

- Sur l'existence de solutions pour l'équation de van der Pol et pour certaines équations différentielles du second ordre, en présence d'impulsions
- Sur la moyennisation pour les équations différentielles floues

Par

Rahma Guen

Thèse présentée au Département de Mathématiques
en vue de l'obtention du grade de docteur ès science (Ph.D)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, Avril 2016

Le 28 Avril 2016

le jury a accepté la thèse de Mademoiselle Rahma Guen
dans sa version finale.

Membres du jury

Professeur Jean Marc Belley
Directeur de thèse
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Canada

Professeur Mustapha Lakrib
Co-directeur de thèse
Département d'Informatique
Faculté des Sciences Exactes
Université Djillali Liabès
Sidi Bel Abbès, Algérie

Professeure Virginie Charette
Examineur interne
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Canada

Professeur François Dubeau
Examineur interne
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Canada

Professeur Fabrice Colin
Examineur externe
Département de Mathématiques
Université Laurentienne
Ontario, Canada

*À mes parents
Mes deux sœurs et mon frère
Mon neveu et mes nièces
À la mémoire de ma sœur jumelle*

RÉSUMÉ

CETTE thèse est constituée de deux parties :

- Dans la première partie nous étudions l'existence de solutions périodiques, de période donnée, et à variations bornées, de l'équation de van der Pol en présence d'impulsions. Nous étudions, en premier, le cas où les impulsions ne dépendent pas de l'état. Ensuite, nous considérons le cas où les impulsions dépendent de la moyenne de l'état et enfin, nous traitons le cas général où les impulsions dépendent de l'état. La méthode de résolution est basée sur le principe de point fixe de type contraction.

Nous nous intéressons ensuite à l'étude d'un problème avec trois points aux limites, associé à certaines équations différentielles impulsives du second ordre. Nous obtenons un premier résultat d'existence de solutions en appliquant le théorème de point fixe de Schaefer. Un deuxième résultat est obtenu en utilisant le théorème de point fixe de Sadovskii. Pour le résultat d'unicité des solutions nous appliquons, enfin, un théorème de point fixe de type contraction.

- La deuxième partie est consacrée à la justification de la technique de moyennisation dans le cadre des équations différentielles floues. Les conditions sur les données que nous imposons sont moins restrictives que celles de la littérature.

REMERCIEMENTS

JE tiens d'abord à remercier mon directeur de thèse, le Professeur Jean Marc Belley, d'avoir accepté ma candidature au sein de l'université de Sherbrooke. Par sa compétence, son regard critique et ses conseils, il m'a apporté un grand appui dans l'avancement de mes travaux de recherche. Je lui exprime ma gratitude pour sa patience et pour le temps qu'il m'a consacré. Je le remercie pour toutes les fois où j'ai fait appel à lui pour une aide scientifique ou autre, car il n'a jamais ni hésité, ni ménagé sa peine pour répondre à mes sollicitations. Il m'est très agréable de lui adresser mes vives remerciements.

Ma gratitude va aussi à mon co-directeur de thèse, le Professeur Mustapha Lakrib, qui a guidé mon travail avec compétence et gentillesse durant les années de collaboration avec lui. J'ai beaucoup appris à son contact. C'est un très grand plaisir de travailler avec lui. Je le remercie aussi pour ses encouragements et ses conseils. Je lui témoigne ma sincère reconnaissance.

Je remercie vivement les Professeurs Virginie Charette et François Dubeau d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger cette thèse. Je tiens à remercier le Professeur Fabrice Colin qui m'a honoré par sa présence parmi les membres du jury.

Je remercie le Département de Mathématiques, ainsi que l'Institut des Sciences Mathématiques pour leur soutien financier. Je remercie vivement le personnel administratif du Département de Mathématique pour leur aide quotidienne ; en particulier Marie France.

Je remercie mon amie Melanie Cabana de la Faculté de l'Education qui m'a aidé et a guidé mes premiers pas au Canada et pour les moments agréables que nous avons passé ensemble. J'adresse mes remerciements à Mounira et son mari Zahir qui m'ont accueilli au sein de leur famille avec un cœur ouvert et créé un milieu familial pour moi.

J'exprime ma profonde reconnaissance à ma famille de m'avoir supporté durant ces années d'étude ; en particulier à mes parents, pour leur soutien constant et leur amour inconditionnel qui m'ont aidé à affronter les moments difficiles que j'ai rencontré. Aucun mot ne suffira à exprimer ma reconnaissance envers eux.

Ces derniers mots ferment un chapitre de trois ans de ma vie, passé à étudier et à travailler, mais avant cela je profite pour remercier tout ceux que j'ai dû oublié et n'en sont pas moins important.

Rahma Guen
Sherbrooke

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iv
REMERCIEMENTS	v
TABLE DES MATIÈRES	vii
TABLE DES FIGURES	ix
INTRODUCTION	1
PREMIÈRE PARTIE : SUR L'EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR L'ÉQUATION DE VAN DER POL ET POUR CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE, EN PRÉSENCE D'IMPULSIONS	4
1 PRÉLIMINAIRES	5
1.1 GÉNÉRALITÉS	5
1.2 ÉQUATION DE VAN DER POL	9
1.3 THÉORÈME D'ASCOLI-ARZELÀ : CAS IMPULSIF	11
1.4 THÉORÈMES DE POINT FIXE	12
2 ÉQUATION DE VAN DER POL AVEC IMPULSIONS	14
2.1 CAS DES IMPULSIONS INDÉPENDANTES DE L'ÉTAT	14
2.2 CAS DES IMPULSIONS DÉPENDANTES DE LA VALEUR MOYENNE DE L'ÉTAT	21
2.3 CAS GÉNÉRAL DES IMPULSIONS DÉPENDANTES DE L'ÉTAT	25
3 ÉQUATIONS IMPULSIVES D'ORDRE 2 À 3 POINTS AUX LIMITES	31
3.1 INTRODUCTION ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES	31
3.2 EXISTENCE DE SOLUTIONS	37
3.3 EXISTENCE ET UNICITÉ DE SOLUTION	42

DEUXIÈME PARTIE : SUR LA MOYENNISATION POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FLOUES	45
4 RAPPELS SUR LES ENSEMBLES FLOUS	46
4.1 INTRODUCTION	46
4.2 PRÉLIMINAIRES	47
4.2.1 Opérations sur les ensembles flous	48
4.2.2 Espace des ensembles flous	49
5 MOYENNISATION POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FLOUES	53
5.1 INTRODUCTION	53
5.2 RÉSULTAT DE MOYENNISATION	55
CONCLUSION	61
BIBLIOGRAPHIE	62

TABLE DES FIGURES

1	Un circuit électrique avec une tunnel diode pour l'oscillateur de van der Pol.	2
2.1	Graphiques de p_0 et de i	20
2.2	Graphiques de p_1 et de i	21
2.3	Graphiques de p_{ρ_0} et de i	24

INTRODUCTION

CETTE thèse est constituée de deux parties, le tout étant réparti en cinq chapitre :

- La première partie concerne certaines équations différentielles impulsives qui sont devenues un domaine de recherche important au cours des dernières années, stimulées par leurs applications aux systèmes dynamiques ayant un comportement dynamique impulsif en raison de changements brusques à certains instants au cours de l'évolution du processus.
- La deuxième partie est consacrée à des équations différentielles floues, se basant sur la théorie des ensembles flous qui a été introduite par Zadekh en 1965 comme un outil puissant pour la modélisation de l'incertitude et de la transformation des informations vagues dans les modèles mathématiques.

LES cinq chapitres sont répartis comme suit :

Chapitre 1 : C'est un rappel de quelques définitions et notions de base de l'analyse fonctionnelle (espaces, opérateurs, théorèmes de point fixe, etc.).

Chapitre 2 : Dans ce chapitre nous étudions l'existence des solutions périodique de période donnée T de l'équation différentielle de van der Pol, avec impulsions, de la forme :

$$x''(t) = \mu \left(x(t) - \frac{x(t)^3}{3} \right)' - x(t) + f(t) + \sum_{i=1}^m a_i[x] \delta_{t_i[x]}(t), \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

dans l'espace des fonctions à variations bornées, définies sur $[0, T]$ noté $NBV(T)$. $\mu > 0$, $\delta_{t_i[x]}$ est l'impulsion sur l'accélération x'' , avec l'amplitude $a_i : NBV(T) \rightarrow [-\gamma, \gamma]$ qui dépend de l'état x aux instants $t_i : NBV(T) \rightarrow [0, T]$ et la fonction $f \in L^1(T)$, l'espace des fonctions Lebesgue intégrables et T -périodiques presque partout. L'équation (1), en l'absence de forces impulsives, a été introduite par van der Pol [64, 66] pour modéliser les circuits triode de tube vide qui ont été utilisés pour contrôler l'écoulement de l'électricité dans le circuit des émetteurs et des récepteurs. Elle a alors fait

l'objet d'étude par Cartwright dans [11, 12, 45, 46], puis récemment, par Kalas et Kaderabek [25], Guckenheimer, Hoffman et Weckesser [22] et Lin [44]. Dans ce chapitre nous abordons l'existence de solutions T -périodiques de l'équation (1). En notant que la fonction d'expression $\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$ ne satisfait pas la condition de Lipschitz, cela ajoute une difficulté à obtenir des résultats comme dans [5, 6, 19, 20, 51].

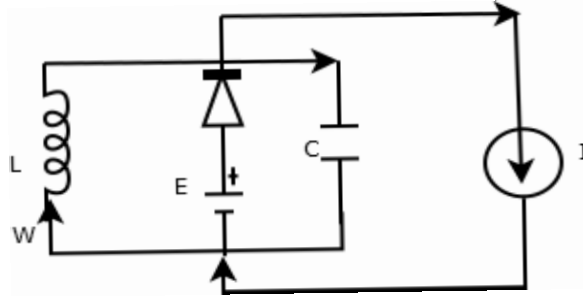


FIGURE 1 – Un circuit électrique avec une tunnel diode pour l'oscillateur de van der Pol.

Notre approche consiste alors à transformer le problème d'existence de solutions de l'équation (1) en un problème de point fixe de l'opérateur H_ρ défini de l'espace $NBV(T)$ dans lui même par

$$H_\rho(x) = \Delta_0 * (g[\tilde{x}(t) + \rho]) + D_0 * (\tilde{x}(t) - \tilde{f}(t)) + \sum_{i=1}^m a_i [\tilde{x} + \rho] D_{t_i}$$

où Δ_{t_i} et D_{t_i} sont définis dans (1.5) et (1.6), respectivement, puis on applique le Théorème 1.3 (Théorème de point fixe de Banach, page 13). On distingue trois cas : le premier cas où les impulsions sont indépendantes de l'état (c'est à dire, les a_i et t_i sont constants pour tout i). Le deuxième cas est celui où les impulsions dépendent de la moyenne de l'état, et le troisième et dernier cas est celui dans lequel les impulsions dépendent de l'état. Les résultats de ce chapitre sont publiés dans [3].

Chapitre 3 : Il est consacré à l'étude d'un problème avec trois points aux limites, associé à des équations différentielles impulsives du second ordre de la forme

$$x''(t) + f(t, x(t), x'(t)) = 0, \text{ a.e. } t \in J := [0, 1], t \neq t_1, \quad (2)$$

$$\Delta x(t_1) = I_1(x(t_1), x'(t_1)), \quad \Delta x'(t_1) = I_2(x(t_1), x'(t_1)), \quad (3)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta), \quad (4)$$

où la fonction $f : J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et les fonctions impulsives $I_1, I_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont données. Le moment d'impulsion t_1 est tel que $0 < t_1 < 1$, avec $\Delta x(t_1) = x(t_1^+) - x(t_1^-)$, $\Delta x'(t_1) = x'(t_1^+) - x'(t_1^-)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\eta \in J$.

Dans la littérature plusieurs résultats d'existence pour les équations différentielles impulsives sont prouvés sous des conditions fortes sur les fonctions

d'impulsions par exemple dans [23] l'auteur a supposé que les fonctions impulsives sont lipschitziennes, et dans [7] l'auteur les a supposé continues et bornés (voir aussi [7, 9, 10, 15, 18, 23, 52, 63]). Dans ce chapitre on propose des hypothèses plus faibles que celles de la littérature. On impose aux fonctions d'impulsions I_1 et I_2 d'être continues. Nous prouvons un résultat d'existence de solutions du problème (2)-(4) en utilisant le Théorème de point fixe de Schaefer. Nous montrons ensuite un résultat alternatif en appliquant le Théorème de point fixe de Sadovskii. Dans le dernier théorème de ce chapitre nous montrons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (2)-(4) en appliquant le Théorème de point fixe de Banach. Les résultats obtenus dans ce chapitre sont publiés dans [37].

Chapitre 4 : C'est un rappel sur les ensembles flous et l'espace \mathbb{E}^d des ensembles flous.

Chapitre 5 : Ici on étudie l'approximation des solutions d'un problème à valeur initiale associé à des équations différentielles floues perturbées, de la forme

$$\dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right), \quad x(0) = x_0, \quad (5)$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{E}^d$, \mathbb{U} un sous ensemble ouvert de \mathbb{E}^d , $x_0 \in \mathbb{U}$ et $\varepsilon > 0$ un petit paramètre. Le problème à valeur initiale moyennisée associé au problème (5) est donné par

$$\dot{y} = f^o(y), \quad y(0) = x_0, \quad (6)$$

où la fonction $f^o : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{E}^d$ est telle que, pour tout $x \in \mathbb{U}$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D\left(\frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x) d\tau, f^o(x)\right) = 0 \quad (7)$$

où D est une distance sur l'espace \mathbb{E}^d . Nous justifions alors l'utilisation de la méthode de moyennisation pour le problème (5) comme dans les travaux [33, 34, 36, 40, 41], en supposant que la fonction f est continue et bornée, la fonction intégrale de f est Lipschitzienne et que la limite (7) existe. Les conditions que nous supposons dans ce chapitre sont plus générales que celles considérées dans la littérature (voir [29, 30, 43, 49]), tout en étant moins restrictives que celles que nous avons imposées dans [38].

PREMIÈRE PARTIE :

SUR L'EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR
L'ÉQUATION DE VAN DER POL ET POUR
CERTAINES ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE,
EN PRÉSENCE D'IMPULSIONS

DANS ce chapitre nous rappelons quelques définitions, notions et résultats fondamentaux qui nous seront utiles dans les chapitres 2 et 3.

1.1 Généralités

On note par $L^1(T)$ l'espace de Banach des fonctions réelles $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Lebesgue intégrables et presque partout T -périodiques (c'est à dire $x(t+T) = x(t)$, pour presque tout t dans \mathbb{R}), muni de la norme :

$$\|x\|_1 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt, \quad x \in L^1(T).$$

La valeur moyenne d'une fonction $x \in L^1(T)$, notée \bar{x} , est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

Soit x une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} et soit $P = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ une partition de l'intervalle $[a, b]$. On définit la variation de la fonction x associée à P par :

$$Var(x, P) = \sum_{i=1}^k |x(t_i) - x(t_{i-1})|,$$

et la variation totale de la fonction x est donnée par

$$v(x) = \sup\{Var(x, P) : P \text{ une partition de } [a, b]\}$$

Définition 1.1 (Fonction à variation bornée) *Une fonction x , à valeurs réelles, définie sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} , est dite à variation bornée sur $[a, b]$ si*

$$v(x) < \infty.$$

Les fonctions à variations bornées sont Lebesgue intégrables sur tout intervalle borné et peuvent être considérées comme des fonctions périodiques généralisées sur \mathbb{R} .

Définition 1.2 Une fonction T -périodique généralisée consiste en une série de Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(n) e^{in\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, t \in \mathbb{R}$$

où $i = +\sqrt{-1}$ et $\hat{x}(n) \in \mathbb{C}$ sont telles que $\hat{x}(-n)$ est le conjugué complexe de $\hat{x}(n)$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\hat{x}(n)}{n^k} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Sa dérivée généralisée est donné par

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} in\omega \hat{x}(n) e^{in\omega t}.$$

(Voir par exemple [17] pour la définition d'une fonction généralisée dans le cas périodique. Dans [70] on trouve une définition dans le contexte des distributions.) Lorsque x est Lebesgue intégrable sur $[0, T]$ on a

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-in\omega t} dt. \quad (1.1)$$

Définition 1.3 (Fonction absolument continue) Une fonction $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite absolument continue sur $[0, T]$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles ouverts contenus dans $[0, T]$, deux à deux disjoints, $]t_i, t_{i+1}[$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, dont la somme des longueurs est inférieure à δ , i.e.

$$\sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) < \delta,$$

on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n |x(t_{i+1}) - x(t_i)| < \epsilon.$$

La continuité absolue d'une fonction x sur un intervalle $[0, T]$ signifie que pour tout $\epsilon > 0$ on peut choisir $\delta > 0$ de façon que la variation totale sur tout intervalle de longueur inférieure à δ ne dépasse pas ϵ . Par conséquent, toute fonction absolument continue est à variation bornée puisque l'intervalle $[0, T]$ peut être partagé en un nombre fini d'intervalles de longueur inférieure à δ d'où la variation totale de x sur $[0, T]$ est finie. Pour la preuve nous renvoyons, par exemple, à [54].

Proposition 1.1 ([55]) Soit x une fonction à variation bornée sur l'intervalle $[0, T]$. Alors x est différentiable presque partout sur l'intervalle ouvert $]0, T[$ et sa dérivée $x' \in L^1(T)$.

En 1881 Jordan a montré que toute fonction T -périodique à variation bornée, admet une série de Fourier simplement convergente. Il énonça alors le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Dirichlet-Jordan) *Soit x une fonction T -périodique et à variation bornée. Alors*

- (i) *La fonction x admet un développement en série de Fourier en tout point $t \in [0, T]$ tel que*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(n) e^{in\omega t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{x}(n) e^{in\omega t} = \frac{1}{2} [x(t_-) + x(t_+)]$$

où $x(t_-)$ et $x(t_+)$ sont les limites à gauche et à droite de la fonction x au point t , respectivement, et $\hat{x}(n) \in \mathbb{C}$ est donnée par (1.1)

- (ii) *Si x est continue sur un intervalle $[a, b]$ dans $[0, T]$, sa série de Fourier converge uniformément vers x sur $[a, b]$.*
 (iii) *En tout point t où x est continue, sa série de Fourier converge vers $x(t)$.*

Une fonction x à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes. Ceci assure que les limites à droite et à gauche existent en tout point. Si x est seulement continue on a, en général, ni la convergence uniforme ni la convergence simple. Toute fonction x à variation bornée peut être identifiée à sa série de Fourier donnée par

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(n) e^{in\omega t}.$$

Sa dérivée s'écrit alors sous la forme

$$x'(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} in\omega \hat{x}(n) e^{in\omega t}$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $i^2 = -1$. Puisque la fonction x est à valeurs réelles, $\hat{x}(-n)$ est le conjugué complexe de $\hat{x}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et la moyenne de x sera la constante $\hat{x}(0)$. Par exemple la série de Fourier de la fonction de Dirac T -périodique, $\delta_{t'}$ (voir [70]), associée aux impulsions arrivant aux instants $\{t' + kT, k \in \mathbb{Z}\}$ pour $t' \in [0, T]$ s'écrit

$$\delta_{t'}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\omega(t-t')}.$$

La moyenne de la fonction $\delta_{t'}$ est $\bar{\delta}_{t'} = \hat{\delta}_{t'}(0) = 1$ et par suite on a

$$\tilde{\delta}_{t'}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{in\omega(t-t')}.$$

Deux fonctions T -périodiques sont égales au sens de distribution si leurs séries de Fourier ont des coefficients identiques.

Définition 1.4 $NBV(T)$ est l'espace des fonctions $x \in L^1(T)$, T -périodique et à variation bornée sur l'intervalle $[0, T]$. $\widetilde{NBV}(T)$ est l'espace des fonctions $x \in NBV(T)$ dont la moyenne est nul :

$$\widetilde{NBV}(T) = \{\tilde{x} : x \in NBV(T)\}$$

où $\tilde{x} = x - \bar{x}$.

L'espace $\widetilde{NBV}(T)$ muni de la norme des variations totale est un espace de Banach. Pour tout $x \in \widetilde{NBV}(T)$ et tout $t \in [0, T]$ on a

$$|x(t)| \leq v(x). \quad (1.2)$$

En effet, si $x \in \widetilde{NBV}(T)$ alors $\bar{x} = 0$ et donc il existe $t' \in [0, T]$ tel que $x(t')$ a un signe opposé à celui de $x(t)$ et donc $|x(t)| \leq |x(t) - x(t')| \leq v(x)$. En général, pour tout $x \in \widetilde{NBV}(T)$ on a

$$\int_0^T |x'(t)| dt \leq v(x)$$

avec l'égalité si x est absolument continue (voir [54]).

Définition 1.5 On définit la convolution de deux fonctions généralisées x et y par

$$(x * y)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(n) \hat{y}(n) e^{in\omega t} \quad t \in [0, T].$$

Pour tout x et y dans $L^1(T)$ on a, pour tout $t \in [0, T]$

$$(x * y)(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t-s)y(s) ds,$$

et pour tout \tilde{x} et $\tilde{y} \in \widetilde{NBV}(T)$, on a

$$v(\tilde{x} * \tilde{y}) \leq \|\tilde{y}\|_{\infty} v(\tilde{x}). \quad (1.3)$$

Pour tout $\tilde{x} \in \widetilde{NBV}(T)$ et $f \in L^1(T)$

$$v(\tilde{x} * f) \leq \|f\|_1 v(\tilde{x}). \quad (1.4)$$

Au sens des fonctions généralisées, $\delta_{t'}$ est la dérivée de la fonction T -périodique $\Delta_{t'} : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ où

$$\Delta_{t'}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{in\omega(t-t')}}{in\omega} = \begin{cases} \frac{T - 2(t-t')}{2}, & \text{si } t' < t < t' + T, \\ 0, & \text{si } t = t' \text{ ou } t = t' + T. \end{cases} \quad (1.5)$$

$\Delta_{t'} \in NBV(T)$ et $\Delta_{t'}$ est la dérivée au sens généralisé de la fonction T -périodique $D_{t'} : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{T^2}{12}, \frac{T^2}{24}]$ où

$$D_{t'}(t) = - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{in\omega(t-t')}}{n^2\omega^2} = \frac{6T(t-t') - 6(t-t')^2 - T^2}{12}, \quad t \in [t', t' + T] \quad (1.6)$$

puisque l'image de la fonction $\Delta_{t'}$ est $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ et celle de la fonction $D_{t'}$ est $[-\frac{T^2}{12}, \frac{T^2}{24}]$, on a

$$v(\Delta_{t'}) = 2T \quad (1.7)$$

et

$$v(D_{t'}) = \frac{T^2}{4}. \quad (1.8)$$

Soit $0 \leq t' < t'' < T$. La fonction $t \mapsto (D_{t'}(t) - D_{t''}(t))$ est absolument continue sur $[t', t' + T]$. D'autre part on a $(D_{t'} - D_{t''})' = \Delta_{t'} - \Delta_{t''}$ presque partout. D'où

$$\begin{aligned} v(D_{t'} - D_{t''}) &= \int_{t'}^{t'+T} |\Delta_{t'}(t) - \Delta_{t''}(t)| dt \\ &= \int_{t'}^{t''} |\Delta_{t'}(t) - \Delta_{t''}(t)| dt + \int_{t''}^{t'+T} |\Delta_{t'}(t) - \Delta_{t''}(t)| dt \end{aligned}$$

où chacune des deux intégrales du membre de droite de l'égalité sont données respectivement par la surface d'une bande délimitée par les segments de droites $\Delta_{t'}(t)$ et $\Delta_{t''}(t)$ pour $t' < t < t''$ et $t'' < t < t' + T$. La première bande est contenue dans un rectangle de hauteur T et de largeur $t'' - t'$ tandis que la seconde se compose d'un parallélogramme ayant deux côtés de pente -1 , ne dépassant pas $\sqrt{2}T$ en longueur et deux côtés verticaux délimités par $t'' - t'$ en longueur. Ainsi, nous avons

$$v(D_{t''} - D_{t'}) \leq (1 + \sqrt{2})T(t'' - t'). \quad (1.9)$$

D'où $v(D_{t''} - D_{t'})$ tend vers zéro lorsque $(t'' - t')$ tend vers zéro.

1.2 Équation de van der Pol

L'équation de van der pol décrit les oscillations avec un amortissement non linéaire. L'énergie est dissipé à forte amplitudes et généré à faibles amplitudes. Par conséquent, il existe des oscillations où la production et la perte d'énergie est équilibré. Ces oscillations donnent des solutions périodiques (ou cycles limite) de l'équation. On se propose au Chapitre 2 d'étudier l'existence de solutions, T -périodiques, de l'équation de van der Pol avec impulsions de la forme

$$x''(t) = \mu \left(x(t) - \frac{x(t)^3}{3} \right)' - x(t) + f(t) + \sum_{i=1}^m a_i[x] \delta_{t_i[x]}(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.10)$$

où $f \in L^1(T)$. Les impulsions sur l'accélération sont données par le dernier terme de l'équation (1.10). Ces impulsions sont d'amplitude a_i qui dépendent de l'état x aux instants $t_i[x] + kT$, $k \in \mathbb{Z}$, $t_i \in [0, T)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, m peut être fini ou infini.

Une solution de l'équation (1.10) est une fonction définie sur l'intervalle $[0, T]$ vérifiant, sur cet intervalle, la relation (1.10) au sens des fonctions généralisées. En posant

$$g(s) = \mu \left(s - \frac{s^3}{3} \right), \quad s \in \mathbb{R}$$

$$I[x] = \sum_{i=1}^m a_i[x] \delta_{t_i[x]},$$

et

$$x = \tilde{x} + \bar{x}$$

l'équation (1.10) s'écrit

$$\tilde{x}'' = (g(\tilde{x} + \bar{x}))' - \tilde{x} + \tilde{f} + \tilde{I}(\tilde{x} + \bar{x}). \quad (1.11)$$

Une solution de l'équation (1.11) doit vérifier la relation suivante

$$\bar{x} = \bar{f} + \bar{I}(\tilde{x} + \bar{x}) \quad (1.12)$$

où

$$\bar{I}(\tilde{x} + \bar{x}) = \sum_{i=1}^m a_i(\tilde{x} + \bar{x}).$$

En appliquant la convolution des deux cotés de l'équation (1.11) par la fonction D_0 , on obtient

$$D_0 * \tilde{x}''(t) = D_0 * (g(\tilde{x}(t) + \bar{x}))' - D_0 * (\tilde{x}(t) - \tilde{f}(t)) + D_0 * \tilde{I}(\tilde{x}(t) + \bar{x}) \quad (1.13)$$

En remarquant que

$$D_0 = \Delta_0 * \Delta_0, \quad \Delta_0 * \tilde{x}' = \tilde{x}, \quad D_0 * \tilde{x}'' = \tilde{x}$$

et

$$D_0 * \tilde{I} = \sum_{i=1}^m a_i[\tilde{x} + \bar{x}] D_{t_i}$$

l'équation (1.13) s'écrit aussi

$$\tilde{x} = \Delta_0 * (g(\tilde{x} + \bar{x})) - D_0 * (\tilde{x} - \tilde{f}) + \sum_{i=1}^m a_i[\tilde{x}(t) + \bar{x}] D_{t_i}. \quad (1.14)$$

Pour tout \tilde{x} dans $NBV(T)$, la fonction $g(\tilde{x} + \bar{x})$ est dans $NBV(T)$. D'après la Proposition 1.1, $(g(\tilde{x} + \bar{x}))'$ est dans l'espace $L^1(T)$. En utilisant l'inégalité (1.4) on conclut que $\Delta_0 * (g(\tilde{x} + \bar{x}))'$ est dans $\widetilde{NBV}(T)$ et d'après l'inégalité (1.3), on a $\Delta_0 * (\tilde{x} - \tilde{f}) \in \widetilde{NBV}(T)$, d'où on a

$$\tilde{x}' = \Delta_0 * (g(\tilde{x} + \bar{x}))' - \Delta_0 * (\tilde{x} - \tilde{f}) + \sum_{i=1}^m a_i[\tilde{x} + \bar{x}] \Delta_{t_i}$$

est dans $\widetilde{NBV}(T)$ et \tilde{x}'' dans $L^1(T)$. Pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ on définit l'opérateur H_ρ sur l'espace $\widetilde{NBV}(T)$ par

$$H_\rho[\tilde{x}] = F_\rho[\tilde{x}] - G[\tilde{x}] + J_\rho[\tilde{x}], \quad \tilde{x} \in \widetilde{NBV}(T). \quad (1.15)$$

où

$$F_\rho[\tilde{x}] = \Delta_0 * g[\tilde{x} + \rho], \quad G[\tilde{x}] = D_0 * (\tilde{x} - \tilde{f})$$

et

$$J_\rho[\tilde{x}] = \sum_{i=1}^m a_i[\tilde{x} + \rho] D_{t_i}. \quad (1.16)$$

L'équation (1.14) s'écrit alors comme ceci :

$$\tilde{x} = F_\rho[\tilde{x}] - G[\tilde{x}] + J_\rho[\tilde{x}]. \quad (1.17)$$

On remarque alors que tout point fixe de l'opérateur H_ρ pour $\rho = \bar{x}$ est une solution de l'équation (1.17). Afin de montrer l'existence et l'unicité de solution de l'équation (1.17) on utilisera le Théorème de point fixe de Banach. Par la suite, dans cette thèse, nous aurons à utiliser certains théorèmes de points fixes (Théorème de Banach, Théorème de Brouwer, Théorème de Schaefer et le Théorème de Sadovskii). Dans ces théorèmes interviennent des opérateurs qui sont continus et d'autres qui sont complètement continus, d'où ce qui suit.

1.3 Théorème d'Ascoli-Arzelà : cas impulsif

Soit $J = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_n = 1$.

Définition 1.6 $PC(J, \mathbb{R}^n)$ est l'espace de Banach des fonctions continues $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour tout point $t \neq t_k$, continues à gauche en $t = t_k$ et admettant une limite à droite au point $t = t_k$, muni de la norme

$$\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in J\}, \quad x \in PC(J, \mathbb{R}^n)$$

Définition 1.7 $PC^1(J, \mathbb{R}^n)$ est l'espace de Banach des fonctions $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \in PC(J, \mathbb{R}^n)$ continûment différentiables pour tout point $t \neq t_k$, avec x' continue à gauche en $t = t_k$ et admettant une limite à droite en $t = t_k$, muni de la norme

$$\|x\|_0 = \max(\|x\|, \|x'\|), \quad x \in PC^1(J, \mathbb{R}^n).$$

Soit M une partie de l'espace $PC^1(J, \mathbb{R}^n)$.

Définition 1.8 (Ensemble uniformément borné) On dit que M est uniformément borné s'il existe un nombre réel $c = c(M) > 0$ tel que :

$$\|x(t)\| \leq c, \forall t \in [a, b], \forall x \in M.$$

Définition 1.9 (Ensemble quasi-équicontinu) *On dit que M est quasi-équicontinue dans l'intervalle J si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in M$ et tout $\tau_1, \tau_2 \in]t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n - 1$, si $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$ alors $\|x(\tau_1) - x(\tau_2)\| < \epsilon$.*

Le théorème d'Ascoli Arzelà pour les fonctions impulsives est donné par le théorème suivant

Théorème 1.2 (Théorème d'Ascoli-Arzelà, [1]) *M est relativement compact si et seulement si, M est uniformément borné et quasi-équicontinue.*

preuve Pour simplifier la preuve on prends le cas $0 = t_0 < t_1 < t_2 = 1$. Soit x_n une suite dans $M \subset PC^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ et considérons la suite $y_n + z_n$ où

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t) & \text{si } 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{si } t_1 < t \leq 1 \end{cases}$$

et

$$z_n(t) = \begin{cases} x_n(t) & \text{si } t_1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \end{cases}$$

En appliquant le théorème classique d'Ascoli-Arzelà pour l'espace $PC^1(]0, t_1], \mathbb{R}^n)$ on déduit l'existence d'une sous suite $\{y_j : j \in N_1 \subset \mathbb{N}\}$ de la suite y_n qui converge vers $y \in PC^1(]0, t_1], \mathbb{R}^n)$. De même il existe une sous suite $\{z_k : k \in N_2 \subset N_1 \subset \mathbb{N}\}$ de la suite z_n qui converge vers $z \in PC^1(]t_1, 1], \mathbb{R}^n)$. On conclut alors l'existence d'une sous suite $\{y_k + z_k : k \in N_2\}$ de la suite $\{y_n + z_n : n \in \mathbb{N}\}$ qui converge vers $y + z$ dans le sens de $PC^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ sur $[0, T] \setminus \{t_1\}$. Or $\{x_k(t_1) : k \in N_2\}$ est bornée dans \mathbb{R}^n , donc il existe une sous-suite $\{x_l(t_1) : l \in N_3 \subset N_2\}$ telle que $x_l(t_1)$ converge. Ainsi on a $\{x_l : l \in N_3\}$ est une sous-suite convergente dans $PC^1([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Définition 1.10 (Opérateur continu) *Un opérateur Γ défini d'un espace de Banach E dans lui même est dit continu si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E qui converge vers x , la suite $(\Gamma x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Γx .*

Définition 1.11 (Opérateur complètement continu) *L'opérateur Γ défini d'un espace de Banach E dans lui même est dit complètement continu si*

- 1) Γ est continu.
- 2) $\forall B \subset E$ borné, $\Gamma(B)$ est relativement compact.

1.4 Théorèmes de point fixe

Nous rappelons ci-après les théorèmes de point fixe que nous allons utiliser aux chapitres 2 et 3.

Théorème 1.3 (Théorème de point fixe de Banach, [59]) *Toute contraction dans un espace métrique complet non vide dans lui même admet un point fixe unique.*

Commentaire 1.1 *La preuve du Théorème 1.3 donne non seulement l'existence et l'unicité du point fixe mais une méthode de le calculer dite des approximations successives. En effet, soit E un espace métrique complet muni d'une distance, notée d , et f une fonction contractante définie sur E dans lui même (pour un certain $k < 1$, on a : $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$, pour tous x et y dans E). On choisit un point x_0 de E quelconque et on définit la suite $(x_n)_n = f(x_{n-1})_n$. On montre par récurrence que $d(x_n, x_{n+p}) \leq k^n d(x_0, x_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on note $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ alors on a*

$$d(f^n, f^m) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0), \quad \forall m > n \quad (1.18)$$

et donc $d(x_n, x_m) = d(f^n(x_0), f^m(x_0)) \rightarrow 0$ lorsque $m \rightarrow \infty$. Comme E est un espace complet et $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, il existe un $a \in E$ tel que $x_n \rightarrow a$, et par continuité $x_{n+1} = f(x_n) \rightarrow f(a)$, d'où $f(a) = a$. L'unicité est un résultat immédiat de la contraction de la fonction f .

Théorème 1.4 (Théorème de point fixe de Brouwer, [61]) *Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ dans lui même admet au moins un point fixe.*

Théorème 1.5 (Théorème de point fixe de Schaefer, [61]) *Soit E un espace de Banach et soit $\Gamma : E \rightarrow E$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble*

$$\mathcal{E} = \{x \in E : \lambda x = \Gamma x \quad \text{pour } \lambda > 1\}$$

est borné, alors Γ admet un point fixe.

Théorème 1.6 (Théorème de point fixe de Sadovskii, [56]) *Soit E un espace de Banach et soit $\Gamma : E \rightarrow E$ un opérateur complètement continu. Si $\Gamma(B) \subset B$ pour un ensemble fermé, non vide, convexe et borné B de E , alors Γ admet un point fixe dans B .*

ÉQUATION DE VAN DER POL AVEC IMPULSIONS

2

C E chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions T -périodiques de l'équation de van der Pol en présence d'impulsions. Nous étudions le cas où les impulsions sont indépendantes de l'état, ensuite le cas où les impulsions dépendent de la moyenne de l'état, et enfin nous traitons le cas où les impulsions dépendent de l'état. Pour obtenir ces résultats nous appliquons le Théorème de point fixe de Banach.

2.1 Cas des impulsions indépendantes de l'état

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude de l'équation de van der Pol suivante :

$$x''(t) = (g(x(t)))' - x(t) + f(t) + \sum_{i=1}^m a_i[x] \delta_{t_i[x]}(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.1)$$

où

$$g(x(t)) = \mu \left(x(t) - \frac{x(t)^3}{3} \right). \quad (2.2)$$

Dans ce paragraphe nous assumons que les a_i et t_i sont des constantes réelles indépendantes de $x \in NBV(T)$. Pour simplifier nous écrivons I et J au lieu de $I[x]$ et $J[x]$, respectivement. Dans un premier temps nous allons montrer que l'opérateur H_ρ donné par

$$H_\rho[\tilde{x}] = F_\rho[\tilde{x}] - G[\tilde{x}] + J_\rho[\tilde{x}], \quad \tilde{x} \in \widetilde{NBV}(T)$$

où

$$F_\rho[\tilde{x}] = \Delta_0 * g[\tilde{x}(t) + \rho], \quad G[\tilde{x}] = D_0 * (\tilde{x}(t) - \tilde{f}(t))$$

et

$$J_\rho[\tilde{x}] = \sum_{i=1}^m a_i[\tilde{x} + \rho] D_{t_i}$$

est bien défini.

Proposition 2.1 Pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, H_ρ envoie $\widetilde{NBV}(T)$ dans lui même.

Démonstration. Pour tout $\tilde{x} \in \widetilde{NBV}(T)$ on a

$$\nu(H_\rho[\tilde{x}]) \leq \nu(F_\rho[\tilde{x}]) + \nu(G[\tilde{x}]) + \nu(J). \quad (2.3)$$

D'une part

$$\begin{aligned} \nu(F_\rho(\tilde{x})) &= \nu(\Delta_0 * (g(\tilde{x} + \rho))) \\ &= \nu\left(\frac{1}{T} \int_0^T \Delta_0(t-s)g(\tilde{x}(s) + \rho)ds\right) \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} \nu(F_\rho(\tilde{x})) &\leq \nu\left(\frac{1}{T} \int_0^T |\Delta_0(t-s)||g(\tilde{x}(s) + \rho)|ds\right) \\ &\leq \nu\left(\frac{1}{T} \int_0^T |\Delta_0(t-s)|(|\tilde{x}(s)| + |\rho| + \frac{(|\tilde{x}(s)| + |\rho|)^3}{3})ds\right) \\ &\leq \nu\left(\frac{1}{T} \int_0^T |\Delta_0(t-s)|(\nu(\tilde{x}) + |\rho| + \frac{(\nu(\tilde{x}) + |\rho|)^3}{3})ds\right) \\ &\leq \nu(\Delta_0) \left(\nu(\tilde{x}) + |\rho| + \frac{(\nu(\tilde{x}) + |\rho|)^3}{3}\right) \end{aligned}$$

et donc on a

$$\nu(F_\rho[\tilde{x}]) \leq \mu 2T \left[(|\rho| + \nu(\tilde{x})) + \frac{(|\rho| + \nu(\tilde{x}))^3}{3} \right] < \infty. \quad (2.4)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \nu(G(\tilde{x})) &= \nu(D_0 * (\tilde{x} + \tilde{f})) \\ &= \nu\left(\frac{1}{T} \int_0^T D_0(t-s)(\tilde{x}(s) + \tilde{f}(s))ds\right) \\ &\leq \nu\left(\frac{1}{T} \int_0^T |D_0(t-s)|(|\tilde{x}(s)| + |\tilde{f}(s)|)ds\right) \\ &\leq \nu\left(\frac{1}{T} \int_0^T |D_0(t-s)|(\nu(\tilde{x}) + |\tilde{f}(s)|)ds\right) \\ &\leq \nu(D_0) \left(\nu(\tilde{x}) + \frac{1}{T} \int_0^T |\tilde{f}(s)|ds\right). \end{aligned}$$

D'où

$$v(G[\tilde{x}]) \leq \frac{T^2}{4}(v(\tilde{x}) + \|\tilde{f}\|_1) < \infty. \quad (2.5)$$

De plus

$$v(J) \leq \frac{T^2}{4} \sum_{k=1}^m |a_k| < \infty$$

et donc $H_\rho[\tilde{x}]$ est dans $\widetilde{NBV}(T)$. \square

Pour $r > 0$ et $\tilde{x} \in \widetilde{NBV}(T)$, on pose

$$B(\tilde{x}, r) = \{\tilde{y} \in \widetilde{NBV}(T) : v(\tilde{y} - \tilde{x}) \leq r\}. \quad (2.6)$$

Le but est de trouver des conditions pour lesquelles le nombre $\rho = \bar{f} + \bar{I}$ garantie l'existence de $r > 0$ tel que H_ρ une contraction sur $B(0, r)$. En utilisant le principe de contraction de Banach nous prouvons l'existence d'un point fixe unique \tilde{x} de H_ρ dans $B(0, r)$. Par (1.12) et (1.14), $x = \rho + \tilde{x}$ est nécessairement une solution de (2.1) dans $NBV(T)$. Pour $s > 0$ et $\rho \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi_\rho(s) = 2T\mu(|\rho| + s + \frac{(|\rho| + s)^3}{3}), \quad (2.7)$$

$$\chi(s) = \frac{T^2}{4}(s + \|\tilde{f}\|_1) \quad (2.8)$$

et

$$p_\rho(s) = \varphi_\rho(s) + \chi(s) + \alpha \quad (2.9)$$

où

$$\alpha = \frac{T^2}{4} \sum_{k=1}^m |a_k|.$$

D'après (2.3) et (2.9), pour $\rho = \bar{x} = \bar{f} + \bar{I}$, on obtient

$$v(H_{\bar{x}}[\tilde{x}]) \leq p_{\bar{x}}(v(\tilde{x}))$$

pour tout $\tilde{x} \in \widetilde{NBV}(T)$. On définit le polynôme $q_{\bar{x}}$ sur \mathbb{R} pour $s > 0$ par

$$q_{\bar{x}}(s) = p_{\bar{x}}(s) - i(s) \quad (2.10)$$

où $i(s) = s$ est l'identité.

Proposition 2.2 *Supposons que $r'_{\bar{x}} > 0$ et $r''_{\bar{x}} > 0$ sont des racines positives distinctes du polynôme $q_{\bar{x}}$ donné par (2.10). Pour un r compris entre $r'_{\bar{x}}$ et $r''_{\bar{x}}$, l'opérateur $H_{\bar{x}}$ donné par (1.15) pour $\rho = \bar{x} = \bar{f} + \bar{I}$ envoi $B(0, r)$ dans lui même.*

Démonstration. Pour montrer que l'opérateur $H_{\bar{x}}$ envoie $B(0, r)$ dans lui-même pour $r > 0$, il suffit de prouver que

$$p_{\bar{x}}(s) \leq r \quad (2.11)$$

pour tout $s \in [0, r]$. Le polynôme $p_{\bar{x}}$ est indéfiniment dérivable. Sa dérivée première est positive pour tout $s \in \mathbb{R}$ et est donnée par

$$p'_{\bar{x}}(s) = 2\mu T[1 + (|\bar{x}| + s)^2] + \frac{T^2}{4} > 0.$$

Sa deuxième dérivée est positive, pour tout $s > 0$, et est donnée par

$$p''_{\bar{x}}(s) = 4\mu T(|\bar{x}| + s) > 0.$$

Donc, pour $s \geq 0$, $p_{\bar{x}}$ est un polynôme convexe strictement croissant de degré trois. Supposons que le graphe de $p_{\bar{x}}$ rencontre l'identité dans le premier quadrant en $s = r'_{\bar{x}}$ et $s = r''_{\bar{x}}$ avec $r'_{\bar{x}} \neq r''_{\bar{x}}$. Ceci est équivalent à l'existence de deux racines distinctes $s = r'_{\bar{x}} > 0$ et $s = r''_{\bar{x}} > 0$ de l'équation $q_{\bar{x}}(s) = p_{\bar{x}}(s) - s$ pour $\rho = \bar{x} = \bar{f} + \bar{I}$. Pour tout r strictement compris entre $r'_{\bar{x}}$ et $r''_{\bar{x}}$, on a $q_{\bar{x}}(r) < 0$ (i.e. $p_{\bar{x}}(r) < r$). Or, on a $p_{\bar{x}}(s) < p_{\bar{x}}(r)$ pour tout $s \in [0, r]$. Alors on obtient finalement (2.11) en prenant r un point dans l'intervalle $[r'_{\bar{x}}, r''_{\bar{x}}]$. Ce qui achève la démonstration. \square

Théorème 2.1 Pour $T > 0$, $\mu > 0$ et $f \in L^1(T)$, supposons que $q_{\bar{x}}$ donné par (2.10) admet deux racines distinctes strictement positives. Soit $r'_{\bar{x}}$ la plus petite des deux. Alors il existe un unique $\tilde{x} \in B(0, r'_{\bar{x}}) \subset \widetilde{NBV}(T)$ tel que $x = \bar{x} + \tilde{x}$ est une solution de (2.1) pour \bar{x} donné par (1.12). On a $\tilde{x}' \in \widetilde{NBV}(T)$, $\tilde{x}'' \in \widetilde{L}^1(T)$ et, pour tout \tilde{y} dans la boule $B(0, r'_{\bar{x}})$, on a

$$\|H_{\bar{x}}^n[\tilde{y}] - \tilde{x}\|_{\infty} \leq \frac{2\lambda^n r'_{\bar{x}}}{1 - \lambda}$$

pour $\lambda = p'_{\bar{x}}(r'_{\bar{x}})$ et $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soient $T > 0$ et $\mu > 0$. Montrons que l'opérateur $H_{\bar{x}}$ est une contraction dans la boule $B(0, r)$. Soit $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{NBV}(T)$. On a

$$\nu(H_{\bar{x}}[\tilde{x}] - H_{\bar{x}}[\tilde{y}]) \leq \nu(F_{\bar{x}}[\tilde{x}] - F_{\bar{x}}[\tilde{y}]) + \nu(G[\tilde{x}] - G[\tilde{y}])$$

où

$$\begin{aligned} \nu(F_{\bar{x}}[\tilde{x}] - F_{\bar{x}}[\tilde{y}]) &= \nu(\Delta_0 * (g(\tilde{x} + \bar{x}) - g(\tilde{y} + \bar{x}))) \\ &= \nu\left(\frac{1}{T} \int_0^T \Delta_0(t-s)(g(\tilde{x}(s) + \bar{x}) - g(\tilde{y}(s) + \bar{x})) ds\right) \\ &\leq \nu\left(\frac{1}{T} \int_0^T |\Delta_0(t-s)| |g(\tilde{x}(s) + \bar{x}) - g(\tilde{y}(s) + \bar{x})| ds\right). \end{aligned}$$

La fonction $g(s) = \mu \left(s - \frac{s^3}{3} \right)$ est continue sur \mathbb{R} . Pour \tilde{x}, \tilde{y} dans $B(0, r)$ et $t \in [0, T]$, d'après le Théorème des accroissements finis, il existe $z_t \in [-r, r]$ tel que

$$g(\tilde{x}(t) + \bar{x}) - g(\tilde{y}(t) + \bar{x}) = g'(z_t + \bar{x})(\tilde{x}(t) - \tilde{y}(t)).$$

où

$$|g'(z_t + \bar{x})| \leq \mu(1 + (z_t + |\bar{x}|)^2) \leq \mu(1 + (r + |\bar{x}|)^2)$$

d'où

$$\begin{aligned} \nu(F_{\bar{x}}[\tilde{x}] - F_{\bar{x}}[\tilde{y}]) &\leq \nu \left(\frac{1}{T} \int_0^T |\Delta_0(t-s)| |g'(z_t + \bar{x})| |(\tilde{x}(t) - \tilde{y}(t))| ds \right) \\ &\leq \nu \left(\frac{1}{T} \int_0^T |\Delta_0(t-s)| \mu (1 + (r + |\bar{x}|)^2) \nu(\tilde{x} - \tilde{y}) ds \right) \\ &\leq \mu \nu(\Delta_0) (1 + (r + |\bar{x}|)^2) \nu(\tilde{x} - \tilde{y}) \\ &\leq 2\mu T (1 + (r + |\bar{x}|)^2) \nu(\tilde{x} - \tilde{y}). \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \nu(G[\tilde{x}] - G[\tilde{y}]) &= \nu(D_0 * (\tilde{x} - \tilde{y})) \\ &= \nu \left(\frac{1}{T} \int_0^T D_0(t-s) (\tilde{x}(s) - \tilde{y}(s)) ds \right) \\ &\leq \nu \left(\frac{1}{T} \int_0^T |D_0(t-s)| |(\tilde{x}(s) - \tilde{y}(s))| ds \right) \\ &\leq \nu(D_0) \nu(x - y) \\ &\leq \frac{T^2}{4} \nu(x - y). \end{aligned}$$

Donc on a l'inégalité

$$\nu(H_{\bar{x}}[\tilde{x}] - H_{\bar{x}}[\tilde{y}]) \leq \left[2\mu T (1 + (r + |\bar{x}|)^2) + \frac{T^2}{4} \right] \nu(\tilde{x} - \tilde{y})$$

et alors

$$\nu(H_{\bar{x}}[\tilde{x}] - H_{\bar{x}}[\tilde{y}]) \leq p'_{\bar{x}}(r) \nu(\tilde{x} - \tilde{y}). \quad (2.12)$$

Dans le contexte de la Proposition 2.2, on a $0 < p'_{\bar{x}}(r'_{\bar{x}}) < 1$ si $r'_{\bar{x}}$ est la plus petite des deux racines de l'équation (2.10). Par une application du principe de contraction de Banach on obtient l'existence d'un point fixe unique

$\tilde{x} \in B(0, r'_x)$ de l'opérateur $H_{\tilde{x}}$ qui est solution de l'équation (2.1). En appliquant la relation (1.18) à l'opérateur $H_{\tilde{x}}$ pour $k = \lambda = p'_x(r'_x)$ on obtient

$$\nu(H_{\tilde{x}}^n[\tilde{y}] - \tilde{x}) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \nu(H_{\tilde{x}}[\tilde{y}] - \tilde{y}) \quad (2.13)$$

pour tout $\tilde{y} \in B(0, r'_x)$ et tout $n \in \mathbb{N}$. En appliquant (1.2) à (2.13) on aura

$$\|H_{\tilde{x}}^n[\tilde{y}] - \tilde{x}\|_{\infty} \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \nu(H_{\tilde{x}}[\tilde{y}] - \tilde{y}). \quad (2.14)$$

Par la Proposition (2.2), l'image de la boule $B(0, r'_x)$ par l'opérateur $H_{\tilde{x}}$ est incluse dans $B(0, r'_x)$ et donc

$$\|H_{\tilde{x}}^n[\tilde{y}] - \tilde{x}\|_{\infty} \leq \frac{2\lambda^n r'_x}{1 - \lambda}.$$

□

Dans le contexte du Théorème 2.1, on a $0 \leq p'_x(r'_x) < 1$. D'où on conclut que, pour tout $\mu > 0$

$$1 < \frac{4 - T^2}{8T\mu} \quad (2.15)$$

qui est équivalent à

$$0 < T < -4\mu + 2\sqrt{4\mu^2 + 1} < 2. \quad (2.16)$$

Exemple 2.1 *Considérons l'équation de van der Pol suivante*

$$x''(t) - 0.25 \left(x(t) - \frac{x^3(t)}{3} \right)' + x(t) = 10 \sin(2\pi t)$$

où $T = 1$, $\mu = 0.25$, $\bar{I} = 0$, $\alpha = 0$, $\bar{f} = 0$ et $f(t) = 10 \sin(2\pi t)$. Alors $\bar{x} = \bar{f} + \bar{I} = 0$, $\|\tilde{f}\|_1 = 20/\pi$ et (2.15) est vérifiée. Les racines du polynôme

$$q_0(s) = 0.50 \left(s + \frac{s^3}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(s + \frac{20}{\pi} \right) - s$$

sont $s = 1.70 + 1.64i$, $s = 1.70 - 1.64i$ et $s = -3.41$. Malgré que la relation

$$1 < \frac{4 - T^2}{8T\mu} = \frac{3}{2}$$

soit vérifiée, on observe que dans le premier quadrant, le graphe de p_0 ne rencontre pas le graphe de l'identité ι comme le montre le graphe dans la figure (2.1).

Remarque 2.1 *On remarque que l'inégalité (2.16) est nécessaire, mais pas suffisante pour garantir la rencontre du polynôme p_p et l'identité. D'où la nécessité d'imposer d'autres conditions qui assurent cette rencontre.*

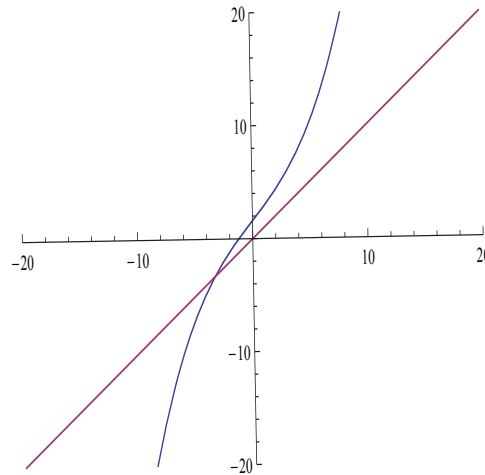


FIGURE 2.1 – Graphiques de p_0 et de i .

A cette fin nous supposons que dans le premier quadrant le graphe de $p_{\bar{x}}$ rencontre celui de i en deux points $r'_{\bar{x}}$ et $r''_{\bar{x}}$ avec $0 < r'_{\bar{x}} < r''_{\bar{x}}$. Alors $p'_{\bar{x}}(r'_{\bar{x}}) < 1$ et $p'_{\bar{x}}(r''_{\bar{x}}) > 1$ et puisque $p'_{\bar{x}}(s) > 0$ pour tout $s \geq 0$, il existe un unique point $r_{\bar{x}} \in]r'_{\bar{x}}, r''_{\bar{x}}[$ tel que $p'_{\bar{x}}(r_{\bar{x}}) = 1$. D'où il résulte

$$r_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{4 - T^2}{8\mu T} - 1 - |\bar{x}|}. \quad (2.17)$$

Réciproquement, si $r_{\bar{x}}$ donné par (2.17) est tel que

$$0 < p_{\bar{x}}(r_{\bar{x}}) < r_{\bar{x}}, \quad (2.18)$$

alors le graphe de i est au-dessus de celui de $p_{\bar{x}}$ en $r_{\bar{x}}$ et donc il existe deux points tels que $r_{\bar{x}}$ soit compris strictement entre eux. Donc le graphe de $p_{\bar{x}}(s)$ rencontre celui de $i(s)$ dans le premier quadrant, ce qui prouve le résultat suivant.

Corollaire 2.1 Soit (2.16) vérifiée pour $T > 0$ et soit $\mu > 0$ et $f \in L^1(T)$. Si (2.18) est vérifiée pour $r_{\bar{x}}$ donné par (2.17), alors $q_{\bar{x}}$ donné par (2.10) possède deux racines positives distinctes. Si on note $r'_{\bar{x}}$ la plus petite de ces deux racines et que $r'_{\bar{x}} > 0$ alors il existe un unique \tilde{x} dans la boule $B(0, r'_{\bar{x}})$ tel que $x = \bar{x} + \tilde{x}$ est solution de (2.1). En outre, $\tilde{x}' \in \widetilde{NBV}(T)$, $\tilde{x}'' \in \widetilde{L}^1(T)$ et que la relation (2.14) est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $y \in B(0, r'_{\bar{x}})$ et $\lambda = p'_{\bar{x}}(r'_{\bar{x}})$.

Exemple 2.2 On considère l'équation de van der Pol suivante :

$$x''(t) - 0.01 \left(x(t) - \frac{x^3(t)}{3} \right)' + x(t) = 10 \sin(2\pi t) + \delta_{0.5}(t) \quad (2.19)$$

où $T = 1$, $\mu = 0.01$, $\bar{I} = 1$, $\alpha = 0.25$, $\bar{f} = 0$, $\bar{x} = 1$ et $\tilde{f}(t) = 10 \sin(2\pi t)$. Alors $\|\tilde{f}\|_1 = 20/\pi$, $r_1 = 5.042$ (par (2.17)) et $p_1(r_1) = 4.693$. Donc on a (2.18). Les

racines du polynôme

$$q_1(s) = 0.02 \left(1 + s + \frac{(1+s)^3}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(s + \frac{20}{\pi} \right) + 0.25 - s$$

qui sont les points de rencontre du polynôme p_ρ et de l'identité sont $r'_1 = 3.252$, $r''_1 = 6.669$ et $r'''_1 = -12.921$. Donc $\lambda = p'_1(r'_1) = 0.632$. D'après le Corollaire 2.1, il existe un unique $\tilde{x} \in B(0, 3.252) \subset \widetilde{NBV}(1)$ tel que $x = 1 + \tilde{x}$ est solution de (2.19). En outre, $x' \in \widetilde{NBV}(1)$ et $x'' \in \widetilde{L^1}(1)$.

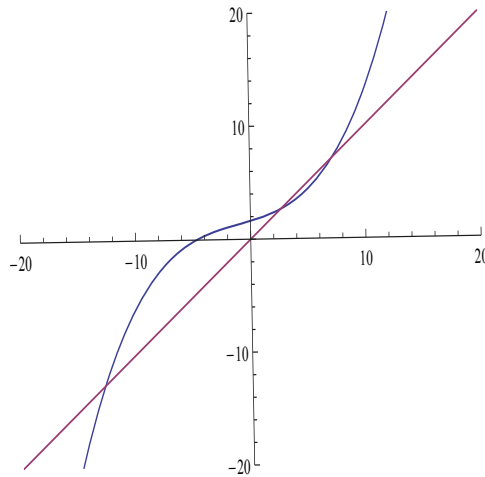


FIGURE 2.2 – Graphiques de p_1 et de i .

2.2 Cas des impulsions dépendantes de la valeur moyenne de l'état

Soient les fonctions $a : NBV(T) \rightarrow [-\gamma, \gamma] \subset \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ et $t : NBV(T) \rightarrow [0, T[$. On considère l'équation de van der Pol de la forme

$$x''(t) = (g(x(t)))' - x(t) + f(t) + a[\bar{x}] \delta_{t[\bar{x}]}(t) \quad (2.20)$$

où g est donnée par (2.2) et l'impulsion est d'amplitude $a[\bar{x}]$ qui dépend de la moyenne de l'état aux instants $t(\bar{x}) + kT$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'équation (2.20) est un cas particulier de l'équation (2.1) pour $m = 1$. Le cas général où m est quelconque s'étudie de la même manière (m peut être infini). Toute solution $x \in NBV(T)$ de (2.20) doit vérifier $\bar{x} = \bar{f} + a(\bar{x})$. L'équation (2.20) s'écrit sous la forme d'un système de deux équations comme suit, pour tout $\tilde{x} \in \widetilde{NBV}(T)$, avec $\rho = \bar{x}$, on a

$$\tilde{x}'' = (g_\rho(\tilde{x}))' - \tilde{x} + \tilde{f} + a_\rho \tilde{\delta}_{t_\rho} \quad (2.21)$$

et

$$\rho = \bar{f} + a_\rho \quad (2.22)$$

où $a_\rho = a[\rho]$, $t_\rho = t[\rho]$ et $g_\rho(\tilde{x}) = g(\rho + \tilde{x})$. Le but est de donner des conditions sur ρ qui assurent l'existence et l'unicité de la solution $\tilde{x}_\rho \in \widetilde{NBV}(T)$ de l'équation (2.21) et de montrer que sous ces conditions, ρ peut être choisi de sorte que l'équation (2.22) soit satisfaite. D'où $x = \rho + \tilde{x}_\rho$ sera une solution de l'équation (2.20) dans $NBV(T)$. Pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ posons

$$J_\rho = a_\rho D_{t_\rho}. \quad (2.23)$$

Puisque $-\gamma \leq a_\rho \leq \gamma$ on aura

$$v(J_\rho) \leq \alpha \quad (2.24)$$

où $\alpha = \gamma T^2/4$. Un raisonnement analogue à celui utilisé dans le premier cas aboutit au résultat suivant :

Proposition 2.3 *Pour $\rho \in \mathbb{R}$ donné, on suppose que q_ρ donné par (2.10) avec $\alpha = \gamma T^2/4$ admet deux racines distinctes strictement positives. Alors, pour tout $r > 0$ compris entre ces deux racines l'opérateur H_ρ envoie $B(0, r)$ dans lui même.*

En suivant les même étapes que dans la démonstration du Théorème 2.1 on aboutit à ce qui suit :

$$v(H_\rho[\tilde{x}] - H_\rho[\tilde{y}]) \leq p'_\rho(r)v(\tilde{x} - \tilde{y}) \quad (2.25)$$

pour tous $\tilde{x}, \tilde{y} \in B(0, r'_\rho) \subset \widetilde{NBV}(T)$ et $0 < p'_\rho(r'_\rho) < 1$ où r'_ρ est la plus petite des deux solutions de l'équation (2.10) avec $\alpha = \gamma T^2/4$. Par une application du Théorème de point fixe de Banach on déduit l'existence d'un unique point fixe $\tilde{x}_\rho \in B(0, r'_\rho)$ de l'opérateur H_ρ , tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|H_\rho^n[\tilde{y}] - \tilde{x}_\rho\|_\infty \leq \frac{2\lambda_\rho^n r'_\rho}{1 - \lambda_\rho} \quad (2.26)$$

où y est un élément quelconque de $B(0, r'_\rho)$, avec $\lambda_\rho = p'_\rho(r'_\rho)$. Dans le contexte de la Proposition 2.3, il existe $r_\rho > r'_\rho$ tel que $p'_\rho(r_\rho) = 1$, et (2.17) et (2.18) s'écrivent respectivement

$$r_\rho = \sqrt{\frac{4 - T^2}{8\mu T} - 1 - |\rho|} \quad (2.27)$$

et

$$0 < p_\rho(r_\rho) < r_\rho. \quad (2.28)$$

Théorème 2.2 Soit $T > 0$ et $\mu > 0$ vérifiant (2.16) et soit $f \in L^1(T)$. Si $\rho \in \mathbb{R}$ est tel que $0 < p_\rho(r_\rho) < r_\rho$ pour r_ρ donné par

$$r_\rho = \sqrt{\frac{4 - T^2}{8\mu T} - 1 - |\rho|},$$

alors le polynôme q_ρ admet deux racines distinctes positives. Si la plus petite des deux racines est notée par r'_ρ , alors (2.21) admet une solution unique \tilde{x}_ρ dans la boule $B(0, r'_\rho)$. En outre $\tilde{x}_\rho \in \widetilde{NBV}(T)$, $\tilde{x}'_\rho \in \widetilde{L^1}(T)$ et, pour tout $\tilde{y} \in B(0, r'_\rho)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|H_\rho^n[\tilde{y}] - \tilde{x}_\rho\|_\infty \leq \frac{2\lambda_\rho^n r'_\rho}{1 - \lambda_\rho}$$

avec $\lambda_\rho = p'_\rho(r'_\rho)$.

Nous devons imposer d'autres conditions sur ρ pour lesquelles l'équation (2.22) est également satisfaite, rendant ainsi $x = \rho + \tilde{x}_\rho$ solution de (2.20). En remarquant que

$$r_\rho = r_0 - |\rho| \quad \text{et} \quad p_\rho(r_\rho) = p_0(r_0) - \frac{T^2}{4}|\rho|$$

nous pouvons alors exprimer $q_\rho(r_\rho)$ en fonction de $q_0(r_0)$

$$q_\rho(r_\rho) = p_\rho(r_\rho) - r_\rho = q_0(r_0) + \frac{4 - T^2}{4}|\rho|.$$

Si nous supposons que

$$q_0(r_0) < 0 \tag{2.29}$$

alors la solution positive unique de l'équation $q_\rho(r_\rho) = 0$ est donnée par

$$\rho' = -\frac{4}{4 - T^2}q_0(r_0). \tag{2.30}$$

Si l'équation (2.28) est satisfaite pour $\rho = \rho' > 0$ donné, elle l'est aussi pour tout ρ tel que $|\rho| \leq \rho'$. Pour cette valeur de $\rho' > 0$ l'équation (2.28) est satisfaite pour tout $\rho \in]-\rho', \rho'[$ et $r'_{\rho'} = r_{\rho'} = r_0 - \rho'$ où la première égalité résulte du fait que le graphe du polynôme $p_{\rho'}$ et celui de l'identité i se rencontrent tangentiellement en $r'_{\rho'}$. D'après le Théorème de point fixe de Brouwer, l'équation (2.22) est vérifiée pour au moins un $\rho \in]-\rho', \rho'[$ si la fonction $\rho \mapsto \tilde{f} + a_\rho$ est continue sur l'intervalle $]-\rho', \rho'[$ et si elle envoie un certain sous-intervalle fermé dans $]-\rho', \rho'[$ dans lui-même. Nous avons ainsi montré le résultat suivant :

Corollaire 2.2 Soit $T > 0$ et $\mu > 0$ tels que (2.16) est vérifiée. Pour $\rho \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1(T)$, soit q_ρ donné par (2.10) avec $\alpha = \gamma T^2/4$. Si (2.29) est vérifiée, ρ' est donné par (2.30) et $-\rho' < \rho < \rho'$, alors (2.21) admet une unique solution \tilde{x}_ρ dans la boule $B(0, r'_\rho)$, où le rayon r'_ρ est la plus petite des deux racines positives du polynôme q_ρ . En outre $\tilde{x}'_\rho \in \widetilde{NBV}(T)$, $\tilde{x}''_\rho \in \widetilde{L}^1(T)$, et pour tout $\tilde{y} \in B(0, r'_\rho)$, (2.26) est vérifiée pour $\lambda_\rho = p'_\rho(r'_\rho)$, $n \in \mathbb{N}$ et H_ρ défini par (1.16) avec J_ρ (donné par (2.23)) au lieu de $J_\rho[x]$. Si (2.29) est vérifiée et s'il existe $\rho \in]-\rho', \rho'[$ tel que (2.22) est satisfaite pour ce même ρ (comme dans le cas où la fonction $\rho \mapsto \bar{f} + a_\rho$ est continue sur \mathbb{R} et envoie un sous intervalle fermé dans $]-\rho', \rho'[$ dans lui même), alors $x = \rho + \tilde{x}_\rho$ est solution de (2.20).

Exemple 2.3 Considérons l'équation de van der Pol suivante où l'impulsion dépend de la moyenne de l'état

$$\begin{aligned} x''(t) - 0.01 \left(x(t) - \frac{x^3(t)}{3} \right)' + x(t) \\ = 10 \sin(2\pi t) + \sin(1 + \bar{x}) \delta_{\frac{1}{2} \cos^2(\bar{x})}(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

où $T = 1$, $\mu = 0.01$, $a_\rho = \sin(1 + \rho)$, $t_\rho = \frac{1}{2} \cos^2(\rho)$, $\gamma = 1$, $\alpha = 0.25$, $\bar{f} = 0$ et $\tilde{f}(t) = 10 \sin(2\pi t)$. Alors $\|\tilde{f}\|_1 = 20/\pi$, $r_0 = 6.042$, $q_0(r_0) = -1.099 < 0$ et $\rho' = 1.465$. Puisque la fonction $\sin(1 + \rho)$ est continue sur l'intervalle $[-1, 1] \subset]-1.465, 1.465[$ alors l'équation $\rho - \sin(1 + \rho) = 0$ admet la racine $\rho_0 \approx 0.935 \in]-1.465, 1.465[$ et donc, par le Corollaire (2.2), $x = \rho_0 + x_{\rho_0} \in NBV(1)$ est une solution de (2.31) tel que $x' \in \widetilde{NBV}(1)$, $x'' \in \widetilde{L}^1(1)$ et $\bar{x} = \rho_0$.

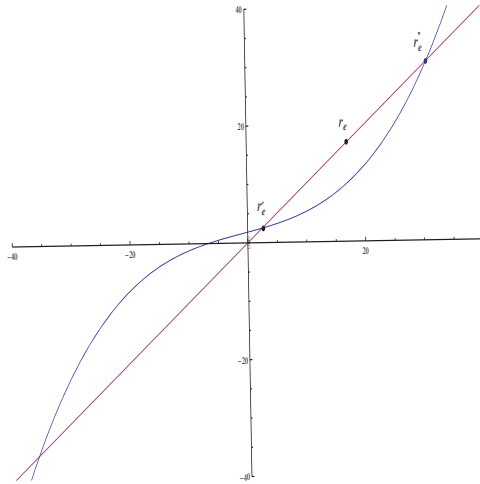


FIGURE 2.3 – Graphiques de p_{ρ_0} et de i .

2.3 Cas général des impulsions dépendantes de l'état

Soient les fonctions $a : NBV(T) \rightarrow [-\gamma, \gamma] \subset \mathbb{R}$ et $t : NBV(T) \rightarrow [0, T[$. Considérons l'équation de van der Pol

$$x''(t) = g'(x(t)) - x(t) + f(t) + a[x]\delta_{t[x]}(t) \quad (2.32)$$

où g est donnée par (2.2) et l'impulsion est d'amplitude $a[x]$ dépendante de l'état aux instants $t[x] + kT$ ($k \in \mathbb{Z}, t[x] \in [0, T)$). Toute solution $x \in NBV(T)$ de (2.32) doit vérifier l'égalité $\bar{x} = \bar{f} + a[x]$. Donc l'équation (2.32) est équivalente au système constitué par les deux équations

$$\tilde{x}'' = (g_\rho(\tilde{x}))' - \tilde{x} + \tilde{f} + a_\rho[\tilde{x}]\tilde{\delta}_{t_\rho[\tilde{x}]} \quad (2.33)$$

et

$$\rho = \tilde{f} + a_\rho[\tilde{x}] \quad (2.34)$$

où $a_\rho[\tilde{x}] = a[\rho + \tilde{x}]$, $t_\rho[\tilde{x}] = t[\rho + \tilde{x}]$ et $g_\rho(\tilde{x}) = g(\rho + \tilde{x})$ pour tout $\tilde{x} \in \widetilde{NBV}(T)$. L'objectif est d'établir des conditions assurant l'existence d'une solution unique $\tilde{x}_\rho \in \widetilde{NBV}(T)$ de (2.33). Si ρ vérifie l'équation

$$\rho = \tilde{f} + a_\rho(\tilde{x}_\rho) \quad (2.35)$$

alors $x = \rho + \tilde{x}_\rho$ sera une solution de (2.32) dans $NBV(T)$. La fonction $J_\rho[\tilde{x}]$ dans (1.16) est donnée par

$$J_\rho[\tilde{x}] = a_\rho[\tilde{x}]D_{t_\rho[\tilde{x}]} \quad (2.36)$$

et ainsi, pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ et tout $\tilde{x} \in \widetilde{NBV}(T)$, nous avons $\nu(J_\rho[\tilde{x}]) \leq \alpha$ pour $\alpha = \gamma T^2/4$. Supposons que $a_\rho[\tilde{x}]$ et $t_\rho[\tilde{x}]$ satisfont, pour tous $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ et tous $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \widetilde{NBV}(T)$, les conditions de Lipschitz

$$|a_{\rho_2}[\tilde{x}_2] - a_{\rho_1}[\tilde{x}_1]| \leq a'|\rho_2 - \rho_1| + a''\nu(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) \quad (2.37)$$

et

$$|t_{\rho_2}[\tilde{x}_2] - t_{\rho_1}[\tilde{x}_1]| \leq \tau'|\rho_2 - \rho_1| + \tau''\nu(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) \quad (2.38)$$

pour des constantes $a', a'', \tau', \tau'' \in [0, \infty[$. D'après les relations (1.9) et (2.38) nous avons

$$\nu(D_{t_\rho[\tilde{x}_2]} - D_{t_\rho[\tilde{x}_1]}) \leq (1 + \sqrt{2})T\tau''\nu(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)$$

et

$$J_\rho[\tilde{x}_2] - J_\rho[\tilde{x}_1] = (a_\rho[\tilde{x}_2] - a_\rho[\tilde{x}_1])D_{t_\rho[\tilde{x}_2]} + a_\rho[\tilde{x}_1](D_{t_\rho[\tilde{x}_2]} - D_{t_\rho[\tilde{x}_1]})$$

et donc

$$\nu(J_\rho[\tilde{x}_2] - J_\rho[\tilde{x}_1]) \leq \beta\nu(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) \quad (2.39)$$

pour

$$\beta = a'' \frac{T^2}{4} + \gamma(1 + \sqrt{2})T\tau'' \quad (2.40)$$

D'après l'inégalité (2.39) nous avons pour $\tilde{x} \in \widetilde{NBV}(T)$

$$\nu(J_\rho[\tilde{x}]) \leq \nu(J_\rho[\tilde{x}] - J_\rho[0]) + \nu(J_\rho[0]) \leq \beta\nu(\tilde{x}) + \alpha \quad (2.41)$$

Soit les polynômes de degré trois $\pi_\rho, \theta_\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnés par

$$\pi_\rho(s) = \varphi_\rho(s) + \beta s + \chi(s) + \alpha$$

et

$$\theta_\rho(s) = \pi_\rho(s) - \iota(s) \quad (2.42)$$

où les polynômes φ_ρ et χ sont donnés par (2.7) et (2.8) respectivement. En introduisant les inégalités (2.4), (2.5) et (2.41) dans (2.3) avec $J_\rho[\tilde{x}]$ donné par (2.36), nous obtenons

$$\nu(H_\rho[\tilde{x}]) \leq \pi_\rho(\nu(\tilde{x}))$$

pour $\tilde{x} \in \widetilde{NBV}(T)$ quelconque. En procédant comme dans le deuxième cas plus haut, on obtient la variante suivante de la Proposition 2.3 :

Proposition 2.4 *Soit $\rho \in \mathbb{R}$ et soit θ_ρ donné par (2.42) avec $\alpha = \gamma T^2/4$. Si θ_ρ admet deux racines distinctes strictement positives, alors, pour tout $r > 0$ compris entre ces deux racines l'opérateur H_ρ donné par (1.16), avec $J_\rho[\tilde{x}]$ donné par (2.36), envoie la boule $B(0, r)$ dans elle même.*

On suppose que, pour $\rho \in \mathbb{R}$, θ_ρ donné par (2.42) avec $\alpha = \gamma T^2/4$ admet deux racines distinctes strictement positives. Notons par r'_ρ la plus petite des deux racines. Par un raisonnement similaire à celui fait à la Proposition 2.3, on a, pour tout r compris entre ces deux racines et pour tous \tilde{x}, \tilde{y} dans la boule $B(0, r)$

$$\nu(H_\rho[\tilde{x}] - H_\rho[\tilde{y}]) \leq \pi'_\rho(r)\nu(\tilde{x} - \tilde{y}). \quad (2.43)$$

Puisque $0 < \pi'_\rho(r'_\rho) < 1$ alors l'opérateur H_ρ est une contraction sur la boule $B(0, r'_\rho)$ et l'équation (2.26) est vérifiée pour $\lambda_\rho = \pi'_\rho(r'_\rho)$, $y \in B(0, r'_\rho)$, quelconque, et tout $n \in \mathbb{N}$. Dans le contexte de la Proposition 2.4, il existe $r_\rho > r'_\rho$ tel que $\pi'_\rho(r_\rho) = 1$. D'où (2.27) et (2.28) sont remplacées par

$$r_\rho = \sqrt{\frac{4(1 - \beta) - T^2}{8\mu T}} - 1 - |\rho| = r_0 - |\rho| \quad (2.44)$$

et

$$0 < \pi_\rho(r_\rho) < r_\rho \quad (2.45)$$

respectivement. Il est clair que si l'équation (2.45) est vérifiée pour $\rho = \rho' > 0$, elle est aussi vérifiée pour tout ρ tel que $|\rho| \leq \rho'$. Puisque le polynôme π'

vérifie $0 < \pi'(r'_\rho) < 1$, on aura

$$1 < \frac{4(1 - \beta) - T^2}{8\mu T} \quad (2.46)$$

et alors on obtient un résultat analogue au Théorème 2.2.

Théorème 2.3 Soit $f \in L^1(T)$, $T > 0$ et $\mu > 0$. On suppose que (2.37) et (2.38) sont vérifiées et que β (donné par (2.40)) satisfait (2.46). Si pour $\rho \in \mathbb{R}$, l'équation (2.45) est vérifiée pour r_ρ donné par (2.44), alors θ_ρ donné par (2.42) (avec $\alpha = \gamma T^2/4$) admet deux racines distinctes positives dont on note la plus petite par r'_ρ . Si $r'_\rho > 0$, alors (2.33) admet une unique solution \tilde{x}_ρ dans la boule $B(0, r'_\rho)$. En outre $\tilde{x}'_\rho \in \widetilde{NBV}(T)$, $\tilde{x}''_\rho \in \widetilde{L^1}(T)$ et pour tout $\tilde{y} \in B(0, r'_\rho)$, (2.26) est vérifiée pour $\lambda_\rho = \pi'_\rho(r'_\rho)$, $n \in \mathbb{N}$ et l'opérateur H_ρ défini par (1.16) avec $J_\rho[\tilde{x}]$ donné par (2.36).

Notre objectif est d'obtenir, dans le contexte du Théorème 2.3, d'autres conditions sur ρ de sorte que (2.35) est également vérifiée rendant $x = \rho + \tilde{x}_\rho$ solution de (2.32). Pour cela, on suppose que

$$\theta_0(r_0) < 0 \quad (2.47)$$

où r_0 est donné par (2.44) pour $\rho = 0$. La condition (2.47) est indispensable car autrement (2.45) n'est pas vérifiée pour tout $\rho > 0$. On aura que

$$\theta_\rho(r_\rho) = \pi_\rho(r_\rho) - r_\rho = \theta_0(r_0) + \frac{4(1 - \beta) - T^2}{4} |\rho|$$

est alors l'unique $\rho' > 0$ tel que $\theta_{\rho'}(r_{\rho'}) = 0$, et ρ' est donné par

$$\rho' = -\frac{4}{4(1 - \beta) - T^2} \theta_0(r_0). \quad (2.48)$$

Pour cette valeur de ρ' l'équation (2.45) est vérifiée pour tout $\rho \in] - \rho', \rho'[$ et

$$r_{\rho'} = r'_{\rho'} = r_0 - \rho'$$

où la première équation résulte du fait que le graphe du polynôme $\pi_{\rho'}$ et celui de l'identité ι se rencontrent tangentiellement en $r'_{\rho'}$. En outre (2.35) est vérifiée pour au moins un $\rho \in] - \rho', \rho'[$ quand la fonction $\rho \rightarrow \bar{f} + a_\rho[\tilde{x}_\rho]$ est continue sur $] - \rho', \rho'[$ et envoie tout sous segment fermé de $] - \rho', \rho'[$ dans lui même. Le résultat du Corollaire 2.2 s'énonce maintenant comme suit : Soient $f \in L^1(T)$, $T > 0$ et $\mu > 0$. On suppose que (2.37) et (2.38) sont vérifiées et que β (donné par (2.40)) satisfait (2.46). Pour $\rho \in \mathbb{R}$, soit θ_ρ donné par (2.42) avec $\alpha = \gamma T^2/4$. Si (2.47) est vérifié, ρ' est donné par (2.48) et $-\rho' < \rho < \rho'$, alors (2.33) admet une solution unique \tilde{x}_ρ dans la boule $B(0, r'_\rho)$. De plus $\tilde{x}'_\rho \in \widetilde{NBV}(T)$, $\tilde{x}''_\rho \in \widetilde{L^1}(T)$ et pour tout $\tilde{y} \in B(0, r'_\rho)$, (2.26)

est vérifiée pour $\lambda_\rho = \pi'_\rho(r'_\rho)$, $n \in \mathbb{N}$ et H_ρ défini par (1.16) avec $J_\rho[\tilde{x}]$ à la place de J . Si (2.47) est satisfaite et s'il existe $\rho \in]-\rho', \rho'[$ tel que (2.35) est satisfaite pour ce ρ (comme c'est le cas lorsque la fonction $\rho \rightarrow \tilde{f} + a_\rho[\tilde{x}_\rho]$ est continue sur $]-\rho', \rho'[$ et envoie un sous segment fermé de $]-\rho', \rho'[$ dans lui même), alors $x = \rho + \tilde{x}_\rho$ est une solution de (2.32). Pour appliquer la dernière partie du paragraphe précédente, on doit prouver la continuité de la fonction $\rho \rightarrow \tilde{f} + a_\rho[\tilde{x}_\rho]$ sur $]-\rho', \rho'[$. La démonstration repose généralement sur le fait que, pour $\rho, \sigma \in]-\rho', \rho'[$ on a

$$\lim_{\rho \rightarrow \sigma} \|\tilde{x}_\rho - \tilde{x}_\sigma\|_\infty = 0 \quad (2.49)$$

qui est une conséquence de

$$\lim_{\rho \rightarrow \sigma} \nu(\tilde{x}_\rho - \tilde{x}_\sigma) = 0 \quad (2.50)$$

et l'inégalité $|\tilde{x}| \leq \nu(\tilde{x})$. Il suffit donc de montrer (2.50). De

$$H_\rho(\tilde{x}_\rho) - H_\sigma(\tilde{x}_\sigma) = (H_\rho(\tilde{x}_\rho) - H_\rho(\tilde{x}_\sigma)) + (H_\rho(\tilde{x}_\sigma) - H_\sigma(\tilde{x}_\sigma))$$

et

$$\nu(\tilde{x}_\rho - \tilde{x}_\sigma) = \nu(H_\rho(\tilde{x}_\rho) - H_\sigma(\tilde{x}_\sigma))$$

on déduit que

$$\nu(\tilde{x}_\rho - \tilde{x}_\sigma) \leq \nu(H_\rho(\tilde{x}_\rho) - H_\rho(\tilde{x}_\sigma)) + \nu(H_\rho(\tilde{x}_\sigma) - H_\sigma(\tilde{x}_\sigma)). \quad (2.51)$$

En appliquant (2.43) (pour $r = r'_\rho$) à $\nu(H_\rho(\tilde{x}_\rho) - H_\rho(\tilde{x}_\sigma))$ dans (2.51) on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1 - \pi'_\rho(r'_\rho))\nu(\tilde{x}_\rho - \tilde{x}_\sigma) \\ &\leq \nu(H_\rho(\tilde{x}_\sigma) - H_\sigma(\tilde{x}_\sigma)) \\ &\leq \nu(F_\rho(\tilde{x}_\sigma) - F_\sigma(\tilde{x}_\sigma)) + \nu(J_\rho[\tilde{x}_\sigma] - J_\sigma[\tilde{x}_\sigma]) \end{aligned}$$

où la première inégalité est triviale. On observe que les racines du polynôme de troisième degré θ_ρ donné par (2.42) vérifie $r'_\rho \rightarrow r'_\sigma$ lorsque $\rho \rightarrow \sigma$ (voir, par exemple, [8]). La composition des fonctions continues π_ρ et r'_ρ en ρ est continue et on a donc

$$\lim_{\rho \rightarrow \sigma} \pi'_\rho(r'_\rho) = \pi'_\sigma(r'_\sigma).$$

D'autre part, on a

$$\lim_{\rho \rightarrow \sigma} (g_\rho(\tilde{x}_\sigma) - g_\sigma(\tilde{x}_\sigma)) = 0.$$

D'où l'on conclut que

$$\lim_{\rho \rightarrow \sigma} (\bar{g}_\rho(\tilde{x}_\sigma) - \bar{g}_\sigma(\tilde{x}_\sigma)) = \frac{1}{T} \lim_{\rho \rightarrow \sigma} \int_0^T (g_\rho(\tilde{x}_\sigma) - g_\sigma(\tilde{x}_\sigma)) = 0$$

et

$$\lim_{\rho \rightarrow \sigma} (\tilde{g}_\rho(\tilde{x}_\sigma) - \tilde{g}_\sigma(\tilde{x}_\sigma)) = \lim_{\rho \rightarrow \sigma} (g_\rho(\tilde{x}_\sigma) - g_\sigma(\tilde{x}_\sigma)) - \lim_{\rho \rightarrow \sigma} (\bar{g}_\rho(\tilde{x}_\sigma) - \bar{g}_\sigma(\tilde{x}_\sigma)) = 0.$$

On sait que $(F_\rho)' = (\Delta_0 * g_\rho)' = (\Delta_0)' * g_\rho = \tilde{g}_\rho$ pour tout ρ dans \mathbb{R} et puisque la fonction F_ρ est absolument continue, alors on a

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \sigma} \nu(F_\rho(\tilde{x}_\sigma) - F_\sigma(\tilde{x}_\sigma)) &= \lim_{\rho \rightarrow \sigma} \int_0^T |(F_\rho(\tilde{x}_\sigma) - F_\sigma(\tilde{x}_\sigma))'| \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \sigma} \int_0^T |\tilde{g}_\rho(\tilde{x}_\sigma) - \tilde{g}_\sigma(\tilde{x}_\sigma)| = 0. \end{aligned}$$

De plus on a

$$J_\rho[\tilde{x}_\sigma] - J_\sigma[\tilde{x}_\sigma] = (a_\rho[\tilde{x}_\sigma] - a_\sigma[\tilde{x}_\sigma])D_{t_\rho[\tilde{x}_\sigma]} + a_\sigma[\tilde{x}_\sigma](D_{t_\rho[\tilde{x}_\sigma]} - D_{t_\sigma[\tilde{x}_\sigma]})$$

et donc

$$\begin{aligned} \nu(J_\rho[\tilde{x}_\sigma] - J_\sigma[\tilde{x}_\sigma]) &\leq |a_\rho[\tilde{x}_\sigma] - a_\sigma[\tilde{x}_\sigma]| \nu(D_{t_\rho[\tilde{x}_\sigma]}) + |a_\sigma[\tilde{x}_\sigma]| \nu(D_{t_\rho[\tilde{x}_\sigma]} - D_{t_\sigma[\tilde{x}_\sigma]}) \\ &\leq \frac{T^2}{4} |a_\rho[\tilde{x}_\sigma] - a_\sigma[\tilde{x}_\sigma]| + \gamma \nu(D_{t_\rho[\tilde{x}_\sigma]} - D_{t_\sigma[\tilde{x}_\sigma]}). \end{aligned}$$

Par l'inégalité (2.37) on a

$$\lim_{\rho \rightarrow \sigma} |a_\rho(x_\sigma) - a_\sigma(x_\sigma)| \leq a' \lim_{\rho \rightarrow \sigma} |\rho - \sigma| = 0$$

et par les inégalités (1.9) et (2.38) on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \sigma} \nu(D_{t_\rho[\tilde{x}_\sigma]} - D_{t_\sigma[\tilde{x}_\sigma]}) &\leq \lim_{\rho \rightarrow \sigma} (1 + \sqrt{2})T |t_\rho(x_\sigma) - t_\sigma(x_\sigma)| \\ &\leq \lim_{\rho \rightarrow \sigma} (1 + \sqrt{2})T \tau' |\rho - \sigma| = 0. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\lim_{\rho \rightarrow \sigma} \nu(J_\rho[\tilde{x}_\sigma] - J_\sigma[\tilde{x}_\sigma]) = 0$$

ce qui prouve que

$$\lim_{\rho \rightarrow \sigma} \nu(H_\rho(\tilde{x}_\sigma) - H_\sigma(\tilde{x}_\sigma)) = 0.$$

De la même manière on montre que

$$\lim_{\rho \rightarrow \sigma} \nu(H_\rho(\tilde{x}_\rho) - H_\rho(\tilde{x}_\sigma)) = 0$$

et donc

$$\lim_{\rho \rightarrow \sigma} \|\tilde{x}_\rho - \tilde{x}_\sigma\|_\infty \leq \lim_{\rho \rightarrow \sigma} \nu(\tilde{x}_\rho - \tilde{x}_\sigma) = 0.$$

Ceci achève la démonstration.

Exemple 2.4 On considère l'équation de van der Pol suivante avec l'impulsion qui dépend de l'état

$$\begin{aligned} x''(t) - 0.01 \left(x(t) - \frac{x^3(t)}{3} \right)' + x(t) \\ = \sin(2\pi t) + 0.1 \sin(x(0.1)) \delta_{0.5 \cos^2(x(0.1))}(t) \end{aligned} \quad (2.52)$$

où $T = 1$, $\mu = 0.01$, $a_\rho[\tilde{x}] = 0.1 \sin(\rho + \tilde{x}(0.1))$, $t_\rho[\tilde{x}] = 0.5 \cos^2(\rho + \tilde{x}(0.1))$, $\gamma = 0.1$, $\alpha = 0.025$, $\bar{f} = 0$, et $\tilde{f}(t) = \sin(2\pi t)$. En appliquant la loi de la moyenne et la relation $|\tilde{x}(t)| \leq \nu(\tilde{x})$, on aura (2.37) et (2.38) pour $a' = a'' = 0.1$ et $\tau' = \tau'' = 1$. On a $\beta = 0.2664$ (par (2.40)), $\|\tilde{f}\|_1 = 2/\pi$, $r_0 = 4.8146$ (par (2.44)), $\theta_0(r_0) = -1.3039 < 0$ (et donc (2.47) est vérifiée) et $\rho' = 2.6962$ (par (2.48)). La fonction $\rho \rightarrow a_\rho[\tilde{x}_\rho]$ est continue et envoie $[-0.1, 0.1] \subset]-\rho', \rho'[$ dans $[-0.1, 0.1]$. Par le Corollaire 2.2, il existe une solution $x \in NBV(1)$ de (2.52) telle que $x' \in \widetilde{NBV}(1)$, $x'' \in \widetilde{L}^1(1)$ et $\bar{x} \in [-0.1, 0.1]$.

ÉQUATIONS IMPULSIVES D'ORDRE 2 À 3 3 POINTS AUX LIMITES

L'EXISTENCE de solutions d'équations différentielles ordinaires impulsives du second ordre avec trois points aux limites sous des conditions plus faibles sur les fonctions impulsives que celles de la littérature est étudiée dans ce chapitre. L'approche est basée sur l'utilisation de la théorie du point fixe.

3.1 Introduction et résultats préliminaires

Fixons un moment d'impulsion t_1 dans $J = [0, 1]$. Nous nous proposons d'étudier l'existence de solutions pour le problème aux limites suivant :

$$x''(t) + f(t, x(t), x'(t)) = 0, \text{ p.p. } t \in J, t \neq t_1, \quad (3.1)$$

$$\Delta x(t_1) = I_1(x(t_1), x'(t_1)) \quad (3.2)$$

$$\Delta x'(t_1) = I_2(x(t_1), x'(t_1)) \quad (3.3)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta), \quad (3.4)$$

où la fonction $f : J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et les fonctions impulsives $I_1, I_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont données, $\Delta x(t_1) = x(t_1^+) - x(t_1^-)$, $\Delta x'(t_1) = x'(t_1^+) - x'(t_1^-)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \eta < 1$ sont tels que $\alpha\eta \neq 1$. Notons que nous pouvons considérer le cas plus général où le nombre d'impulsion est quelconque (voir, par exemple, [35, 39]). Cependant, ici, nous restreindrons notre attention au cas d'une impulsion d'autant plus que la différence entre la théorie correspondant au cas d'une seule impulsion avec celle d'un nombre fini ou infini d'impulsions est minimale. Les résultats d'existence sont énoncés dans les théorèmes 3.1 et 3.2. Nous imposons aux fonctions impulsives I_1 et I_2 d'être uniquement continues. Les preuves sont basées sur le Théorème de point fixe de Schaefer et sur le Théorème de point fixe de Sadovskii. Pour le résultat d'unicité obtenu dans le Théorème 3.3, la preuve est basée sur le Théorème de point fixe de Banach. Présentons les hypothèses sous lesquelles les résultats principaux d'existence, puis d'unicité de ce chapitre seront obtenues :

(H1) La fonction $f : J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est Carathéodory, c'est-à-dire,
 (i) pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, la fonction $f(\cdot, x, y) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ est mesurable,
 (ii) pour presque tout $t \in J$, la fonction $f(t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

(H2) Il existe trois fonctions $p, q, r \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telles que

$$|f(t, x, y)| \leq p(t)|x| + q(t)|y| + r(t)$$

pour presque tout $t \in J$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(H2)* Il existe une fonction $q \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ et une fonction continue et croissante $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que

$$|f(t, x, y)| \leq q(t)\psi(\max\{|x|, |y|\})$$

pour presque tout $t \in J$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(H3) Les fonctions impulsives $I_1, I_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont continues.

Nous allons commencer par prouver quelques lemmes nécessaires aux démonstrations des théorèmes établis dans ce chapitre.

Lemme 3.1 Soit $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ et $f : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ dans $L^1(J, \mathbb{R}^n)$. On suppose que $0 < t_1 < \eta < 1$ avec $\alpha\eta \neq 1$. Alors le problème à valeur initiale

$$x''(t) + f(t) = 0, \text{ a.e. } t \in J := [0, 1], t \neq t_1, \quad (3.5)$$

$$\Delta x(t_1) = a, \quad \Delta x'(t_1) = b, \quad (3.6)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta) \quad (3.7)$$

admet une solution unique

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s)ds + aV(t) + bW(t), \quad t \in J, \quad (3.8)$$

où

$$G(t, s) = \begin{cases} s \frac{(1-t) + \alpha(t-\eta)}{1-\alpha\eta}, & s \leq \min\{t, \eta\} \\ t \frac{(1-s) + \alpha(s-\eta)}{1-\alpha\eta}, & t \leq s \leq \eta, \\ s \frac{(1-t) + \alpha\eta(t-s)}{1-\alpha\eta}, & \eta \leq s \leq t, \\ t \frac{(1-s)}{1-\alpha\eta}, & s \geq \max\{t, \eta\}, \end{cases} \quad (t, s) \in J \times J, \quad (3.9)$$

et pour $t \in J$

$$V(t) = \frac{(H(t-t_1) - t) + \alpha(t - \eta H(t-t_1))}{1-\alpha\eta} \quad (3.10)$$

et

$$W(t) = -(1 - H(t-t_1))t - \frac{(H(t-t_1) - t) + \alpha(t - \eta H(t-t_1))}{1-\alpha\eta} t_1. \quad (3.11)$$

La fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ dans (3.10) et (3.11) est la fonction de Heaviside, définie par $H(s) = 0$ si $s \leq 0$ et $H(s) = 1$ si $s > 0$.

Démonstration. Sans les conditions aux limites (3.7), le problème (3.5)-(3.6) admet comme solution :

$$x(t) = A + Bt - \int_0^t (t-s)f(s)ds + H(t-t_1)b(t-t_1) + H(t-t_1)a.$$

En introduisant les conditions aux limites (3.7) et avec un calcul simple nous obtenons $A = 0$ et

$$B = \int_0^1 \frac{1-s}{1-\alpha\eta}f(s)ds - \int_0^\eta \frac{\alpha(\eta-s)}{1-\alpha\eta}f(s)ds - \frac{(1-t_1) + \alpha(t_1-\eta)}{1-\alpha\eta}b - \frac{1-\alpha}{1-\alpha\eta}a.$$

Delà, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= - \int_0^t (t-s)f(s)ds + t \int_0^1 \frac{(1-s)}{1-\alpha\eta}f(s)ds - t \int_0^\eta \frac{\alpha(\eta-s)}{1-\alpha\eta}f(s)ds \\ &+ \frac{(H(t-t_1) - t) + \alpha(t - \eta H(t-t_1))}{1-\alpha\eta}a \\ &- \left\{ (1 - H(t-t_1))t + \frac{(H(t-t_1) - t) + \alpha(t - \eta H(t-t_1))}{1-\alpha\eta}t_1 \right\} b. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si $t \leq \eta$, (3.12) peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} x(t) &= - \frac{t\alpha}{1-\alpha\eta} \left\{ \int_0^t (\eta-s)f(s)ds + \int_t^\eta (\eta-s)f(s)ds \right\} \\ &+ \frac{t}{1-\alpha\eta} \left\{ \int_0^t (1-s)f(s)ds + \int_t^\eta (1-s)f(s)ds + \int_\eta^1 (1-s)f(s)ds \right\} \\ &- \int_0^t (t-s)f(s)ds + \frac{(H(t-t_1) - t) + \alpha(t - \eta H(t-t_1))}{1-\alpha\eta}a \\ &- \left\{ (1 - H(t-t_1))t + \frac{(H(t-t_1) - t) + \alpha(t - \eta H(t-t_1))}{1-\alpha\eta}t_1 \right\} b \\ &= \int_\eta^1 t \frac{1-s}{1-\alpha\eta}f(s)ds + \int_t^\eta t \frac{(1-s) + \alpha(s-\eta)}{1-\alpha\eta}f(s)ds \\ &+ \int_0^t s \frac{(1-t) + \alpha(t-\eta)}{1-\alpha\eta}f(s)ds + \frac{(H(t-t_1) - t) + \alpha(t - \eta H(t-t_1))}{1-\alpha\eta}a \\ &- \left\{ (1 - H(t-t_1))t + \frac{(H(t-t_1) - t) + \alpha(t - \eta H(t-t_1))}{1-\alpha\eta}t_1 \right\} b. \end{aligned}$$

De même, si $\eta \leq t$, (3.12) peut être exprimée sous la forme

$$\begin{aligned}
 x(t) &= - \int_0^\eta (t-s)f(s)ds - \int_\eta^t (t-s)f(s)ds - \frac{t\alpha}{1-\alpha\eta} \int_0^\eta (\eta-s)f(s)ds \\
 &\quad + \frac{t}{1-\alpha\eta} \left\{ \int_0^\eta (1-s)f(s)ds + \int_\eta^t (1-s)f(s)ds + \int_t^1 (1-s)f(s)ds \right\} \\
 &\quad + \frac{(H(t-t_1) - t) + \alpha(t - \eta H(t-t_1))}{1-\alpha\eta} a \\
 &\quad - \left\{ (1-H(t-t_1))t + \frac{(H(t-t_1) - t) + \alpha(t - \eta H(t-t_1))}{1-\alpha\eta} t_1 \right\} b \\
 &= \int_0^\eta s \frac{(1-t) + \alpha(t-\eta)}{1-\alpha\eta} f(s)ds + \int_\eta^t \frac{s(1-t) + \alpha\eta(t-s)}{1-\alpha\eta} f(s)ds \\
 &\quad + \int_t^1 \frac{t(1-s)}{1-\alpha\eta} f(s)ds + \frac{(H(t-t_1) - t) + \alpha(t - \eta H(t-t_1))}{1-\alpha\eta} a \\
 &\quad - \left\{ (1-H(t-t_1))t + \frac{(H(t-t_1) - t) + \alpha(t - \eta H(t-t_1))}{1-\alpha\eta} t_1 \right\} b.
 \end{aligned}$$

Ce qui démontre le lemme. □

Compte tenu du Lemme 3.1, nous transformons le problème d'existence de solution du problème (3.1)-(3.4) en un problème de point fixe de l'opérateur $\Gamma : PC^1(J, \mathbb{R}^n) \rightarrow PC^1(J, \mathbb{R}^n)$ défini, pour $x \in PC^1(J, \mathbb{R}^n)$ et $t \in J$, par

$$\begin{aligned}
 (\Gamma x)(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(s, x(s), x'(s))ds \\
 &\quad + V(t)I_1(x(t_1), x'(t_1)) + W(t)I_2(x(t_1), x'(t_1)),
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

où G, V et W sont donnés par (3.9)-(3.11), avec $0 < t_1 < \eta < 1$ et $\alpha\eta \neq 1$.

Lemme 3.2 *Considérons le problème à valeur initiale (3.1)-(3.4). Supposons que la fonction $f : J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait les conditions (H1) et (H2) ou (H1) et (H2)*, et les fonctions impulsives $I_1, I_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfont la condition (H3). Si x est un point fixe de l'opérateur Γ , alors x est une solution du problème (3.1)-(3.4).*

Démonstration. Pour la démonstration de ce lemme il suffit de dériver deux fois les deux cotés de l'égalité

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(s, x(s), x'(s))ds \\
 &\quad + V(t)I_1(x(t_1), x'(t_1)) + W(t)I_2(x(t_1), x'(t_1))
 \end{aligned}$$

où $x \in PC^1(J, \mathbb{R}^n)$ est un point fixe de l'opérateur Γ . Nous vérifions facilement (3.2)-(3.4). □

Lemme 3.3 *Supposons que la fonction $f : J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait les conditions (H1) et (H2) ou (H1) et (H2)*, et les fonctions impulsives $I_1, I_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifient les condition (H3). Alors l'opérateur $\Gamma : PC^1(J, \mathbb{R}^n) \rightarrow PC^1(J, \mathbb{R}^n)$ donné par (3.13) est complètement continu.*

Démonstration. Nous considérons ici le cas où la fonction f satisfait les hypothèses (H1) et (H2). Le cas où f vérifie les conditions (H1) et (H2)* se traite de manière similaire à celle développée ci-après.

Etape 1. *Montrons que l'opérateur Γ est continu.* Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset PC^1(J, \mathbb{R}^n)$ une suite telle que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in PC^1(J, \mathbb{R}^n)$ et soit $t \in J$. D'une part, nous avons

$$\begin{aligned} |\Gamma x_n(t) - \Gamma x(t)| &\leq \int_0^1 |G(t, s)| \cdot |f(s, x_n(s), x'_n(s)) - f(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + |V(t)| \cdot |I_1(x_n(t_1), x'_n(t_1)) - I_1(x(t_1), x'(t_1))| \\ &\quad + |W(t)| \cdot |I_2(x_n(t_1), x'_n(t_1)) - I_2(x(t_1), x'(t_1))| \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} |\Gamma x_n(t) - \Gamma x(t)| &\leq M_0 \int_0^1 |f(s, x_n(s), x'_n(s)) - f(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + V_0 |I_1(x_n(t_1), x'_n(t_1)) - I_1(x(t_1), x'(t_1))| \\ &\quad + W_0 |I_2(x_n(t_1), x'_n(t_1)) - I_2(x(t_1), x'(t_1))| \end{aligned}$$

où

$$M_0 := \sup_{(t,s) \in J \times J} |G(t, s)|, \quad V_0 := \sup_{t \in J} |V(t)|, \quad \text{et } W_0 := \sup_{t \in J} |W(t)|.$$

D'après (H1) la fonction f est continue, et par (H3) les fonctions I_1 et I_2 sont continues, et donc le terme de droite tends vers zéro lorsque n tend vers l'infini. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} |\Gamma' x_n(t) - \Gamma' x(t)| &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \right| \cdot |f(s, x_n(s), x'_n(s)) - f(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + V_1 \cdot |I_1(x_n(t_1), x'_n(t_1)) - I_1(x(t_1), x'(t_1))| \\ &\quad + W_1 \cdot |I_2(x_n(t_1), x'_n(t_1)) - I_2(x(t_1), x'(t_1))| \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} |\Gamma'x_n(t) - \Gamma'x(t)| &\leq M_1 \int_0^1 |f(s, x_n(s), x'_n(s)) - f(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + V_1 |I_1(x_n(t_1), x'_n(t_1)) - I_1(x(t_1), x'(t_1))| \\ &\quad + W_1 |I_2(x_n(t_1), x'_n(t_1)) - I_2(x(t_1), x'(t_1))| \end{aligned}$$

où

$$M_1 := \sup_{(t,s) \in J \times J} \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \right|, \quad V_1 := \sup_{t \in J \setminus \{t_1\}} |V'(t)| \quad \text{et} \quad W_1 := \sup_{t \in J \setminus \{t_1\}} |W'(t)|.$$

Pour les mêmes raisons que plus haut, le terme de droite tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Nous concluons ainsi que l'opérateur Γ est continu.

Étape 2. *Prouvons que l'opérateur Γ transforme chaque ensemble uniformément borné en un ensemble relativement compact.* Soit B un ensemble uniformément borné dans $PC^1(J, \mathbb{R}^n)$. Il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in B$ on a $\|x\|_0 \leq c$.

1) Montrons que l'ensemble $\Gamma(B)$ est uniformément borné. Soit $x \in B$ et $t \in J$. On a, d'une part

$$\begin{aligned} |\Gamma x(t)| &\leq \int_0^1 |G(t,s) \cdot |f(s, x(s), x'(s))|| ds \\ &\quad + |V(t)| \cdot |I_1(x(t_1), x'(t_1))| + |W(t)| \cdot |I_2(x(t_1), x'(t_1))| \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\|\Gamma x\| \leq M_0 [\|p\|_{L^1} \cdot c + \|q\|_{L^1} \cdot c + \|r\|_{L^1}] + V_0 \tilde{I}_1 + W_0 \tilde{I}_2 =: \eta_1 \quad (3.14)$$

où

$$\tilde{I}_1 = \sup\{|I_1(u, v)| : |u| \leq c, |v| \leq c\}$$

et

$$\tilde{I}_2 = \sup\{|I_2(u, v)| : |u| \leq c, |v| \leq c\};$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} |(\Gamma x)'(t)| &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \right| \cdot |f(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + |V'(t)| \cdot |I_1(x(t_1), x'(t_1))| + |W'(t)| \cdot |I_2(x(t_1), x'(t_1))|, \end{aligned}$$

qui donne

$$\|(\Gamma x)'\| \leq M_1 [\|p\|_{L^1} \cdot c + \|q\|_{L^1} \cdot c + \|r\|_{L^1}] + V_1 \tilde{I}_1 + W_1 \tilde{I}_2 =: \eta_2. \quad (3.15)$$

Des majorations (3.14) et (3.15) on déduit que $\|\Gamma x\|_0 \leq \max\{\eta_1, \eta_2\}$; ce qui achève de montrer que l'ensemble $\Gamma(B)$ est uniformément borné.

2) Prouvons maintenant que l'ensemble $\Gamma(B)$ est quasi-équicontinu. Commençons par poser $t_0 = 0$ et $t_2 = 1$. Soit $x \in \mathcal{PC}^1(J, \mathbb{R}^n)$ et $\tau_1, \tau_2 \in]t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1$, avec $\tau_1 < \tau_2$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} |\Gamma x(\tau_2) - \Gamma x(\tau_1)| &\leq \int_0^1 |G(\tau_2, s) - G(\tau_1, s)| \cdot |f(s, x(s), x'(s))| ds \\ &\quad + |V(\tau_2) - V(\tau_1)| \cdot |I_1(x(t_1), x'(t_1))| \\ &\quad + |W(\tau_2) - W(\tau_1)| \cdot |I_2(x(t_1), x'(t_1))|, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} |\Gamma x(\tau_2) - \Gamma x(\tau_1)| &\leq [\|p\|_{L^1} \cdot c + \|q\|_{L^1} \cdot c + \|r\|_{L^1}] \cdot \int_0^1 |G(\tau_2, s) - G(\tau_1, s)| ds \\ &\quad + |V(\tau_2) - V(\tau_1)| \cdot \tilde{I}_1 + |W(\tau_2) - W(\tau_1)| \cdot \tilde{I}_2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les propriétés de G , V et W permettent alors de déduire que le second membre de l'inégalité (3.16) tend vers zéro lorsque τ_2 tend vers τ_1 , et prouve ainsi la quasi-équicontinuité de $\Gamma(B)$. Les étapes 1 et 2 permettent, finalement, de conclure que l'opérateur Γ est complètement continu. \square

3.2 Existence de solutions

Dans ce paragraphe nous énonçons et prouvons des résultats d'existence pour le problème (3.1)-(3.4).

Théorème 3.1 *Supposons que (H1), (H2) et (H3) soient vérifiées. Si*

$$M_0 \|p\|_{L^1} < 1 \quad M_1 \|q\|_{L^1} < 1 \quad \text{et} \quad M_0 \|p\|_{L^1} + M_1 \|q\|_{L^1} < 1, \quad (3.17)$$

alors le problème à valeur initiale (3.1)-(3.4) admet au moins une solution dans J .

Démonstration. Nous appliquons le Théorème 1.5 pour obtenir l'existence de solutions de l'équation intégrale $x = \Gamma x$, où $\Gamma : PC^1(J, \mathbb{R}^n) \rightarrow PC^1(J, \mathbb{R}^n)$ est définie par (3.13). Notons que, par le Lemme 3.3, l'opérateur Γ est complètement continu. Alors, il ne reste plus qu'à vérifier que toute solution possible de la famille de problème

$$\lambda x = \Gamma x, \quad \lambda > 1 \quad (3.18)$$

est bornée a priori dans $PC^1(J, \mathbb{R}^n)$ par une constante indépendante de λ . Soit x une solution de (3.18) et soit $\lambda > 1$ tel que $\lambda x = \Gamma x$. Alors $x|_{[0, t_1]}$

satisfait, pour tout $t \in [0, t_1]$

$$x(t) = \lambda^{-1} \left(\int_0^1 G(t, s) f(s, x(s), x'(s)) ds \right).$$

En vertu de l'hypothèse (H2) nous avons

$$|x(t)| \leq M_0 \left(\int_0^1 [p(s) \sup_{u \in [0, t_1]} |x(u)| + q(s) \sup_{u \in [0, t_1]} |x'(u)| + r(s)] ds \right). \quad (3.19)$$

En introduisant les constantes $\xi = \sup\{|x(s)| : s \in [0, t_1]\}$ et $\bar{\xi} = \sup\{|x'(s)| : s \in [0, t_1]\}$ dans (3.19) on obtient

$$|x(t)| \leq M_0 (\|p\|_{L^1} \xi + \|q\|_{L^1} \bar{\xi} + \|r\|_{L^1}).$$

A partir de quoi on déduit que

$$\xi \leq M_0 (\|p\|_{L^1} \xi + \|q\|_{L^1} \bar{\xi} + \|r\|_{L^1}). \quad (3.20)$$

D'autre part, $x|_{[0, t_1]}$ est tel que, pour tout $t \in [0, t_1]$,

$$x'(t) = \lambda^{-1} \left(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) f(s, x(s), x'(s)) ds \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} |x'(t)| &\leq M_1 \left(\int_0^1 [p(s) \sup_{u \in [0, t_1]} |x(u)| + q(s) \sup_{u \in [0, t_1]} |x'(u)| + r(s)] ds \right) \\ &\leq M_1 (\|p\|_{L^1} \xi + \|q\|_{L^1} \bar{\xi} + \|r\|_{L^1}). \end{aligned}$$

De là nous concluons que

$$\bar{\xi} \leq M_1 (\|p\|_{L^1} \xi + \|q\|_{L^1} \bar{\xi} + \|r\|_{L^1})$$

et donc

$$\bar{\xi} \leq \frac{M_1 (\|p\|_{L^1} \xi + \|r\|_{L^1})}{(1 - M_1 \|q\|_{L^1})}. \quad (3.21)$$

Remplaçons (3.21) dans (3.20) pour obtenir

$$\xi \leq \frac{M_0 \left(1 + \frac{M_1 \|q\|_{L^1}}{1 - M_1 \|q\|_{L^1}} \right) \|r\|_{L^1}}{1 - M_0 \|p\|_{L^1} \left(1 + \frac{M_1 \|q\|_{L^1}}{1 - M_1 \|q\|_{L^1}} \right)} = \frac{M_0 \|r\|_{L^1}}{1 - M_1 \|q\|_{L^1} - M_0 \|p\|_{L^1}} := \xi_1.$$

Alors, par (3.21), nous avons

$$\bar{\xi} \leq \frac{M_1 (\|p\|_{L^1} \xi_1 + \|r\|_{L^1})}{(1 - M_1 \|q\|_{L^1})} = M_1 \|r\|_{L^1} := \bar{\xi}_1. \quad (3.22)$$

Maintenant, considérons $x|_J$ qui satisfait, pour tout $t \in J$,

$$x(t) = \lambda^{-1} \left(\int_0^1 G(t,s) f(s, x(s), x'(s)) ds + V(t) I_1(x(t_1), x'(t_1)) + W(t) I_2(x(t_1), x'(t_1)) \right).$$

On en déduit alors que

$$|x(t)| \leq M_0 \left(\int_0^1 [p(s) \sup_{u \in [0,1]} |x(u)| + q(s) \sup_{u \in [0,1]} |x'(u)| + r(s)] ds \right) + V_0 \sup_{|u| \leq \xi_1, |v| \leq \bar{\xi}_1} |I_1(u, v)| + W_0 \sup_{|u| \leq \xi_1, |v| \leq \bar{\xi}_1} |I_2(u, v)|. \quad (3.23)$$

Notons par $\rho = \sup\{|x(t)| : t \in J\}$, $\bar{\rho} = \sup\{|x'(t)| : t \in J\}$, $\bar{I}_1 = \sup\{|I_1(u, v)| : |u| \leq \xi_1, |v| \leq \bar{\xi}_1\}$ et $\bar{I}_2 = \sup\{|I_2(u, v)| : |u| \leq \xi_1, |v| \leq \bar{\xi}_1\}$. Par (3.23) nous obtenons

$$|x(t)| \leq M_0(\|p\|_{L^1} \rho + \|q\|_{L^1} \bar{\rho} + \|r\|_{L^1}) + V_0 \bar{I}_1 + W_0 \bar{I}_2.$$

D'où

$$\rho \leq M_0(\|p\|_{L^1} \rho + \|q\|_{L^1} \bar{\rho} + \|r\|_{L^1}) + V_0 \bar{I}_1 + W_0 \bar{I}_2. \quad (3.24)$$

D'autre part, $x|_J$ est tel que, pour tout $t \in J$,

$$x'(t) = \lambda^{-1} \left(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s, x(s), x'(s)) ds + V'(t) I_1(x(t_1), x'(t_1)) + W'(t) I_2(x(t_1), x'(t_1)) \right)$$

donc

$$\bar{\rho} \leq M_1(\|p\|_{L^1} \rho + \|q\|_{L^1} \bar{\rho} + \|r\|_{L^1}) + V_1 \bar{I}_1 + W_1 \bar{I}_2$$

et alors

$$\bar{\rho} \leq \frac{M_1(\|p\|_{L^1} \rho + \|r\|_{L^1}) + V_1 \bar{I}_1 + W_1 \bar{I}_2}{1 - M_1 \|q\|_{L^1}}. \quad (3.25)$$

En remplaçant (3.25) dans (3.24) nous obtenons

$$\rho \leq \frac{M_0 \left(1 + \frac{M_1 \|q\|_{L^1}}{1 - M_1 \|q\|_{L^1}} \right) \|r\|_{L^1} + M_0 \frac{V_1 \bar{I}_1 + W_1 \bar{I}_2}{1 - M_1 \|q\|_{L^1}} + V_0 \bar{I}_1 + W_0 \bar{I}_2}{1 - M_0 \|p\|_{L^1} \left(1 + \frac{M_1 \|q\|_{L^1}}{1 - M_1 \|q\|_{L^1}} \right)} := \rho_1 \quad (3.26)$$

et donc, par (3.25), nous avons

$$\bar{\rho} \leq \frac{M_1(\|p\|_{L^1} \rho_1 + \|r\|_{L^1}) + V_1 \bar{I}_1 + W_1 \bar{I}_2}{1 - M_1 \|q\|_{L^1}} := \bar{\rho}_1. \quad (3.27)$$

Par conséquent, il existe une constante $\varrho = \max\{\rho_1, \bar{\rho}_1\}$ telle que

$$\|x\|_0 = \max\{\|x\|, \|x'\|\} \leq \varrho.$$

Ceci montre que toutes les solutions possibles de (3.18) sont bornées dans $PC^1(J, \mathbb{R}^n)$ par la constante ϱ . Par le Théorème 1.5 nous concluons que le problème à valeur initiale (3.1)-(3.4) admet au moins une solution x sur J . Ce qui achève la preuve. \square

Exemple 3.1 (Équation de Josephson, [4]) *L'équation de Josephson suivante :*

$$x''(t) + (c + d \cos(x(t)))x'(t) + a \sin(x(t)) = \phi(t), \quad t \in J := [0, 1], \quad t \neq t_1, \quad (3.28)$$

$$\Delta x(t_1) = I_1(x(t_1), x'(t_1)), \quad \Delta x'(t_1) = I_2(x(t_1), x'(t_1)), \quad (3.29)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = x\left(\frac{1}{2}\right), \quad (3.30)$$

où c, d, a sont des constantes réelles et $\phi \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$. Les fonctions définies par

$$f(t, x, y) = (c + d \cos(x))y + a \sin(x) - \phi(t)$$

$$I_1(x, y) = \sqrt{x}, \quad I_2(x, y) = \sqrt{y}$$

$$p(t) = |a|, \quad q(t) = |c| + |d|, \quad r(t) = \|\phi(t)\|$$

vérifient les hypothèses du Théorème 3.1, et donc l'équation (3.28) admet au moins une solution sur J .

Si l'hypothèse (H2) et la condition (3.17) dans le Théorème 3.3 sont remplacées par l'hypothèse (H2)* et la condition (3.31) si dessous, nous obtenons le résultat alternatif suivant :

Théorème 3.2 *Sous les conditions (H1), (H2)* et (H3), si la fonction ψ dans (H2)* vérifie*

$$M_0 \|q\|_{L^1} \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\psi(r)}{r} + V_0 \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{I}_{1,r}}{r} + W_0 \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{I}_{2,r}}{r} < 1, \quad (3.31)$$

où

$$\tilde{I}_{1,r} := \sup\{|I_1(u, v)| : |u| \leq r, |v| \leq r\}$$

et

$$\tilde{I}_{2,r} := \sup\{|I_2(u, v)| : |u| \leq r, |v| \leq r\},$$

le problème à valeur initiale (3.1)-(3.4) admet au moins une solution dans J .

Démonstration. La démonstration est basée sur le Théorème 1.6. Montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $\Gamma(B_r) \subseteq B_r$ où l'opérateur Γ est défini par (3.13) et B_r est la boule fermée dans $PC^1(J, \mathbb{R}^n)$ de centre 0 et de rayon r . Raisonnons par

l'absurde et supposons que cette propriété est fautive. Alors pour tout $r > 0$ il existe $x^r \in B_r$ et $t^r \in J$ tels que $|(\Gamma x^r)(t^r)| > r$. D'où, nous aurons

$$\begin{aligned} r &< |(\Gamma x^r)(t^r)| \\ &= \left| \int_0^1 G(t^r, s) f(s, x^r(s), x^{r'}(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + V(t) I_1(x^r(t_1), x^{r'}(t_1)) + W(t) I_2(x^r(t_1), x^{r'}(t_1)) \right| \\ &\leq M_0 \int_0^1 q(s) \psi(\max\{|x^r(s)|, |x^{r'}(s)|\}) ds \\ &\quad + V_0 I_1(x^r(t_1), x^{r'}(t_1)) + W_0 I_2(x^r(t_1), x^{r'}(t_1)) \\ &\leq M_0 \|q\|_{L^1} \psi(r) + V_0 \tilde{I}_{1,r} + W_0 \tilde{I}_{2,r} \end{aligned}$$

et alors on déduit que

$$1 \leq M_0 \|q\|_{L^1} \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\psi(r)}{r} + V_0 \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{I}_{1,r}}{r} + W_0 \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{I}_{2,r}}{r},$$

ce qui contredit (3.31). Soit $r > 0$ tel que $\Gamma : B_r \rightarrow B_r$. D'après le Lemme 3.3, l'opérateur Γ est complètement continu et d'après le Théorème 1.6 nous concluons que le problème à valeur initiale (3.1)-(3.4) admet au moins une solution x sur J . \square

Exemple 3.2 Nous reprenons l'équation de Josephson dans laquelle nous posons

$$q(t) = |c| \quad \text{et} \quad \psi(z) = 1 + \frac{|d| + |a|}{|c|} z + \frac{\|\phi\|}{|c|}, \quad c \neq 0.$$

Nous avons : $|f(t, x, y)| \leq q(t) \psi(z)$ où $z = \max(|x|, |y|)$. Si $|d| + |a| < 2$, les fonctions f , I_1 et I_2 satisfont les conditions du Théorème 3.2 et donc le problème (26)-(28) admet au moins une solution dans J .

D'après la preuve du Théorème 3.2, nous obtenons immédiatement les deux corollaires suivants :

Corollaire 3.1 Supposons que $(H1)$ et $(H2)_*$ sont vérifiées, et que la condition suivante est satisfaite :

$(H3)_*$ Les fonctions impulsives $I_1, I_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont continues et il existe $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, 2, 3$, tels que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$|I_1(x, y)| \leq a_1|x| + a_2|y| + a_3$$

et

$$|I_2(x, y)| \leq b_1|x| + b_2|y| + b_3.$$

Si l'inégalité

$$M_0 \|q\|_{L^1} \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\psi(r)}{r} + V_0(a_1 + a_2) + W_0(b_1 + b_2) < 1$$

est vérifiée, alors le problème à valeur initiale (3.1)-(3.4) admet au moins une solution sur J .

Corollaire 3.2 *Supposons que (H1), (H2)* sont vérifiées et que la condition suivante est satisfaite :*

(H3)** *Les fonctions impulsives $I_1, I_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont continues et il existe $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, 2, 3, \alpha_i, \beta_i \in [0, 1[, i = 1, 2$, tels que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :*

$$|I_1(x, y)| \leq a_1|x|^{\alpha_1} + a_2|y|^{\alpha_2} + a_3$$

et

$$|I_2(x, y)| \leq b_1|x|^{\beta_1} + b_2|y|^{\beta_2} + b_3.$$

Si l'inégalité

$$M_0 \|q\|_{L^1} \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\psi(r)}{r} < 1$$

est vérifiée, alors le problème à valeur initiale (3.1)-(3.4) admet au moins une solution sur J .

3.3 Existence et unicité de solution

Nous achevons ce chapitre par un résultat d'existence unique de la solution du problème à valeur initiale (3.1)-(3.4) sous des conditions de Lipschitz sur les fonctions f, I_1 et I_2 .

Théorème 3.3 *Supposons que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, la fonction $f(\cdot, x, y) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ est mesurable et que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(H2)** *Il existe deux fonctions $p, q \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telles que, pour presque tout $t \in J$ et pour tous $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$,*

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq p(t)|x_1 - x_2| + q(t)|y_1 - y_2|.$$

(H3)*** *Il existe $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, 2$, tels que, pour presque tout $t \in J$ et pour tous $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$,*

$$\begin{aligned} |I_1(x_1, y_1) - I_1(x_2, y_2)| &\leq \alpha_1|x_1 - x_2| + \alpha_2|y_1 - y_2|, \\ |I_2(x_1, y_1) - I_2(x_2, y_2)| &\leq \beta_1|x_1 - x_2| + \beta_2|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Si on a

$$\overline{M}[\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1}] + \overline{V}[\alpha_1 + \alpha_2] + \overline{W}[\beta_1 + \beta_2] < 1, \quad (3.32)$$

où $\overline{M} = \max\{M_0, M_1\}$, $\overline{V} = \max\{V_0, V_1\}$ et $\overline{W} = \max\{W_0, W_1\}$, alors le problème à valeur initiale (3.1)-(3.4) admet une solution unique sur J .

Démonstration. Soit $x, y \in PC^1(J, \mathbb{R}^n)$. Nous avons, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} |\Gamma x(t) - \Gamma y(t)| &\leq \int_0^1 |G(t, s)| |f(s, x(s), x'(s)) - f(s, y(s), y'(s))| ds \\ &\quad + |V(t)| |I_1(x(t_1), x'(t_1)) - I_1(y(t_1), y'(t_1))| \\ &\quad + |W(t)| |I_2(x(t_1), x'(t_1)) - I_2(y(t_1), y'(t_1))| \end{aligned}$$

de quoi il est facile de déduire l'inégalité suivante

$$|\Gamma x(t) - \Gamma y(t)| \leq \left(\bar{M}(\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1}) + \bar{V}(\alpha_1 + \alpha_2) + \bar{W}(\beta_1 + \beta_2) \right) \|x - y\|_0.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} |(\Gamma x)'(t) - (\Gamma y)'(t)| &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \right| |f(s, x(s), x'(s)) - f(s, y(s), y'(s))| ds \\ &\quad + |V'(t)| |I_1(x(t_1), x'(t_1)) - I_1(y(t_1), y'(t_1))| \\ &\quad + |W'(t)| |I_2(x(t_1), x'(t_1)) - I_2(y(t_1), y'(t_1))| \\ &\leq \left(\bar{M}(\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1}) + \bar{V}(\alpha_1 + \alpha_2) \right. \\ &\quad \left. + \bar{W}(\beta_1 + \beta_2) \right) \|x - y\|_0. \end{aligned}$$

Par conséquent ,

$$\|\Gamma x - \Gamma y\|_0 \leq \left(\bar{M}[\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1}] + \bar{V}[\alpha_1 + \alpha_2] + \bar{W}[\beta_1 + \beta_2] \right) \|x - y\|_0$$

et donc, Γ est un opérateur contractant. Par une application du Théorème de point fixe de Banach nous obtenons l'existence et l'unicité du point fixe de l'opérateur Γ ; ce qui prouve que le problème à valeur initiale (3.1)-(3.4) admet une solution unique sur J . \square

Exemple 3.3 On considère le problème à valeur initiale suivant :

$$x''(t) - \frac{1}{24} \cos^2(t)x'(t) - \frac{1}{12}x = 0, \quad (3.33)$$

$$I_1(x(t_1), x'(t_1)) = \frac{\sin(x)}{1000}, \quad I_1(x(t_1), x'(t_1)) = \frac{\cos(x)}{1000} \quad (3.34)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = x\left(\frac{1}{2}\right). \quad (3.35)$$

La fonction

$$f(t, x, x') = \frac{1}{24} \cos^2(t)x'(t) - \frac{1}{12}x$$

vérifie la condition $(H2)_{**}$ avec $p(t) = \frac{1}{12}$ et $q(t) = \frac{1}{24} \cos^2(t)$. Les fonctions impulsives I_1 et I_2 vérifient la condition $(H3)_{***}$ avec $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{1000}$ et $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. La condition (3.32) est vérifiée avec $\bar{M} = \bar{W} = 2$, $\bar{V} = \frac{1}{2}$. Donc d'après le Théorème 3.3 le problème (3.33)-(3.35) admet une solution unique dans J .

DEUXIÈME PARTIE :

SUR LA MOYENNISATION POUR LES
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FLOUES

RAPPELS SUR LES ENSEMBLES FLOUS

4

DANS ce chapitre nous rappelons quelques définitions et notions de base de la théorie des ensembles flous. Ces concepts seront utilisés au chapitre 5.

4.1 Introduction

La modélisation mathématique des différents phénomènes réels a deux inconvénients. Le premier est la complexité de la situation à modéliser. Cela a deux conséquences : on se retrouve soit dans l'impossibilité de formuler le modèle, soit le modèle construit est trop compliqué pour être utilisable. Le second inconvénient concerne l'indétermination causée par notre incapacité à différencier exactement les événements dans une situation réelle, et donc à définir les notions nécessaires de façon précise. Cette indétermination n'est pas un obstacle lorsque nous utilisons le langage naturel, parce que sa principale propriété est l'imprécision de sa sémantique et donc capable de travailler avec des notions floues. Cependant, les mathématiques classiques ne peuvent pas faire face à ces notions. Il est donc nécessaire d'avoir certains outils mathématiques pour décrire des notions floues et incertaines et ainsi aider à surmonter les obstacles qui précèdent la modélisation mathématique des phénomènes réels.

En 1965 Lotfi Zadeh a initié le développement de la théorie des ensembles flous qui est un outil qui rend possible la description des notions floues et de les manipuler. Lorsque nous modélisons un phénomène réel par une équation différentielle à valeur initiale $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, nous ne pouvons pas nous assurer que le modèle est parfait. Par exemple, c'est le cas lorsque la valeur initiale n'est pas connue exactement, ou le second membre $f(t, x)$ contient des paramètres incertains, et donc il y a nécessairement un taux d'erreur d'estimation de la solution de l'équation différentielle. Vue le caractère naturel des ensembles flous à décrire les situations naturelles ils sont utilisés dans de nombreux domaines, comme le classement, la classification des objets et le traitement d'image (voir [2, 14, 27, 47, 49, 60, 62, 67]).

4.2 Préliminaires

Dans ce qui suit on considère un espace métrique X .

Définition 4.1 Un ensemble flou A de l'espace X est défini comme une fonction

$$\begin{aligned} u : X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

où $u(x)$ est le degré d'appartenance de l'élément x à l'ensemble A , avec $u(x) = 0$ correspondant à la non-adhésion de l'élément x à l'ensemble A , $0 < u(x) < 1$ à l'adhésion partielle, et $u(x) = 1$ à la pleine adhésion.

Les ensembles flous sont une généralisation des ensembles classiques représentés par leurs fonctions caractéristiques. Dans le cas où $X = \mathbb{R}$, l'ensemble flou A est dit un nombre flou. La fonction d'adhésion de l'ensemble vide est constante et est égale à zéro. Un ensemble flou peut modéliser l'incertitude linguistique comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.1 L'expression "les nombres réels proches de zéro" peut être représentée par l'ensemble flou suivant :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Évidemment cette représentation n'est pas unique.

Définition 4.2 Soit $u : X \rightarrow [0, 1]$ un ensemble flou et soit $0 < \alpha \leq 1$. L'ensemble α -coupe de l'ensemble u est définie par l'ensemble classique comme suit :

$$[u]^\alpha = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\}.$$

L'ensemble classique $[u]^\alpha$ de X associé à l'ensemble u pour le seuil α est l'ensemble des éléments qui appartiennent à u avec un degré au moins égale à α . Sa fonction caractéristique est

$$\chi_{[u]^\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } u(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0$, l'ensemble $[u]^0$ (appelé le support de u) est défini comme étant l'adhérence pour la topologie de X de l'ensemble $\{x \in X : u(x) > 0\}$. Pour $\alpha = 1$, l'ensemble $[u]^1 = \{x \in X : u(x) = 1\}$ est appelé le noyau de u . La hauteur d'un ensemble flou est la borne supérieure de la fonction d'adhésion $\sup\{u(x) : x \in X\}$ (c'est la valeur maximale atteinte sur le support de u). Cette borne n'est pas nécessairement atteinte. En effet, si nous considérons l'expression "grand" nous pouvons la représenter par la fonction tangente

hyperbolique \tanh sur la droite réelle positive \mathbb{R}^+ qui croit de la valeur 0 pour $x = 0$ vers la limite 1 quand x tend vers l'infini. Cette limite n'est jamais atteinte et donc le noyau de la fonction \tanh est vide et son support est égale à \mathbb{R}^{+*} (l'ensemble des réels positifs non nuls). Si $\alpha, \beta \in]0, 1]$ tels que $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ alors $[u]^\beta \subset [u]^\alpha \subset [u]^0$. Si $(\alpha_n)_n$ est une suite croissante dans l'intervalle $[0, 1]$ qui converge vers $\alpha > 0$ alors on a $[u]^\alpha = \bigcap_{i \geq 1} [u]^{\alpha_i}$.

Exemple 4.2 On considère l'ensemble flou u défini sur l'intervalle fermé $[40, 100]$ (degrés Fahrenheit) de la manière suivante pour décrire la température d'une chambre :

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 40 \leq x < 50 \\ \frac{x - 50}{10} & \text{si } 50 \leq x < 60 \\ 1 - \frac{x - 60}{10} & \text{si } 60 \leq x < 70 \\ 0 & \text{si } 70 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

Les ensembles α -coupe de l'ensemble u sont donnés par, pour $0 < \alpha \leq 1$, $[u]^\alpha = [50 + 10\alpha, 70 - 10\alpha]$, $[u]^1 = \{60\}$, $[u]^{\frac{1}{2}} = [55, 65]$, et l'ensemble $[u]^0(x) = [50, 70]$.

4.2.1 Opérations sur les ensembles flous

Les opérations habituelles dans les ensembles classiques se généralisent aux ensembles flous. Soit u et v deux fonctions d'appartenance des ensembles flous A et B , respectivement, dans l'espace X . Les ensembles flous A et B sont dits égaux si leurs fonctions d'appartenance u et v sont égales en tout point de X . C'est-à-dire, si

$$\forall x \in X : u(x) = v(x)$$

Si pour tout x élément de X , x appartient moins à A qu'à B , on dit que A est inclus dans B :

$$\forall x \in X : u(x) \leq v(x).$$

L'intersection $A \cap B$ est l'ensemble flou $u \wedge v = \min\{u(x), v(x)\}$ pour tout $x \in X$. L'union $A \cup B$ est l'ensemble flou $u \vee v = \max\{u(x), v(x)\}$ pour tout $x \in X$. Le complémentaire de l'ensemble A est l'ensemble noté \bar{A} représenté par sa fonction d'appartenance $\bar{u}(x) = 1 - u(x)$. La propriété de non contradiction n'est pas vérifiée par les ensembles flous ($A \cap \bar{A} \neq \emptyset$), de même que la propriété de tiers exclu ($A \cup \bar{A} \neq X$). Remarquons que tout ensemble flou défini par une fonction d'appartenance continue non constante, coupera toujours son complémentaire \bar{A} la hauteur $\frac{1}{2}$. Dans le reste de ce chapitre on identifiera l'ensemble flou A avec sa fonction d'adhésion u .

Définition 4.3 (Différence de Hukahara) Soit A et B deux ensembles non vides dans \mathbb{R}^d . La différence de Hukahara de A et B noté $A \ominus B$ est définie par l'existence

d'un ensemble C tel que $A = B + C$. Autrement dit

$$A \ominus B = C \iff A = B + C.$$

La différence de Hukahara $A \ominus B$ est unique et une condition pour qu'elle existe est que A contienne une translation de B ($B + \{c\} \subset A$, avec $c \in \mathbb{R}^d$). Une propriété importante de \ominus est que : pour tous $A, B \in \mathbb{R}^d$ on a $A \ominus A = \{0\}$ et $(A + B) \ominus B = A$. En général $A - B \neq A \ominus B$. Par exemple, si $A = \{0\}$ et $B = [0, 1]$ alors $A - B = \emptyset$ et $A \ominus B$ n'existe pas puisque le singleton $\{0\}$ ne peut contenir une translation de l'intervalle $[0, 1]$.

Définition 4.4 Soit u un ensemble flou. u est dit normal s'il existe au moins un point $x_0 \in X$ tel que $u(x_0) = 1$.

Autrement dit u est normal si son noyau n'est pas vide, ou encore si la hauteur de u est égale à 1.

Définition 4.5 Soit u un ensemble flou. u est convexe si pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et tous $x, y \in X$ on a

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min[u(x), u(y)].$$

4.2.2 Espace des ensembles flous

Notons par $Conv(\mathbb{R}^d)$ la classe de tous les sous ensembles compacts et convexes dans \mathbb{R}^d . Définissons la métrique d'Hausdorff dans $Conv(\mathbb{R}^d)$ par

$$\rho(A, B) = \max \left(\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} |a - b|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} |a - b| \right), A, B \in Conv(\mathbb{R}^d)$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne dans \mathbb{R} . L'espace $Conv(\mathbb{R}^d)$ muni de la distance ρ est un espace complet (voir [13], page 40).

Définition 4.6 \mathbb{E}^d est l'espace des fonctions $u : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ telles que

- (1) u est normale ;
- (2) u est convexe floue ;
- (3) u est semi-continue supérieure. C'est-à-dire que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ tel que $u(x) < u(x_0) + \epsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ vérifiant la condition $|x - x_0| < \delta$;
- (4) $[u]^0$ est compact.

Définition 4.7 L'ensemble nul dans \mathbb{E}^d est la fonction noté $\hat{0}$ défini par

$$\hat{0}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

D'après (2) on conclut que l'ensemble $[u]^\alpha$ est convexe dans \mathbb{R}^d . En effet soit $x, y \in [u]^\alpha$ avec $\alpha \in]0, 1[$. Puisque $u(x) \geq \alpha, u(y) \geq \alpha$, alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min[u(x), u(y)] \geq \alpha.$$

D'où $\lambda x + (1 - \lambda)y \in [u]^\alpha$. D'après (iv) l'ensemble $[u]^0$ est fermé et borné. D'autre part u est semi-continue d'après (iii) et donc l'ensemble $[u]^\alpha$ est fermé et est borné comme sous ensemble de $[u]^0$, et par suite l'ensemble $[u]^\alpha$ est un compact. Puisque l'espace $(\text{Conv}(\mathbb{R}^d), \rho)$ est complet et que $\rho([u]^\alpha, [u]^0)$ tend vers zéro quand α tend vers 0^+ alors l'ensemble $[u]^0$ est convexe.

Proposition 4.1 *Si A est un sous ensemble non vide, convexe et compact de \mathbb{R}^d alors sa fonction caractéristique χ_A est dans \mathbb{E}^d .*

Nous définissons la somme et la multiplication par un scalaire dans \mathbb{E}^d , comme

$$[u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha, \quad [\lambda u]^\alpha = \lambda[u]^\alpha$$

pour tous $u, v \in \mathbb{E}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in [0, 1]$. On définit la fonction $D : \mathbb{E}^d \times \mathbb{E}^d \rightarrow [0, 1]$ par

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} \rho([u]^\alpha, [v]^\alpha) \quad u, v \in \mathbb{E}^d \quad (4.2)$$

où ρ est la distance d'Hausdorff. La borne supérieure dans la définition de D peut ne pas être atteinte.

Exemple 4.3 *Si $u, v \in \mathbb{E}^1$ sont tels que*

$$[u]^\alpha = [v]^\alpha = [0, 1] \quad \text{pour } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

et

$$[u]^\alpha = 0, \quad [v]^\alpha = [0, 2(1 - \alpha)] \quad \text{pour } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1$$

alors

$$\rho([u]^\alpha, [v]^\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \\ 2(1 - \alpha) & \text{si } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Donc la borne supérieure de $\rho([u]^\alpha, [v]^\alpha)$ pour $\alpha \in [0, 1]$, qui égale à 1, n'est pas atteinte.

La fonction D donnée par (4.2) définit une distance sur \mathbb{E}^d telle que (pour les preuves, voir [43], page 19) :

- (1) (\mathbb{E}^d, D) est complet;
- (2) $D(u + w, v + w) = D(u, v)$ pour tous $u, v, w \in \mathbb{E}^d$ (c'est à dire, D est invariante par translation);
- (3) $D(ku, kv) = |k|D(u, v)$ pour tous $u, v \in \mathbb{E}^d$ et $k \in \mathbb{R}$ (c'est à dire, D est compatible avec les dilatations).

Dans ce qui suit notons par I un intervalle de \mathbb{R} .

Définition 4.8 *Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{E}^d$ est fortement mesurable sur I si, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, la fonction $f_\alpha : I \rightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^d)$ définie par $f_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$ pour tout $t \in I$ est Lebesgue-mesurable.*

Une fonction $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une sélection de f_α si et seulement si ϕ est intégrable et $\phi(t) \in f_\alpha(t)$, pour tout $t \in I$.

Définition 4.9 Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{E}^d$ est intégrablement bornée sur I s'il existe une fonction Lebesgue intégrable k telle que $\|x\| \leq k(t)$ pour tout $x \in f_0(t)$.

Définition 4.10 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{E}^d$ une fonction. L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle I , noté $\int_I f(t)dt$, est défini comme un élément G de \mathbb{E}^d tel que, pour tout $\alpha \in]0, 1]$:

$$[G]^\alpha = \int_I f_\alpha(t)dt = \left\{ \int_I \phi(t)dt \mid \phi : I \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ sélection mesurable de } f_\alpha \right\}.$$

Définition 4.11 Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{E}^d$ est intégrable si elle est fortement mesurable et intégrablement bornée.

Théorème 4.1 [43] Si les fonctions $f, g : I \rightarrow \mathbb{E}^d$ sont intégrables sur I , et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les assertions suivantes sont vraies :

- (i) $\int_I [f(t) + g(t)]dt = \int_I f(t)dt + \int_I g(t)dt$;
- (ii) $\int_I \lambda f(t)dt = \lambda \int_I f(t)dt$;
- (iii) $D(\int_I f(t)dt, \int_I g(t)dt) \leq \int_I D(f(t), g(t))dt$.

Définition 4.12 Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{E}^d$ est continue au point $t_0 \in I$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, tel que pour tout $t \in I$ la condition $|t - t_0| < \delta$ entraîne $D(f(t), f(t_0)) < \varepsilon$. La fonction f est dite continue sur I si elle est continue en tout point $t_0 \in I$.

Définition 4.13 Une fonction $f : I \times \mathbb{E}^d \rightarrow \mathbb{E}^d$ est dite continue au point $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{E}^d$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(t_0, x_0, \varepsilon) > 0$ tel que $D(f(t, x), f(t_0, x_0)) < \varepsilon$ quand $|t - t_0| < \delta$ et $D(x, x_0) < \delta$, $t \in I$ et $x \in \mathbb{E}^d$. La fonction f est dite continue sur $I \times \mathbb{E}^d$ si elle est continue en tout point $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{E}^d$.

Définition 4.14 Une fonction $f : I \times \mathbb{E}^d \rightarrow \mathbb{E}^d$ est continue en $x \in \mathbb{E}^d$ uniformément par rapport à $t \in I$ si, pour tout $x_0 \in \mathbb{E}^d$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tel que $D(f(t, x), f(t, x_0)) < \varepsilon$ pour tout $t \in I$ quand $D(x, x_0) < \delta$, $x \in \mathbb{E}^d$.

Définition 4.15 Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{E}^d$ est Hukahara différentiable avec comme dérivée $f'(t_0)$ en $t_0 \in I$ si pour tout $h > 0$ suffisamment petit les différences $f(t_0) \ominus f(t_0 - h)$ et $f(t_0 + h) \ominus f(t_0)$ existent et il existe $f'(t_0) \in \mathbb{E}^d$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0) \ominus f(t_0 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0 + h) \ominus f(t_0)}{h} = f'(t_0).$$

Définition 4.16 Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{E}^d$ est différentiable au point $t_0 \in I$ si, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, la fonction $f_\alpha : I \rightarrow \text{Conv}(\mathbb{R}^d)$ est Hukahara différentiable au point t_0 , sa dérivée est égale à $D_H f_\alpha(t_0)$, et la famille d'ensembles $\{D_H f_\alpha(t_0) : \alpha \in [0, 1]\}$

définie la fonction $f'(t_0) \in \mathbb{E}^d$ (appelée la dérivée floue de la fonction f au point t_0). La fonction f est dite différentiable sur I si elle est différentiable en tout point $t_0 \in I$.

Nous avons l'analogie suivant du théorème fondamental du calcul intégral et différentiel.

Théorème 4.2 [43] *Supposons que la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{E}^d$ est différentiable et que sa dérivée floue $f' : I \rightarrow \mathbb{E}^d$ est intégrable sur I . Alors, pour tous $a, t \in I$, nous avons*

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(\tau) d\tau.$$

MOYENNISATION POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FLOUES

5

DANS ce chapitre nous justifions la méthode de moyennisation pour certaines équations différentielles floues perturbées sous des conditions plus faibles que celles de la littérature.

5.1 Introduction

La moyennisation est une méthode très utilisée dans la littérature pour approximer les solutions de certaines équations différentielles perturbées rapidement oscillantes. Elle prend ses racines dans la mécanique céleste pour déterminer l'évolution des orbites planétaires sous l'influence des perturbations mutuelles entre les planètes et pour étudier la stabilité du système solaire. Elle concerne la construction approximative, essentiellement du premier ordre, d'équations différentielles ordinaires rapidement oscillantes en la variable temps, qui se ramènent à la forme

$$x' = f\left(\frac{t}{\epsilon}, x, \epsilon\right) \quad (5.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ un paramètre réel. À cette équation est associée l'équation différentielle ordinaire autonome suivante

$$y' = f^0(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y, 0) dt \quad (5.2)$$

obtenue à partir de l'équation (5.1) en prenant la moyenne, dont nous supposons l'existence, par rapport à la variable temps de la fonction f , pour $\epsilon = 0$ et appelée équation moyennisée. Le principe de la méthode affirme que le comportement d'une trajectoire de l'équation (5.1) est très proche de celui de l'équation (5.2), issue de la même condition initiale (ou même d'une condition initiale proche) sur des intervalles de temps finis. En introduisant dans

l'équation (5.1) un changement dans l'échelle du temps en posant $t = \epsilon\tau$, on obtient :

$$x' = \epsilon f(\tau, x, \epsilon). \quad (5.3)$$

Faisons de même avec l'équation (5.2). L'équation moyennisée s'écrit alors

$$y' = \epsilon f^0(y). \quad (5.4)$$

Il est à noter que les écritures (5.1) et (5.3) sont équivalentes. L'étude du problème à l'une ou à l'autre échelle de temps t ou $\tau = \frac{t}{\epsilon}$ conduit aux mêmes résultats. Dans la littérature différentes techniques de calcul pour justifier les résultats de moyennisation ont été élaborées. Nous citons deux des plus importantes :

- *La technique de la décomposition appelée décomposition de Bogoliobov-Hale.* Elle consiste à introduire un changement de variable faisant apparaître l'équation (5.1) comme une perturbation (singulière) de l'équation moyennisée (5.2). Ainsi on montre l'existence d'une fonction $u(\tau, z, \epsilon)$, vérifiant certaines propriétés dont celle-ci : la fonction $u(\tau, z, \epsilon)$ tend vers zéro avec ϵ , uniformément en τ dans \mathbb{R} et en z dans les compacts de \mathbb{R} , de sorte que le changement de variable

$$x = z + \epsilon u(\tau, z, \epsilon)$$

transforme l'équation (5.1) en l'équation

$$z' = \epsilon f^0(z) + \epsilon F(\tau, z, \epsilon).$$

Puis on néglige le terme $F(\tau, z, \epsilon)$, supposé tendre vers zéro avec ϵ , uniformément en τ dans \mathbb{R} et en z dans les compacts de \mathbb{R} , pour obtenir l'équation moyennisée (5.4). Sous des conditions convenables, la méthode aboutit finalement au résultat :

$$x(\tau) = y(\tau) + O(\epsilon)$$

sur des intervalles de temps τ de type $[0, L/\epsilon]$ où $L > 0$ est une constante arbitraire.

- *Le concept de moyenne locale dû à Eckhaus.* Il s'agit de définir la notion de moyenne locale du second membre de l'équation (5.1). Les solutions de l'équation qui lui est associée constituent alors des solutions intermédiaires entre celles de l'équation (5.1) et l'équation (5.2). L'idée est de considérer l'équation moyennisée locale associée à l'équation (5.1)

$$z' = \epsilon \frac{1}{T} f_T(\tau, z) = \epsilon \int_{\tau}^{\tau+T} f(t, z, 0) dt$$

et de vérifier par des évaluations d'intégrales, moyennant des hypothèses convenables, qu'uniformément par rapport à $\tau \in [0, L/\epsilon]$, $L > 0$, on a d'une part

$$x(\tau) = z(\tau) + O(\epsilon T)$$

et d'autre part

$$y(\tau) = z(\tau) + O\left(\frac{\delta(\epsilon)}{\epsilon T}\right)$$

où la fonction d'ordre en ϵ , $\delta(\epsilon)$ définie par

$$\delta(\epsilon) = \sup_x \sup_{\tau \in [0, \frac{L}{\epsilon}]} \epsilon \left| \int_0^\tau (f(t, x) - f^0(x)) dt \right|$$

est supposée petite avec ϵ . Enfin, le choix du paramètre T tel que $\epsilon^2 T^2 = \delta(\epsilon)$ donne le résultat recherché

$$x(\tau) = y(\tau) + O(\delta^{\frac{1}{2}}(\epsilon)).$$

5.2 Résultat de moyennisation

Considérons le problème à valeur initiale associé à l'équation différentielle floue perturbée du type :

$$\dot{x} = f\left(\frac{t}{\epsilon}, x\right), \quad x(0) = x_0 \quad (5.5)$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{E}^d$, \mathbb{U} un sous ensemble ouvert de \mathbb{E}^d , $x_0 \in \mathbb{U}$ et $\epsilon > 0$ un petit paramètre.

Définition 5.1 La fonction $x : I \rightarrow \mathbb{U}$, où $I = [0, \omega]$, $0 < \omega \leq \infty$, est dite solution du problème (5.5) si elle est continue et, pour tout $t \in I$, satisfait l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f\left(\frac{\tau}{\epsilon}, x(\tau)\right) d\tau.$$

Nous associons au problème (5.5) le problème à valeur initiale moyennisé

$$\dot{y} = f^0(y), \quad y(0) = x_0, \quad (5.6)$$

où la fonction $f^0 : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{E}^d$ est telle que, pour tout $x \in \mathbb{U}$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D\left(\frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x) d\tau, f^0(x)\right) = 0. \quad (5.7)$$

Théorème 5.1 Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

(H1) La fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{E}^d$ dans (5.5) est continue ;

(H2) Il existe une fonction localement intégrable $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ et une constante $M > 0$ telles que

$$D(f(t, x), \hat{0}) \leq m(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{U}$$

avec

$$\int_{t_1}^{t_2} m(t) dt \leq M(t_2 - t_1), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+;$$

(H3) Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour toutes les fonctions continues $u, v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{U}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$D \left(\int_0^t f(\tau, u(\tau)) d\tau, \int_0^t f(\tau, v(\tau)) d\tau \right) \leq \lambda \int_0^t D(u(\tau), v(\tau)) d\tau. \quad (5.8)$$

(H4) pour tout $x \in \mathbb{U}$, la limite (5.7) existe.

Soit $x_0 \in \mathbb{U}$. Soit x_ε une solution de (5.5) et soit $I = [0, \omega_\varepsilon[$, $0 < \omega_\varepsilon \leq \infty$, son intervalle maximal positif de définition. Soit y la solution de (5.6) et soit $J = [0, \omega_0[$, $0 < \omega_0 \leq \infty$, son intervalle maximal positif de définition. Alors, pour tout $L > 0$, $L \in I \cap J$, et $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L, \delta) > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, nous avons

$$D(x_\varepsilon(t), y(t)) < \delta, \quad \forall t \in [0, L].$$

Notons que la condition (H3) est une condition de Lipschitz sur la fonction intégrale de f et non pas sur la fonction f elle-même. D'autre part, les résultats publiés dans [29, 30, 49] sont obtenus sous des conditions plus fortes comparées avec celles imposées dans ce chapitre. En particulier, dans la littérature on assume souvent que la fonction f est uniformément bornée et lipschitzienne par rapport à la seconde variable. En utilisant la condition (H3) nous prouvons dans le lemme ci après que la fonction $f^0 : \mathbb{U} \rightarrow E^d$ dans (5.7) est lipschitzienne et donc l'unicité de la solution du problème moyennisé (5.6) est garantie.

Lemme 5.1 Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{E}^d$ et supposons que f satisfait les conditions (H2)-(H4) dans le Théorème 5.1. Alors la fonction $f^0 : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ dans (5.6) est uniformément bornée par la constante M donnée par la condition (H2)

$$D(f^0(x), \hat{0}) \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{U}$$

et satisfait la condition de Lipschitz avec comme constante de Lipschitz, la constante λ donnée par (H3).

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{U}$. Par les conditions (H2) et (H4) on déduit que pour tout $\eta > 0$ il existe $T_0 = T(x, \eta) > 0$ tel que, pour tout $T \geq T_0$, nous avons

$$\begin{aligned} D(f^0(x), \hat{0}) &\leq D \left(f^0(x), \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x) d\tau \right) + D \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x) d\tau, \hat{0} \right) \\ &\leq \eta + \frac{1}{T} \int_0^T D(f(\tau, x), \hat{0}) d\tau \\ &\leq \eta + M. \end{aligned}$$

Puisque la valeur de η est arbitraire, en passant à la limite lorsque $\eta \rightarrow 0$, nous obtenons

$$D(f^0(x), \hat{0}) \leq M.$$

Soit $x, x_0 \in \mathbb{U}$. D'après les conditions (H3) et (H4), on conclut que pour tout $\eta > 0$ il existe $T_0 = T_0(x_0, x, \eta) > 0$ tel que, pour tout $T \geq T_0$

$$\begin{aligned} D(f^o(x), f^o(x_0)) &\leq D\left(f^o(x), \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x) d\tau\right) \\ &\quad + \frac{1}{T} D\left(\int_0^T f(\tau, x) d\tau, \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x_0) d\tau\right) \\ &\quad + D\left(f^o(x_0), \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x_0) d\tau\right) \\ &\leq 2\eta + \frac{1}{T} \lambda \int_0^T D(x, x_0) d\tau = 2\eta + \lambda D(x, x_0). \end{aligned}$$

La constante η étant arbitraire, en passant à la limite lorsque $\eta \rightarrow 0$ nous obtenons :

$$D(f^o(x), f^o(x_0)) \leq \lambda D(x, x_0).$$

Ce qui achève la preuve. □

Lemme 5.2 Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{E}^d$. Supposons que f satisfait la condition (H1), (H2) et (H4) dans le Théorème 5.1. Alors, pour tous $x \in \mathbb{U}$, $t \geq 0$ et $\alpha > 0$, nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D\left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau, f^o(x)\right) = 0.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{U}$, $t \geq 0$ et $\alpha > 0$.

Cas 1 : $t = 0$. Par la condition (H4), nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D\left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \int_0^{\alpha/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau, f^o(x)\right) = 0.$$

Cas 2 : $t \in (0, L]$. Nous avons

$$\begin{aligned} D\left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau, f^o(x)\right) &\leq D\left(\frac{1}{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau, f^o(x)\right) \\ &\quad + \frac{L}{\alpha} \left[D\left(\frac{1}{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau, f^o(x)\right) \right. \\ &\quad \left. + D\left(\frac{1}{t/\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau, f^o(x)\right) \right]. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Par la condition (H4), nous concluons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D\left(\frac{1}{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau, f^o(x)\right) = 0$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D \left(\frac{1}{t/\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} f(\tau, x) d\tau, f^o(x) \right) = 0.$$

Donc le terme de droite dans (5.9) tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro et nous obtenons ainsi le résultat du Lemme 5.2. \square

Le corollaire suivant est un résultat direct du Lemme 5.2.

Corollaire 5.1 *Supposons que la fonction f dans (5.5) satisfait les conditions (H1)-(H4) dans le Théorème 5.1. Soit $x_0 \in \mathbb{U}$ et y la solution (unique) de (5.6), soit $J = [0, \omega_0[$, $0 < \omega_0 \leq \infty$, son intervalle maximale positif de définition. Soit $L > 0$ tel que $L \in J$. Alors, pour tout $t \in [0, L]$ et $\alpha > 0$, nous avons*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} f(\tau, y(t)) d\tau, f^o(y(t)) \right) = 0. \quad (5.10)$$

Lemme 5.3 *Supposons que la fonction f dans (5.5) satisfait les conditions (H1)-(H4) du Théorème 5.1. Soit $x_0 \in \mathbb{U}$ et y la solution (unique) de l'équation (5.6) et soit $J = [0, \omega_0[$, $0 < \omega_0 \leq \infty$, son intervalle maximale positif de définition. Alors, pour tout $L > 0$, $L \in J$, nous avons*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, L]} D \left(\int_0^t f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau) \right) d\tau, \int_0^t f^o(y(\tau)) d\tau \right) = 0.$$

Démonstration. Soient $L > 0$, $L \in J$ et $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_p = L$, ($p \in \mathbb{N}$), une partition de $[0, L]$ avec $\alpha = \alpha(\varepsilon) := t_{n+1} - t_n$, $n = 1, \dots, p$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha = 0$. Soit $t \in [t_m, t_{m+1}]$ pour un certain $m \in \{0, \dots, p-1\}$. Alors

$$\begin{aligned} D \left(\int_0^t f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau) \right) d\tau, \int_0^t f^o(y(\tau)) d\tau \right) &\leq \sum_{n=0}^{m-1} D \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau) \right) d\tau, \int_{t_n}^{t_{n+1}} f^o(y(\tau)) d\tau \right) \\ &\quad + D \left(\int_{t_m}^t f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau) \right) d\tau, \int_{t_m}^t f^o(y(\tau)) d\tau \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Par la condition (H2) et le Lemme 5.1 nous avons

$$\begin{aligned} D \left(\int_{t_m}^t f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau) \right) d\tau, \int_{t_m}^t f^o(y(\tau)) d\tau \right) &\leq D \left(\int_{t_m}^t f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau) \right) d\tau, \hat{0} \right) \\ &\quad + D \left(\int_{t_m}^t f^o(y(\tau)) d\tau, \hat{0} \right) \\ &\leq \int_{t_m}^t D \left(f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau) \right), \hat{0} \right) d\tau \\ &\quad + \int_{t_m}^t D \left(f^o(y(\tau)), \hat{0} \right) d\tau \\ &\leq 2M\alpha. \end{aligned}$$

Pour tout $n = 0, \dots, m-1$ et $\tau \in [t_n, t_{n+1}]$, et par le Lemme 5.2 (f^0 est bornée par la constante M) nous pouvons conclure que $D(y(\tau), y(t_n)) \leq M\alpha$ et par la condition (H3) et le Lemme 5.2 (condition lipschitzienne sur f^0), il résulte, respectivement, que

$$D \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau) \right) d\tau, \int_{t_n}^{t_{n+1}} f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(t_n) \right) d\tau \right) \leq \lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} D(y(\tau), y(t_n)) d\tau \leq \lambda M \alpha^2$$

et

$$D \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} f^0(y(\tau)) d\tau, \int_{t_n}^{t_{n+1}} f^0(y(t_n)) d\tau \right) \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} D(f^0(y(\tau)), f^0(y(t_n))) d\tau \leq \lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} D(y(\tau), y(t_n)) d\tau \leq \lambda M \alpha^2.$$

D'autre part, d'après (5.11), nous avons

$$D \left(\int_0^t f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau) \right) d\tau, \int_0^t f^0(y(\tau)) d\tau \right) \leq \sum_{n=0}^{m-1} D \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(t_n) \right) d\tau, \int_{t_n}^{t_{n+1}} f^0(y(t_n)) d\tau \right) + \sum_{n=0}^{m-1} 2\lambda M \alpha^2 + 2M\alpha. \quad (5.12)$$

Pour tout $n = 0, \dots, m-1$, nous aurons

$$\begin{aligned} \beta_n &:= D \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(t_n) \right) d\tau, \int_{t_n}^{t_{n+1}} f^0(y(t_n)) d\tau \right) \\ &= \alpha D \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \int_{t_n/\varepsilon}^{t_{n+1}/\varepsilon + \alpha/\varepsilon} f(\tau, y(t_n)) d\tau, f^0(y(t_n)) \right) := \alpha \varrho_n \leq \alpha \varrho_m \end{aligned}$$

où $\varrho_m = \max\{\varrho_n = \varrho_n(\varepsilon) : n = 0, \dots, m-1\}$ et d'après le Corollaire 5.1, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varrho_n = 0$. Alors

$$\sum_{n=0}^{m-1} \beta_n \leq \varrho_m \sum_{n=0}^{m-1} \alpha = \varrho_m \sum_{n=0}^{m-1} (t_{n+1} - t_n) = \varrho_m t \leq \varrho_m L \leq \varrho L,$$

où $\varrho = \varrho(\varepsilon) = \max\{\varrho_m : m = 0, \dots, p-1\}$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varrho = 0$. D'autre part, nous avons

$$\sum_{n=0}^{m-1} 2\lambda M \alpha^2 = 2\lambda M \alpha \sum_{n=0}^{m-1} \alpha \leq 2\lambda M \alpha t \leq 2\lambda M \alpha L.$$

Finalement, par l'équation (5.12) nous obtenons

$$\sup_{t \in [0, L]} D \left(\int_0^t f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau) \right) d\tau, \int_0^t f^o(y(\tau)) d\tau \right) \leq 2M(\lambda L + 1)\alpha. \quad (5.13)$$

Le terme de droite dans (5.13) tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro, et le Lemme est ainsi prouvé. \square

Nous citons sans démonstration le lemme de Gronwall-Bellman qui nous sera utile pour la preuve de Théorème 5.1

Lemme 5.4 (Gronwall-Bellman) [68] *Soient $c \geq 0$ et ψ, y deux fonctions positives, définies sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$. Si on a*

$$y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s)y(s)ds \quad \forall t \in [a, b]$$

alors

$$y(t) \leq ce^{a \int \psi(s)ds} \quad \forall t \in [a, b].$$

Preuve de Théorème 5.1

Nous pouvons maintenant montrer le Théorème 5.1. Nous supposons que les hypothèses associées à ce théorème sont vérifiées. Pour $t \in [0, L] \subset I_\varepsilon \cap J$, en utilisant la condition (H3), nous avons

$$\begin{aligned} D(y(t), x_\varepsilon(t)) &= D \left(\int_0^t f^o(y(\tau)) d\tau, \int_0^t f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau) \right) d\tau \right) \\ &\leq D \left(\int_0^t f^o(y(\tau)) d\tau, \int_0^t f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau) \right) d\tau \right) \\ &\quad + D \left(\int_0^t f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau) \right) d\tau, \int_0^t f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\varepsilon(\tau) \right) d\tau \right) \\ &\leq \sigma + \lambda \int_0^t D(y(\tau), x_\varepsilon(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (5.14)$$

où

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) := \sup_{t \in [0, L]} D \left(\int_0^t f \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau) \right) d\tau, \int_0^t f^o(y(\tau)) d\tau \right).$$

D'après le Lemme 5.3, nous avons $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma = 0$. En utilisant le Lemme de Gronwall-Bellman, pour l'inégalité (5.14) nous déduisons que

$$D(y(t), x_\varepsilon(t)) \leq \sigma e^{\lambda t} \leq \sigma e^{\lambda L}$$

ce qui implique

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, L]} D(x_\varepsilon(t), y(t)) = 0.$$

Ainsi la preuve du théorème est achevée. \square

CONCLUSION

Les résultats que nous avons obtenus dans cette thèse généralisent ceux obtenus dans la littérature. L'expression $(x(t) - x(t)^3/3)$ dans l'équation de van der Pol ne satisfait pas la condition de Lipschitz proposée dans [5]. Nous avons ainsi prouvé l'existence de solutions périodiques, de période fixée, et à variations bornées, de l'équation de van der Pol avec impulsions en utilisant le principe de contraction et sans cette condition de Lipschitz. Nous avons aussi montré l'existence et l'unicité de solutions de certaines équations différentielles impulsives du second ordre à trois points aux limites en utilisant la technique du point fixe sous des conditions plus faibles que celles de la littérature. Enfin, nous avons justifié la méthode de moyennisation pour les équations différentielles floues perturbées en imposant des conditions plus générales que celles de la littérature, en améliorant notre résultat dans [38]. Dans l'avenir nous comptons poursuivre nos travaux de recherche dans ces différentes voies. En particulier et concernant la dernière voie, nous traiterons le cas plus général et intéressant où l'équation moyennisée ne possède pas de solution unique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. D. Bainov and P. S. Simeonov, *Impulsive Differential Equations : Asymptotic Properties of the Solutions, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, vol. 28, World Scientific, Singapore, 1995 12
- [2] B. Bede and S. G. Gal, *Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations*, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 151, No. 3 (2005), pp. 581-599. 46
- [3] J.-M. Belley and R. Guen, *Periodic van der Pol equation with state dependent impulses*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 426, No. 2 (2015), pp. 995-1011. 2
- [4] J.-M. Belley and K. Saadi Drissi, *Almost periodic solutions to Josephson's equation*, *Nonlinearity*, Vol. 16 (2003), pp. 35-47. 40
- [5] J.-M. Belley and M. Virgilio, *Periodic Duffing delay equations with state dependent impulses*, *Journal of mathematical analysis and applications*, Vol. 306, No. 2 (2005), pp. 646-662. 2, 61
- [6] J.-M. Belley and S.El Alaoui, *Periodic first order delay equations with state dependent impulses*, *Dyn Contin. Discrete Impuls. Syst.Ser.A Math.Anal.*14(2007) no.3, 363-385. 2
- [7] M. Benchohra, J. Henderson, S. K. Ntouyas and A. Ouahab, *Multiple solutions for impulsive semilinear functional and neutral functional differential equations in Hilbert space*, *Journal of Inequalities and Applications*, Vol. 2005, No. 2 (2005), pp. 189-205. 3
- [8] G. Birkhoff and S. Mac Lane, *A survey of modern algebra*, *Universities Press*, 1965. 28
- [9] G. Cai and W. Ge, *Positive solutions for second-order impulsive differential equations with dependence on first-order derivative*, *Journal of Mathematical Research and Exposition*, Vol. 26, No. 4 (2006), pp. 725-734. 3
- [10] G. Cai, Z. Du and W. Ge, *On a class of second-order impulsive boundary value problem at resonance*, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 2006 (2006). 3

-
- [11] M. Cartwright and J. Littlewood, *On nonlinear differential equations of the second order I*, Journal London Mathematical Society, Vol. 20 (1945), pp. 180-189. 2
- [12] M. Cartwright and J. Littlewood, *On nonlinear differential equations of the second order II*, Annals of Mathematics, (1947), pp. 472-494. 2
- [13] C. Castaing and M. Valadier, Convexe analysis and measurable multifunction, *Springer-Verlag*, Berlin-Heidelberg-New York, Vol. 580, 2006. 49
- [14] Y. Chalco-Cano and H. Román-Flores, *On new solutions of fuzzy differential equations*, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 38, No. 1 (2008), pp. 112-119. 46
- [15] B. Chuanzhi and D. Yang, *Existence of solutions for second-order nonlinear impulsive differential equations with periodic boundary value conditions*, Boundary Value Problems, Vol. 2007 (2007). 3
- [16] C. Corduneanu, Integral equations and applications, *Combridge University Press*, Vol. 148, 1991.
- [17] H. F. Davis, Fourier series and orthogonal functions, *Allyn and Bacon, Inc, Boston, MA*, 1963. 6
- [18] M. Eduardo Hernandez, *A second-order impulsive Cauchy problem*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 31, No. 8 (2002), pp. 451-461. 3
- [19] M. Frigon and D. O'Regan, *First order impulsive initial and periodic problems with variable moments*, Journal of mathematical analysis and applications, Vol. 233, No. 2 (1999), pp. 730-739. 2
- [20] M. Frigon and D. O'Regan, *Second order Sturm-Liouville BVP's with impulses at variable moments*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A, Mathematical Analysis, Vol. 8, No. 2 (2001), pp. 149-159. 2
- [21] R. A. Gordon, The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock, *Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society*, Providence, RI, Vol. 4, 1994.
- [22] J. Guckenheimer, K. Hoffman and W. Weckesser, *The forced van der Pol equation I : The slow flow and its bifurcations*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, Vol. 2, No. 1 (2003), pp. 1-35. 2
- [23] J. Henderson and A. Ouahab, *Local and global existence and uniqueness results for second and higher order impulsive functional differential equations with infinite delay*, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 4, No. 2 (2007), pp. 1-32. 3
- [24] L. Jianli and S. Jianhua, *Existence of positive solutions for second-order impulsive boundary value problems on infinity intervals*, Boundary Value Problems, Vol. 2006, No. 1 (2006), pp. 1-11.

- [25] J. Kalas and Z. Kadeřábek, *Periodic solutions of a generalized Van der Pol-Mathieu differential equation*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 234 (2014), pp. 192-202. 2
- [26] O. Kaleva, *Fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 24, No. 3 (1987), pp. 301-317.
- [27] O. Kaleva, *A note on fuzzy differential equations*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, Vol. 64, No. 5 (2006), pp. 895-900. 46
- [28] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, 2004.
- [29] O. D. Kichmarenko and N. V. Skripnik, *Averaging of fuzzy differential equations with delay*, Nonlinear Oscillations, Vol. 11, No. 3 (2008), pp. 331-344. 3, 56
- [30] O. Kichmarenko and N. V. Skripnik, *One Scheme Averaging of Fuzzy Differential Equations with Maxima*, Advances in Dynamical Systems and Applications, Vol. 3, No. 1 (2011), pp. 94-103. 3, 56
- [31] J. F. C. Kingman and S. J. Taylor, *An Introduction to Measure and Probability*, Springer Science and Business Media, 2012.
- [32] A. Kolmogorov and S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelles*, Edition Mir, Moscou, 1977.
- [33] M. Lakrib, *The method of averaging and functional differential equations with delay*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 26, No. 8 (2001), pp. 497-511. 3
- [34] M. Lakrib, *On the averaging method for differential equations with delay*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2002, No. 65 (2002), pp. 1-16. 3
- [35] M. Lakrib, *An existence result for impulsive neutral functional differential equations with multiple delay*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2008, No. 36 (2008), pp. 1-7. 31
- [36] M. Lakrib, *An averaging theorem for ordinary differential inclusions*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, Vol. 16, No. 1 (2009), pp. 13-29. 3
- [37] M. Lakrib and R. Guen, *Existence results for three-point boundary value problems for second-order impulsive differential equations*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 3, No. 4 (2011), pp. 106-115. 3
- [38] M. Lakrib, R. Guen and A. Bourada, *Averaging for fuzzy differential equations*, Surveys in Mathematics and its Applications, Vol. 9 (2014), pp. 93-104. 3, 61
- [39] M. Lakrib, A. Oumansour and K. Yadi, *Existence results for second-order impulsive functional differential equations with infinite delay*, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 9, No. 1 (2012), pp. 1-11. 31

- [40] M. Lakrib and T. Sari, *Averaging results for functional differential equations*, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 45, No. 2 (2004), pp. 375-386; translation in Siberian Mathematical Journal, Vol. 45, No. 2 (2004), pp.311-320. 3
- [41] M. Lakrib and T. Sari, *Time averaging for ordinary differential equations and retarded functional differential equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010, No. 40 (2010), pp. 1-24. 3
- [42] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov and P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific Publishing Company, Singapore, Vol. 6, 1989.
- [43] V. Lakshmikantham and R. N. Mohapatra, *Theory of fuzzy differential equations and inclusions*, CRC Press, 2004. 3, 50, 51, 52
- [44] G. Lin, *Periodic solutions for van der Pol equation with time delay*, Applied mathematics and computation, Vol. 187, No. 2 (2007), pp. 1187-1198. 2
- [45] J. Littlewood, *On nonlinear differential equations of the second- order III*, Acta Mathematica, Vol. 97 (1957), pp. 267-308 (errata in Acta Mathematica, Vol. 98, No. 110 (1957)). 2
- [46] J. Littlewood, *On nonlinear differential equations of the second-order IV*, Acta Mathematica, Vol. 98 (1957), pp. 1-110. 2
- [47] J. J. Nieto, R. Rodríguez-López and D. N. Georgiou, *Fuzzy differential systems under generalized metric spaces approach*, Dynamic Systems and Applications, Vol. 17, No. 1 (2008), pp. 1-24. 46
- [48] J. Y. Park and H. K. Han, *Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 22, No. 2 (1999), pp. 271-279.
- [49] A. V. Plotnikov and T. A. Komleva, *Averaging of the Fuzzy Differential Equations*, Uncertain Systems, Vol. 6, No. 1 (2012), pp. 30-37. 3, 46, 56
- [50] A. V. Plotnikov and N. V. Skripnik, *Differential equations with "clear" and fuzzy multivalued right-hand side : Asymptotic methods*, Astroprint, Odessa, 2009 (in Russian).
- [51] I. Rachůnková and J. Tomeček, *A new approach to BVP's with state-dependent impulses*, Boundary Value Problems, Vol. 2013, No. 22 (2013), pp. 1-22. 2
- [52] I. Rachunkova and M. Tvrđy, *Second order periodic problem with phi-Laplacian and impulses*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, Vol. 63, No. 5 (2005), pp. 257-266. 3
- [53] Y. V. Rogovchenko, *Impulsive evolution systems : Main results and new trends*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Vol. 3, No. 1 (1997), pp. 57-88.
- [54] H. L. Royden, *Real Analysis*, Third edition, Prentice-Hall of India, New Delhi, 1988. 6, 8

-
- [55] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, third edition, *Tata McGraw-Hill Education*, New York, 1987. 6
- [56] B. N. Sadovskii, *On a fixed point principle*, *Functional Analysis and Its Applications*, Vol. 1, No. 2 (1967), pp. 74-76. 13
- [57] A. Samoilenko and N. Peresyuk, *Differential Equations with Impulsive Effectes*, *World Scientific Publishing Company*, Singapore, 1995.
- [58] J. A. Sanders, F. Verhulst and J. A. Murdock, *Averaging methods in non-linear dynamical systems*, *Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag*, New York, Vol. 2, 2007.
- [59] L. Schwartz, *Analyse : Topologie générale et analyse fonctionnelle*, *Hermann*, Paris, Vol. 11, 1970. 13
- [60] S. Seikkala, *On the fuzzy initial value problems*, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 24, No. 3 (1987), pp. 319-330. 46
- [61] D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, *Cambridge University Press*, Cambridge, Vol. 66, 1980. 13
- [62] S. J. Song and C. X. Wu, *Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations*, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 110, No. 1 (2000), pp. 55-67. 46
- [63] J. Tomecek, *Nonlinear boundary value problem for nonlinear second-order differential equations with impulses*, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, Vol. 2005, No. 10 (2005), pp. 1-22. 3
- [64] B. van der Pol, *A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations*, *Radio Reviews*, Vol. 1, No. 1920 (1920), pp. 701-710. 1
- [65] B. van der Pol, *On "relaxation oscillations"*, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. 2, No. 11 (1926), pp. 978-992.
- [66] B. van der Pol, *The nonlinear theory of electric oscillations*, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, Vol. 9, No. 22 (1934), pp. 1051-1086. 1
- [67] D. Vorobiev and S. Seikkala, *Towards the theory of fuzzy differential equations*, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 125, No. 2 (2002), pp. 231-237. 46
- [68] M. Vidyasagar, *Nonlinear systems analysis*, *Siam*, (2002) 60
- [69] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, *Information and control*, Vol. 8, No. 3 (1965), pp. 338-353.
- [70] A. H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, *Dover Publications*, New York, 1987. 6, 7