, al no haber información sobre los pesos de importancia de los objetivos, el resultado coincide con el obtenido por la solución maximin, es decir, $S^p_{uc}(\Omega^*, f, \Lambda^{s-1}) = \{x\}$ con $f(x) = \gamma p$, para algún $\gamma > 0$, se sigue que $p = \alpha e$, para algún $\alpha > 0$.
Consideremos ahora $p = \alpha e$, para algún $\alpha > 0$. Nótese que si $p = \beta q$, con $\beta > 0$, entonces $S^p_{uc} \equiv S^q_{uc}$. Por tanto, basta probar la neutralidad de S^e_{uc}. Obsérvese que si Λ es simétrico, dado un punto extremo de Λ, todas sus permutaciones están también en Λ. Consideremos $x \in S^e_{uc}(\Omega, f, \Lambda)$. Existe un punto extremo de Λ, $\lambda \in \Lambda$, tal que $m^e_\Lambda(x) = \lambda \cdot f(x)$. Nótese que, como Λ tiene mas de un elemento, λ tiene al menos dos componentes distintas, pues en otro caso λ sería el único punto extremo de Λ.

[5]Si un vector de ponderaciones pertenece al conjunto de información, cualquier otro vector que se obtenga permutando sus componentes también está en el conjunto de información.
[6]Denotamos por $e \in \mathbb{R}^s$, al vector $e = (1, 1, \ldots, 1)$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que para algún i, j, $f_i(x) \neq f_j(x)$. Por la simetría de $f(\Omega)$[7], $f(x)_\pi \in f(\Omega)$ para toda permutación $\pi \in \Pi$. Como la combinación convexa de todos los vectores anteriores está también en $f(\Omega)$ existe $x^* \in \Omega$ tal que

$$f(x^*) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi} f(x)_\pi.$$

Probaremos que $m^e_\Lambda(x) = \lambda \cdot f(x) < \lambda \cdot f(x^*)$, y esto contradice el hecho de que $x \in S^e_{uc}(\Omega, f, \Lambda)$. Obsérvese que

$$\lambda \cdot f(x^*) = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{\pi\in\Pi}(f(x)_\pi)_i\right) = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \left(\sum_{\pi\in\Pi}(\lambda_\pi)_i\right) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi} \lambda_\pi \cdot f(x).$$

Como λ_π tiene al menos dos componentes diferentes, entonces

$$\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi} \lambda_\pi \cdot f(x) > \min_{\pi\in\pi}\{\lambda_\pi \cdot f(x)\} = \lambda \cdot f(x) = m^e_\Lambda(x).$$

Por lo tanto, si $x \in S^e_{uc}(\Omega, f, \Lambda)$ entonces $f_i(x) = f_j(x)$ para todo i, j, y por lo tanto S^e_{uc} satisface Neutralidad. □

4.- Comentarios finales

La principal ventaja de las soluciones utilitarias de compromiso para problemas de optimización multi-objetivo que se presentan en este trabajo, es que seleccionan soluciones factibles Pareto-óptimas a partir de la información proporcionada por el agente decisor o agentes decisores, de la misma manera que lo hace una solución utilitaria y por lo tanto, el conjunto de soluciones factibles Pareto-óptimas utilitarias de compromiso suele ser bastante reducido, siendo, en muchos casos, una única solución.

Otra importante ventaja de la SUC es que para su implementación sólo es necesario solicitar del centro decisor información parcial sobre la importancia de los objetivos. Esta información, que se formaliza mediante restricciones lineales entre los pesos, es mas fácil de obtener que una información de tipo cardinal.

Además, cuando esta información sobre los pesos es escasa o demasiado difusa, la SUC permite incorporar una ponderación a priori que represente las preferencias del centro decisor, de forma que la solución conserve cierta proporcionalidad en ausencia de suficiente información, en el espacio de objetivos.

Esta doble incorporación de información que permite la SUC, para la búsqueda de la solución Pareto-óptima más preferida de entre todas las soluciones factibles Pareto-óptimas, hace que este concepto de solución tenga una gran potencialidad de cara a la resolución en la práctica de problemas reales. En el caso de conjuntos

[7]Una permutación del conjunto $\{1, 2, \ldots, s\}$, π, es una biyección de $\{1, 2, \ldots, s\}$ en $\{1, 2, \ldots, s\}$. Al conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, s\}$ lo denotamos por Π. Denotemos, asímismo, por z_π al vector $(z_{\pi(1)}, z_{\pi(2)}, \ldots, z_{\pi(s)})$.

factibles poliédricos y funciones objetivo lineales, la SUC se obtiene simplemente mediante la resolución de un problema lineal uni-objetivo. En particular, la utilización de estas soluciones apuntan ventajas en los modelos de Análisis Envolvente de Datos (DEA) de cara a establecer puntos de referencia mas realistas que tengan en cuenta las preferencias parcialmente especificadas por un decisor o por los miembros de un grupo de decisores.

Entre los inconvenientes de la SUC, vamos a destacar que esta solución, al igual que el resto de las soluciones basadas en nociones utilitarias, no cumple una propiedad deseable en determinadas situaciones, la Monotonía. Esta propiedad requiere que si se amplía el conjunto factible en un PMO, en la solución del problema con región factible mayor deberían poderse encontrar soluciones factibles con todos los objetivos mejores o iguales. La Figura 8 ilustra el hecho de que la SUC no satisface la propiedad de monotonía. Obsérvese que cuando el conjunto factible se amplía, el segundo objetivo alcanza valores mas bajos en todos los puntos que proporciona la SUC.

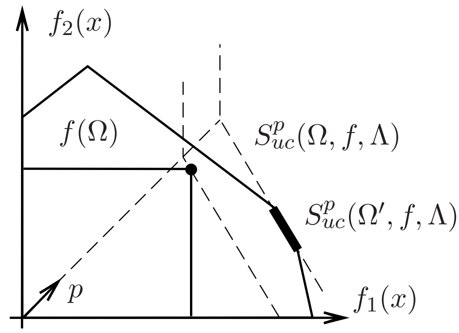

Figura 14: S^p_{uc} no es monótona

Agradecimientos: Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el proyecto SEJ2007-62711 del Ministerio de Ciencia y Tecnología y por el proyecto de la Consejería de Innovación de la Junta de Andalucía P06-SEJ-01801.

5.- Referencias

- Carrizosa E., Conde E., Fernández F.R., Puerto J.(1995). Multi-criteria analysis with partial information about the weighting coefficients. *European Journal of Operational Research* Vol. 81, n.22, pp. 291-301.
- Chankong V., Haimes Y.Y. (1983). *Multiobjective decision making: Theory and Methodology.* North Holland.
- Hansen P., Labbe M., Wendell R.E. (1989). Sensitivity analysis in multiple objective linear programming. The tolerance approach. *European Journal of Operational Research.* Vol. 38, n.1, pp. 63-69.

- Hinojosa M.A., Mármol A.M. (2009). Egalitarianism and utilitarianism in multiple criteria decision problems with partial information. En prensa en *Group Decision and Negotiation.*

- Mármol A.M., Puerto J.(1997). Special cases of the tolerance approach in multiobjective linear programming. *European Journal of Operational Research.* Vol. 98, n. 3, pp. 610-616.

- Mármol A.M., Puerto J., Fernández F.R.(2002). Sequential Incorporation of Imprecise Information in Multiple Criteria Decision Processes. *European Journal of Operational Research.* Vol. 137, pp. 123-133.

- Nash, J. (1950). The bargaining problem. *Econometrica.* Vol. 18, 155-162.

- Rawls, J. (1971). A Theory of Justice. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

- Weber M. (1987). Decision Making with Incomplete Information, *European Journal of Operational Research* 28, 44–57.

- Wendell R.E. (1985). The tolerance approach to sensitivity analysis in linear programming. *Management Science.* Vol. 31, n. 5, pp. 564-578.

- Wendell R.E. (2004). Tolerance sensitivity and optimality bounds in linear programming. *Management Science.* Vol.50, n.6, pp. 797-803.

- Yano H., Sakawa M. (1989). A unified approach for characterifing Pareto Optimal solutions of multiobjective optimifation problems: the hyperplane method. *European Journal of Operational Research* 39, 61-70.