

Électrodynamique quantique en guide d'onde

par

Kevin Lalumière

Thèse présentée au département de physique
en vue de l'obtention du grade de docteur ès sciences (Ph.D.)

FACULTÉ des SCIENCES
UNIVERSITÉ de SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 27 juin 2015

Le 27 juin 2015

le jury a accepté la thèse de Monsieur Kevin Lalumière dans sa version finale.

Membres du jury

Professeur Alexandre Blais
Directeur de recherche
Département de physique

Professeur Denis Morris
Membre interne
Département de physique

Benjamin Huard
Professeur associé
Membre externe
Laboratoire Pierre Aigrain
Ecole Normale Supérieure

Professeur David Poulin
Président rapporteur
Département de physique

Aux fous qui choisissent le chemin difficile

Sommaire

L'électrodynamique quantique en guide d'onde étudie le comportement de circuits électriques supraconducteurs composés entre autres de jonctions Josephson et de lignes à transmission. Ces circuits présentent peu de pertes puisqu'ils sont supraconducteurs. De plus, grâce à la non-linéarité des jonctions Josephson, ils peuvent présenter des comportements typiquement quantiques.

Dans cette thèse, nous élaborons un cadre théorique qui permet de traiter la connexion entre les lignes à transmission et les éléments de circuits localisés (*lumped element*). Nous présentons ensuite la théorie d'entrée-sortie dans le contexte de ce cadre théorique. Comme son nom l'indique, celle-ci lie les observables à la sortie du circuit à celles à son entrée et elle permet de faire des prédictions expérimentales. Nous obtenons aussi une équation maîtresse qui décrit le circuit lorsque l'information contenue dans les lignes à transmission est perdue ou ignorée.

Nous utilisons le cadre théorique développé pour étudier la situation où deux circuits qui se comportent chacun comme un atome sont connectés à une ligne à transmission. Nous montrons que la physique dans ce type de système dépend de la distance entre les deux atomes artificiels. Lorsque la distance est telle que la phase φ acquise par le champ électromagnétique entre les deux atomes artificiels est un multiple entier de π , on observe qu'une superposition d'états particulière des atomes est couplée à la ligne à transmission. On dit que cet état est brillant tandis que l'autre état est dit sombre. Lorsque la phase φ acquise par le champ électromagnétique est un multiple impair de $\pi/2$, on observe plutôt une interaction cohérente entre les deux atomes artificiels. Nous suggérerons des protocoles pour observer des signatures expérimentales de cette physique. Nous présentons des résultats expérimentaux obtenus suite à ces prédictions par nos collègues du groupe d'Andreas Wallraff à Zurich. Ces résultats confirment la théorie. Parmi ces données, on retrouve la première mesure d'une signature claire de l'interaction cohérente entre deux atomes.

Nous utilisons aussi le cadre théorique développé pour étudier des circuits dans lesquels

les inductances dépendent du temps. Nous nous intéressons à ces circuits puisqu'ils sont généralement non réciproque, ce qui en fait des candidats idéaux pour implémenter des circulateurs. Ces dispositifs qui permettent d'obtenir un couplage unidirectionnel entre deux circuits sont généralement réalisés à l'aide d'aimants. Ainsi, un défi important du domaine est de concevoir un circulateur qui peut s'intégrer à un circuit supraconducteur. On utilise notre cadre théorique pour décrire les circuits avec des inductances variables à l'aide d'un opérateur de transfert qui relie les entrées du circuit à ses sorties. Cet objet permet d'extraire les conditions sous lesquelles ce type de circuit se comporte comme un circulateur. On utilise aussi l'opérateur de transfert pour étudier un modèle de circuit qui sera testé sous peu par nos collaborateurs de JILA dans le but d'implémenter un des premiers circulateurs sans conversion de fréquence nette, sans pertes et sans ferrite. On montre que ce modèle de circuit se comporte bien comme un circulateur, avec une largeur de bande de l'ordre de 200 MHz et un niveau d'imperfections de -20 dB.

Remerciements

J'aime imaginer que je suis rendu là où je suis parce que je suis brillant et que je travaille fort. Évidemment, c'est faux. Si je suis où je suis, c'est grâce à la chance et grâce à mon entourage. S'il est improbable que je réussisse à remercier ici tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à cette thèse, il est complètement impossible que je le fasse d'une manière brève et intéressante. C'est pourquoi j'adopte une approche différente. J'utilise les quelques paragraphes suivants pour souligner l'importance de quelques-unes des personnes que j'ai eu la chance de côtoyer dans ma vie.

Je veux d'abord remercier mes parents, mon père Jacques et ma mère France. Vous avez toujours cru en moi. Vous me disiez que je pouvais devenir ce que je voulais, n'importe quoi ! Vous saviez aussi comment me motiver tout en me gardant sain mentalement. Pendant que papa me mettait le minimum de pression requis pour éviter que je devienne paresseux, maman me rassurait en me disant que le père-Noël m'amènerait un Nintendo peu importe mes notes, tant que je faisais de mon mieux à l'école. Vous m'avez aussi fait visionner le film *Back to the Future*, ce qui a clairement influencé mes ambitions. Depuis ce temps, je veux devenir un inventeur qui rock, et cette thèse est un premier pas vers cet objectif. Il faut maintenant que je rock !

Je remercie aussi mon frère Sébastien. Sébastien, mon rôle pendant les premières années de ta vie était de te protéger et de te mener la vie dure. Je crois avoir assez bien réussi. De ton côté, malgré mon rôle de grand frère fatigant, tu n'as jamais trop hésité à me laisser démonter tes jouets pour que je puisse étudier leur fonctionnement. Ça ne doit pas avoir nui à mes études scientifiques. Cependant, c'est surtout pour ce qui s'est produit après que je te remercie. C'est lorsque j'ai découvert Sébastien le petit frère complice avec lequel je peux discuter que j'ai vraiment commencé à triper. Je suis super chanceux d'avoir un frère avec lequel je m'entends si bien, un petit frère que j'aime parce que je le veux, pas parce que je le dois. Merci d'être là.

Un an après avoir connu mon frère, en 1990, j'ai connu Maxime. C'est à ce moment-

là, pendant que je me faisais garder chez lui, que Jacques, son père, m'a fait découvrir les Débrouillards. Cette série et ce magazine m'ont clairement aidé à développer ma passion pour la science, alors un merci spécial à Jacques. À partir de 1995, j'ai commencé à voir Maxime plus souvent. Depuis ce temps-là, nous n'avons jamais arrêté de nous voir régulièrement. Nous avons tout vécu ensemble. Des Power Rangers aux premiers BBQ, en passant par les premières dragues et les premières brosses. Merci Max de partager ce voyage à travers la vie avec moi. Merci pour tes projets fous, comme celui de commencer à jouer au hockey à 26 ans. Merci à Francis et Alexandre d'avoir eux aussi embarqué dans ces projets. Ça m'a permis de mieux vous connaître et de réaliser à quel point c'est trippant être avec vous. Maintenant je peux dire que j'ai trois très bons chums. Merci aux autres amis de St-Hyacinthe comme par exemple Annick, Marie-Christine et Audrey. Merci d'être là quand je descends, de bonne humeur, prêt à faire la fête ou à déconner.

Merci à mes professeurs du Collège Antoine-Girouard. Karina, Jean, Bernard, vous avez su entretenir et faire pousser ma passion pour la science. Merci à Richard, Myriam et Annie-Claude de m'avoir aidé à passer à travers le secondaire. Merci à Fernand du Cégep de St-Hyacinthe. Merci pour ta passion contagieuse des mathématiques, pour tes conseils, pour ton implication dans la vie étudiante scientifique. Merci aux gars de ma promotion, Jeezus. Un merci particulier aux Davids et à Guillaume, avec qui j'ai partagé des bières et surtout avec qui j'ai partagé mes idées lors de ces dix dernières années. Merci aux professeurs du département de physique de Sherbrooke pour leur dévouement. Un merci plus particulier à David Sénéchal pour ses notes de cours super complètes, disponibles gratuitement sur Internet. Merci à mes collègues. Félix, Adam, Vincent, Baptiste, Arne, Christian, Farzad, Nicolas, Shruti, Marcus, Jérôme, Samuel, Maxime, Clemens, Matt, merci pour les discussions. Thanks Arjan, Joseph, Arkady, Andreas, Ben and Konrad for the ideas and for helping me making my work a lot more interesting! Un merci spécial à tous les membres de l'EPIQ, encore une fois pour des discussions, formelles ou pas, super intéressantes. Merci M. Poulin, M. Morris et M. Huard pour votre lecture de cette thèse.

Merci Marilyne, Raoul et Léone. Partager ma vie avec vous m'a beaucoup aidé tout au long de mon doctorat. J'ai tendance à le prendre pour acquis, mais savoir que peu importe ce qui arrive, le soir, on va retourner faire dodo avec trois bibittes qui nous aiment, c'est merveilleux. Marie, tu m'as écouté te raconter la même histoire une bonne centaine de fois sans broncher. Disons que tu dois le savoir maintenant que *mes fits n'étaient pas optimaux* ou bien qu'il y avait un problème avec mon calcul. Il n'y a pas que le quotidien que j'ai partagé avec toi. Tu étais toujours là pour moi, lors des moments les plus difficiles par exemple. Tu as aussi rendu les moments agréables mémorables, de Orford à Paris, en passant par la Nouvelle-Écosse, Chicoutimi et l'Igloo. Merci Marie d'être toi, d'être vraie. Merci d'avoir été

là pendant les 7 dernières années, et de continuer à toujours être là avec moi.

Finalement, je remercie Alexandre. Merci Alexandre pour ta patience. Quand je suis rentré en stage et jusqu'au début de mon doctorat, je n'étais pas un super bon étudiant. J'étais épuisé par les cours et j'étais devenu paresseux après un stage qui s'était mal déroulé. Je ne sais pas exactement pourquoi, mais tu as décidé de continuer à croire en moi. Grâce à ça, j'ai pu prendre le taureau par les cornes lors de mon doctorat et finalement devenir un bon physicien. Tu m'as aussi fait comprendre l'aspect crucial de la communication en science. Depuis que j'étais un enfant, j'imaginai que si j'avais quelque chose d'intelligent à dire, les gens m'écouteraient. Je croyais que l'important était le contenu, pas le contenant. Tu m'as fait réaliser que les gens sont tellement occupés et fatigués dans la vie que le contenant est autant important que le contenu. En science, vendre et expliquer ses résultats est autant important que de les trouver. Le but, c'est que nos résultats puissent servir à rendre la vie de nos collègues plus intéressante, plus agréable ou plus facile. Merci de m'avoir fait comprendre cet aspect de la science. Je suis certain que ça me sera utile toute ma vie.

Je termine en remerciant ceux qui m'ont fourni les outils nécessaires lors de mon doctorat, et ceux qui m'ont financé. Ainsi, je remercie Calcul Québec, Calcul Canada, le CIFAR et le CRSNG.

Table des matières

Sommaire	iii
1 Circuits électriques quantiques	1
1.1 Définitions	2
1.2 Bref historique	4
1.3 Problématiques abordées dans la thèse	5
2 Connexion entre un circuit à éléments discrets et des lignes à transmission	8
2.1 Ligne à transmission	9
2.1.1 Seconde quantification	11
2.1.2 Ligne à transmission infinie et semi-infinie	12
2.2 Connexion à un circuit électrique quantique	14
2.2.1 Connexion capacitive	16
2.2.2 Connexion inductive	17
2.2.3 Exemples de circuits électriques quantiques connectés à une ligne à transmission	19
2.2.4 Seconde quantification	21
2.3 Théorie d'entrée-sortie	23
2.3.1 Exemple	25
2.4 Équation maîtresse	26
2.4.1 Inhomogénéités de la ligne à transmission	27
2.4.2 Signaux de pilotage	29
2.4.3 Représentation d'interaction	32
2.4.4 Trace partielle sur le champ électromagnétique	33
2.4.5 Théorie d'entrée-sortie liée à l'équation maîtresse	36
2.4.6 Directions futures et formalisme SLH de Gough et James	37
3 Signatures de l'interaction entre deux atomes artificiels	39
3.1 Deux atomes artificiels interagissant dans un vide unidimensionnel	40

3.1.1	Régime d'interaction dissipative	42
3.1.2	Régime d'interaction cohérente	45
3.2	Mesure de l'émission élastique	48
3.2.1	Mesure homodyne à 8 ports	48
3.2.2	Cas à un atome artificiel	52
3.2.3	Régime d'interaction dissipative	54
3.2.4	Régime d'interaction cohérente	56
3.3	Mesure du spectre d'émission en puissance	58
3.3.1	Cas à un atome artificiel	60
3.3.2	Régime d'interaction dissipative	61
3.3.3	Régime d'interaction cohérente	63
3.3.4	Directions futures	65
4	Circulateur micro-onde supraconducteur	67
4.1	Les circulateurs	68
4.1.1	Définition et utilité	68
4.1.2	Principe de fonctionnement	69
4.2	Modulation des paramètres de circuits LC couplés inductivement à des lignes à transmission	72
4.2.1	Opérateur de transfert	73
4.3	Conception d'un circulateur actif	78
4.3.1	Modulation des paramètres internes	79
4.3.2	Modulation des paramètres externes	80
4.4	Description d'un nouveau design de circulateur actif	83
4.4.1	Élimination des modes sans capacité	85
4.4.2	Variation sinusoïdale des énergies inductives de couplage	88
4.4.3	Implémentation des inductances modulables à l'aide de SQUIDs	95
4.4.4	Variation sinusoïdale du flux dans les SQUIDs	97
4.4.5	Conclusions sur les performances du circulateur	100
	Conclusion	102
	A Limite continue du Hamiltonien représentant les connexions capacitives	104
	B Limite continue de l'énergie potentielle représentant les connexions inductives	107
	C Obtention de la relation d'entrée-sortie	109
	D Forme abstraite du Hamiltonien pour l'obtention de l'équation maîtresse	113

<i>Table des matières</i>	x
E Obtention de l'équation maîtresse	115
F Obtention de la relation d'entrée-sortie liée à l'équation maîtresse	120
G Simplification de la fréquence de l'interaction d'échange	123
H Changement de base de l'équation maîtresse	125
H.1 Régime d'interaction dissipative	125
H.2 Régime d'interaction cohérente	127
Bibliographie	128

Table des figures

1.1	Jonction Josephson	3
2.1	Ligne à transmission	9
2.2	Circuit électrique quantique connecté à des lignes à transmission	15
2.3	Exemples de circuits électriques quantiques connectés	20
2.4	Circuit électrique quantique connecté à une ligne à transmission à l'origine	23
2.5	Circuit électrique quantique couplé à une ligne à transmission infinie	27
3.1	Deux atomes artificiels interagissant avec le champ électromagnétique à l'intérieur d'une ligne à transmission	41
3.2	Régime d'interaction dissipative	44
3.3	Régime d'interaction cohérente	46
3.4	Illustration schématique de la mesure homodyne à 8 ports	49
3.5	Transmission et réflexion pour un transmon dans une ligne à transmission	53
3.6	Transmission et réflexion pour le régime dissipatif	55
3.7	Transmission et réflexion pour le régime d'interaction cohérente	57
3.8	Spectre d'émission en puissance pour un transmon	60
3.9	Spectre d'émission en puissance pour deux transmons, régime d'interaction dissipative	62
3.10	Conditions requises pour observer l'état sombre dans le spectre d'émission en puissance	63
3.11	Spectre d'émission en puissance pour deux transmons, régime d'interaction cohérente	64
3.12	Réseau de lignes à transmission connectées à des transmons	66
4.1	Utilisation typique d'un circulateur dans un circuit électrique quantique	68
4.2	Principe de fonctionnement d'un circulateur horaire	69
4.3	Modèles de circuits potentiels pour implémenter un circulateur actif.	71
4.4	Design du circulateur proposé avec nos collaborateurs de JILA	84

4.5	Spectre du circulateur sous des variations sinusoïdales de l'énergie inductive	94
4.6	Spectre du circulateur sous des variations sinusoïdales du flux magnétique	100

Chapitre 1

Circuits électriques quantiques

We never experiment with just one electron or atom or (small) molecule. In thought-experiments we sometimes assume that we do; this invariably entails ridiculous consequences...

E. Schrödinger, *British Journal of the Philosophy of Sciences*, 3, 1952.

En 1952, cette affirmation de Schrödinger n'avait rien d'extraordinaire. Selon la sagesse commune, les expériences impliquant un seul atome étaient plus du domaine de la science-fiction que de la science. Soixante-trois ans plus tard, il n'est toutefois plus surprenant de voir des expériences où des atomes individuels sont contrôlés de telle sorte à manifester leur nature quantique dans des expériences complètement contre-intuitives pour les non-initiés.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à une nouvelle possibilité offerte par les avancées des dernières décennies : construire les « atomes » sur mesure. L'idée est d'utiliser les techniques standard de lithographie pour imprimer un circuit électrique, un peu comme on fait pour construire le processeur d'un ordinateur. Dans le cas qui nous intéresse, le circuit électrique est fait d'un métal supraconducteur, comme l'aluminium. Ce qui est spectaculaire, c'est qu'une fois refroidi, ce circuit électrique composé de $\sim 10^{23}$ atomes se comporte d'une manière quantique. En particulier, il peut agir essentiellement comme un seul ou comme un petit ensemble d'atomes. Les propriétés de cet ensemble peuvent être contrôlées lors du design du circuit, et même parfois *in situ*. Ceci permet la réalisation d'expériences mettant en évidence les propriétés étonnantes de la mécanique quantique.

Dans ce chapitre, nous clarifions d'abord le concept de circuit électrique quantique. Par la suite, nous présenterons un bref résumé de l'histoire de ce type de circuit électrique. Ceci étant fait, nous sommes en bonne position pour énoncer la problématique abordée dans

cette thèse.

1.1 Définitions

Le but de cette section est de définir et de décrire les circuits électriques quantiques. D'abord, il faut préciser ce que signifie le qualificatif *quantique*. Dans cette thèse, nous qualifions de quantique ce qui s'explique plus facilement à l'aide d'une théorie quantique qu'à l'aide d'une théorie classique¹. Ainsi, un circuit électrique est qualifié de quantique lorsque son comportement observé s'explique difficilement selon les théories classiques disponibles.

Évidemment, il y a des liens entre les théories classiques et la mécanique quantique. Un de ces liens est la mesure. Un système dans un état quantique exotique, une fois mesuré, s'effondre typiquement dans un état qui ne présente plus de propriétés quantiques surprenantes. On appelle cette transition d'un état quantique à un état classique la *décohérence*. Dans la culture populaire, le concept de mesure implique typiquement un être conscient qui gagne de l'information sur un système donné. Ce concept n'est toutefois pas approprié dans le contexte de cette thèse. Ici, on dit plutôt qu'un système est mesuré dès que de l'information sur son état est disponible dans l'environnement. De cette manière, le concept de mesure en mécanique quantique ne dépend pas de l'existence d'un être conscient. En conclusion, pour garder un système dans un état quantique, il faut bien contrôler son interaction avec l'environnement. C'est pourquoi un circuit électrique présentant une résistance R en série non nulle peut difficilement être qualifié de quantique. En effet, on peut voir cette résistance comme un flot d'information non contrôlé du système vers son environnement.

Construire un circuit sans résistance nécessite d'utiliser un matériel supraconducteur. C'est pourquoi on utilise typiquement l'aluminium, un supraconducteur aux propriétés bien comprises, pour construire les circuits électriques quantiques. Pour concevoir le circuit, on restreint d'abord notre choix d'éléments à des condensateurs ou à des inducteurs. Cette restriction n'est pas commode puisqu'on peut montrer qu'un circuit composé seulement d'un ensemble de condensateurs et d'inducteurs est linéaire. Autrement dit, son énergie varie d'une manière linéaire avec le nombre d'excitation. Or, on peut montrer que les circuits linéaires sont toujours dans la limite de correspondance. Ainsi, on ne peut pas concevoir des circuits électriques quantiques (avec la définition de quantique ci-dessus) seulement avec des condensateurs et des inducteurs.

1. Cette définition est clairement subjective, voire ambiguë. Nous nous en contentons puisque la différence entre ce qui est classique et ce qui est quantique est sujet à controverse. Ces controverses sortent du cadre de cette thèse.



FIGURE 1.1 Jonction Josephson. a) Schéma d'une jonction Josephson, soit deux supraconducteurs séparés par une mince couche isolante. b) Symbole utilisé pour représenter une jonction Josephson dans un circuit électrique. c) Autre symbole utilisé pour représenter une jonction Josephson dans un circuit électrique. Le « X » représente l'inductance non linéaire tandis que le condensateur représente la capacité entre les deux supraconducteurs.

Heureusement, il existe un élément exclusif aux circuits supraconducteurs que nous n'avons pas encore présenté, la jonction Josephson. Introduit par Brian Josephson en 1962 [1], cet élément est fabriqué en séparant deux supraconducteurs par une couche d'isolant, comme illustré à la figure 1.1a). Lorsque l'épaisseur de la couche isolante est assez mince, il est possible pour une paire de Cooper dans le supraconducteur du bas de traverser dans le supraconducteur du haut par effet tunnel. La jonction Josephson est un élément de circuit non résistif. De plus, comme nous le verrons plus loin, cet élément se comporte comme une inductance non linéaire. Ainsi, l'ajout de cet élément à nos deux éléments de base est suffisant pour permettre la conception de circuits électriques quantiques. Dans un schéma de circuit électrique, on représente la jonction Josephson à l'aide d'un des symboles illustrés aux figures 1.1b) et c).

En pratique, les circuits électriques quantiques sont placés dans des réfrigérateurs à dilution pour maintenir leur température suffisamment basse pour la supraconductivité et minimiser le bruit thermique. On utilise des lignes à transmission, ou guide d'onde unidimensionnel, pour envoyer ou recevoir des signaux électromagnétiques de ces circuits. Cette thèse s'intéresse à l'interaction entre les circuits électriques quantiques et les signaux électromagnétiques dans ces guides d'onde unidimensionnels. Il convient, avant d'élaborer sur ce sujet, de situer la perspective historique dans laquelle les travaux ont été effectués.

1.2 Bref historique

Nous discutons ici brièvement de l'histoire expérimentale des circuits électriques quantiques. Une difficulté rencontrée lorsqu'on raconte une histoire est de choisir son point de départ. Ici, nous choisissons arbitrairement 1987. Nous passons donc sous silence les contributions importantes au domaine qui ont eu lieu avant cette date, comme celle de Caldeira, Leggett, Josephson et plusieurs autres [1, 2].

En 1987, John Martinis et Michel Devoret, sous la supervision de John Clarke, observent les niveaux d'énergie d'une jonction Josephson [3]. Cette observation suggère que la différence de phase entre les deux supraconducteurs d'une jonction Josephson se comporte d'une manière quantique. Il s'agit d'un résultat très important puisque cette différence de phase est un degré de liberté qu'on peut qualifier de macroscopique². Or, les comportements non intuitifs de la théorie quantique sont typiquement restreints aux objets microscopiques comme les atomes. Dans ce contexte, montrer qu'un objet fait de $\sim 10^{23}$ atomes peut se comporter d'une manière quantique est un accomplissement spectaculaire. C'est un des premiers pas vers les circuits électriques quantiques.

Une décennie plus tard, Bouchiat et ses collaborateurs au CEA-Saclay mesurent les fluctuations de charge sur une jonction Josephson [4]. Pour y arriver, ils connectent une jonction Josephson capacitivement à une source de tension. Ce dispositif porte aujourd'hui le nom de boîte de Cooper [5]. Le groupe utilise ce montage pour montrer comment les fluctuations aux bornes de la jonction Josephson varient en fonction de la tension appliquée sur la jonction. Cette expérience montre que pour certaines valeurs de la tension, l'état des fluctuations est décrit par une superposition cohérente d'états de charge qui diffèrent par une paire de Cooper. Il s'agit d'une autre manifestation du caractère quantique de la jonction Josephson.

En 1999, Yasunobu Nakamura et collaborateurs réussissent à contrôler l'évolution cohérente quantique d'un circuit électrique composé entre autres de plusieurs jonctions Josephson [6]. Cette expérience est un point tournant du domaine. C'est la possibilité de contrôler des circuits électriques quantiques qui ouvre la porte à leur utilisation dans des expériences fondamentales sondant les propriétés curieuses de la mécanique quantique. C'est cependant la possibilité d'utiliser ces circuits pour implémenter des qubits que mettent de l'avant ces résultats. Il faut dire que les années 1990 ont vu l'élaboration de plusieurs algorithmes utilisant des propriétés quantiques pour réduire la complexité de certaines

2. La définition précise de macroscopique dans ce contexte sort du cadre de cette thèse. Considérons ici vulgairement que macroscopique signifie mesurable directement et facilement.

tâches. Entre autres, l'introduction par Peter Shor d'un algorithme réduisant potentiellement d'une manière exponentielle la complexité pour décrypter des messages secrets en a excité plus d'un et a stimulé la recherche visant à construire une machine de calcul quantique [7]. L'implémentation d'ordinateurs classiques à l'aide de circuits électriques étant coutumière, il semble donc naturel de suggérer l'utilisation de circuits électriques quantiques pour construire un ordinateur quantique.

C'est en 2004 que le groupe de R.J. Schoelkopf à l'université de Yale entre dans cette histoire. L'équipe est inspirée par les travaux de Serge Haroche et Jean-Michel Raimond où des atomes sont lancés dans une cavité pour interagir avec des photons [8]. C'est avec ces idées en tête que le groupe de Yale propose et réalise un circuit électrique quantique où un atome artificiel interagit avec une cavité artificielle [5,9]. L'atome est implémenté à l'aide de jonctions Josephson tandis qu'un résonateur coplanaire joue le rôle de la cavité. Ils nomment cette architecture « électrodynamique quantique en circuit », ou plus simplement *circuit QED*. Le design du circuit est innovateur sur plusieurs plans. Premièrement, contrairement aux atomes d'Haroche et Raimond, l'atome artificiel ne tombe pas puisqu'il est imprimé sur un substrat. Deuxièmement, la structure bidimensionnelle du résonateur augmente la concentration du champ électrique au niveau de l'atome. Puisque le couplage entre l'atome et le résonateur est de nature dipolaire électrique, une concentration élevée du champ électrique implique un couplage très fort entre l'atome artificiel et le résonateur. Troisièmement, le résonateur, qu'on peut voir comme un circuit LC, agit comme un filtre pour le bruit, ce qui augmente beaucoup la cohérence de l'atome. Finalement, il est possible d'utiliser le résonateur pour lire ou pour contrôler l'atome. Tous ces avantages font de ce type de design un cadre intéressant pour réaliser des expériences fondamentales en mécanique quantique ou pour le calcul quantique.

1.3 Problématiques abordées dans la thèse

Le progrès des circuits électriques quantiques entre 2004 et aujourd'hui est fulgurant, autant sur le plan de la physique fondamentale que sur le plan du calcul quantique [10,11]. Dans cette section, on présente deux articles parus durant ces années afin de motiver les travaux de cette thèse.

En 2010, Astafiev et ses collaborateurs conçoivent un circuit où un atome artificiel est directement couplé à une ligne à transmission ouverte, et non pas un résonateur comme dans les expériences de Yale [12]. Ce qui rend le tout intéressant est le caractère unidimensionnel de la ligne à transmission. En effet, dans un espace à une dimension, un photon ne peut

se propager que dans deux directions. Ainsi, si un atome est présent dans la ligne, il y a une chance sur deux pour qu'il subisse une collision avec un photon qui se déplace dans une direction arbitraire. On contraste avec le cas tridimensionnel où un photon possède une probabilité élevée de ne pas entrer en collision avec un atome puisqu'il se propage souvent dans la mauvaise direction. C'est pourquoi travailler avec un système unidimensionnel permet d'obtenir un couplage très élevé entre l'atome et le champ électromagnétique de la ligne à transmission. Astafiev et ses collaborateurs peuvent ainsi réaliser des expériences difficiles à réaliser avec un atome réel. Nous décrivons ces expériences dans le chapitre 3 avant de nous intéresser au cas où plusieurs atomes sont couplés à une ligne à transmission. Plus particulièrement, nous nous intéressons aux signatures expérimentales de l'interaction entre ces atomes artificiels. Ces travaux ont fait l'objet de deux publications [13, 14].

Une autre expérience qui a motivé les travaux de cette thèse a été effectuée par Nicolas Roch et collaborateurs en 2014 [15]. Cette expérience enchevêtre deux atomes artificiels, chacun placé dans une cavité différente, en les mesurant. Plus précisément, les atomes, qui possède chacun un niveau d'énergie $|e\rangle$ excité et un niveau d'énergie $|g\rangle$ fondamental, sont initialisés dans l'état $(|e\rangle + |g\rangle)(|e\rangle + |g\rangle)/2$. En simplifiant beaucoup, on peut imaginer que la mesure répond à la question « Est-ce que les deux atomes sont dans le même état lorsqu'on les mesure dans la base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$? » Si la réponse est oui, l'état s'effondre dans l'état enchevêtré $(|ee\rangle + |gg\rangle)/\sqrt{2}$, tandis que si la réponse est non, l'état s'effondre dans un autre état enchevêtré, $(|eg\rangle + |ge\rangle)/\sqrt{2}$. C'est donc la mesure qui crée l'enchevêtrement entre ces deux atomes artificiels séparés par près de deux mètres de câble³. Un tel résultat n'est toutefois possible que si que le champ électromagnétique voyage d'une manière unidirectionnelle entre les deux cavités. Pour cette raison, des circulateurs sont insérés entre les cavités. Ces dispositifs utilisent typiquement l'effet Faraday pour imposer un sens préférentiel au champ électromagnétique qui les traverse. Puisqu'ils sont souvent réalisés à l'aide d'aimants permanents, leur intégration à un circuit imprimé supraconducteur est très difficile. Cette restriction a significativement compliqué l'expérience de Roch et collaborateurs. D'ailleurs, plus généralement, l'impossibilité d'intégrer les circulateurs sur les circuits imprimés est un frein à un nombre important d'expériences dans le domaine. C'est ce qui nous a motivé à concevoir, avec nos collaborateurs de JILA aux États-Unis, un circulateur qui fonctionne sans aimants permanents. Le design de ce circulateur ainsi que son analyse théorique sont présentés au chapitre 4. Ce travail a fait l'objet d'une publication [17] et une seconde publication est en préparation.

Un cadre théorique suffisant pour décrire à la fois les atomes artificiels couplés à la

3. La référence [16] dont je suis co-auteur présente les résultats de cette expérience plus en détail, mais encore d'une manière vulgarisée.

ligne à transmission et le circulateur est présenté dans le chapitre 2. Plus précisément, cette théorie s'intéresse à l'interaction entre un circuit électrique quantique quelconque et le champ électromagnétique dans des lignes à transmission. Plus de détails sur l'analyse des circuits électriques quantiques sont disponibles dans les notes de Michel Devoret [18] et de Steve Girvin [19].

Chapitre 2

Connexion entre un circuit à éléments discrets et des lignes à transmission

Dans ce chapitre, nous présentons les notions théoriques nécessaires pour comprendre l'interaction entre des circuits électriques quantiques et le champ électromagnétique à l'intérieur de lignes à transmission. Dans cette thèse, lorsque nous parlons de circuits électriques quantiques, nous faisons toujours référence à un circuit électrique à éléments discrets, c'est-à-dire localisés (*lumped elements circuit*). Au contraire, les lignes à transmission sont des éléments continus. Autrement dit, ils sont d'une taille significative comparée à la longueur d'onde du champ électromagnétique étudiée (de l'ordre du cm). Nous utilisons le terme montage pour désigner le circuit complet que forme le circuit électrique quantique et la ligne à transmission lorsqu'ils sont connectés ensemble.

La théorie présentée et développée dans ce chapitre réunit et généralise des théories introduites dans plusieurs ouvrages théoriques distincts [18–22]. L'objectif de cette démarche est de pouvoir écrire facilement et rapidement l'Hamiltonien et les équations du mouvement d'un montage arbitraire seulement par observation des éléments du montage. Nous voulons notamment éviter de repasser par la théorie quantique des champs pour chaque montage.

Le chapitre est organisé comme suit. D'abord, nous introduisons un formalisme utile pour décrire le champ électromagnétique dans les lignes à transmission. Par la suite, nous présentons une approche pour modéliser les connexions capacitatives ou inductives d'un circuit électrique quantique à une ligne à transmission. Cette approche est utilisée pour développer une théorie reliant le signal à l'entrée du montage expérimental à celui à sa sortie. Finalement, nous présentons une théorie qui permet de décrire l'évolution du circuit électrique quantique connecté à une ligne à transmission lorsqu'une partie de l'information

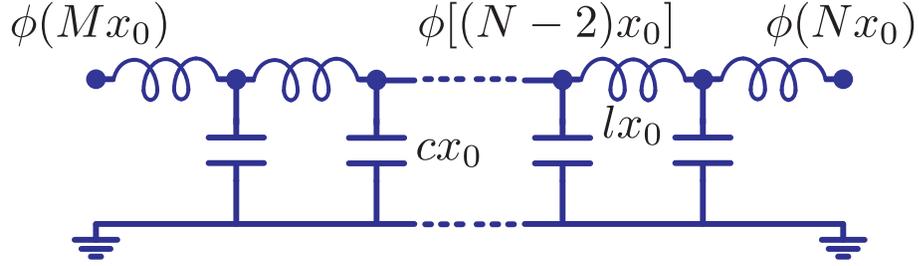


FIGURE 2.1 Représentation d'une ligne à transmission par un ensemble d'inductances en parallèle avec des condensateurs.

contenue dans le champ électromagnétique de la ligne est perdue ou ignorée. La théorie obtenue permet de modéliser la dissipation dans les circuits électriques quantiques.

2.1 Ligne à transmission

Le but de cette section est d'obtenir une description du champ électromagnétique à l'intérieur d'une ligne à transmission. Pour y arriver, nous utilisons l'approche standard qui consiste à modéliser la ligne comme un ensemble d'inductances en parallèle avec des condensateurs comme illustré à la figure 2.1. Nous supposons que l'inductance et la capacité par unité de longueur de la ligne sont l et c .

Dans cette thèse, nous choisissons le flux généralisé comme degré de liberté au lieu de choisir le courant ou la tension. À un point où la tension est $V(t)$, le flux généralisé est défini comme [18]

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t d\tau V(\tau). \quad (2.1)$$

Le flux généralisé est pratique puisqu'il peut être relié au courant et à la tension facilement. En effet, la dérivée par rapport au temps du flux généralisé est la tension, $\partial_t \phi(t) = V(t)$. De plus, en présence d'une inductance L , on peut aussi relier la dérivée temporelle du flux généralisé au courant $I(t)$ par $\partial_t \phi(t) = L \partial_t I(t)$. Ainsi, dans ce cas, le flux généralisé est le flux magnétique qui traverse l'inductance. Pour modéliser la ligne à transmission, on spécifie le flux généralisé $\phi(nx_0)$ à chaque noeud n . On fera tendre la taille x_0 de la maille élémentaire vers zéro à la fin du calcul.

Avec les concepts introduits jusqu'ici, nous pouvons maintenant écrire le Lagrangien \mathcal{L} de la ligne. Celui-ci nous permet ensuite d'obtenir l'Hamiltonien qui lui-même nous permet d'effectuer la première quantification. Rappelons que le Lagrangien est la différence

entre l'énergie cinétique du système, généralement une fonction de $\partial_t \phi(nx_0)$, et son énergie potentielle, généralement une fonction de $\phi(nx_0)$. Pour le circuit illustré à la figure 2.1, le Lagrangien est

$$\mathcal{L} = \sum_{n=M}^N \left(\frac{cx_0 [\partial_t \phi(nx_0)]^2}{2} - \frac{(\phi[(n+1)x_0] - \phi[nx_0])^2}{2lx_0} \right). \quad (2.2)$$

Il s'agit du total des différences entre l'énergie capacitive, $CV^2/2$ pour une capacité C et une tension V , et l'énergie inductive, $\phi^2/(2L)$ pour une inductance L et un flux ϕ . La somme est effectuée entre le noeud M et le noeud N qui représentent les limites de la ligne. Nous faisons tendre les limites de la ligne vers l'infinie à la section 2.1.2.

Pour obtenir l'Hamiltonien à partir du Lagrangien, il faut effectuer une transformée de Legendre. Celle-ci nécessite l'introduction des moments conjugués qui sont ici les charges

$$Q(nx_0) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_t \phi(nx_0)]} = cx_0 \partial_t \phi(nx_0). \quad (2.3)$$

L'Hamiltonien est défini comme

$$H = \sum_{n=M}^N [\partial_t \phi(nx_0)] Q(nx_0) - \mathcal{L}. \quad (2.4)$$

Ainsi, on obtient,

$$H = \sum_{n=M}^N \left(\frac{[Q(nx_0)]^2}{2cx_0} + \frac{(\phi[(n+1)x_0] - \phi[nx_0])^2}{2lx_0} \right). \quad (2.5)$$

La première quantification impose les relations de commutation entre les variables conjuguées,

$$[\phi(mx_0), Q(nx_0)] = i\hbar \delta_{mn}, \quad (2.6)$$

avec δ_{mn} le symbole de Kronecker.

Pour obtenir une description continue de la ligne à transmission, nous faisons maintenant tendre la taille x_0 de la maille élémentaire vers zéro. L'équation (2.3) montre que la charge $Q(nx_0)$ tend vers 0 avec x_0 . C'est pourquoi on définit la densité de charge $q(nx_0) = Q(nx_0)/x_0$. En utilisant cette définition, la définition de la dérivée et celle de l'intégrale de Riemann, on trouve

$$H = \int_{d_d}^{d_u} dx \left(\frac{[q(x)]^2}{2c} + \frac{[\partial_x \phi(x)]^2}{2l} \right). \quad (2.7)$$

Nous supposons que les extrémités de la ligne à transmission se situent à d_d et d_u et que

$d_0 = d_u - d_d$. On rappelle qu'on fera tendre d_0 vers l'infini plus loin. En se servant de la définition de la densité de charge, on montre que les relations de commutation sont maintenant

$$[\phi(x), q(y)] = i\hbar\delta(x - y), \quad (2.8)$$

avec $\delta(x - y)$ la distribution de Dirac. Le flux et la charge jouent donc un rôle analogue à la position et à la quantité de mouvement de l'oscillateur harmonique.

2.1.1 Seconde quantification

On veut maintenant effectuer un changement de variable pour écrire les opérateurs $\phi(x)$ et $q(x)$ en fonction d'opérateurs qui ont des relations de commutation du type $[\hat{b}(k_m), \hat{b}^\dagger(k_n)] = \delta_{mn}$. Ce changement de variable, connu sous le nom de seconde quantification, permet de diagonaliser l'Hamiltonien de l'équation (2.7). Pour arriver à nos fins, on développe $\phi(x)$ et $q(x)$ en série de Fourier en supposant des conditions aux limites périodiques. On obtient [23]

$$\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar Z}{2d_0|k_n|}} [\hat{b}(k_n) + \hat{b}^\dagger(-k_n)] \exp[ik_n x] \quad (2.9)$$

$$q(x) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} c|k_n|v \sqrt{\frac{\hbar Z}{2d_0|k_n|}} [\hat{b}(k_n) - \hat{b}^\dagger(-k_n)] \exp[ik_n x]. \quad (2.10)$$

Nous avons introduit l'impédance caractéristique $Z = \sqrt{l/c}$, le vecteur d'onde $k_n = 2\pi n/d_0$ et la vitesse $v = 1/\sqrt{lc}$ à laquelle se déplace le signal électromagnétique dans la ligne à transmission. En effectuant la transformée de Fourier inverse pour obtenir $\hat{b}(k_n)$ en fonction de $\phi(x)$ et $q(x)$, nous trouvons les relations de commutation

$$[\hat{b}(k_m), \hat{b}^\dagger(k_n)] = \delta_{mn} \quad (2.11)$$

comme désiré. La normalisation imposée dans les séries de Fourier (2.9) et (2.10) est nécessaire pour obtenir les relations de commutation canoniques entre $\hat{b}(k_m)$ et $\hat{b}^\dagger(k_n)$. Puisque les fonctions $\hat{b}(k_n)$ sont quelconques, les séries de Fourier sont générales et peuvent représenter n'importe quel opérateur hermitique malgré ce choix de normalisation.

On utilise les séries de Fourier des équations (2.9) et (2.10) pour remplacer $\phi(x)$ et $q(x)$ dans l'Hamiltonien. On obtient finalement l'Hamiltonien diagonal usuel pour le champ électromagnétique

$$H = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hbar|k_m|v \hat{b}^\dagger(k_m) \hat{b}(k_m). \quad (2.12)$$

Nous avons négligé l'énergie du vide qui est formellement infinie. Comme toujours, on peut montrer à l'aide du commutateur de l'équation (2.11) que les valeurs propres de l'opérateur $\hat{b}^\dagger(k_m)\hat{b}(k_m)$ sont entières et représentent le nombre de quanta dans l'état k_m [24], d'où le nom seconde quantification. On associe une énergie $\hbar|k_m|v$ à chacun de ces quantas.

2.1.2 Ligne à transmission infinie et semi-infinie

Lorsque l'impédance du circuit connecté à au moins une des extrémités de la ligne à transmission est adaptée, le champ électromagnétique n'est pas influencé par la longueur de la ligne. Dans ce cas, il est utile de considérer la ligne à transmission comme infinie ou semi-infinie. On considère la ligne à transmission comme infinie lorsque l'impédance est adaptée aux deux extrémités de la ligne. Si l'impédance est adaptée à seulement une des extrémités, la ligne est considérée comme semi-infinie.

Pour une ligne à transmission infinie ou semi-infinie, la longueur $d_0 \rightarrow \infty$. Pour que les séries de Fourier représentant $\phi(x)$ et $q(x)$ demeurent finies, nous définissons $b(k_n) = \sqrt{d_0/(2\pi)}\hat{b}(k_n)$. Le 2π au dénominateur est nécessaire pour obtenir les relations de commutation canoniques entre $b(k_n)$ et $b^\dagger(k_m)$. En utilisant cette définition et la définition de l'intégrale de Riemann, on obtient

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sqrt{\frac{\hbar Z}{2|k|}} [b(k) + b^\dagger(-k)] e^{ikx} \quad (2.13)$$

$$q(x) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk c |k| v \sqrt{\frac{\hbar Z}{2|k|}} [b(k) - b^\dagger(-k)] e^{ikx}. \quad (2.14)$$

Nous utilisons ensuite la transformée de Fourier inverse pour exprimer $b(k)$ en fonction de $\phi(x)$ et $q(x)$. Ceci nous permet d'obtenir les relations de commutation

$$[b(k_1), b^\dagger(k_2)] = \delta(k_1 - k_2) \quad (2.15)$$

désirées. On peut aussi récrire l'Hamiltonien en fonction des opérateurs $b(k)$. On obtient

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hbar |k| v b^\dagger(k) b(k). \quad (2.16)$$

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas noté de différences mathématiques entre le cas d'une ligne infinie et d'une ligne semi-infinie. Les représentations de Fourier des opérateurs $\phi(x)$ et $q(x)$ et l'Hamiltonien sont en effet les mêmes. Pour illustrer la différence, nous

passons dans la représentation de Heisenberg où les états sont constants et les opérateurs évoluent dans le temps comme

$$A(t) = e^{iHt/\hbar} A(0) e^{-iHt/\hbar}. \quad (2.17)$$

Puisque l'Hamiltonien est diagonal, on trouve facilement que [22]

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sqrt{\frac{\hbar Z}{2|k|}} \left[b(k) e^{-i|k|vt} + b^\dagger(-k) e^{i|k|vt} \right] e^{ikx} \quad (2.18)$$

$$q(x, t) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk c |k| v \sqrt{\frac{\hbar Z}{2|k|}} \left[b(k) e^{-i|k|vt} - b^\dagger(-k) e^{i|k|vt} \right] e^{ikx}. \quad (2.19)$$

Examinons maintenant la phase du terme proportionnel à $b(k)$ à la position x_i et au temps t_i , soit

$$\theta_0 = i|k|(\text{sign}[k]x_i - vt_i). \quad (2.20)$$

Au temps $t_f > t_i$, on considère que le point qui a pour phase θ_0 s'est déplacé à la position x_f de sorte que

$$\theta_0 = i|k|(\text{sign}[k]x_f - vt_f). \quad (2.21)$$

En égalant ces deux dernières expressions, on peut écrire x_f en fonction de x_i , t_i et t_f comme

$$x_f = \text{sign}[k]v(t_f - t_i) + x_i. \quad (2.22)$$

Dans une ligne infinie, on voit que si $k > 0$, x_f augmente avec t_f ce qui implique que le point se déplace vers la droite. C'est l'inverse lorsque $k < 0$. Par contre, on ne peut pas tirer cette conclusion dans une ligne semi-infinie. En effet, imaginez une ligne à transmission semi-infinie allant de $x \rightarrow -\infty$ à $x = 0$. En choisissant $k > 0$ et $x_i = 0^-$, l'équation (2.22) prédit que $x_f > 0$ pour $t_f - t_i > 0$. C'est une contradiction puisque nous avons supposé que la ligne à transmission s'arrête à $x = 0$. Cette contradiction implique qu'on ne peut pas associer une direction de propagation seulement au signe de k dans une ligne à transmission semi-infinie. Ainsi, dans une ligne infinie, on peut voir k comme un vecteur d'onde traditionnel tandis que dans une ligne semi-infinie, nous devons interpréter k comme un indice continue de mode stationnaire ayant les unités d'un vecteur d'onde.

2.2 Connexion à un circuit électrique quantique

Dans la section précédente, nous avons introduit un formalisme pour décrire le champ électromagnétique dans une ligne à transmission. Nous modélisons maintenant les connexions, de nature capacitive ou inductive, entre une ou plusieurs lignes à transmission et un circuit électrique quantique arbitraire (par exemple un qubit supraconducteur). Un exemple de cette situation est illustré à la figure 2.2.

La première étape est de modéliser le circuit quantique. Une approche générale pour obtenir le Lagrangien se trouve à la référence [18]. De la même façon que plus haut, ce Lagrangien est la différence d'énergies électrostatiques jouant le rôle d'énergie cinétique et d'énergies inductives jouant le rôle d'énergie potentielle. En terme des flux généralisés ϕ_i représentant les degrés de liberté du circuit, ce Lagrangien s'écrit de manière générale comme

$$\mathcal{L} = \sum_{i>j} \frac{C_{ij}(\partial_t \phi_i - \partial_t \phi_j)^2}{2} - U. \quad (2.23)$$

Ici, C_{ij} est la capacité entre le point i et le point j du circuit. On somme sur $i > j$ pour éviter de compter l'énergie associée à une même capacité deux fois. U représente l'énergie potentielle du système qui dépend des ϕ_j . Tel qu'écrit, ce Lagrangien ne tient pas compte d'éventuelles sources de tension. Elles peuvent cependant être ajoutées facilement au modèle [19]. Dans cette thèse, on écrira ce Lagrangien sous forme matricielle dans le but d'obtenir des expressions plus compactes. On réécrit donc le Lagrangien ci-haut sous la forme

$$\mathcal{L} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 [\partial_t \Psi] \frac{\mathbf{C}_{\text{Sb}}}{2} [\partial_t \Psi] - U \quad (2.24)$$

avec le vecteur de flux normalisé

$$\Psi_j = \frac{2\pi}{\Phi_0} \phi_j \quad (2.25)$$

et la matrice de capacité $[\mathbf{C}_{\text{Sb}}]_{ij} = \delta_{ij} \sum_k C_{ik} - C_{ij}$. Nous avons aussi introduit le quantum de flux $\Phi_0 = h/(2e)$. En effectuant une transformée de Legendre sur ce Lagrangien, on trouve l'Hamiltonien

$$H = \mathbf{n} \mathbf{4E}_{\text{Cb}} \mathbf{n} + U. \quad (2.26)$$

où les moments conjugués \mathbf{n} sans unités sont

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2e} \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \right) \frac{\partial L}{\partial [\partial_t \Psi]} \quad (2.27)$$

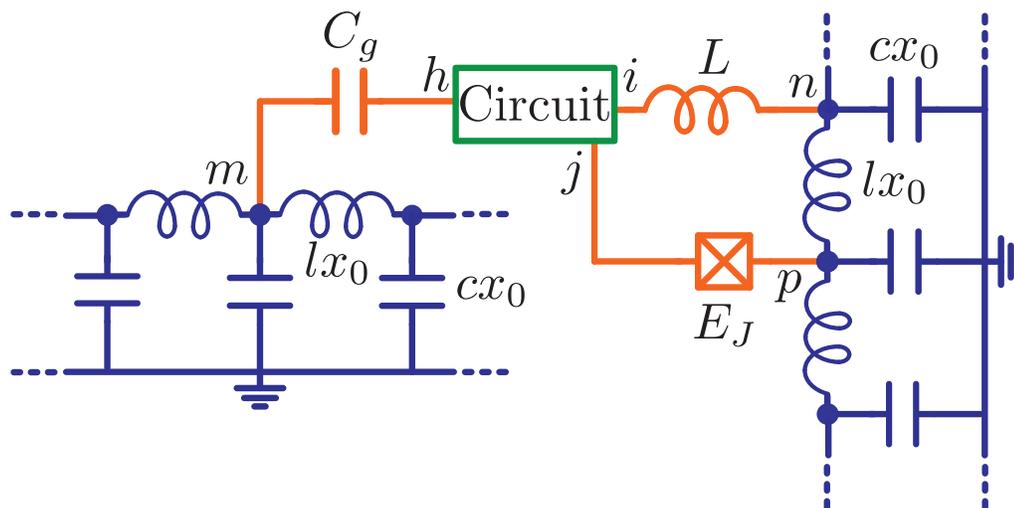


FIGURE 2.2 Circuit électrique quantique connecté à des lignes à transmission. Le point h du circuit est connecté au point m de la première ligne à transmission par un condensateur de capacité C_g . Le point i du circuit est connecté au point n d'une deuxième ligne à transmission par une inductance L . Finalement, le point j du circuit est connecté au point p de cette même ligne à travers une jonction Josephson d'énergie Josephson E_J .

et la matrice d'énergie de charge \mathbf{E}_{Cb} est

$$\mathbf{E}_{Cb} = \frac{e^2}{2} \mathbf{C}_{Sb}^{-1}. \quad (2.28)$$

La première quantification implique les relations de commutation

$$[\Psi_j, \mathbf{n}_k] = i\delta_{jk}. \quad (2.29)$$

Nous nous intéressons maintenant au cas où un circuit électrique quantique est connecté à un ensemble de ligne à transmission, tel qu'illustré schématiquement à la figure 2.2. Les connexions de nature capacitive interviennent dans la transformée de Legendre, entre autres puisqu'elles modifient les moments conjugués. Ainsi, elles jouent un rôle qualitativement différent que les connexions de nature inductive. Nous utilisons cette différence comme opportunité pour traiter les deux types de connexions séparément. Dans la section 2.2.1, nous traitons les connexions capacitives et dans la section 2.2.2, nous traitons les connexions inductives.

2.2.1 Connexion capacitive

Nous considérons le cas général où un circuit électrique quantique est connecté à plusieurs lignes à transmission par un ensemble de condensateurs. Nous considérons un exemple concret à la section 2.2.3. Le Lagrangien représentant le cas général est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \begin{pmatrix} \partial_t \Psi & \partial_t \hat{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\text{Sb}} & -\mathbf{C}_g \\ -\mathbf{C}_g^T & x_0 \mathbf{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \Psi \\ \partial_t \hat{\Phi} \end{pmatrix} - U. \quad (2.30)$$

On rappelle que Ψ est le vecteur de flux normalisé du circuit électrique quantique. Avec N lignes à transmission, le vecteur de flux normalisé dans ces lignes s'écrit

$$\hat{\Phi} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \begin{pmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) & \cdots & \phi_N(0) & \phi_1(-x_0) & \cdots & \phi_N(-x_0) & \phi_1(x_0) & \cdots \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

La matrice \mathbf{C}_g représente le couplage entre le circuit et les lignes à transmission. Les éléments de celle-ci sont arrangés d'une manière similaire à ceux du vecteur $\hat{\Phi}$. La matrice $x_0 \mathbf{c}$ correspond à la capacité des lignes à transmission. Celle-ci est diagonale, mais puisque les capacités de couplage introduisent des inhomogénéités capacitives dans les lignes à transmission, la matrice $x_0 \mathbf{c}$ n'est en général pas proportionnelle à la matrice identité.

La prochaine étape est d'effectuer la transformée de Legendre dans le but d'obtenir l'Hamiltonien. Pour cela, on trouve les moments conjugués normalisés

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{Q}/(2e) \end{pmatrix} = \frac{1}{2e} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\text{Sb}} & -\mathbf{C}_g \\ -\mathbf{C}_g^T & x_0 \mathbf{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \Psi \\ \partial_t \hat{\Phi} \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

et finalement l'Hamiltonien

$$H = 4 \frac{e^2}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{Q}/(2e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\text{Sb}} & -\mathbf{C}_g \\ -\mathbf{C}_g^T & x_0 \mathbf{c} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{Q}/(2e) \end{pmatrix} + U. \quad (2.33)$$

On remarque que pour simplifier l'Hamiltonien, il faut inverser la matrice de capacité d'une manière explicite. Cette inversion s'avère possible grâce à la structure par bloc de la

matrice. Ce calcul est fait à l'annexe A où l'on prend la limite $x_0 \rightarrow 0$ pour obtenir

$$H = 4\frac{e^2}{2}\mathbf{n}\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{n} + \frac{1}{2}\int dx\mathbf{q}(x)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(x)\mathbf{q}(x) + 2e\int dx\mathbf{n}\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{c}_g(x)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(x)\mathbf{q}(x) + \frac{1}{2}\int dx dy\mathbf{q}(x)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(x)\mathbf{c}_g^T(x)\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{c}_g(y)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(y)\mathbf{q}(y) + U. \quad (2.34)$$

Dans cette expression, nous avons défini la matrice de capacité renormalisée du circuit électrique quantique

$$\mathbf{C}_S = \mathbf{C}_{Sb} - \int dx\mathbf{c}_g(x)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(x)\mathbf{c}_g^T(x). \quad (2.35)$$

L'élément k du vecteur $\mathbf{q}(x)$ représente la densité de charge au point x dans la ligne à transmission d'indice k . De plus, nous avons introduit $[\mathbf{c}_g(x)]_{jk}$ la matrice de densité de capacité en fonction de la position. Celle-ci représente la densité de capacité entre le point x de la ligne à transmission d'indice k et le point j du circuit. Nous introduisons aussi $\bar{\mathbf{c}}(x)$, la matrice diagonale de densité de capacité dans les lignes à transmission. Les bornes des intégrales ne sont pas spécifiées explicitement puisque différentes lignes à transmission peuvent avoir différentes longueurs. Implicitement, nous supposons que les intégrales sur la position vont d'une extrémité à l'autre des lignes à transmission.

Interprétons maintenant l'Hamiltonien de l'équation (2.34) terme par terme. Le premier terme représente l'énergie capacitive du circuit électrique quantique, avec une capacité \mathbf{C}_S renormalisée par les connexions aux lignes à transmission. Le deuxième terme est l'énergie capacitive des lignes à transmission, similaire à celle trouvée à l'équation (2.7) pour une ligne à transmission seule. Le troisième terme représente l'interaction capacitive entre les charges $2e\mathbf{n}$ du circuit et les charges $\mathbf{q}(x)$ des lignes à transmission. Finalement, le quatrième terme représente l'interaction directe entre les lignes à transmission due à la connexion capacitive au circuit électrique.

2.2.2 Connexion inductive

Nous considérons un circuit électrique quantique connecté à plusieurs lignes à transmission par un ensemble d'inductances et de jonctions Josephson. Ces connexions affectent seulement l'énergie potentielle du système et nous traitons par conséquent uniquement cette quantité dans cette section. Nous séparons l'énergie potentielle en trois parties,

$$U = U_S + U_F + U_I. \quad (2.36)$$

U_S est l'énergie potentielle du circuit électrique quantique, ou du système. De même, U_F représente l'énergie potentielle du champ électromagnétique dans les lignes à transmission, ou *field*. Finalement, l'énergie potentielle due à l'interaction entre le circuit et les lignes à transmission est U_I . Puisque les énergies potentielles ne sont pas modifiées lors de la transformée de Legendre, nous pouvons considérer chaque partie de l'énergie potentielle d'une manière indépendante. Dans cette section, nous nous intéressons seulement à l'énergie potentielle d'interaction U_I puisque c'est cette quantité qui est modifiée par les connexions inductives.

L'énergie potentielle due à des connexions par des inductances $L_{j[km]}$ entre le point j du circuit et le point m de la ligne à transmission d'indice k s'écrit

$$U_{IL} = \sum_{j[km]} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{(\Psi_j - \hat{\Phi}_{[km]})^2}{2L_{j[km]}}. \quad (2.37)$$

Nous utilisons une notation à double indice pour repérer un point dans une des lignes à transmission. Par exemple, l'élément $\hat{\Phi}_{[km]}$ fait référence à la charge au point m dans la ligne à transmission d'indice k . L'énergie potentielle due à des connexions par des jonctions Josephson d'énergie $[E_J]_{j[km]}$ peut s'écrire

$$U_{IJ} = - \sum_{j[km]} [E_J]_{j[km]} \cos(\Psi_j - \hat{\Phi}_{[km]}). \quad (2.38)$$

Ainsi, l'énergie potentielle d'interaction totale est $U_I = U_{IL} + U_{IJ}$.

Dans le but d'écrire les énergies potentielles d'interaction dans la limite continue, on introduit le vecteur $\Phi(x)$ dont l'élément k représente le flux normalisé à la position x dans la ligne à transmission d'indice k . On introduit aussi la matrice de densité d'énergie $\epsilon_L(x)$ due aux connexions par des inductances. Pour bien comprendre sa signification, considérons le cas simple où une seule inductance L connecte le point i du circuit au point x_m de la ligne à transmission d'indice k . Dans cette situation,

$$[\epsilon_L(x)]_{jl} = \delta_{ji} \delta_{lk} \delta(x - x_m) \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2L}. \quad (2.39)$$

De même, on introduit la matrice de densité d'énergie $\epsilon_J(x)$ due aux connexions par des jonctions Josephson. Toujours pour illustrer la signification de cette matrice de densité d'énergie, considérons le cas simple où une jonction Josephson d'énergie $\hbar\omega_J$ connecte le

point i du circuit au point x_m de la ligne à transmission k . Dans ce cas,

$$[\epsilon_J(x)]_{jl} = \delta_{ji}\delta_{lk}\delta(x - x_m)\hbar\omega_J. \quad (2.40)$$

À l'aide de ces définitions, dans l'annexe B, on montre que les énergies potentielles d'interaction dans la limite continue s'écrivent

$$U_{IL} = \int dx [\Psi\epsilon_{LS}(x)\Psi - 2\Psi\epsilon_L(x)\Phi(x) + \Phi(x)\epsilon_{LF}(x)\Phi(x)] \quad (2.41)$$

$$U_{IJ} = - \int dx \cos[\Psi]\epsilon_J(x)\cos[\Phi(x)] - \int dx \sin[\Psi]\epsilon_J(x)\sin[\Phi(x)], \quad (2.42)$$

où on a défini la matrice de densité d'énergie renormalisant les énergies du système

$$[\epsilon_{LS}(x)]_{ij} = \delta_{ij} \sum_k [\epsilon_L(x)]_{jk} \quad (2.43)$$

et la matrice de densité d'énergie renormalisant l'énergie du champ électromagnétique dans les lignes à transmission

$$[\epsilon_{LF}(x)]_{kl} = \delta_{kl} \sum_j [\epsilon_L(x)]_{jk}. \quad (2.44)$$

Les fonctions trigonométriques des vecteurs de flux normalisés doivent être évaluées élément par élément. Par exemple, l'élément j du vecteur $\cos[\Psi]$ est $\cos[\Psi_j]$. On remarque que les interactions de nature inductives font interagir les flux normalisés Ψ du circuit avec les flux normalisés $\Phi(x)$ des lignes à transmission.

2.2.3 Exemples de circuits électriques quantiques connectés à une ligne à transmission

Dans cette section, on utilise le formalisme général développé ci-dessus pour trouver l'Hamiltonien de deux circuits simples illustrés à la figure 2.3.

On étudie d'abord le circuit illustré sur la figure 2.3a) où une ligne à transmission semi-infinie est connectée capacitivement à une inductance, qui joue le rôle du circuit. L'Hamiltonien de ce montage est donné à l'équation (2.34). Pour le circuit particulier étudié ici, on a $c_g(x) = \delta(x)C$. De plus, la densité de capacité de la ligne à transmission est $\bar{c}(x) = c + \delta(x)C$ et on peut montrer que $C_S = C/2$. Utiliser une distribution de Dirac pour représenter une capacité est délicat. L'utilisation de cette distribution simplifie toutefois considérablement les calculs. Par contre, formellement, la capacité entre deux objets ponctuels est nulle. Pour remédier à ce problème, on représente les intégrales par des sommes de Riemann et, lorsque

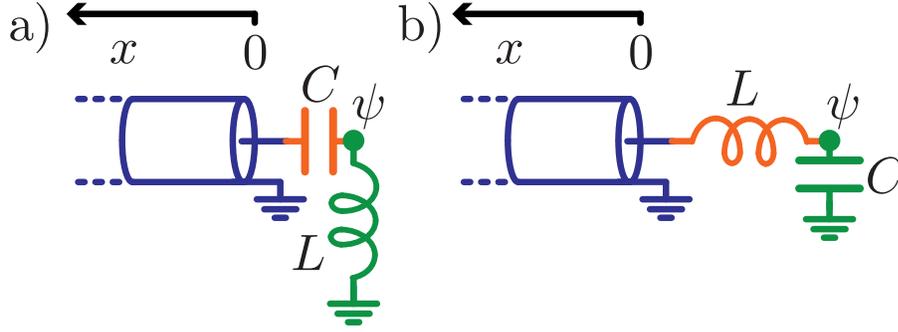


FIGURE 2.3 Exemples de circuits électriques quantiques connectés à une ligne à transmission par (a) une connexion capacitive et (b) une connexion inductive.

nécessaire, on donne une dimension Δx petite mais finie au condensateur. En utilisant ces résultats, on peut simplifier l'Hamiltonien de l'équation (2.34) pour obtenir

$$H = 4\frac{e^2}{C}\mathbf{n}^2 + \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{\psi^2}{2L} + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^0 dx \mathbf{q}^2(x) \left(1 + \frac{\delta(x)Cc}{[c + C/(2\Delta x)]^2}\right) + \frac{\mathbf{q}(0)2e\mathbf{n}}{c + C/(2\Delta x)} + U_F. \quad (2.45)$$

Les deux premiers termes représentent l'énergie d'un circuit LC. Le troisième terme représente l'énergie de charge de la ligne à transmission. On remarque que la capacité par unité de longueur est renormalisée à la fin de la ligne à transmission par la connexion. Le quatrième terme représente l'interaction entre la charge de l'extrémité de la ligne à transmission $\mathbf{q}(0)$ et la charge du circuit électrique quantique $2e\mathbf{n}$. Finalement, le dernier terme représente l'énergie inductive de la ligne à transmission. Selon l'équation (2.7), cette énergie est

$$U_F = \int_{-\infty}^0 dx \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{[\partial_x \Phi(x)]^2}{2l}. \quad (2.46)$$

On considère maintenant le circuit à la figure 2.3b) où la ligne à transmission semi-infinie est connectée inductivement à un condensateur. L'Hamiltonien de ce circuit est décrit à la section 2.2.2. Pour le cas particulier étudié ici,

$$\epsilon_L(x) = \delta(x) \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2L}. \quad (2.47)$$

Puisqu'il y a une seule ligne à transmission et un seul point dans le circuit, $\epsilon_{LS}(x) = \epsilon_L(x)$ et $\epsilon_{LF}(x) = \epsilon_L(x)$. Ainsi, l'Hamiltonien est

$$H = 4\mathbf{E}_{Cb}\mathbf{n}^2 + \int_{-\infty}^0 dx \frac{[\mathbf{q}(x)]^2}{2c} + U \quad (2.48)$$

avec l'énergie de charge

$$E_{Cb} = \frac{e^2}{2C} \quad (2.49)$$

et l'énergie potentielle

$$U = U_F + U_{IL} = U_F + \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{4L} [\Psi^2 - 2\Psi\Phi(0) + \Phi(0)\Phi(0)]. \quad (2.50)$$

Comme dans le cas où une inductance est connectée capacitivement à la ligne à transmission, on obtient l'Hamiltonien d'un circuit LC. Cependant, dans le cas considéré ici, on remarque en observant le troisième terme de l'énergie potentielle U que ce sont maintenant les flux de la ligne à transmission $\Phi(0)$ et du circuit électrique quantique Ψ qui sont couplés. Finalement, le dernier terme de l'énergie potentielle représente une renormalisation de l'énergie inductive de la ligne à transmission par l'inhomogénéité inductive à la connexion.

2.2.4 Seconde quantification

Dans les deux sections précédentes, nous avons trouvé un Hamiltonien qui symbolise un circuit électrique quantique connecté à des lignes à transmission d'une manière capacitive ou inductive. En utilisant les résultats de ces sections, on peut écrire ce Hamiltonien comme

$$H = H_S + H_F + H_I. \quad (2.51)$$

Nous définissons l'Hamiltonien du circuit électrique quantique (le système),

$$H_S = 4\frac{e^2}{2}\mathbf{n}\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{n} + \int dx\Psi\epsilon_{LS}(x)\Psi + U_S, \quad (2.52)$$

l'Hamiltonien du champ électromagnétique dans les lignes à transmission

$$H_F = H_{Fb} + \frac{1}{2} \int dx dy \mathbf{q}(x) \bar{\mathbf{c}}^{-1}(x) \mathbf{c}_g^T(x) \mathbf{C}_S^{-1} \mathbf{c}_g(y) \bar{\mathbf{c}}^{-1}(y) \mathbf{q}(y) + \int dx \Phi(x) \epsilon_{LF}(x) \Phi(x) \quad (2.53)$$

et l'Hamiltonien d'interaction

$$H_I = 2e \int dx \mathbf{n} \mathbf{C}_S^{-1} \mathbf{c}_g(x) \bar{\mathbf{c}}^{-1}(x) \mathbf{q}(x) - 2 \int dx \Psi \epsilon_L(x) \Phi(x) + U_{IJ}. \quad (2.54)$$

Nous introduisons aussi l'Hamiltonien du champ électromagnétique dans les lignes à transmission déconnectées (*bare*)

$$H_{\text{FB}} = \int dx \left(\frac{\mathbf{q}(x)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(x)\mathbf{q}(x)}{2} + \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{[\partial_x \Phi(x)][\partial_x \Phi(x)]}{2l} \right). \quad (2.55)$$

Il s'agit d'une généralisation de l'Hamiltonien de l'équation (2.7) pour N lignes à transmission découplées, avec une capacité par unité de longueur inhomogène. Le but de cette section est d'écrire l'Hamiltonien d'interaction H_I en seconde quantification avec $U_{IJ} = 0$. Le résultat trouvé est intéressant puisqu'il est similaire à ce qu'on retrouve dans la littérature de l'optique quantique [23, 25].

En suivant la même approche que dans les sections 2.1.1 et 2.1.2, on trouve que l'on peut écrire

$$\Phi(x) = \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sqrt{\frac{\hbar Z}{2|k|}} \left[\mathbf{b}(k) + \mathbf{b}^\dagger(-k) \right] e^{ikx} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{q}(x) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk c|k|v \sqrt{\frac{\hbar Z}{2|k|}} \left[\mathbf{b}(k) - \mathbf{b}^\dagger(-k) \right] e^{ikx}. \quad (2.57)$$

L'élément $\mathbf{b}_l(k)$ du vecteur $\mathbf{b}(k)$ est l'opérateur d'annihilation du mode k dans la ligne à transmission d'indice l . Ces opérateurs respectent les règles de commutation canoniques

$$\left[\mathbf{b}_l(k_1), \mathbf{b}_m^\dagger(k_2) \right] = \delta_{lm} \delta(k_1 - k_2). \quad (2.58)$$

En utilisant les équations (2.56) et (2.57), on peut récrire l'Hamiltonien d'interaction H_I , dans le cas où $U_{IJ} = 0$, comme

$$\begin{aligned} H_I = & i \frac{\mathbf{n}\mathbf{C}_S^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk 2e \sqrt{\frac{\hbar Z}{2|k|}} \left[|k|v \int dx \mathbf{c}_g(x) \bar{\mathbf{c}}^{-1}(x) e^{ikx} \right] \left[\mathbf{b}(k) - \mathbf{b}^\dagger(-k) \right] \\ & - \frac{\Psi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk 2e \sqrt{\frac{\hbar Z}{2|k|}} \left[\frac{2}{\hbar} \int dx \epsilon_L(x) e^{ikx} \right] \left[\mathbf{b}(k) + \mathbf{b}^\dagger(-k) \right]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

On voit que le couplage au mode k est proportionnel aux transformées de Fourier des matrices de densité de capacité $\mathbf{c}_g(x)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(x)$ et de densité d'énergie inductive $\epsilon_L(x)$. Anton Frisk Kockum et ses collaborateurs ont obtenu ce résultat d'une manière indépendante et ils l'ont appliqué au design de couplage entre un « atome géant » et une ligne à transmission [26].

Un autre avantage de la seconde quantification est qu'en fonction du vecteur d'opérateurs $\mathbf{b}(k)$, l'Hamiltonien du champ électromagnétique dans les lignes à transmission

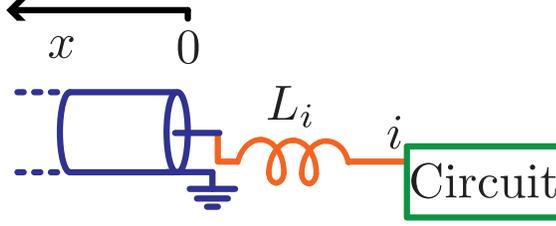


FIGURE 2.4 Circuit électrique quantique connecté à une ligne à transmission à l'origine. La ligne est connectée par un inductance d'inductance L_i au point i du circuit.

déconnectées est

$$H_{\text{Fb}} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hbar |k| v \mathbf{b}^\dagger(k) \mathbf{b}(k) \quad (2.60)$$

si on néglige les inhomogénéités capacitives. Autrement dit, la seconde quantification permet de diagonaliser l'Hamiltonien H_{Fb} .

2.3 Théorie d'entrée-sortie

Jusqu'à maintenant, dans ce chapitre, nous avons utilisé le formalisme Hamiltonien pour représenter le champ électromagnétique à l'intérieur de lignes à transmission. Nous avons aussi modélisé l'interaction entre un circuit électrique quantique et ce champ électromagnétique. Ici, nous présentons une théorie qui fait le lien entre le circuit électrique quantique et le champ électromagnétique qui est mesuré expérimentalement. Dans la littérature, cette théorie porte le nom de théorie *input-output*, soit « théorie d'entrée-sortie » [20, 23, 25, 27].

Nous suivons de près l'approche développée par Yurke et Denker [20, 27]. Contrairement à l'approche plus commune de l'optique quantique, l'avantage de l'approche de Yurke et Denker est qu'elle ne requiert aucune approximation. Pour simplifier le calcul, nous considérons seulement le cas typique illustré à la figure 2.4 où une ou plusieurs lignes à transmission semi-infinies sont couplés à un circuit électrique quantique à $x = 0$. Nous ne considérerons ici que la situation où le circuit est connecté aux lignes par des inductances puisque c'est la situation qui nous intéressera au chapitre 4. Ces hypothèses de départ impliquent que la matrice de densité d'énergie inductive peut se récrire comme

$$\epsilon_L(x) = \hbar \Omega_L [2\delta(x)]. \quad (2.61)$$

Nous ajoutons un facteur 2 devant la distribution de Dirac afin que son intégrale entre $x \rightarrow -\infty$ et $x = 0$ soit normalisée. Rappelons que l'élément d'indices ik de la matrice

$\epsilon_L(x)$ est inversement proportionnel à l'inductance L_{ik} entre le point i du circuit et la ligne à transmission d'indice k . Autrement dit,

$$[\epsilon_L(x)]_{ik} = \hbar [\Omega_L]_{ik} [2\delta(x)] = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2L_{ik}} [2\delta(x)]. \quad (2.62)$$

Nous avons introduit les matrices d'énergie de couplage inductif $\hbar\Omega_L$. Les matrices Ω_L sont utiles pour écrire les équations du mouvement puisqu'elles ont des unités de fréquence.

Dans l'annexe C, on utilise les restrictions décrites dans le paragraphe précédent et l'Hamiltonien de l'équation (2.51) pour obtenir la théorie d'entrée-sortie. Celle-ci lie le signal $\Phi_{\text{out}}(t)$ aux sorties des lignes à transmission au signal $\Phi_{\text{in}}(t)$ qui est imposé aux entrées de celles-ci. Le lien entre ces quantités dépend évidemment de ce qui se passe à la position $x = 0$ où les lignes à transmission interagissent avec le circuit électrique quantique. Ainsi, on trouve

$$\Phi_{\text{out}}(t) = \Phi(x=0) - \Phi_{\text{in}}(t) \quad (2.63)$$

avec les équations du mouvement dans la représentation de Heisenberg

$$\partial_t \Phi(0) = 16\pi \frac{Z}{R_K} \left(-\Omega_{LF} \Phi(0) + \Omega_L^T \Psi \right) + 2\partial_t \Phi_{\text{in}}(t) \quad (2.64)$$

$$\partial_t \Psi = \frac{(2e)^2}{\hbar} \mathbf{C}_S^{-1} \mathbf{n} \quad (2.65)$$

$$\partial_t \mathbf{n} = -2\Omega_{LS} \Psi + 2\Omega_L \Phi(0) + \frac{i}{\hbar} [U_S, \mathbf{n}]. \quad (2.66)$$

Nous avons utilisé $R_K = h/e^2$, le quantum de résistance, aussi connu sous le nom de constante de von Klitzing. Pour alléger la notation, nous avons défini la matrice de renormalisation des énergies du circuit électrique quantique

$$[\hbar\Omega_{LS}]_{ij} = \delta_{ij} \sum_k [\hbar\Omega_L]_{jk} \quad (2.67)$$

et la matrice de renormalisation de l'énergie du champ électromagnétique dans les lignes à transmission

$$[\hbar\Omega_{LF}]_{kl} = \delta_{kl} \sum_j [\hbar\Omega_L]_{jk}. \quad (2.68)$$

À l'équation (2.64), on observe que le flux normalisé à l'extrémité de la ligne à transmission $\Phi(0)$ interagit avec le circuit électrique quantique à travers son flux normalisé Ψ . De même, le circuit est couplé aux lignes à transmission à travers la charge normalisée \mathbf{n} à l'équation (2.66).

Comme annoncé ci-dessus, le dernier terme de l'équation (2.63), $\Phi_{\text{in}}(t)$ représente le

flux normalisé venant de $x \rightarrow -\infty$ et se dirigeant vers le circuit électrique quantique à $x = 0$. Il s'agit donc du signal d'entrée, ou *input*, du circuit. De même, le premier terme, $\Phi_{\text{out}}(t)$, représente le signal qui se déplace vers la gauche ce qui en fait le signal de sortie, ou *output*, du montage. Les deux quantités sont reliées par ce qui se passe à l'extrémité de la ligne à transmission, c'est-à-dire par $\Phi(0)$. Les équations du mouvement (2.64) à (2.66) peuvent être utilisées pour décrire l'évolution de $\Phi(0)$. Ces équations représentent le couplage de l'extrémité des lignes à transmission, $\Phi(0)$, au circuit électrique quantique.

Dans certains cas intéressants, il est possible de simuler numériquement les équations ci-dessus pour obtenir le signal de sortie $\Phi_{\text{out}}(t)$ en fonction du signal d'entrée $\Phi_{\text{in}}(t)$. C'est par exemple ce que nous faisons dans le chapitre 4 pour étudier le circulateur. Répétons qu'aucune approximation n'a été faite jusqu'ici. Ceci inclut les approximations typiques de l'optique quantique comme l'approximation de Markov, l'approximation séculaire et l'approximation de l'enveloppe qui varie lentement [23, 27]. Il peut être utile d'effectuer ces approximations à ce point du calcul afin de faciliter le reste des calculs analytiques et ainsi gagner une intuition plus approfondie du circuit électrique quantique étudié. Nous utilisons aussi cette approche dans le chapitre 4.

2.3.1 Exemple

Nous utilisons la théorie d'entrée-sortie présentée ci-dessus pour décrire le circuit illustré à la figure 2.3b) où un condensateur est connecté à une ligne à transmission par une inductance. Pour ce circuit,

$$\Omega_L = \Omega_{LS} = \Omega_{LF} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2\hbar L}, \quad (2.69)$$

la capacité $C_S = C$ et l'énergie inductive ne provenant pas de la connexion est nulle, c'est-à-dire $U_S = 0$. Ainsi, on trouve

$$\partial_t \Phi(0) = \frac{Z}{L} [\Psi - \Phi(0)] + 2\partial_t \Phi_{\text{in}}(t) \quad (2.70)$$

$$\partial_t^2 \Psi = \frac{1}{LC} [\Phi(0) - \Psi]. \quad (2.71)$$

On remarque que le flux normalisé à l'extrémité de la ligne à transmission, $\Phi(0)$, est couplé au flux normalisé interne du circuit, Ψ . Ce couplage dépend du ratio entre l'impédance Z de la ligne à transmission et l'inductance L . L'évolution du flux $\Phi(0)$ dépend aussi du signal en entrée $\Phi_{\text{in}}(t)$. De plus, en observant l'équation (2.71), on remarque que comme on devait s'y attendre, le flux normalisé interne du circuit Ψ évolue comme un oscillateur

harmonique de fréquence $1/\sqrt{LC}$. Cet oscillateur est couplé au flux normalisé à l'extrémité de la ligne à transmission, $\Phi(0)$. Nous poursuivons l'étude de cet exemple à la section 4.2.1 où nous décrivons le circuit de la figure 2.3b) à l'aide de l'opérateur de transfert.

2.4 Équation maîtresse

Dans le travail qui précède cette section, nous considérons que la mesure révèle toute l'information que contient le champ électromagnétique des lignes à transmission. Cette hypothèse est inappropriée dans plusieurs cas. Premièrement, même dans le cas où tous les signaux qui sortent des lignes à transmission sont mesurés, les imperfections des appareils de mesure introduisent une perte d'information sur l'état du système. Par exemple, aucun appareil de mesure n'a une largeur de bande infinie ce qui a pour conséquence qu'il est impossible d'avoir accès à l'état instantané d'un système. De plus, plusieurs expériences consistent à faire la moyenne de signaux mesurés lors de plusieurs répétitions d'un même protocole. Ce processus introduit toujours une perte d'information. Finalement, les lignes à transmission introduites dans le formalisme ci-dessus peuvent représenter un couplage entre le circuit électrique quantique et des modes du montage inaccessibles expérimentalement. Autrement dit, les lignes à transmission du formalisme peuvent être utilisées pour représenter des pertes.

Dans tous ces cas, l'état ne peut plus être représenté par un simple ket. Pour représenter le manque d'information, il faut utiliser la matrice densité [24]. Par exemple, si nous savons qu'un système à deux niveaux a été préparé soit dans l'état $|e\rangle$, soit dans l'état $|g\rangle$, le mieux qu'on peut faire pour décrire son état est d'utiliser la matrice densité $\rho = (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|)/2$. En effet, on sait qu'il y a une chance sur 2 que le qubit soit dans l'état $|e\rangle$ et une chance sur 2 qu'il soit dans l'état $|g\rangle$. D'une manière plus générale, s'il y a une probabilité p_i qu'un système soit dans un état $|\psi_i\rangle$, la matrice densité qui représente l'état du système est $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. On dit qu'on est dans un état pur lorsqu'un des $p_i = 1$. Sinon, on dit qu'on est dans un état mixte.

L'équation qui représente l'évolution temporelle d'une matrice densité se nomme équation maîtresse [23]. Contrairement à l'évolution unitaire générée par un Hamiltonien, l'équation maîtresse peut représenter une perte d'information. Autrement dit, celle-ci peut faire passer un état pur à un état mixte. En conséquence, elle peut aussi être utilisée pour représenter la décohérence.

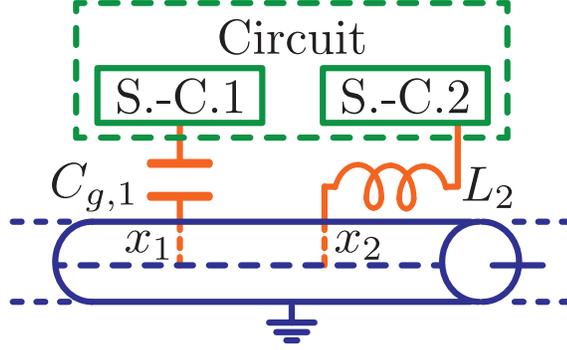


FIGURE 2.5 Circuit électrique quantique couplé à une ligne à transmission infinie. Chaque sous-circuit S.-C. i est couplé une seule fois à la ligne à transmission.

Dans cette section, nous nous intéressons au cas où un circuit électrique quantique est couplé à une seule ligne à transmission infinie. Nous considérons que, pour des raisons volontaires ou non, l'information requise pour décrire le champ électromagnétique à l'intérieur de cette ligne à transmission n'est pas disponible expérimentalement. Nous trouvons une équation maîtresse qui permet de décrire l'évolution de la matrice densité qui représente le circuit électrique quantique dans ces conditions. Puisque c'est la situation qui nous intéressera au chapitre 3, nous considérerons ici le circuit électrique quantique comme séparé en plusieurs sous-circuits n'interagissant pas directement entre eux, comme illustré à la figure 2.5. De plus, on suppose que chacun de ces sous-circuits est couplé une seule fois à la ligne à transmission d'une manière ponctuelle. Ainsi, si le sous-circuit est couplé par un condensateur $C_{g,i}$, $[\epsilon_C(x)]_{i1} = C_{g,i}\delta(x - x_i)$. De même, s'il est couplé par une inductance L_i ,

$$[\epsilon_L(x)]_{i1} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{\delta(x - x_i)}{2L_i}. \quad (2.72)$$

2.4.1 Inhomogénéités de la ligne à transmission

L'Hamiltonien du champ électromagnétique dans une ligne à transmission infinie peut être déduit de l'équation (2.53). En utilisant le fait que les sous-circuits illustrés à la figure 2.5 sont découplés entre eux et qu'ils sont chacun couplés une seule fois à la ligne à transmission, on obtient

$$H_F = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{q^2(x)}{2c} + \frac{[\partial_x \phi(x)]^2}{2l} \right) + \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{C_{g,i}^2}{c^2} [\mathbf{C}_S^{-1}]_{ii} q^2(x_i) + \frac{\phi^2(x_i)}{L_i} \right) \quad (2.73)$$

On note que, comme à la section 2.1, le flux $\phi(x)$ n'est pas normalisé. De plus, dans le cas où il n'y a pas de connexion inductive, il ne faut pas faire tendre L_i vers zéro puisque cette limite implique une densité d'énergie inductive $[\epsilon_L(x)]_{i1}$ infinie. Dans ce cas, on doit plutôt faire tendre L_i vers l'infini. De cette manière, l'impédance $i\omega L_i$ entre le circuit électrique quantique et la ligne tend vers l'infini. On néglige la contribution des capacités de couplage à la capacité totale de la ligne à transmission. Ainsi, si la capacité par unité de longueur est perturbée par une capacité $\mathbf{C}_{g,i}$ sur une longueur caractéristique x_0 , on suppose qu'autour de ce point, $x_0\bar{c}(x) = cx_0 + \mathbf{C}_{g,i} \approx cx_0$. Dans les cas concrets que nous étudierons au chapitre 3, $cx_0 \sim 1$ pF tandis que $\mathbf{C}_{g,i} \sim 30$ fF [28]. Puisque 1 pF $\gg 0.030$ pF, l'approximation est valide pour ce cas.

Le deuxième terme de l'équation (2.73) montre que le couplage au circuit électrique quantique introduit des inhomogénéités supplémentaires dans la ligne à transmission. Pour cette raison, l'Hamiltonien du champ électromagnétique dans la ligne n'est plus diagonal lorsqu'on passe en seconde quantification comme nous l'avons fait à la section 2.1.1. Pour éviter ce problème, nous négligeons les inhomogénéités dans la ligne à transmission. Nous passons en représentation discrète pour évaluer quantitativement les conditions à respecter pour que cette approximation soit bonne. Comme à la section 2.1, on montre qu'en représentation discrète, l'Hamiltonien de l'équation (2.73) s'écrit comme

$$H_F = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(cx_0 + C_{g,n}^2 [\mathbf{C}_S^{-1}]_{nn} \right) \frac{Q^2(nx)}{(cx_0)^2} + \frac{(\phi[(n+1)x_0] - \phi[nx_0])^2}{lx_0} + \frac{\phi^2(nx_0)}{L_n} \right]. \quad (2.74)$$

Ainsi, c'est une bonne approximation de négliger les inhomogénéités de la ligne à transmission lorsque

$$cx_0 \gg C_{g,n}^2 [\mathbf{C}_S^{-1}]_{nn} \quad (2.75)$$

et $L \gg lx_0$. Pour le reste de cette section, nous supposons que ces conditions sont respectées. Comme annoncé plus haut, dans les cas concrets étudiés au chapitre 3, $C_{g,n}^2 [\mathbf{C}_S^{-1}]_{nn} \sim 30$ fF [28]. À nouveau, 1 pF $\gg 0.030$ pF et l'approximation est valide pour ce cas. Une fois les inhomogénéités négligées, l'Hamiltonien du champ électromagnétique peut de nouveau s'écrire sous une forme diagonale

$$H_F = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hbar |k| v b^\dagger(k) b(k). \quad (2.76)$$

2.4.2 Signaux de pilotage

Dans une expérience typique, des signaux sont envoyés dans la ligne à transmission dans le but de contrôler ou de mesurer le circuit électrique quantique. Dans ce cas, la valeur moyenne de $b(k)$ n'est pas nulle. Or, il est plus facile d'obtenir l'équation maîtresse lorsque $\langle b(k) \rangle = 0$. Le but de cette section est d'effectuer une transformation qui déplace la valeur moyenne des opérateurs $b(k)$ vers zéro en présence de signaux de contrôle. Comme conséquence de ce déplacement, un signal de pilotage apparaît directement sur le circuit électrique quantique.

Avant d'effectuer le déplacement de $b(k)$, il est utile de simplifier les Hamiltoniens obtenus jusqu'ici. Dans l'annexe D, on montre qu'on peut récrire l'équation (2.59) qui représente l'Hamiltonien d'interaction entre le champ électromagnétique de la ligne à transmission et les sous-circuits électriques quantiques comme

$$H_I = \hbar \sum_{r=\pm 1} \sum_j \theta_j \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\kappa_j(\omega)}{2\pi}} \left[\varphi_j(r\omega) b_r(\omega) + \varphi_j^*(r\omega) b_r^\dagger(\omega) \right], \quad (2.77)$$

où r représente le signe de k , c'est-à-dire la direction dans laquelle se propage le champ électromagnétique dans la ligne à transmission infinie. Avec cette nouvelle notation, plus abstraite, si le sous-circuit j est couplé d'une manière capacitive, le champ électromagnétique de la ligne est couplé à l'opérateur $\theta_j = \mathbf{n}_j$ du sous-circuit à un taux

$$\kappa_j(\omega) = \frac{Z\omega(2e)^2}{2\hbar} \left[\left[\mathbf{C}_S^{-1} \right]_{jj} C_{g,j} \right]^2 \quad (2.78)$$

et avec une phase

$$\varphi_j(\omega) = i \exp [i\omega x_j/v]. \quad (2.79)$$

Si le sous-circuit j est plutôt couplé d'une manière inductive, le champ électromagnétique de la ligne est couplé à l'opérateur $\theta_j = \mathbf{\Psi}_j$ du sous-circuit à un taux

$$\kappa_j(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2Z}{\hbar\omega} \left[\frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{1}{2L_j} \right]^2 \quad (2.80)$$

et avec une phase

$$\varphi_j(\omega) = - \exp [i\omega x_j/v]. \quad (2.81)$$

Les taux $\kappa_{C,j}(\omega)$ et $\kappa_{L,j}(\omega)$ sont positifs et définis pour $\omega > 0$. On note finalement que l'on a introduit $b_r(\omega) = b(rk)/\sqrt{v}$, un opérateur qui respecte la relation de commutation

bosonique

$$[b_r(\omega_1), b_s^\dagger(\omega_2)] = \delta_{rs}\delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (2.82)$$

En fonction de cet opérateur, l'Hamiltonien du champ électromagnétique de l'équation (2.76) se réécrit

$$H_F = \sum_{r=\pm 1} \int_0^\infty d\omega \hbar \omega b_r^\dagger(\omega) b_r(\omega). \quad (2.83)$$

Nous utilisons l'abréviation $b_\pm(\omega) \equiv b_{\pm 1}(\omega)$ dans ce qui suit. Comme annoncé ci-dessus, puisque la ligne à transmission est infinie, $b_+(\omega)$ correspond à un signal qui se déplace vers la droite tandis que $b_-(\omega)$ correspond à un signal qui se déplace vers la gauche, comme nous l'avons vu à la section 2.1.2.

Considérons maintenant le cas où $\langle b_r(\omega) \rangle \neq 0$. Dans ce qui suit, on suppose que le circuit électrique quantique n'affecte pas la valeur de $\langle b_r(\omega) \rangle$. Cependant, même en absence de circuit électrique quantique, la valeur moyenne $\langle b_r(\omega) \rangle$ n'est pas constante. En effet, celle-ci évolue dans le temps sous H_F . Pour que cette valeur moyenne devienne constante, on se place dans un référentiel qui tourne avec $\langle b_r(\omega) \rangle$ à l'aide de la transformation

$$U_T = \exp [iH_F t / \hbar]. \quad (2.84)$$

L'Hamiltonien H dans le nouveau référentiel est, en fonction de l'Hamiltonien H' dans le référentiel du laboratoire

$$H = U_T^\dagger H' U_T - i\hbar U_T^\dagger [\partial_t U_T] \quad (2.85)$$

On trouve que $H = H_I(t) + H_S$, où

$$H_I(t) = \hbar \sum_{r=\pm 1} \sum_j \theta_j \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\kappa_j(\omega)}{2\pi}} \left[\varphi_j(r\omega) b_r(\omega) e^{-i\omega t} + \varphi_j^*(r\omega) b_r^\dagger(\omega) e^{i\omega t} \right]. \quad (2.86)$$

Dans ce référentiel, la valeur moyenne de $b_r(\omega)$ est constante. On peut donc chercher une transformation qui déplace sa valeur moyenne vers zéro.

Supposons que la valeur moyenne de l'opérateur $b_r(\omega)$ est $\langle b_r(\omega) \rangle = \beta_r(\omega)$. On peut montrer que transformer les opérateurs comme $U^\dagger A U$ avec

$$U = \exp \left(\int_0^\infty d\omega \left[\beta_r(\omega) b_r^\dagger(\omega) - \beta_r^*(\omega) b_r(\omega) \right] \right) \quad (2.87)$$

permet d'obtenir $\langle b_r(\omega) \rangle = 0$ dans le nouveau référentiel [22]. À l'aide de la formule de

Baker–Campbell–Hausdorff, on trouve que dans le nouveau référentiel

$$U^\dagger b_r(\omega) U = b_r(\omega) + \beta_r(\omega). \quad (2.88)$$

Ainsi, l'Hamiltonien devient $H = H_1(t) + H_S + H_d(t)$, avec

$$H_d(t) = \sum_j \theta_j \sum_{r=\pm 1} \int_0^\infty d\omega \hbar \sqrt{\frac{\kappa_j(\omega)}{2\pi}} \left[\varphi_j(r\omega) \beta_r(\omega) e^{-i\omega t} + \varphi_j^*(r\omega) \beta_r^*(\omega) e^{i\omega t} \right]. \quad (2.89)$$

Il s'agit de l'Hamiltonien qui représente le signal de pilotage sur le circuit quantique, ou le *drive*. Remarquez que le seul opérateur dont dépend ce Hamiltonien est θ_j , un opérateur qui agit sur l'espace de Hilbert du sous-circuit quantique j . Le facteur devant l'opérateur θ_j est une fonction réelle qui dépend du temps.

Considérons le cas typique où un signal de fréquence ω_d , de puissance P_r et de phase ζ_r est envoyé dans la ligne à transmission. Dans ce cas, on peut montrer que la transformée de Fourier de $\beta_r(\omega)$ est [22]

$$\beta_r(t) = \sqrt{\frac{P_r}{\hbar\omega_d}} \exp[-i\omega_d t + i\zeta_r]. \quad (2.90)$$

On remarque que $|\beta_r(t)|^2$ est simplement le flux de photons, $P_r/(\hbar\omega_d)$. On effectue la transformée de Fourier inverse de $\beta_r(t)$ pour trouver $\beta_r(\omega)$,

$$\begin{aligned} \beta_r(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty dt e^{i\omega t} \beta_r(t) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi P_r}{\hbar\omega_d}} \exp[i\zeta_r] \delta(\omega - \omega_d). \end{aligned} \quad (2.91)$$

En se servant de ce résultat, on peut récrire l'Hamiltonien du signal de pilotage comme

$$H_d(t) = \hbar \sum_{r=\pm 1} \sum_j \sqrt{\frac{P_r}{\hbar\omega_d}} \kappa_j(\omega_d) \left[\varphi_j(r\omega_d) e^{-i\omega_d t + i\zeta_r} + \varphi_j^*(r\omega_d) e^{i\omega_d t - i\zeta_r} \right] \theta_j. \quad (2.92)$$

Rappelons que $\kappa_j(\omega_d)$ représente le taux de couplage entre le circuit électrique quantique et la le champ électromagnétique dans la ligne à transmission. Ainsi, il est naturel que l'Hamiltonien de pilotage du circuit électrique quantique varie selon ce couplage. De plus, on remarque que plus le flux de photon $P_r/(\hbar\omega_d)$ se dirigeant vers le circuit quantique est important, plus l'amplitude de l'Hamiltonien de pilotage est grande.

2.4.3 Représentation d'interaction

La méthode typique pour trouver l'équation maîtresse requiert de passer dans la représentation d'interaction [23]. Celle-ci est définie comme le référentiel où l'Hamiltonien total du circuit est l'Hamiltonien d'interaction, c'est-à-dire le référentiel où $H(t) = H_I(t)$. Nous accédons à ce référentiel à l'aide de la transformation unitaire

$$U = \exp [i (H_F + H_S) t / \hbar]. \quad (2.93)$$

Ainsi, un opérateur A dans le référentiel du laboratoire devient

$$A(t) = \exp [i (H_F + H_S) t / \hbar] A \exp [-i (H_F + H_S) t / \hbar] \quad (2.94)$$

dans la représentation d'interaction. Remarquez que nous négligeons ici l'Hamiltonien du signal de pilotage $H_d(t)$. Nous reviendrons sur cette approximation en fin de section.

Il est utile d'introduire la base des états propres de l'Hamiltonien H_S pour passer dans la représentation d'interaction. Soit $|m_j\rangle$ l'état propre d'énergie E_{mj} du sous-circuit électrique quantique d'indice j de telle sorte à ce que

$$H_S |m_j\rangle = E_{mj} |m_j\rangle. \quad (2.95)$$

On suppose maintenant qu'on peut écrire l'opérateur θ_j comme

$$\theta_j = \sum_{mn} \left(\sigma_+^{mnj} + \sigma_-^{mnj} \right) \quad (2.96)$$

où

$$\sigma_+^{mnj} = c_{mnj} \text{Gt} [m, n] |m_j\rangle \langle n_j| = \left(\sigma_-^{mnj} \right)^\dagger. \quad (2.97)$$

Nous avons introduit l'élément de matrice c_{mnj} et la fonction $\text{Gt} [m, n]$, *greater than*, qui vaut un si $m > n$ et zéro sinon. Autrement dit, l'opérateur σ_+^{mnj} fait passer le sous-circuit électrique quantique d'indice j dans un état de plus haute énergie. L'opérateur σ_-^{mnj} a l'effet inverse. Dans le cas simple où il y a un seul sous-circuit qu'on peut modéliser comme un système à deux niveaux, $\theta_j \propto \sigma_x$, avec σ_x une des matrices de Pauli. En écrivant l'opérateur θ_j comme une superposition des opérateurs σ_\pm^{mnj} , on suppose que $\langle m_j | \theta_j | m_j \rangle = 0$, c'est-à-dire que θ_j ne possède aucun élément de matrice diagonal. Cette hypothèse est pertinente dans plusieurs cas, notamment dans le cas qui nous intéresse au chapitre 3 où on considère deux *transmons* comme sous-circuit électrique quantique [29].

Avec ces définitions, on trouve maintenant que l'Hamiltonien $H_I(t)$ dans la représenta-

tion d'interaction s'écrit

$$H_I(t) = \hbar \sum_{r=\pm 1} \sum_{mnj} \left(\sigma_+^{mnj} e^{i\omega_{mnj}t} + \sigma_-^{mnj} e^{-i\omega_{mnj}t} \right) \times \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\kappa_j(\omega)}{2\pi}} \left[\varphi_j(r\omega) b_r(\omega) e^{-i\omega t} + \varphi_j^*(r\omega) b_r^\dagger(\omega) e^{i\omega t} \right] \quad (2.98)$$

où nous avons introduit la fréquence de transition ω_{mnj} ,

$$\omega_{mnj} = \frac{1}{\hbar} |E_{mj} - E_{nj}| \quad (2.99)$$

On effectue maintenant l'approximation séculaire, ou *rotating-wave approximation*, qui consiste à remplacer les termes oscillant très rapidement par leur valeur moyenne, c'est-à-dire zéro [25]. Dans cette approximation valide pour $\kappa_j(\omega_{mnj}) / (2\omega_{mnj}) \ll 1$, l'Hamiltonien d'interaction s'écrit

$$H_I(t) = \hbar \sum_{r=\pm 1} \sum_{mnj} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\kappa_j(\omega)}{2\pi}} \left[\varphi_j(r\omega) b_r(\omega) \sigma_+^{mnj} e^{-i(\omega - \omega_{mnj})t} + \text{c.h.} \right]. \quad (2.100)$$

On remarque que dans cette approximation, seulement les termes d'échange d'énergie survivent. Par exemple, le terme proportionnel à $b_r(\omega) \sigma_+^{mnj}$ représente l'échange d'un quantum d'énergie du champ électromagnétique vers le sous-circuit d'indice j .

2.4.4 Trace partielle sur le champ électromagnétique

Ayant introduit les définitions essentielles, nous sommes maintenant en position d'obtenir l'équation maîtresse qui décrit le circuit électrique quantique lorsque celui-ci est couplé à une ligne à transmission infinie. Nous utilisons l'approximation de Born-Markov qui suppose que la ligne est faiblement couplée au circuit¹ et que l'état du circuit dans le futur dépend seulement de son état présent. Dans cette approximation, l'évolution de la matrice densité qui représente le circuit électrique quantique est décrite par [25]

$$\partial_t \rho(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau \text{Tr}_F \{ [H_I(t), [H_I(t - \tau), \rho(t) \otimes \rho_F(0)]] \}. \quad (2.101)$$

Dans cette expression, $\rho_F(0)$ représente l'état du champ électromagnétique dans la ligne à transmission. On néglige sa dépendance temporelle puisqu'on suppose que l'interaction avec le circuit électrique quantique n'est pas assez intense pour modifier $\rho_F(0)$ significativement.

1. On compare le couplage aux valeurs propres de H_S .

Autrement dit, on considère le champ électromagnétique dans la ligne à transmission comme un environnement (un réservoir) que subit le circuit électrique quantique. Le choix de ne pas décrire l'état du champ électromagnétique dans la ligne à transmission se traduit par la trace sur le champ électromagnétique $\text{Tr}_F\{\cdot\}$ qu'on effectue sur le commutateur.

Pour trouver l'équation maîtresse, il faut spécifier les fonctions de corrélation du champ électromagnétique dans la ligne à transmission. On prend ici [21, 23, 25]

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_F [b_r(\omega_1)b_s(\omega_2)\rho_F(0)] &= \delta_{rs}\delta(2\omega_S - \omega_1 - \omega_2)M(\omega_1) \\
\text{Tr}_F [b_r(\omega_1)b_s^\dagger(\omega_2)\rho_F(0)] &= \delta_{rs}\delta(\omega_1 - \omega_2)(N(\omega_1) + 1) \\
\text{Tr}_F [b_r^\dagger(\omega_1)b_s(\omega_2)\rho_F(0)] &= \delta_{rs}\delta(\omega_1 - \omega_2)N(\omega_1) \\
\text{Tr}_F [b_r^\dagger(\omega_1)b_s^\dagger(\omega_2)\rho_F(0)] &= \delta_{rs}\delta(2\omega_S - \omega_1 - \omega_2)M^*(\omega_1).
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Si $M(\omega) = 0$, ces fonctions de corrélations représentent un bain thermique. Lorsque la température de ce bain thermique est nulle, $N(\omega) = 0$. D'un autre côté, si $M(\omega) \neq 0$, ces fonctions de corrélations représentent un bain comprimé (*squeezed*) autour d'une fréquence centrale ω_S [21]. Le delta de Kronecker δ_{rs} provient de l'hypothèse que la ligne est infinie. En effet, lorsque la ligne à transmission est semi-infinie, les fonctions de corrélations de l'équation (2.102) sont inappropriées puisque la réflexion à l'extrémité de la ligne à transmission lie les modes d'indice $+|k|$ aux modes d'indice $-|k|$.

Tel que montré à l'annexe E, en utilisant les expressions ci-dessus, on obtient l'équation maîtresse suivante dans le référentiel du laboratoire,

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho &= -\frac{i}{\hbar} [H_S + H_{LS}, \rho] \\
&+ \sum_{mnj} \sum_{pqk} \gamma_{jk}(\omega_{mnj,pqk}) [N(\omega_{mnj,pqk}) + 1] \left(\sigma_-^{mnj} \rho \sigma_+^{pqk} - \frac{1}{2} \left\{ \rho, \sigma_+^{pqk} \sigma_-^{mnj} \right\} \right) \\
&+ \sum_{mnj} \sum_{pqk} \gamma_{jk}(\omega_{mnj,pqk}) N(\omega_{mnj,pqk}) \left(\sigma_+^{mnj} \rho \sigma_-^{pqk} - \frac{1}{2} \left\{ \rho, \sigma_-^{pqk} \sigma_+^{mnj} \right\} \right) \\
&+ \sum_{mnj} \sum_{pqk} \left(\frac{e^{-i2\omega_S t}}{2} \left[\gamma_{jk}^M(\omega_{mnj,pqk}) M(2\omega_S - \omega_{mnj,pqk}) + i\Delta_{jk}^M(\omega_{mnj,pqk}) \right] \right. \\
&\quad \left. \times \left[\sigma_+^{mnj} \rho \sigma_+^{pqk} + \sigma_+^{pqk} \rho \sigma_+^{mnj} - \rho \sigma_+^{pqk} \sigma_+^{mnj} - \sigma_+^{mnj} \sigma_+^{pqk} \rho \right] + \text{c.h.} \right),
\end{aligned} \tag{2.103}$$

avec l'Hamiltonien du décalage de Lamb et de l'interaction cohérente

$$H_{LS} = \sum_{mnj} \sum_{pqk} \hbar \Delta_j^N(\omega_{mnj,pqk}) \left(\sigma_-^{mnj} \sigma_+^{pqj} - \sigma_+^{pqj} \sigma_-^{mnj} \right) + \sum_{mnj} \sum_{pqk} \hbar J_{jk}(\omega_{mnj,pqk}) \sigma_+^{pqk} \sigma_-^{mnj}. \quad (2.104)$$

Pour écrire l'équation maîtresse d'une manière plus compacte, nous avons utilisé l'anticommutateur

$$\{\rho, A\} = \rho A + A \rho. \quad (2.105)$$

Le premier terme de l'équation maîtresse représente l'évolution unitaire. Le premier Hamiltonien du commutateur, H_S , est le seul terme de l'équation maîtresse qui n'est pas dû à l'interaction avec le champ électromagnétique de la ligne à transmission. Le deuxième terme dans le commutateur, l'Hamiltonien H_{LS} , contient un terme proportionnel à

$$\Delta_j^N(\omega_0) = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty d\omega_1 \frac{\kappa_j(\omega_1)}{\omega_1 - \omega_0} N(\omega_1). \quad (2.106)$$

Il s'agit du décalage de Lamb, soit le décalage des fréquences de résonance du circuit électrique quantique dû à son interaction avec le champ électromagnétique de la ligne. Le deuxième terme de l'Hamiltonien H_{LS} est proportionnel à

$$J_{jk}(\omega_0) = -\frac{P}{\pi} \int_0^\infty d\omega_1 \sqrt{\kappa_j(\omega_1) \kappa_k(\omega_1)} \frac{\cos(\omega_1(x_k - x_j)/v)}{\omega_1 - \omega_0}. \quad (2.107)$$

Il s'agit d'une interaction d'échange, médiée par les photons virtuels, entre le sous-circuit d'indice j et le sous-circuit d'indice k . Cette interaction sera particulièrement importante au chapitre 3. La deuxième et la troisième ligne de l'équation maîtresse sont proportionnelles au taux de relaxation

$$\gamma_{jk}(\omega_0) = 2\sqrt{\kappa_j(\omega_0) \kappa_k(\omega_0)} \cos(\omega_0(x_k - x_j)/v). \quad (2.108)$$

Ces termes représentent la relaxation et l'excitation du circuit électrique quantique dû à son interaction avec le bain thermique qu'est le champ électromagnétique dans la ligne à transmission selon l'équation (2.102). Finalement, les deux dernières lignes proportionnelles aux taux

$$\gamma_{jk}^M(\omega_0) = \sum_{r=\pm 1} \sqrt{\kappa_j(2\omega_S - \omega_0) \kappa_k(\omega_0)} \varphi_j(r[2\omega_S - \omega_0]) \varphi_k(r\omega_0) \quad (2.109)$$

$$\Delta_{jk}^M(\omega_0) = \sum_{r=\pm 1} \frac{P}{\pi} \int_0^\infty d\omega_1 \sqrt{\kappa_j(2\omega_S - \omega_1) \kappa_k(\omega_1)} \frac{\varphi_j(r[2\omega_S - \omega_1]) \varphi_k(r\omega_1)}{\omega_1 - \omega_0} M(2\omega_S - \omega_1) \quad (2.110)$$

représentent l'effet du bain comprimé sur le circuit électrique quantique. Nous n'abordons pas davantage le sujet des bains comprimés dans cette thèse. Nous incluons ce terme ici seulement par souci de généralité. Le lecteur trouvera en début de chapitre 3 une version plus simple de cette équation maîtresse très générale pour le cas où deux systèmes à deux niveaux sont couplés à la ligne à transmission. Notons aussi que Ficek et Tanas obtiennent une équation maîtresse comparable pour le cas où N systèmes à deux niveaux sont couplés au champ électromagnétique tridimensionnel [21].

Tel que mentionné plus haut, la démarche ci-dessus ignore l'Hamiltonien de pilotage $H_d(t)$. Notez qu'avec les concepts introduits ci-dessus, on peut récrire ce Hamiltonien comme

$$H_d(t) = \hbar \sum_{r=\pm 1} \sum_{mnj} \sqrt{\frac{P_r}{\hbar\omega_d} \kappa_j(\omega_d)} \left[\varphi_j(r\omega_d) \sigma_+^{mnj} e^{-i(\omega_d - \omega_{mnj})t + i\zeta_r} + \text{c.h.} \right]. \quad (2.111)$$

Pour inclure l'effet de l'Hamiltonien de pilotage d'une manière rigoureuse, il faut retourner dans le référentiel du laboratoire, passer dans un référentiel tournant à ω_d et introduire la base des états propres de l'Hamiltonien $H_S + H_d$ dans ce référentiel. C'est cette base qu'il faut utiliser pour construire l'équation maîtresse puisque c'est la base diagonale de l'Hamiltonien $H_S + H_d$ qui représente le circuit électrique quantique dans son ensemble. Un moyen moins rigoureux, mais qui a le mérite d'être simple et souvent correct, pour inclure l'Hamiltonien du signal de pilotage est de le négliger durant tout le calcul et de le rajouter à la fin complètement. On peut utiliser cette approche quand l'énergie du signal de pilotage est faible devant les énergies du système, c'est-à-dire dans le cas où

$$\omega_{mnj} \gg \sqrt{\frac{P_r}{\hbar\omega_d} \kappa_j(\omega_d)}. \quad (2.112)$$

Autrement dit, nous ne voulons pas que le signal de pilotage soit assez intense pour modifier d'une manière appréciable le spectre de H_S . Puisque dans cette thèse, nous considérons toujours des cas où cette condition est respectée, nous utilisons cette dernière approche pour ajouter l'Hamiltonien du signal de pilotage à l'équation maîtresse.

2.4.5 Théorie d'entrée-sortie liée à l'équation maîtresse

Il est utile d'obtenir une relation d'entrée-sortie dans le même langage que celui utilisé dans l'équation maîtresse. Nous obtenons cette relation à l'annexe F. Dans la représentation

de Heisenberg, elle prend la forme

$$b_{\text{out}}^r(t) = b_{\text{in}}^r(t) - i \sum_{mnj} \sqrt{\kappa_j(\omega_{mnj})} \varphi_j^*(r\omega_{mnj}) \sigma_-^{mnj}(t), \quad (2.113)$$

avec les opérateurs d'annihilation de sortie et d'entrée définis comme

$$\begin{aligned} b_{\text{out}}^r(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} b_r(\omega, t_f) \\ b_{\text{in}}^r(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} b_r(\omega, t_i). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Ces opérateurs possèdent des relations de commutation canoniques, avec par exemple

$$\left[b_{\text{out}}^r(t_1), b_{\text{out}}^{s\dagger}(t_2) \right] = \delta_{rs} \delta(t_1 - t_2). \quad (2.115)$$

Cette relation d'entrée-sortie sera utile au chapitre 3 pour décrire les signatures expérimentales de l'interaction entre deux atomes artificiels interagissant seulement via une ligne à transmission infinie.

2.4.6 Directions futures et formalisme SLH de Gough et James

Gough et James ont développé un formalisme alternatif permettant d'obtenir l'équation maîtresse pour un nombre arbitraire de systèmes quantiques couplés à un nombre arbitraire de lignes à transmission [30,31]. Ce formalisme est connu sous le nom de « formalisme SLH ».

L'avantage de cette approche est qu'elle introduit une notation abstraite qui permet de représenter d'une manière compacte et formelle un réseau complexe comportant plusieurs systèmes quantiques connectés à travers des lignes à transmission. La méthode d'obtention de l'équation maîtresse à partir de cette notation abstraite est assez systématique pour être automatisée [32]. Ce formalisme est particulièrement intéressant pour représenter des systèmes quantiques comportant des boucles de rétroaction.

Le formalisme de Gough et James présente aussi quelques désavantages. Par exemple, le délai que prend le champ électromagnétique pour voyager entre les différents systèmes quantiques est négligé. On peut cependant tenir compte de ce délai d'une manière artificielle en insérant des déphaseurs entre les systèmes quantiques. Aussi, l'approximation de Born-Markov et l'approximation séculaire sont intégrées à ce formalisme. Ainsi, puisque le formalisme est assez opaque, il est difficile d'obtenir des résultats allant au-delà de ces

approximations à l'aide de celui-ci.

Nous n'utilisons pas le formalisme de Gough et James dans cette thèse. Cependant, celui-ci permet de passer facilement de l'étude faite au chapitre 3, où deux atomes artificiels interagissent à travers le champ électromagnétique, à l'étude de réseaux complexes d'atomes artificiels interagissant à travers le champ électromagnétique. Il s'agit donc d'un outil important pour l'extension des travaux de cette thèse.

Chapitre 3

Signatures de l'interaction entre deux atomes artificiels

En 2010, Astafiev et ses collaborateurs du groupe du NEC au Japon se sont intéressés à la situation où un atome artificiel est couplé au champ électromagnétique dans une ligne à transmission [12]. La ligne à transmission joue le rôle d'un guide d'onde qui restreint la propagation du champ électromagnétique à une seule dimension. Cette restriction augmente significativement l'intensité de l'interaction entre l'atome et le champ électromagnétique puisqu'un photon se propageant dans une direction arbitraire dans la ligne a une chance sur deux d'entrer en collision avec l'atome. On peut distinguer deux types d'interaction entre l'atome et le champ électromagnétique dans la ligne. Le premier type fait intervenir l'absorption ou l'émission d'un photon en résonance avec l'atome artificiel. Dans cette thèse, nous qualifions ce type d'interaction de dissipative. Le deuxième type fait intervenir l'échange de photons virtuels non résonant entre l'atome et le champ électromagnétique. Ce type d'interaction est par exemple responsable du décalage de Lamb de la fréquence de résonance de l'atome artificiel. Nous qualifions ce type d'interaction de cohérente. Le groupe du NEC a observé expérimentalement une interaction de type dissipative en montrant entre autres qu'un signal envoyé vers l'atome artificiel est complètement réfléchi en raison de l'interférence destructive entre le signal transmis et le signal émis par l'atome. Ce résultat montre qu'il est possible d'atteindre expérimentalement le régime de couplage fort entre l'atome artificiel et la ligne à transmission. Dans ce régime, le taux de relaxation γ de l'atome artificiel dans la ligne à transmission est beaucoup plus grand que le taux de relaxation γ_{nr} dû aux autres pertes dans l'expérience.

Dans ce chapitre, nous étudions l'interaction entre deux atomes artificiels médiée par

le champ électromagnétique dans la ligne. En pratique, ces atomes sont séparés par une distance de l'ordre de quelques centimètres. Comme expliqué au paragraphe précédent, l'interaction effective entre les atomes est forte puisque la ligne à transmission restreint la propagation du champ électromagnétique à une dimension. Les deux types d'interaction entre le champ électromagnétique et les atomes artificiels correspondent à deux types d'interaction effective entre les atomes artificiels. En effet, les atomes peuvent soit s'échanger des photons en résonance, ce qui correspond à une interaction dissipative, soit s'échanger des photons virtuels, ce qui correspond à une interaction cohérente. Nous montrons dans ce chapitre que le type d'interaction varie en fonction de la distance entre les atomes, ou plus précisément en fonction de la phase φ acquise par le champ électromagnétique résonant entre ceux-ci. Lorsque la phase φ est un multiple entier de π , on observe une interaction dissipative où une superposition d'états des atomes artificiels est complètement découplée de la ligne à transmission tandis qu'une autre est couplée deux fois plus intensément. D'un autre côté, lorsque la phase φ est un multiple impair de $\pi/2$, on observe une interaction cohérente entre les deux atomes, et ce, malgré la grande distance qui les sépare.

Le chapitre est organisé comme suit. Nous commençons en décrivant plus en détails les différents types d'interaction qu'il peut y avoir entre deux atomes artificiels. Nous présentons ensuite certaines prédictions de signatures de ces interactions accessibles expérimentalement. Nous montrons que ces prédictions correspondent quantitativement avec les mesures de nos collaborateurs du groupe d'Andreas Wallraff à l'ETH Zurich [14]. Les travaux décrits dans ce chapitre ont mené à deux publications [13, 14].

3.1 Deux atomes artificiels interagissant dans un vide unidimensionnel

Nous considérons le cas illustré sur la figure 3.1 où deux atomes artificiels sont couplés capacitivement à une ligne à transmission. Pour fixer les idées, nous choisissons d'étudier le cas où les atomes artificiels sont implémentés à l'aide de transmons [29]. Dans le but d'étudier la situation la plus simple où la physique à laquelle on s'intéresse se manifeste, on suppose que les transmons possèdent seulement deux niveaux d'énergie, soit le niveau excité $|e\rangle$ et le niveau fondamental (*ground state*) $|g\rangle$. La différence d'énergie entre ces deux états est $\hbar\omega_0$. On définit x_j comme la position de l'atome artificiel d'indice j . Ainsi, la distance entre les deux transmons est $d = |x_0 - x_1|$ et la grandeur de la phase acquise par le champ électromagnétique entre ceux-ci est

$$\varphi = \omega_0 d / v, \tag{3.1}$$

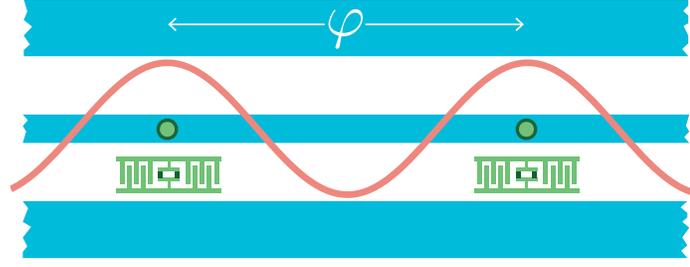


FIGURE 3.1 Deux atomes artificiels (en vert) interagissent avec le champ électromagnétique à l'intérieur d'une ligne à transmission. Les atomes artificiels sont grossis pour bien les illustrer. En pratique, on peut considérer qu'ils sont ponctuels. Les cercles verts représentent leur position. La grandeur de la phase acquise par le champ électromagnétique entre les deux atomes artificiels est φ .

avec v la vitesse de la lumière dans la ligne à transmission.

Nous utilisons une équation maîtresse pour décrire le système illustré sur la figure 3.1. À la section 2.4, on montre que sous les hypothèses du paragraphe précédent, on peut décrire l'évolution de l'état des atomes artificiels à l'aide de l'équation maîtresse

$$\partial_t \rho = \mathcal{L} \rho = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \sum_{jk} \gamma_{jk} \left(\sigma_{-}^j \rho \sigma_{+}^k - \frac{1}{2} \{ \rho, \sigma_{+}^k \sigma_{-}^j \} \right), \quad (3.2)$$

avec l'Hamiltonien

$$H = \frac{\hbar \omega_0}{2} \sum_j \sigma_z^j + \hbar J \left(\sigma_{+}^1 \sigma_{-}^2 + \sigma_{+}^2 \sigma_{-}^1 \right) + \sum_j \left(\hbar \epsilon_j \sigma_{+}^j e^{-i\omega_a t} + \text{c.h.} \right). \quad (3.3)$$

Le superopérateur $\mathcal{L} \cdot$ peut être utilisé pour représenter l'équation maîtresse d'une manière compacte. Cette équation est valide sous l'approximation de Markov et l'approximation séculaire (voir les sections 2.4.3 et 2.4.4 pour un rappel de ce qu'impliquent ces approximations). De plus, nous avons supposé que le champ électromagnétique à l'intérieur de la ligne à transmission agit comme un bain de température nulle. Afin de simplifier la notation, nous absorbons aussi le décalage de Lamb de chacun des atomes dans leur fréquence de résonance ω_0 . Le dernier terme de l'équation (3.2) introduit la matrice des taux de relaxation d'éléments

$$\gamma_{jk} = \sqrt{\gamma_j \gamma_k} (\delta_{jk} + (1 - \delta_{jk}) \cos [\varphi]). \quad (3.4)$$

Ici, le taux γ_j représente le taux de relaxation de l'atome artificiel d'indice j en l'absence de l'autre atome. La physique que représente le taux γ_{jk} est discutée en détail dans la section 3.1.1. Nous introduisons aussi la fréquence d'interaction d'échange J . On montre à

l'annexe G que l'on peut écrire cette fréquence sous la forme

$$J = \frac{\sqrt{\gamma_0 \gamma_1}}{2} \sin[\varphi]. \quad (3.5)$$

Finalement, le troisième terme de l'Hamiltonien de l'équation (3.3) représente un signal de pilotage appliqué sur la ligne à transmission, mais agissant sur les atomes artificiels. Nous supposons que ce signal est de fréquence ω_d , de puissance P et qu'il est appliqué depuis la gauche. Ainsi, selon les résultats obtenus à la section 2.4.3, l'énergie du signal de pilotage est

$$\hbar \epsilon_j = i e^{i \omega_d x_j / v} \hbar \sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} \sqrt{\frac{P}{\hbar \omega_0}}. \quad (3.6)$$

On remarque que l'élément hors diagonal γ_{12} de la matrice des taux de relaxation dépend de la phase φ acquise par le champ électromagnétique entre les deux transmons. Cet élément de matrice est maximal en amplitude lorsque $\varphi = m\pi$, avec m un entier positif. Dans cette situation, l'interaction d'échange J est nulle. C'est le régime d'interaction dissipative. La fréquence d'interaction d'échange J dépend elle aussi de φ . Son amplitude est maximale lorsque $\varphi = (2m + 1)\pi/2$, avec m un entier positif ou nul. C'est le régime d'interaction cohérente. Nous étudions en détail ces deux régimes d'interaction orthogonaux dans les prochaines sections.

3.1.1 Régime d'interaction dissipative

On nomme relaxation le processus d'émission d'un circuit électrique quantique dans une ligne à transmission ou un bain quelconque. Sous l'approximation Markovienne, ce processus est irréversible. Autrement dit, l'énergie émise dans la ligne à transmission est perdue puisque la ligne à transmission est considérée comme infinie. On peut modéliser la relaxation standard d'un atome à deux niveaux en ajoutant le terme suivant dans l'équation maîtresse,

$$\gamma \mathcal{D}[\sigma_-] \rho = \gamma \left(\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \rho, \sigma_+ \sigma_- \} \right), \quad (3.7)$$

avec γ le taux de relaxation du système à deux niveaux.

Le terme de relaxation de l'équation (3.2) est différent du terme de relaxation typique de l'équation (3.7). En effet, celui-ci contient des termes du type $\sigma_-^1 \rho \sigma_+^2$ qui font intervenir les deux transmons en même temps. Ces termes sont proportionnels au taux $\gamma_{12} \propto \cos(\varphi)$. Dans cette section, nous étudions le cas où l'amplitude de ces termes est maximale, c'est-à-dire le cas où $\varphi = m\pi$.

Dans l'annexe H.1, nous récrivons l'équation maîtresse dans la base des états dit brillant (bright) et sombre (dark) dans le but de gagner une meilleure intuition de la physique que représente le terme de relaxation atypique de l'équation (3.2). Nous trouvons, lorsque $\varphi = m\pi$,

$$\partial_t \rho = -i \left[2\Delta |ee\rangle \langle ee| + \Delta \sum_{\mu=B,D} |\mu\rangle \langle \mu| + (\epsilon_B \sigma_+^B + \text{c.h.}) \right], \rho + \Gamma_B \mathcal{D} [\sigma_-^B] \rho. \quad (3.8)$$

Nous sommes passés dans un référentiel tournant à la fréquence du signal de pilotage où $\Delta = \omega_0 - \omega_d$. L'état brillant est défini par $|B\rangle = \sigma_+^B |gg\rangle$ tandis que l'état sombre par $|D\rangle = \sigma_+^D |gg\rangle$, avec

$$[\sigma_+^\mu]^\dagger = \sigma_-^\mu = \alpha_\mu \sigma_-^0 + \beta_\mu \sigma_-^1 \quad (3.9)$$

et

$$\alpha_\mu = \frac{(\Gamma_\mu - \gamma_1)}{\sqrt{(\Gamma_\mu - \gamma_1)^2 + \gamma_0 \gamma_1}} \quad (3.10)$$

$$\beta_\mu = \frac{(-1)^m \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}}{\sqrt{(\Gamma_\mu - \gamma_1)^2 + \gamma_0 \gamma_1}}. \quad (3.11)$$

Ainsi, $|B\rangle = \alpha_B |eg\rangle + \beta_B |ge\rangle$ et $|D\rangle = \alpha_D |eg\rangle + \beta_D |ge\rangle$. Les noms de ces deux états correspondent au fait que le taux de dissipation de l'état brillant est

$$\Gamma_B = \gamma_0 + \gamma_1 \quad (3.12)$$

et celui de l'état sombre est $\Gamma_D = 0$. En d'autres mots, l'état brillant est fortement couplé à la ligne à transmission tandis que l'état sombre ne l'est pas du tout. Nous avons aussi introduit l'énergie du signal de pilotage de l'état brillant,

$$\hbar \epsilon_B = i e^{i\omega_d x_0/v} \hbar \sqrt{\frac{\Gamma_B}{2}} \sqrt{\frac{P}{\hbar \omega_0}}. \quad (3.13)$$

L'interprétation de l'équation maîtresse ci-dessus est facilitée lorsqu'on utilise la base $\{|ee\rangle, |B\rangle, |D\rangle, |gg\rangle\}$. Tel que déjà mentionné, l'état sombre $|D\rangle$ est complètement découplé du champ électromagnétique de la ligne à transmission. En effet, son taux de relaxation Γ_D et son énergie de pilotage $\hbar \epsilon_D$ sont nuls. D'un autre côté, l'état brillant $|B\rangle$ est fortement couplé au champ électromagnétique de la ligne à transmission puisque son taux de relaxation Γ_B est la somme des taux de relaxation individuels γ_j , c'est-à-dire que $\Gamma_B = \gamma_0 + \gamma_1$, une situation qui est illustrée à la figure 3.2a). On note que pour simplifier l'illustration, nous

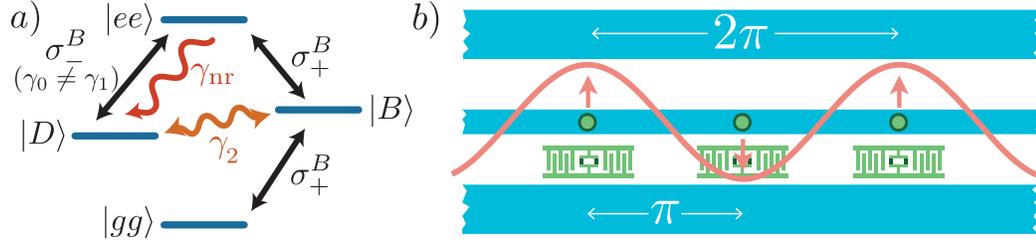


FIGURE 3.2 Régime d'interaction dissipative. a) Pour améliorer l'illustration, nous avons levé la dégénérescence entre les états $|B\rangle$ et $|D\rangle$. L'état brillant $|B\rangle$ est fortement couplé à la ligne à transmission. D'un autre côté, l'état sombre $|D\rangle$ est complètement découplé. Cependant, il peut être peuplé par des imperfections dans le système, comme du déphasage à un taux γ_2 ou de la relaxation dans des degrés de liberté autres que ceux de la ligne à transmission à un taux γ_{nr} . De plus, le signal de pilotage peut peupler l'état $|D\rangle$ en passant par $|ee\rangle$ si le couplage entre les transmons et la ligne à transmission est inhomogène, c'est-à-dire si $\gamma_0 \neq \gamma_1$. b) L'état brillant $|B\rangle$ est l'état qui respecte la symétrie du champ électromagnétique entre les transmons. L'état sombre $|D\rangle$ possède la symétrie inverse.

avons levé la dégénérescence entre les états $|B\rangle$ et $|D\rangle$. La figure illustre aussi comment l'état $|D\rangle$ peut acquérir une population non nulle à cause d'éventuelles imperfections dans le système. Ainsi, la figure illustre le cas où les transmons subissent un taux de déphasage γ_2 non nul. Dans ce cas, la phase entre les états $|eg\rangle$ et $|ge\rangle$ fluctue, ce qui permet à l'état $|D\rangle$ d'obtenir une population non nulle. La figure illustre aussi le cas où les transmons perdent de l'énergie dans des degrés de liberté autre que la ligne à transmission à un taux γ_{nr} (« nr » pour non radiatif). Il s'agit d'un autre moyen à travers lequel l'état sombre $|D\rangle$ peut être peuplé. Finalement, on remarque que

$$\langle D | \sigma_-^B | ee \rangle = (-1)^m \frac{\gamma_0 - \gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_0}. \quad (3.14)$$

Ainsi, si le couplage entre les transmons et la ligne à transmission est inhomogène, l'état $|D\rangle$ peut être peuplé à travers le signal de pilotage en passant par les états $|B\rangle$ et $|ee\rangle$, comme illustré sur la figure 3.2a). La présence d'un état sombre $|D\rangle$ découplé et d'un état brillant $|B\rangle$ fortement couplé révèle la possibilité d'observer de la superradiance dans ce type de système [33].

La raison pour laquelle il existe un état brillant $|B\rangle$ fortement couplé et un état sombre $|D\rangle$ découplé lorsque $\varphi = m\pi$ est illustrée à la figure 3.2b). Pour simplifier la discussion, on suppose $\gamma_0 = \gamma_1$ dans ce paragraphe. Ainsi, on remarque que l'état brillant peut s'écrire

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|eg\rangle + \cos(m\pi) |ge\rangle) \quad (3.15)$$

tandis que l'état sombre s'écrit

$$|D\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} (|eg\rangle - \cos(m\pi) |ge\rangle). \quad (3.16)$$

En observant la figure 3.2b), on remarque que l'état brillant $|B\rangle$ a la même symétrie que le champ électromagnétique entre les deux transmons tandis que l'état sombre $|D\rangle$ a la symétrie inverse. Autrement dit, le signe entre $|eg\rangle$ et $|ge\rangle$ est $\cos(\varphi) = \cos(m\pi)$ pour l'état $|B\rangle$ et $-\cos(m\pi)$ pour l'état $|D\rangle$. Ainsi, lorsque $\varphi = m\pi$, seul l'état qui possède la même symétrie que le champ électromagnétique entre les transmons est couplé à la ligne à transmission. On peut interpréter le découplage de l'autre état comme étant le résultat de l'interférence destructive entre les photons émis par les deux transmons lorsque leur phase ne respecte pas la symétrie imposée par φ .

3.1.2 Régime d'interaction cohérente

Lorsque la phase acquise par le champ électromagnétique entre les deux transmons est $\varphi = (2m + 1)\pi/2$, avec m un entier positif ou nul, l'interaction cohérente entre les deux transmons est maximale,

$$J = (-1)^m \frac{\sqrt{\gamma_0 \gamma_1}}{2}. \quad (3.17)$$

On remarque qu'on peut interpréter cette interaction comme étant le résultat de l'échange de photons virtuels entre les deux transmons. La ligne à transmission restreint la direction de propagation de ces photons virtuels. Ils peuvent se déplacer soit vers la droite, soit vers la gauche. Ainsi, il y a une chance sur deux pour que le photon virtuel se déplace dans la bonne direction pour atteindre le second transmon. C'est pourquoi la valeur maximale de $|J|$ est $\sqrt{\gamma_0 \gamma_1}/2$ plutôt que $\sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$. Cette intuition explique aussi pourquoi l'interaction d'échange est difficile à observer dans des expériences où le champ électromagnétique n'est pas restreint à une seule dimension. En effet, dans ces expériences, un photon émis par l'un des atomes a une probabilité très faible de se diriger dans la bonne direction pour entrer en collision avec un deuxième atome.

Lorsque $\varphi = (2m + 1)\pi/2$, on montre à l'annexe H.2 que l'on peut récrire l'équation maîtresse comme

$$\partial_t \rho = -i [H_0 + H_{Jd}, \rho] + \sum_j \gamma_j \mathcal{D} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_-^{+J} - (-1)^j \sigma_-^{-J}) \right] \rho \quad (3.18)$$

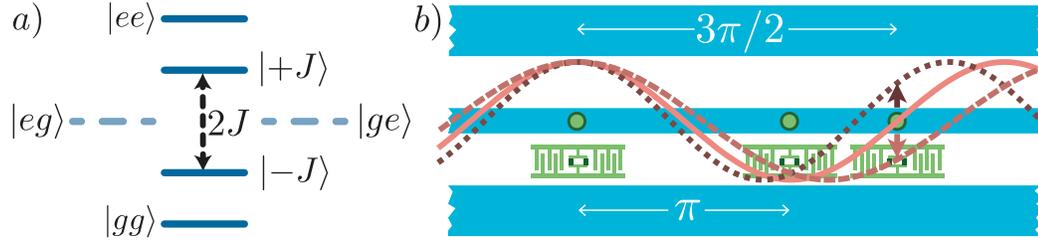


FIGURE 3.3 Régime d'interaction cohérente. a) L'interaction entre les deux transmons lève la dégénérescence entre les états $|eg\rangle$ et $|ge\rangle$. Nous avons choisi $J > 0$. b) Lorsque la distance entre les transmons est telle que $\varphi = m\pi$, le champ électromagnétique est symétrique autour de ω_0 . Autrement dit, le signe du champ électromagnétique à l'emplacement du second transmon est le même aux fréquences $\omega_0 \pm \Delta$. D'un autre côté, lorsque $\varphi = (2m + 1)\pi/2$, le champ électromagnétique est asymétrique autour de ω_0 . Autrement dit, le signe du champ électromagnétique à l'emplacement du second transmon est différent pour $\omega_0 + \Delta$ et pour $\omega_0 - \Delta$.

avec les Hamiltoniens

$$H_0 = 2\hbar\Delta |ee\rangle \langle ee| + \sum_{\mu=\pm 1} \hbar\omega_{\mu J} |\mu J\rangle \langle \mu J| \quad (3.19)$$

et

$$H_{Jd} = \sum_{\mu=\pm 1} \left(\hbar\epsilon_{\mu J} \sigma_+^{\mu J} + \text{c.h.} \right). \quad (3.20)$$

Nous avons introduit les énergies propres

$$\hbar\omega_{\mu J} = \hbar(\Delta + \mu J) \quad (3.21)$$

et les états propres $|\mu J\rangle = \sigma_+^{\mu J} |gg\rangle$ avec

$$\sigma_+^{\mu J} = \left[\sigma_-^{\mu J} \right]^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mu\sigma_+^0 + \sigma_+^1 \right). \quad (3.22)$$

Ainsi, $|+J\rangle = (|eg\rangle + |ge\rangle)/\sqrt{2}$ et $|-J\rangle = (-|eg\rangle + |ge\rangle)/\sqrt{2}$. Nous avons aussi introduit l'énergie du signal de pilotage dans la base des états $|\mu J\rangle$,

$$\hbar\epsilon_{\mu J} = i \exp[i\omega_d x_0/v] \hbar \sqrt{\frac{P}{\hbar\omega_0}} \left(\mu \sqrt{\frac{\gamma_0}{4}} + i \text{sign}[J] \sqrt{\frac{\gamma_1}{4}} \right). \quad (3.23)$$

Nous sommes passés dans un référentiel tournant à la fréquence du signal de pilotage où $\Delta = \omega_0 - \omega_d$.

Comme illustré sur la figure 3.3a), l'interaction cohérente entre les deux transmons lève la dégénérescence entre les états $|eg\rangle$ et $|ge\rangle$. On remarque que la relaxation dans la ligne à transmission s'effectue à partir d'états qui ne sont pas diagonaux dans la nouvelle base $\{|ee\rangle, |+\rangle, |-\rangle, |gg\rangle\}$. En effet, les états qui apparaissent dans le dissipateur $\mathcal{D}[\cdot]\rho$ sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sigma_+^{+J} - (-1)^j \sigma_+^{-J} \right) |gg\rangle = \sigma_+^j |gg\rangle. \quad (3.24)$$

Autrement dit, les transmons relaxent d'une manière individuelle dans la ligne à transmission même s'ils forment une *molécule* artificielle en raison de l'interaction d'échange J . Le caractère non diagonal de la relaxation dans la base des états propres de l'Hamiltonien H_0 n'est pas comparable à celui observé dans le régime d'interaction dissipative. En effet, les taux de relaxation γ_0 et γ_1 sont typiquement non négligeable tous les deux. De même, on remarque que les énergies du signal de pilotage $\hbar\epsilon_{\mu J}$ sont de même amplitude pour les deux états $|\mu J\rangle$. On rappelle que dans le régime d'interaction dissipative, un des deux états est complètement découplé de la ligne à transmission tandis que l'autre est fortement couplé.

Comme annoncé ci-dessus, l'interaction d'échange J peut être interprétée comme la modification du décalage de Lamb en présence de transmons couplés à une même ligne à transmission. Fondamentalement, les photons virtuels émis et réabsorbés par un même transmon contribuent au décalage de Lamb. Lorsqu'il y a plus d'un atome artificiel, les photons virtuels émis par un des atomes peuvent être réabsorbés par un autre. Cet échange de photons virtuels mène à une interaction transmon-transmon effective. Ce type d'interaction est bien connu en électrodynamique quantique en circuit où des transmons interagissent fortement avec un mode d'un résonateur. Pour deux transmons en résonance, si un transmon d'indice j est couplé avec une amplitude g_j à un mode du résonateur, on observe une interaction effective $J = g_0 g_1 / \delta$ entre les transmons, avec δ le décalage en fréquence entre les transmons et le mode du résonateur. Dans le cas considéré ici où la ligne est ouverte et les transmons interagissent avec un continuum de modes, l'interaction J a la même forme, mais on doit maintenant intégrer sur tout les modes sauf sur celui qui est résonant avec les transmons¹.

Pour comprendre pourquoi l'amplitude de l'interaction d'échange J entre les transmons varie avec la distance, on considère d'abord le cas où deux transmons sont séparés de telle sorte à ce que la phase acquise entre eux par le champ électromagnétique résonant est de $3\pi/2$. Ce cas est illustré à la figure 3.3b). Dans ce cas, les modes qui ont acquis une phase plus

1. L'exclusion de la fréquence résonante avec les transmons vient de la partie principale utilisée à l'équation (E.2). En effet, dans cette équation, la distribution de Dirac mène à la relaxation par l'émission d'un photon résonant avec les transmons tandis que la partie principale est responsable du décalage de Lamb et de l'interaction d'échange.

petite que $3\pi/2$ (ligne en traits) ont un signe opposé à la location du second transmon que les modes qui ont acquis une phase plus grande que $3\pi/2$ (ligne pointillée). De plus, puisque ces modes sont, respectivement, en dessous et au dessus de la fréquence de résonance des transmons, leur décalage δ est aussi de signe opposé. Ce double changement de signe mène à une interaction d'échange finie puisque la contribution à l'interaction d'échange J des modes autour de $3\pi/2$ ont tous le même signe global (négatif). Au contraire, lorsque la phase acquise par le champ électromagnétique résonant avec les transmons est π , le signe de tous les modes à la location du second transmon sont les mêmes tandis que le signe de δ change encore. Ainsi, l'interaction d'échange disparaît lorsqu'on intègre sur tous les modes qui acquièrent des phases supérieures et inférieures à π .

3.2 Mesure de l'émission élastique

La section 3.1 portait sur l'interaction entre deux atomes artificiels couplés à la même ligne à transmission. Nous étudions maintenant les signatures de cette interaction dans une mesure dite élastique, c'est-à-dire une mesure où on se limite à observer le signal de sortie à la même fréquence que le signal de pilotage. Nous commençons par décrire le protocole de mesure homodyne à 8 ports. Ce protocole est utilisé par nos collaborateurs du groupe d'Andreas Wallraff à l'ETH Zurich pour mesurer toutes les données expérimentales présentées dans ce chapitre [14]. Nous expliquons ensuite comment la mesure élastique est reliée à la mesure homodyne. Nous présentons finalement des prédictions de signatures particulières à chacun des régimes d'interaction entre les atomes artificiels. Nous obtenons une correspondance quantitative entre les prédictions théoriques présentées et les résultats expérimentaux obtenus par nos collègues.

3.2.1 Mesure homodyne à 8 ports

Nous décrivons ici le protocole de mesure homodyne à 8 ports illustré à la figure 3.4. La figure 3.4 montre que pour réaliser ce type de mesure, on branche la sortie de la ligne à transmission à un amplificateur. On envoie ensuite le signal amplifié dans deux mélangeurs (*mixers*) qui sont aussi branchés sur un signal de référence V_{LO} , appelé l'oscillateur local, de même fréquence que le signal de pilotage. Tel qu'illustré, les deux mélangeurs reçoivent des signaux de référence qui sont en quadrature de phase. Cet ensemble de deux mélangeurs recevant des signaux de référence en quadrature de phase est souvent nommé « mélangeur IQ ». Les hautes fréquences de la sortie des mélangeurs sont finalement filtrées et le signal est mesuré.

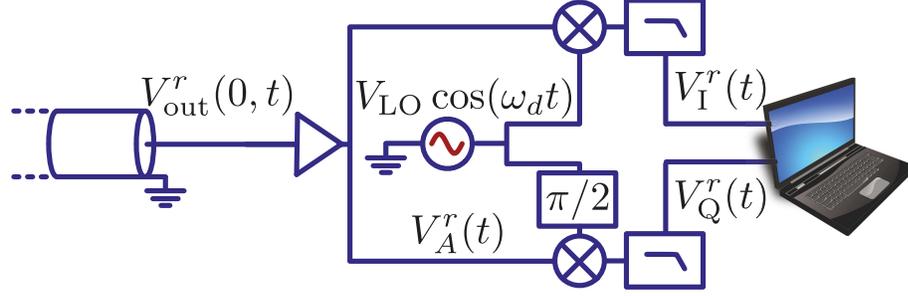


FIGURE 3.4 Illustration schématique de la mesure homodyne à 8 ports. La tension est d’abord amplifiée. Elle est ensuite mixée avec deux signaux de référence en quadrature de phase et elle est filtrée. Ce processus permet d’obtenir deux tensions, $V_I^r(t)$ et $V_Q^r(t)$, qui renferment toute l’information contenue dans le signal de sortie $V_{\text{out}}^r(0, t)$.

Le but du reste de la section est de faire le lien entre la tension mesurée expérimentalement et la théorie d’entrée-sortie présentée à la section 2.4.5. La tension dans la ligne à transmission est reliée à la charge par $V(x) = q(x)/c$. Ainsi, on peut écrire la tension en seconde quantification en utilisant l’équation (2.14) pour obtenir

$$V(x, t) = V^+(x, t) + V^-(x, t) \quad (3.25)$$

avec

$$V^r(x, t) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega Z}{2}} \left[b_r(\omega) e^{-i\omega(t-rx/v)} - b_r^\dagger(\omega) e^{i\omega(t-rx/v)} \right], \quad (3.26)$$

et $r = \pm$. Nous avons utilisé la même procédure qu’à l’annexe D pour récrire les intégrales en fonction de la fréquence. Dans l’annexe F, on trouve formellement la solution pour $b_r(\omega)$ dans la représentation de Heisenberg. À partir de cette solution, on montre qu’on peut écrire le signal de sortie comme

$$V_{\text{out}}^r(x, t) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega Z}{2}} \left[b_r(\omega, t_f) e^{-i\omega(t-rx/v)} - b_r^\dagger(\omega, t_f) e^{i\omega(t-rx/v)} \right] \quad (3.27)$$

avec t_f le temps final. On remarque que le signal $V_{\text{out}}^+(x, t)$ voyage vers la droite tandis que $V_{\text{out}}^-(x, t)$ voyage vers la gauche. On choisit la phase de référence de telle sorte à ce que $x = 0$ à l’amplificateur.

Lors de la première étape de la mesure à 8 ports homodyne, on amplifie la tension

$V_{\text{out}}^r(x=0, t)$ à la sortie de la ligne à transmission. Après l'amplification, la tension est

$$V_A^r(t) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega Z}{2}} \left(\left[g(\omega) b_r(\omega, t_f) + \sqrt{g^2(\omega) - 1} v_b^\dagger(\omega) \right] e^{-i\omega t} - \text{c.h.} \right) \quad (3.28)$$

où la fonction $g(\omega)$ représente le gain de l'amplificateur avec sa dépendance en fréquence. En pratique, comme nous le montrons sous peu, on s'intéresse seulement au gain autour de la fréquence du signal de pilotage, $g(\omega_d)$. L'opérateur $v_b^\dagger(\omega)$ représente le bruit ajouté par l'amplification et satisfait la relation de commutation

$$\left[v_b(\omega_1), v_b^\dagger(\omega_2) \right] = \delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (3.29)$$

Dans la deuxième étape du protocole, la tension est mixée et les hautes fréquences sont filtrées. À la sortie du mélangeur, on obtient une tension proportionnelle au produit des deux entrées. Ainsi, la tension $V_I^r(t)$ est proportionnelle au produit de $V_A^r(t)$ et $V_{\text{LO}} \cos(\omega_d t)$ avec les hautes fréquences filtrées,

$$V_I^r(t) = -\frac{iK'V_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega Z}{2}} \left(\left[g(\omega) b_r(\omega, t_f) + \sqrt{g^2(\omega) - 1} v_b^\dagger(\omega) \right] e^{-i(\omega - \omega_d)t} - \text{c.h.} \right) \quad (3.30)$$

où K' est une constante reliée aux pertes dans le mélangeur [34]. De même, la tension $V_Q^r(t)$ est proportionnelle au produit de $V_A^r(t)$ et $V_{\text{LO}} \sin(\omega_d t)$ avec les hautes fréquences filtrées,

$$V_Q^r(t) = -\frac{K'V_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega Z}{2}} \left(\left[g(\omega) b_r(\omega, t_f) + \sqrt{g^2(\omega) - 1} v_b^\dagger(\omega) \right] e^{-i(\omega - \omega_d)t} + \text{c.h.} \right). \quad (3.31)$$

Nous avons négligé le bruit ajouté par le mélangeur dans les deux cas.

Afin de relier ce calcul à la théorie d'entrée-sortie, il est utile d'introduire l'enveloppe complexe

$$R_b^r(t) = V_I^r(t) + iV_Q^r(t) \quad (3.32)$$

pour modéliser la mesure simultanée des tensions $V_I^r(t)$ et $V_Q^r(t)$ [35]. En utilisant les équations (3.30) et (3.31), on trouve que cette quantité peut s'exprimer comme

$$R_b^r(t) = -\frac{iK'V_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega Z}{2}} \left[g(\omega) b_r(\omega, t_f) + \sqrt{g^2(\omega) - 1} v_b^\dagger(\omega) \right] e^{-i(\omega - \omega_d)t}. \quad (3.33)$$

On suppose maintenant que toutes les fonctions de corrélation de $b_r(\omega, t_f)$ sont nulles pour toutes les fréquences sauf celles autour de ω_d . Autrement dit, on suppose que le signal

occupe une bande de fréquence très étroite. Dans ce cas,

$$R_b^r(t) \approx -\frac{iK'V_0}{\sqrt{2\pi}}g(\omega_d)\sqrt{\frac{\hbar\omega_d Z}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\left[b_r(\omega,t_f)+\sqrt{1-g^{-2}(\omega_d)}v_b^\dagger(\omega)\right]e^{-i(\omega-\omega_d)t}. \quad (3.34)$$

Cette approximation est parfois nommée *approximation de Markov* dans la littérature [25]. On la retrouve aussi sous le nom *approximation de l'enveloppe qui varie lentement*. Nous avons étendu l'intégrale jusqu'à moins l'infini, ce qui est permis puisque l'intégrande est nul sur ce domaine par hypothèse. On récrit finalement l'enveloppe complexe sous la forme

$$R_b^r(t) \approx K\left(b_{\text{out}}^r(t)e^{i\omega_d t}+\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\left[\sqrt{1-g^{-2}(\omega_d)}v_b^\dagger(\omega)\right]e^{-i(\omega-\omega_d)t}\right), \quad (3.35)$$

où nous avons introduit K , une nouvelle constante de proportionnalité qui englobe les autres déjà introduites. Nous rappelons que d'après les résultats de la section 2.4.5, le premier terme de l'équation (3.35) peut s'écrire sous la forme

$$b_{\text{out}}^r(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{-i\omega t}b_r(\omega,t_f)=b_{\text{in}}^r(t)-\sum_j\sqrt{\frac{\gamma_j}{2}}\exp[-ir\omega_0x_j/v]\sigma_-^j(t). \quad (3.36)$$

Lors d'une mesure élastique, on mesure la valeur moyenne stationnaire de l'enveloppe complexe $R_b^r(t)$. On remarque que l'existence d'un régime stationnaire nécessite $\omega = \omega_d$. C'est pourquoi on qualifie cette mesure d'élastique.

En résumé, dans cette section, nous avons relié la quantité mesurée $\langle R_b^r(t) \rangle$ à $\langle b_{\text{out}}^r(t) \rangle$ que l'on obtient de la théorie d'entrée-sortie. Pour prédire théoriquement la valeur de $\langle b_{\text{out}}^r(t) \rangle$, il faut connaître $\langle b_{\text{in}}^r(t) \rangle$ et $\langle \sigma_-^j(t) \rangle$. Le premier est connu puisqu'il s'agit du signal appliqué en entrée. De plus, la valeur moyenne $\langle \sigma_-^j(t) \rangle$ peut être prédite à l'aide de l'équation maîtresse (3.2) en trouvant d'abord $\rho(t)$ et en utilisant la relation

$$\langle \sigma_-^j(t) \rangle = \text{Tr}[\rho(t)\sigma_-^j]. \quad (3.37)$$

Ainsi, on peut prédire analytiquement l'enveloppe complexe mesurée par détection homodyne à l'aide du cadre théorique développé dans cette thèse. Dans les prochaines sections, nous étudions ce signal de sortie $\langle b_{\text{out}}^r(t) \rangle$ pour différents cas qui présentent une physique intéressante.

3.2.2 Cas à un atome artificiel

Afin de mettre les idées en place, nous présentons d'abord le cas où un seul atome artificiel est couplé à la ligne à transmission. Ceci aide à établir une base de comparaison pour le cas à deux atomes. Dans cette situation, l'équation maîtresse (3.2) se simplifie à

$$\partial_t \rho = -i \left[\frac{\Delta}{2} \sigma_z + \epsilon \sigma_+ + \epsilon^* \sigma_- \right] \rho + \gamma \mathcal{D}[\sigma_-] \rho. \quad (3.38)$$

Cette équation est valide dans un référentiel tournant à la fréquence du signal de pilotage, donc $\Delta = \omega_0 - \omega_d$. On peut trouver la solution de cette équation maîtresse analytiquement. En particulier, on trouve que pour tous les états initiaux, la valeur moyenne dans l'état stationnaire est

$$\langle \sigma_- \rangle = -\epsilon \frac{\Delta + i\gamma/2}{\Delta^2 + 2|\epsilon|^2 + (\gamma/2)^2}. \quad (3.39)$$

Ainsi, dans le régime stationnaire, selon l'équation (3.36),

$$\langle b_{\text{out}}^r \rangle = \langle b_{\text{in}}^r \rangle - \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \left[-\epsilon \frac{\Delta + i\gamma/2}{\Delta^2 + 2|\epsilon|^2 + (\gamma/2)^2} \right]. \quad (3.40)$$

Nous avons choisi le système de référence de telle sorte à ce que la position de l'atome artificiel est $x_0 = 0$.

Pour simplifier davantage les relations d'entrée-sortie, rappelons que selon l'équation (2.90), l'état en entrée est, dans le référentiel tournant à la fréquence ω_d ,

$$\langle b_{\text{in}}^+ \rangle = \sqrt{\frac{P}{\hbar \omega_d}}, \quad (3.41)$$

où nous avons choisi la phase de référence $\zeta_+ = 0$. De plus, par hypothèse, il n'y a pas de signaux appliqués à l'extrémité droite de la ligne à transmission, c'est-à-dire $\langle b_{\text{in}}^- \rangle = 0$. Ainsi, en utilisant l'équation (3.6), on trouve finalement à l'ordre zéro en Δ/ω_d les coefficients de réflexions et de transmission

$$r = \frac{\langle b_{\text{out}}^- \rangle}{\langle b_{\text{in}}^+ \rangle} = \frac{2i\Delta/\gamma - 1}{4\Delta^2/\gamma^2 + 8|\epsilon|^2/\gamma^2 + 1} \quad (3.42)$$

$$t = \frac{\langle b_{\text{out}}^+ \rangle}{\langle b_{\text{in}}^+ \rangle} = r + 1. \quad (3.43)$$

Le module carré de ces expressions est illustré à la figure 3.5 en fonction du décalage de fréquence Δ entre la fréquence de transition de l'atome et le signal de pilotage. On observe

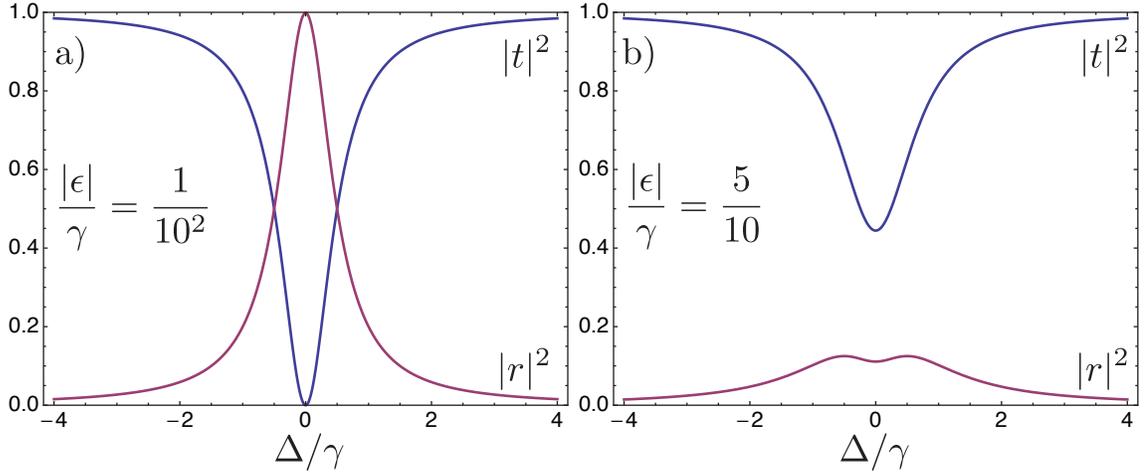


FIGURE 3.5 Transmission et réflexion pour un transmon dans une ligne à transmission. a) Pour un signal de pilotage de faible puissance, on observe une extinction de la transmission à la résonance. b) Pour un signal de pilotage de puissance considérable, le transmon est saturé et l'extinction de la transmission est levée.

d'abord que hors résonance, le champ électromagnétique n'interagit pas avec le transmon et il est transmis. À la résonance, un photon peut soit être transmis directement, soit être absorbé par le transmon et réémis. L'amplitude de probabilité que le photon soit absorbé et réémis par le transmon est équivalente au coefficient de réflexion r . Selon les équations (3.42) et (3.43), cette amplitude de probabilité interagit destructivement avec l'amplitude de probabilité d'être transmis directement puisque, au premier ordre en ϵ et pour un décalage de fréquence $\Delta = 0$, $r \approx -1$ et le coefficient de transmission $t = r + 1 \approx 0$. Ainsi, lorsque la puissance du signal de pilotage est très faible, on s'attend à une extinction de la transmission à la résonance. C'est ce qui est observé en a). Toutefois, lorsque la puissance du signal de pilotage est plus grande, la transmission devient possible puisqu'un seul atome ne peut pas absorber plus d'un photon. C'est ce qui est observé en b). On note que même pour des puissances du signal de pilotage faible, la transmission $|t|^2$ n'est pas exactement nulle pour $\Delta = 0$. En effet, en développant t au deuxième ordre en ϵ , on obtient

$$|t|^2 \approx 64|\epsilon|^4/\gamma^4. \quad (3.44)$$

Cette valeur résiduelle de la transmission provient de la probabilité non nulle que l'état cohérent avec lequel on pilote le transmon contienne deux photons ou plus et que l'atome ne réponde donc plus au signal de pilotage. Comme nous le mentionnons au chapitre 1, les phénomènes décrits dans ce paragraphe ont été mesurés expérimentalement par le groupe du NEC et ils ont en parti inspiré les travaux décrits dans ce chapitre [12].

Sur la figure 3.5b), on observe que pour certains décalages en fréquence, $|r|^2 + |t|^2 \neq 1$. En particulier, à la résonance, on trouve que $|r|^2 + |t|^2 \approx 0.55$. On déduit de cette observation qu'une partie du signal de pilotage subit une conversion de fréquence. En effet, la mesure élastique modélisée ici ne détecte que le signal à la même fréquence que le signal de pilotage. Il peut cependant se produire une conversion de fréquence du signal lors de l'interaction avec le transmon. Ce signal converti ne sera pas détecté par une mesure élastique. L'hypothèse de la conversion de fréquence est soutenue par la présence de maxima hors résonance, similaires à des bandes latérales, présents à la figure 3.5b). Cette interprétation sera confirmée à la section 3.3 lorsque la mesure dite inélastique sera abordée.

3.2.3 Régime d'interaction dissipative

On considère maintenant le cas où deux atomes, de même fréquence de transition, sont couplés à la ligne à transmission. Dans le régime dissipatif, la distance entre les transmons est telle que la phase acquise par un signal de pilotage résonant avec les atomes est $\varphi = m\pi$, avec m un entier. On rappelle que dans ce régime, l'état sombre est complètement découplé de la ligne à transmission tandis que l'état brillant est couplé deux fois plus intensément. Dans ce cas, la relation d'entrée-sortie se simplifie à

$$\langle b_{\text{out}}^r \rangle = \langle b_{\text{in}}^r \rangle - \sqrt{\frac{\Gamma_B}{2}} \langle \sigma_-^B \rangle \quad (3.45)$$

où nous avons choisi $x_0 = 0$. On remarque que seulement l'état brillant est couplé à la ligne à transmission. Nous en étions venus à la même conclusion à la section 3.1.1 en simplifiant l'équation maîtresse.

La dynamique des transmons est gouvernée par l'équation maîtresse (3.8). On y ajoute le terme $\gamma_{\text{nr}} \sum_j \mathcal{D}[\sigma_-^j] \rho$ pour modéliser d'une manière phénoménologique la relaxation des transmons dans d'autres degrés de liberté que ceux de la ligne à transmission. On qualifie cette relaxation de non radiative puisqu'elle n'est pas accompagnée d'émission d'énergie dans la ligne à transmission. La solution analytique de cette équation maîtresse nous permet d'obtenir les coefficients de réflexion et de transmission dans le régime stationnaire. Dans la limite des faibles signaux de pilotage, on obtient

$$r = (1 - \gamma_{\text{nr}}/\Gamma_B) \frac{2i\Delta/\Gamma_B - 1}{4\Delta^2/\Gamma_B^2 + 1}, \quad (3.46)$$

$$t = r + 1. \quad (3.47)$$

Pour un taux de dissipation non radiative γ_{nr} nul et dans la limite des signaux de pilotage de

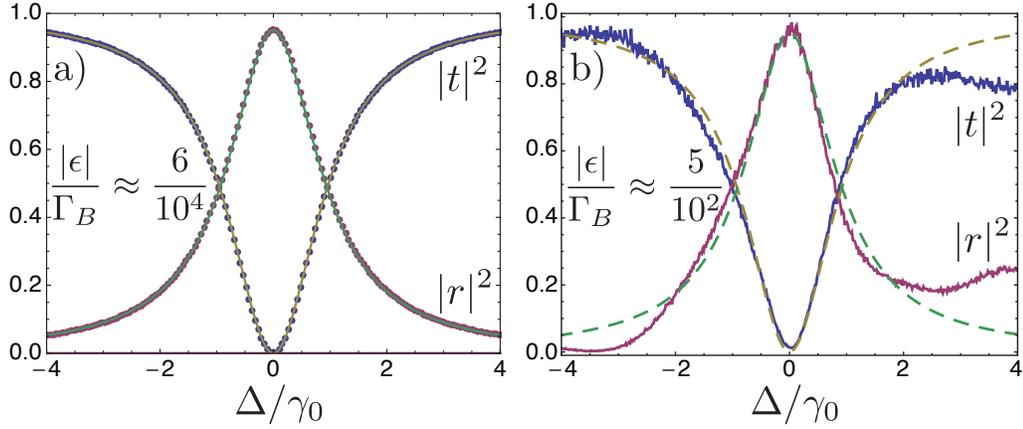


FIGURE 3.6 Transmission et réflexion pour le régime dissipatif. a) Les simulations numériques (points) correspondent aux résultats analytiques (lignes pleines). Les résultats sont comparables à ce qui est trouvé pour un seul atome couplé à une ligne à transmission, mais la largeur des courbes est environ deux fois plus grande. Nous avons inclus un taux de dissipation non radiative $\gamma_{nr}/\Gamma_B \approx 0.025$. b) On compare les résultats expérimentaux obtenus par nos collaborateurs (lignes pleines) aux simulations numériques du modèle théorique développé dans cette thèse (lignes pointillées). La correspondance autour de la résonance est bonne. Hors résonance, il y a des différences inexplicables entre le modèle théorique et l'expérience. Dans l'expérience, la résonance est à 6.4 GHz et $\Gamma_B/(2\pi) \approx 55.8$ MHz. L'énergie $\hbar\epsilon$ est le seul paramètre ajustable.

faible puissance, ces équations sont équivalentes aux équations (3.42) et (3.43) qui décrivent un seul atome couplé au champ électromagnétique d'une ligne à transmission. Ainsi, les deux transmons se comportent comme un seul avec un taux de relaxation Γ_B puisque l'état sombre $|D\rangle$ est complètement découplé de la ligne à transmission et que la puissance du signal de pilotage est trop faible pour exciter significativement l'état $|ee\rangle$.

Nous vérifions la théorie élaborée ci-dessus en deux temps. D'abord, nous comparons les résultats analytiques aux résultats obtenus en simulant numériquement l'équation maîtresse (3.8). Les résultats sont présentés à la figure 3.6a). Pour cette figure, nous choisissons $\gamma_0 = \gamma_1$. On observe que les résultats numériques (points) correspondent exactement aux résultats analytiques (lignes pleines)². On observe aussi que les résultats sont comparables à ce qui est illustré à la figure 3.5a) pour un seul atome artificiel couplé à une ligne à transmission. Cependant, sur la figure 3.6a), la largeur des courbes est environ deux fois plus grande. Cette observation soutient l'interprétation développée ci-dessus qui considère que

2. Contrairement aux équations (3.46) et (3.47), la formule analytique utilisée pour tracer les courbes sur la figure 3.6a) est aussi valide pour les signaux de pilotage de puissance élevée. Nous ne reproduisons pas cette formule ici puisqu'elle est trop encombrante.

les deux transmons se comportent comme un seul atome artificiel avec un taux de relaxation $\Gamma_B = 2\gamma_0$.

La mesure décrite dans cette section a aussi été effectuée expérimentalement [14]. Nous utilisons ces résultats expérimentaux pour tester la théorie développée ici. Sur la figure 3.6b), nous présentons les résultats expérimentaux (lignes pleines) et les simulations numériques correspondantes (lignes pointillées). On observe une concordance acceptable entre les données expérimentales et les simulations numériques autour de la résonance. Cependant, hors résonance, il y a des différences entre le modèle théorique et l'expérience. Ces distinctions sont particulièrement notables pour des décalages de fréquence Δ positifs. La cause derrière ces différences est inconnue.

3.2.4 Régime d'interaction cohérente

On rappelle que dans le régime d'interaction cohérente, la distance entre les transmons est telle que la phase acquise par le champ électromagnétique entre ceux-ci est $\varphi = (2m + 1)\pi/2$, avec m un entier. Dans ce régime, l'interaction d'échange J est maximale et la relation d'entrée-sortie est

$$\langle b_{\text{out}}^r \rangle = \langle b_{\text{in}}^r \rangle - \sum_{\mu=\pm 1} \left(\mu \sqrt{\frac{\gamma_0}{4}} - ir \operatorname{sign}[J] \sqrt{\frac{\gamma_1}{4}} \right) \langle \sigma_-^{\mu J} \rangle, \quad (3.48)$$

où $\mu = \pm$ et où nous avons encore choisi $x_0 = 0$. On remarque que les deux états propres $|\mu J\rangle = \sigma_+^{\mu J} |gg\rangle$ de l'Hamiltonien non piloté sont couplés avec la même intensité au champ électromagnétique, mais avec une phase différente.

On rappelle qu'on utilise l'équation maîtresse (3.18) pour d'obtenir l'état des transmons en fonction du temps. Le terme $\gamma_{\text{nr}} \sum_j \mathcal{D}[\sigma_-^j] \rho$ est à nouveau ajouté pour modéliser la relaxation non radiative. Encore une fois, on peut résoudre analytiquement l'équation maîtresse dans la limite des faibles signaux de pilotage. Cette solution nous permet d'obtenir les coefficients de réflexion et de transmission dans le régime stationnaire. On obtient, pour $\gamma_0 = \gamma_1$,

$$r = \frac{\gamma_0^2/2}{(\Delta + J - i(\gamma_0 + \gamma_{\text{nr}})/2)(\Delta - J - i(\gamma_0 + \gamma_{\text{nr}})/2)}, \quad (3.49)$$

$$t = \frac{\Delta^2 - i\gamma_{\text{nr}}(\Delta - i\gamma_{\text{nr}}/4)}{(\Delta + J - i(\gamma_0 + \gamma_{\text{nr}})/2)(\Delta - J - i(\gamma_0 + \gamma_{\text{nr}})/2)}. \quad (3.50)$$

On remarque que les dénominateurs sont composés de deux facteurs. Ces facteurs ont une valeur minimale lorsque $\Delta = \pm J$, c'est-à-dire lorsque le signal de pilotage est en résonance

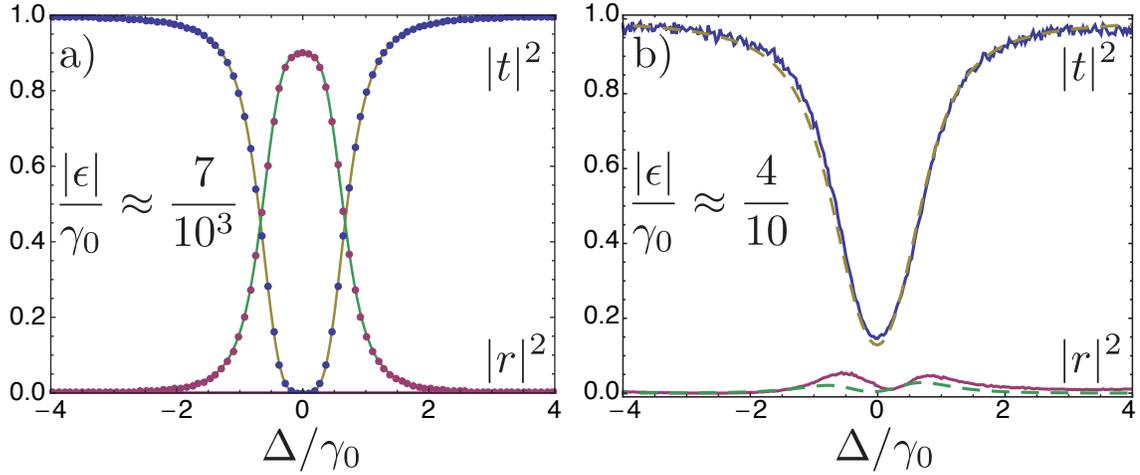


FIGURE 3.7 Transmission et réflexion pour le régime d'interaction cohérente. a) Les simulations numériques (points) correspondent aux résultats analytiques (lignes). On observe une extinction de la transmission à $\Delta = 0$ et un profil plat autour de la résonance. Nous avons inclus un taux de dissipation non radiative $\gamma_{nr}/\gamma_0 \approx 0.05$. b) On compare les résultats expérimentaux obtenus par nos collègues (lignes pleines) aux simulations numériques du modèle théorique développé dans cette thèse (lignes pointillées). La correspondance pour la transmission est bonne. Pour la réflexion, il y a des différences inexplicables entre le modèle théorique et l'expérience. Dans l'expérience, la résonance est à 4.8 GHz et $\gamma_0/(2\pi) \approx 13$ MHz. L'énergie $\hbar\epsilon$ est le seul paramètre ajustable.

avec les états propres de l'Hamiltonien non piloté. On remarque aussi que le minimum de transmission est à $\Delta = 0$. Pour comprendre pourquoi, on réécrit l'équation (3.50) comme

$$t = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(J + i\gamma_0/2)^2/(2J)}{\Delta - J - i(\gamma_0 + \gamma_{nr})/2} - \frac{(J - i\gamma_0/2)^2/(2J)}{\Delta + J - i(\gamma_0 + \gamma_{nr})/2} \right). \quad (3.51)$$

On remarque que le coefficient de transmission t est composé de trois termes. Le premier représente le signal transmis directement tandis que les deux autres représentent l'émission des états $| -J \rangle$ et $| +J \rangle$. À $\Delta = 0$, ces états ont la même probabilité d'être excités et de relaxer dans la ligne à transmission et leur émission interagit destructivement avec le signal directement transmis, ce qui explique l'extinction de la transmission.

À la figure 3.7a), nous comparons les résultats analytiques obtenus ci-dessus à des simulations numériques de l'équation maîtresse (3.18). La correspondance entre les résultats numériques (points) et les résultats analytiques (lignes) est excellente. Autour de la résonance, on remarque que les courbes ont une forme non lorentzienne. En effet, l'équation (3.49) prédit que la réflexion $|r|^2$ est le produit de deux fonctions lorentziennes centrées à $\pm J$ et de largeur $\gamma_0 + \gamma_{nr}$. La largeur de ces lorentziennes est trop grande pour observer deux

maximums distincts puisque $|J| = \gamma_0/2$. On peut cependant observer un profil plat près de la résonance.

Nous comparons les résultats expérimentaux de nos collaborateurs aux simulations numériques de l'équation maîtresse (3.18) à la figure 3.7b) [14]. On observe un accord quantitatif pour la transmission $|t|^2$, mais un accord seulement qualitatif pour la réflexion $|r|^2$. La raison de cet écart entre théorie et expérience n'est pas bien comprise. Puisque le signal de pilotage utilisé dans cette expérience est de très forte intensité avec $|\epsilon|/\gamma \approx 0.4$, on observe que $|t|^2 + |r|^2 \neq 1$ près de la résonance. Tel que discuté à la section 3.2.2, cette observation indique qu'une partie du signal a subi une conversion de fréquence. On observe aussi une structure similaire à des bandes latérales en réflexion, comme à la figure 3.5b). Dans la section suivante, nous étudions plus en profondeur le signal qui subit une conversion de fréquence à l'aide d'un protocole de mesure différent.

3.3 Mesure du spectre d'émission en puissance

Dans cette section, nous étudions le cas où la norme de la transformée de Fourier d'une tension est mesurée. Plus précisément, nous étudions la norme de la transformée de Fourier de l'enveloppe complexe $R_b^r(t)$. Rappelons que l'enveloppe complexe est obtenue en mesurant des tensions de la manière illustrée à la figure 3.4 et décrite à la section 3.2. D'une manière plus formelle, on s'intéresse à une mesure du spectre en puissance

$$S^r(\omega) = \left\langle \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} R_b^r(t) \right|^2 \right\rangle. \quad (3.52)$$

On nomme cette quantité spectre en *puissance* puisque comme celle-ci, $S^r(\omega)$ dépend de la tension au carré.

En utilisant l'expression pour l'enveloppe complexe $R_b^r(t)$ de l'équation (3.35), on trouve à l'aide de l'approche développée à la référence [35], que

$$S^r(\Delta_d) = K_s \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\Delta_d \tau} \left\langle [b_{\text{out}}^r(\tau)]^\dagger b_{\text{out}}^r(0) \right\rangle. \quad (3.53)$$

Pour obtenir cette expression, nous supposons que la fonction de corrélation $\langle b_{\text{out}}^{r\dagger}(t_1) b_{\text{out}}^r(t_2) \rangle$ est évaluée dans l'état stationnaire. Dans ce cas, puisque la fonction de corrélation est invariante sous une translation temporelle, elle ne peut dépendre que de la différence de temps $\tau = t_1 - t_2$. Nous négligeons aussi une constante ajoutée au spectre et nous supposons avoir moyenné suffisamment longtemps pour que le bruit soit négligeable. Nous avons introduit

$\Delta_d = \omega - \omega_d$, le décalage de fréquence avec le signal de pilotage et K_s , une nouvelle constante de proportionnalité.

On utilise maintenant la relation d'entrée-sortie (3.36) pour prédire la valeur du spectre d'émission. On trouve facilement

$$S^r(\Delta_d) = K_s 2\pi \delta(\Delta_d) \left[\frac{P_r}{\hbar\omega_d} - \sqrt{\frac{P_r}{\hbar\omega_d}} \left(\sum_j \sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} e^{-ir\omega_0 x_j/v} \langle \sigma_-^j(0) \rangle + \text{c.h.} \right) \right] + K_s S_{\sigma\sigma}^r(\Delta_d) \quad (3.54)$$

avec

$$S_{\sigma\sigma}^r(\Delta_d) = \sum_{ij} \sqrt{\frac{\gamma_i \gamma_j}{4}} \exp[ir\omega_0(x_i - x_j)/v] \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\Delta_d \tau} \langle \sigma_+^i(\tau) \sigma_-^j(0) \rangle. \quad (3.55)$$

Pour obtenir ce résultat, nous utilisons l'approximation de Born que nous avons déjà utilisé pour obtenir l'équation maîtresse (3.2). Cette approximation suppose que la matrice densité du système peut s'écrire comme $\rho_F(0) \otimes \rho(t)$, avec $\rho_F(0)$ la matrice densité du champ électromagnétique dans la ligne à transmission et $\rho(t)$ la matrice densité des transmons. Nous utilisons aussi le caractère stationnaire des fonctions de corrélations, ainsi que la forme du signal de pilotage spécifiée à l'équation (2.90) avec la phase $\zeta_r = 0$.

Le premier terme du spectre d'émission $S^r(\Delta_d)$ représente la contribution du signal de pilotage. Puisque ce terme est proportionnel à une distribution de Dirac évaluée à la même fréquence que le signal de pilotage, on dit que ce terme représente la contribution *élastique*. Le deuxième terme du spectre d'émission, proportionnel à $S_{\sigma\sigma}^r(\Delta_d)$, représente la contribution des transmons au spectre d'émission. On évalue cette contribution à l'aide de la formule de régression quantique qui prend la forme [23]

$$\langle \sigma_+^i(\tau) \sigma_-^j(0) \rangle = \text{Tr} \left[\sigma_+^i(0) e^{\mathcal{L}\tau} \left(\sigma_-^j(0) \rho_S \right) \right]. \quad (3.56)$$

Comme plus haut, le superopérateur $\mathcal{L}\cdot$ représente l'équation maîtresse (3.2). La matrice densité ρ_S est la solution stationnaire de cette même équation³. En résumé, la formule de régression quantique indique que pour évaluer la fonction de corrélation $\langle \sigma_+^i(\tau) \sigma_-^j(0) \rangle$, on doit faire évoluer l'opérateur $\sigma_-^j(0) \rho_S$ à l'aide de l'équation maîtresse (3.2). Dans les sections suivantes, on évalue le spectre d'émission des transmons $S_{\sigma\sigma}^r(\Delta_d)$ pour plusieurs cas intéressants.

3. On suppose que cette solution existe et qu'elle est unique.

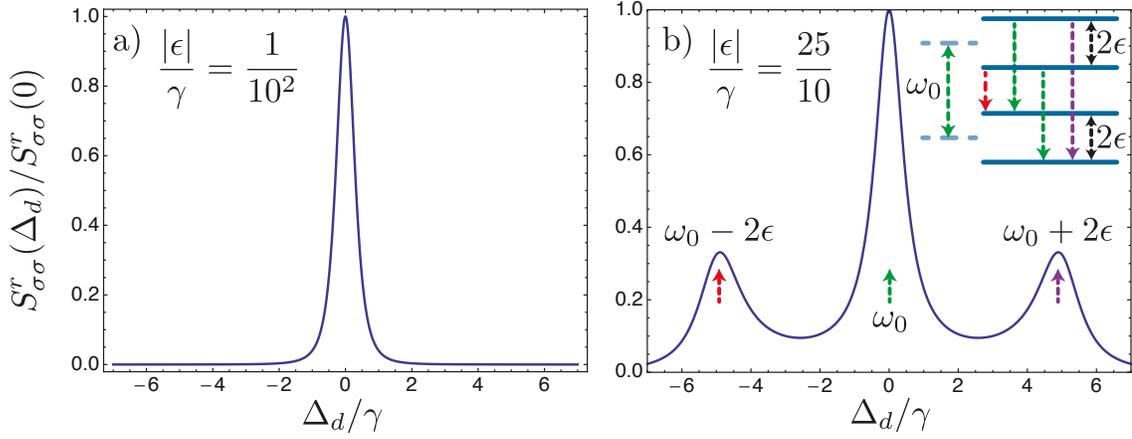


FIGURE 3.8 Spectre d'émission en puissance pour un transmon. a) Dans le cas où l'énergie $\hbar|\epsilon|$ du signal de pilotage est faible, on observe une lorentzienne au carré. b) Dans le cas où l'énergie $\hbar|\epsilon|$ du signal de pilotage est comparable au taux de relaxation γ , les énergies propres du système sont renormalisées par le signal de pilotage et on observe des bandes latérales.

3.3.1 Cas à un atome artificiel

Nous présentons ici le spectre d'émission $S_{\sigma\sigma}^r(\Delta_d)$ pour un seul transmon dans le but d'introduire une base de comparaison pour le cas à deux transmons. L'expression exacte pour ce spectre, qu'on retrouve dans la littérature sous le nom de *fluorescence par résonance*, est [23]

$$S_{\sigma\sigma}^r(\Delta_d) = \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\Delta_d\tau} \langle \sigma_+(\tau)\sigma_-(0) \rangle. \quad (3.57)$$

Lorsque l'intensité du signal de pilotage est très faible, $\epsilon \ll \gamma$, on trouve⁴ [23]

$$S_{\sigma\sigma}^r(\Delta_d) = \frac{128(\epsilon/\gamma)^4}{(1 + 4\Delta_d^2/\gamma^2)^2}. \quad (3.58)$$

Ainsi, pour un signal de pilotage de faible puissance le spectre d'émission prend la forme du carré d'une lorentzienne, de largeur γ et centré à la fréquence du signal de pilotage ω_d . Ce résultat est illustré à la figure 3.8a). L'amplitude du spectre dépend de l'intensité du signal de pilotage ϵ normalisée par le taux de relaxation γ du transmon puisqu'un atome avec un faible taux de relaxation est saturé avec un signal beaucoup plus faible qu'un atome avec un taux de relaxation élevé.

4. Nous retirons le terme proportionnel à la distribution de Dirac $\delta(\Delta_d)$ du résultat puisque nous ne voulons pas l'étudier. De même, on retire le point correspondant à $\Delta_d = 0$ des simulations numériques et des résultats expérimentaux présentés dans cette thèse.

À l’opposé, pour une forte intensité du signal de pilotage $\epsilon \gg \gamma$, on obtient plutôt [23]

$$S_{\sigma\sigma}^r(\Delta_d) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + 4\Delta_d^2/\gamma^2} + \frac{1}{2} \frac{3/2}{(3/2)^2 + 4(\Delta_d + 2\epsilon)^2/\gamma^2} + \frac{1}{2} \frac{3/2}{(3/2)^2 + 4(\Delta_d - 2\epsilon)^2/\gamma^2} \right). \quad (3.59)$$

Cette expression est illustrée à la figure 3.8b), où on remarque l’apparition de deux bandes latérales. Comme l’illustre l’insertion à l’intérieur de figure 3.8b), ces bandes latérales proviennent de la modification des énergies propres du système par le signal de pilotage. Autrement dit, lorsque l’intensité du signal de pilotage est très faible comme sur la figure 3.8a), on observe la transition d’énergie illustrée en pointillée, c’est-à-dire l’émission du transmon à la fréquence ω_0 . Cependant, pour un signal de pilotage d’une intensité supérieure à la largeur $\gamma/2$ du spectre, c’est-à-dire pour $4\epsilon > \gamma/2$, les niveaux d’énergie sont modifiés par $\pm\epsilon$. Autrement dit, le transmon peut absorber ou émettre des photons à sa fréquence de rabi ϵ . La modification des niveaux d’énergie se manifeste sous la forme de bandes latérales dans le spectre, comme illustré sur la figure 3.8b). Les spectres qui ont cette structure sont connus sous le nom de triplets de Mollow [36]. Ceux-ci ont entre autres été observés expérimentalement dans le cadre de l’électrodynamique quantique en guide d’onde [12, 14].

3.3.2 Régime d’interaction dissipative

On considère maintenant le cas à deux atomes. Le spectre d’émission en puissance dans le régime d’interaction dissipative est illustré à la figure 3.9. Les lignes pointillées représentent le spectre obtenu à l’aide de simulations numériques tandis que les lignes pleines représentent des données expérimentales [14]. Sur la figure 3.9a), le signal de pilotage a une puissance élevée et on observe le triplet de Mollow. On remarque toutefois que, contrairement au cas à un seul atome, le pic central a une base large et un sommet étroit. La base large correspond à l’état brillant $|B\rangle$ tandis que le sommet étroit est une contribution de l’état sombre $|D\rangle$ qui est excité entre autres grâce à la relaxation non radiative. On observe mieux ces caractéristiques sur la figure 3.9b) où le signal de pilotage a une puissance moins élevée. La largeur associée à l’état brillant $|B\rangle$ est compatible avec les mesures élastiques présentées à la section 3.2.3.

Selon l’équation (3.58), l’amplitude du spectre à la résonance dépend de son taux de pilotage normalisé ϵ/γ . Ainsi, on peut comprendre pourquoi il est possible d’observer l’état sombre $|D\rangle$ en estimant le taux de pilotage effectif normalisé ϵ_D/γ_D de cet état. Le taux de pilotage effectif ϵ_D doit être proportionnel à la probabilité ϵ_B/Γ_B que l’état brillant $|B\rangle$ soit excité et au taux γ_{nr} auquel l’état brillant déphase dans l’état $|D\rangle$. Ainsi, on estime

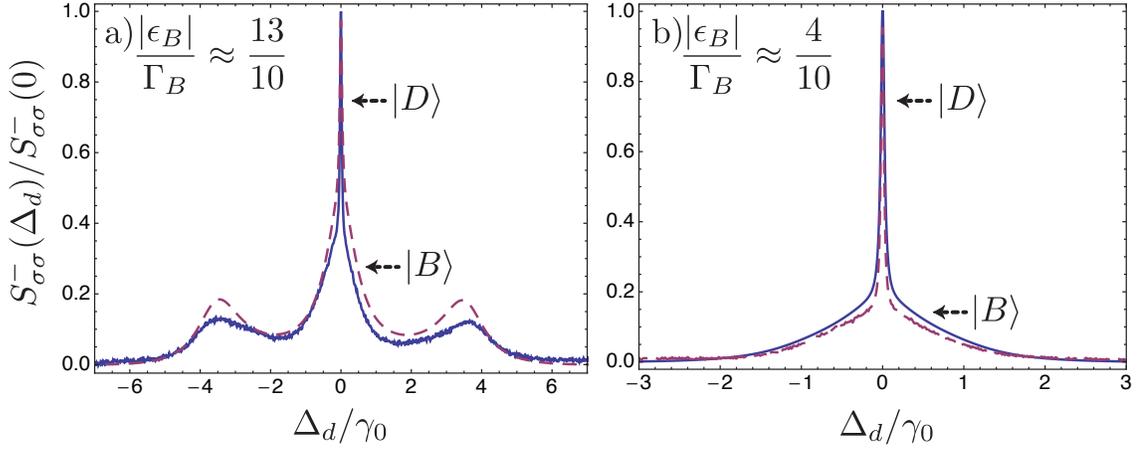


FIGURE 3.9 Spectre d'émission en puissance pour deux transmons, régime d'interaction dissipative. Les lignes pleines correspondent à l'expérience effectuée par nos collègues tandis que les lignes pointillées sont les simulations numériques correspondant à ces expériences. a) Pour un signal de pilotage de haute puissance, on observe le triplet de Mollow. Le pic central est composé d'une base large et d'un sommet étroit. La base large est la signature de l'état brillant $|B\rangle$. Le sommet étroit est la signature de l'état sombre $|D\rangle$ qui est excité à cause de la relaxation non radiative. On observe mieux ces signatures pour un signal de pilotage de basse puissance en b). Dans l'expérience, la résonance est à 6.4 GHz et $\Gamma_B/(2\pi) \approx 55.8$ MHz. Une constante ajoutée au spectre est le seul paramètre ajustable.

$\epsilon_D \sim \gamma_{nr}\epsilon_B/\Gamma_B$. Or, d'après l'équation (3.6), un taux de pilotage ϵ peut aussi s'écrire comme $\epsilon \propto \sqrt{\gamma}\sqrt{P/\hbar\omega_0}$, soit la racine carrée du produit du taux de couplage γ entre la ligne à transmission et l'atome artificiel et du flux de photon $P/\hbar\omega_0$. Autrement dit, à cause de la symétrie entre la probabilité d'être excité par un photon dans la ligne à transmission et la probabilité d'émettre un photon dans la ligne à transmission, on peut écrire $\epsilon_D \sim \sqrt{\gamma_D}\sqrt{P/\hbar\omega_0}$, avec γ_D le taux de couplage effectif entre la ligne à transmission et l'état $|D\rangle$. Finalement, en utilisant ces résultats, on estime le taux normalisé avec lequel l'état sombre $|D\rangle$ est piloté par $\epsilon_D/\gamma_D \sim \epsilon_B/\gamma_{nr}$. Ainsi, puisque le taux de relaxation non radiatif γ_{nr} est très petit, le pic associé à l'état sombre $|D\rangle$ est très élevé. On vérifie cette hypothèse à l'aide de simulations numériques représentées à la figure 3.10a). On y trace le spectre en fonction du taux de relaxation non radiatif γ_{nr} . On observe bien un pic étroit lorsque γ_{nr} est petit. Ce pic disparaît lorsque le taux de relaxation non radiatif est comparable au taux de relaxation radiatif γ_0 . Autrement dit, on peut observer la signature de l'état sombre $|D\rangle$ seulement dans le régime du couplage fort où $0 < \gamma_{nr}/\gamma_0 \ll 1$.

Tel que discuté dans le contexte de l'équation (3.14), l'état sombre $|D\rangle$ peut aussi être peuplé à travers le pilotage de l'état $|ee\rangle$ lorsqu'il y a une asymétrie entre les taux de relaxation

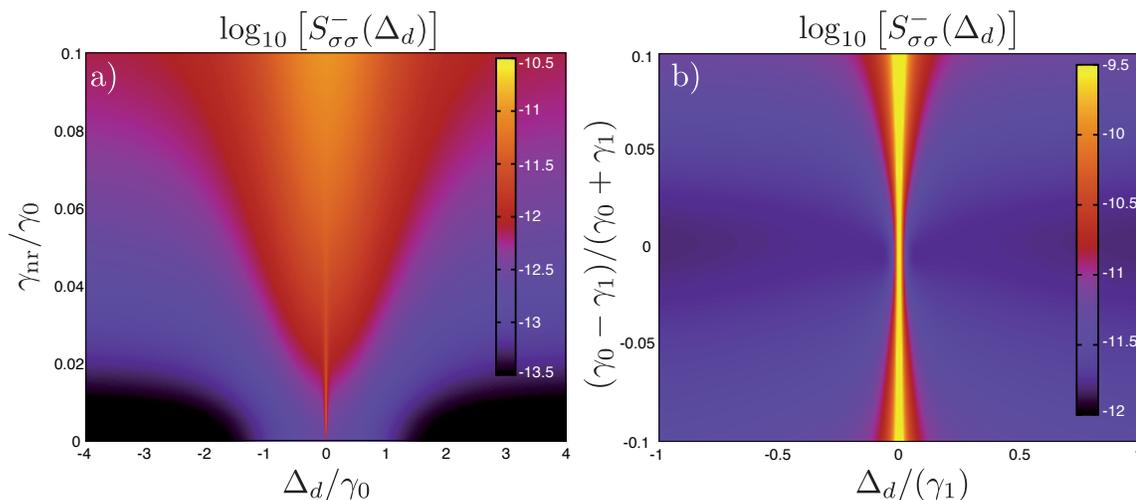


FIGURE 3.10 Conditions requises pour observer l'état sombre dans le spectre d'émission en puissance. a) La relaxation non radiative excite l'état sombre. Si elle est assez petite, elle produit un pic étroit dans le spectre qu'on peut distinguer du pic dû à l'état brillant. b) L'asymétrie entre les taux de relaxation ouvre un canal de pilotage pour l'état sombre $|D\rangle$ à travers l'état $|ee\rangle$. Ainsi, le pic dû à l'état sombre élargit en fonction de l'asymétrie à cause de l'élargissement en puissance. L'énergie du signal de pilotage est $\epsilon_B/\gamma_1 = 0.005$.

radiatifs, c'est-à-dire lorsque $\gamma_0 \neq \gamma_1$. On utilise des simulations numériques pour vérifier cette hypothèse. Celles-ci sont présentées à la figure 3.10b) où on trace le spectre en fonction de l'asymétrie entre les taux de relaxations radiatifs. On observe que le pic associé à l'état sombre $|D\rangle$ devient plus large lorsque l'asymétrie augmente. Pour comprendre la cause de cet élargissement, on remarque que plus l'asymétrie entre γ_0 et γ_1 est grande, plus la puissance du pilotage effectif de l'état $|D\rangle$ est grande. Or, on sait que la largeur des pics dans un spectre élargit avec la puissance [23]. Ainsi, on interprète l'élargissement du pic de l'état sombre en fonction de l'asymétrie comme de l'élargissement en puissance (*power broadening*) [23].

3.3.3 Régime d'interaction cohérente

À la figure 3.11a), nous présentons le spectre d'émission en puissance pour le régime d'interaction cohérente. Comme plus haut, les lignes pointillées représentent le spectre obtenu à l'aide de simulations numériques tandis que les lignes pleines représentent les données expérimentales [14]. On observe deux maximums locaux, signatures des états $|\mu\rangle$. Ce résultat est important puisqu'il s'agit de la première observation de l'interaction cohé-

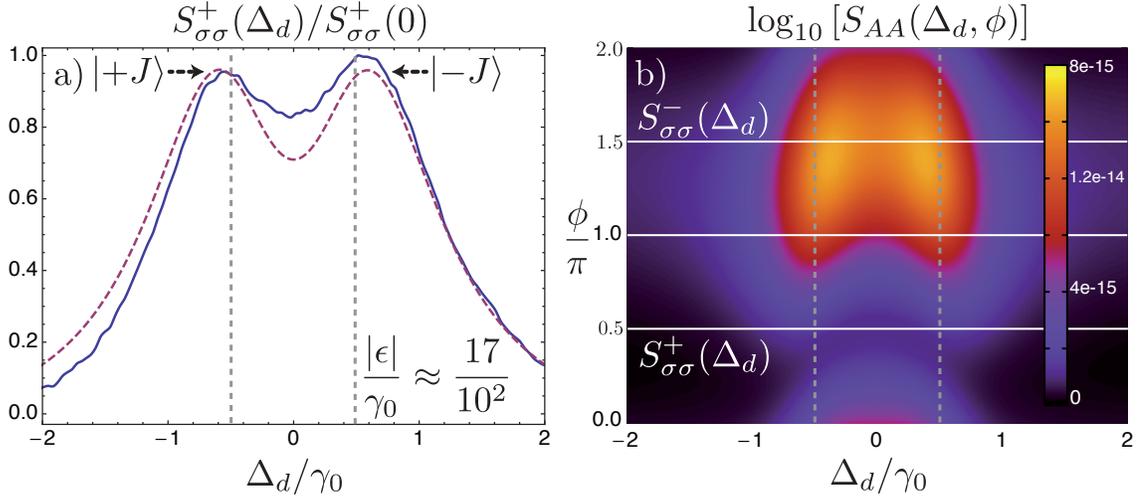


FIGURE 3.11 Spectre d'émission en puissance pour deux transmons, régime d'interaction cohérente. Les lignes pleines correspondent à l'expérience effectuée par nos collègues tandis que les lignes pointillées sont les simulations numériques correspondant à ces expériences. a) On observe deux maximums locaux, signatures des états $|\pm J\rangle$. On remarque que les maximums ne sont pas à $J = \pm\gamma_0/2$ (lignes pointillées verticales). Dans l'expérience, la résonance est à 4.8 GHz et $\gamma_0/(2\pi) \approx 13$ MHz. b) Spectre en puissance de l'opérateur $A(t, \phi)$ en fonction de ϕ . Le spectre de $A(t, \pi/2)$ correspond au spectre d'émission en puissance transmis. On observe que la distance entre les deux pics est plus grande que $2J$. Le spectre de $A(t, 3\pi/2)$ correspond au spectre d'émission en puissance réfléchi. On observe que la distance entre les deux pics est plus petite que $2J$. Le spectre de $A(t, \pi)$ correspond au spectre d'émission où la distance entre les deux pics est $2J$. Une constante ajoutée au spectre est le seul paramètre ajustable.

rente à travers le champ électromagnétique entre deux atomes artificiels dans le vide. Cette observation est rendue possible par le guide d'onde qui contraint le champ électromagnétique à une seule dimension. On note que nos collaborateurs du groupe d'Andreas Wallraff à Zurich essayaient initialement d'observer cette signature à l'aide d'une mesure élastique. La théorie développée ci-dessus m'a permis de leur faire remarquer que la signature serait beaucoup plus claire en observant le spectre d'émission en puissance avec un signal de pilotage de faible intensité. C'est cette prédiction qui a menée à la mesure présentée à la figure 3.11a) et dans la référence [14].

Il est intéressant de noter que les pics de la figure 3.11a) ne sont pas séparés par $2J = \gamma_0$ comme on pourrait s'y attendre en examinant la figure 3.3. Pour comprendre pourquoi le spectre d'émission en puissance, en transmission, présente deux pics qui sont séparés par

plus de $2J$, on trace sur la figure 3.11b) le spectre de l'opérateur

$$A(t, \phi) = \sigma_-^{+J} + e^{i\phi} \sigma_-^{-J}, \quad (3.60)$$

c'est-à-dire

$$S_{AA}(\Delta_d, \phi) = \frac{\gamma_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\Delta_d \tau} \langle A^\dagger(\tau, \phi) A(0, \phi) \rangle. \quad (3.61)$$

On observe que la distance entre les pics varie en fonction de la phase ϕ entre les opérateurs σ_-^{+J} et σ_-^{-J} . Pour gagner une meilleure intuition physique de ce que représente ce spectre, on récrit l'équation d'entrée-sortie (3.48) pour le cas $\gamma_0 = \gamma_1$. On obtient

$$b_{\text{out}}^r = b_{\text{in}}^r - \sqrt{\frac{\gamma_0}{2}} \exp[-ir \text{sign}[J] \pi/4] \left(\sigma_-^{+J} - ir \text{sign}[J] \sigma_-^{-J} \right). \quad (3.62)$$

On remarque que le spectre $S_{AA}(\Delta_d, \pi/2) = S_{\sigma\sigma}^+(\Delta_d)$ et $S_{AA}(\Delta_d, 3\pi/2) = S_{\sigma\sigma}^-(\Delta_d)$ pour $\text{sign}[J] = -1$. En effet, d'après l'équation (3.62), la phase ϕ entre les opérateurs σ_-^{+J} et σ_-^{-J} dépend de la direction r dans laquelle se propage le champ électromagnétique et du signe de l'interaction d'échange J . Or, comme on le voit à la figure 3.11b), la distance entre les deux pics du spectre dépend de cette phase ϕ . C'est pourquoi on observe des distances plus grande et plus petite que $2J$ respectivement en transmission et en réflexion⁵. Il est intéressant de noter qu'on retrouve une séparation de $2J$ pour $S_{AA}(\Delta_d, \pi)$, c'est-à-dire lorsque les opérateurs σ_-^{+J} et σ_-^{-J} sont couplés en antiphasse à la ligne à transmission.

3.3.4 Directions futures

Dans ce chapitre, nous avons étudié deux transmons couplés à une ligne à transmission. Ce système d'apparence simple présente une physique riche qui peut être étudiée expérimentalement grâce à des signatures claires. On peut émettre l'hypothèse que des systèmes plus complexes présentent une physique d'une richesse similaire. Par exemple, on peut imaginer un système de N transmons connectés à une ligne à transmission [37], ou même des réseaux de plusieurs lignes à transmission auxquelles sont connectés des transmons, voir par exemple la figure 3.12 tirée de la référence [38]. On peut aussi imaginer des systèmes où un même transmon est connecté à plusieurs points sur une même ligne à transmission, ou bien des systèmes où un transmon est connecté à plusieurs lignes à transmission. Les systèmes de ce type, avec N transmons, présentent un cadre intéressant pour étudier la physique à N corps puisque tous les paramètres peuvent être contrôlés

5. On remarque que s'il n'y a pas de signal de pilotage, la symétrie sous inversion de l'espace est préservée. En effet, sous une inversion de l'espace $x \rightarrow -x$, la variable $r \rightarrow -r$ et les indices des transmons doivent être inversés ce qui implique $\sigma_-^{-J} \rightarrow -\sigma_-^{-J}$.

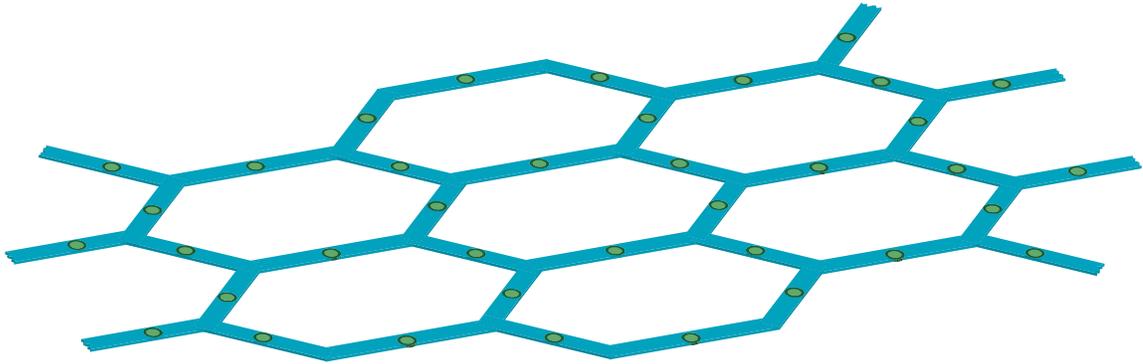


FIGURE 3.12 Réseau de lignes à transmission connectées à des transmons. Les lignes bleues représentent les lignes à transmission tandis que les points verts sont les transmons.

soit lors de la conception du circuit, soit *in situ*. Ils ajoutent aussi un nouvel ingrédient à la physique à N corps, la dissipation. Comme nous l'avons montré dans ce chapitre avec les sections sur le régime d'interaction dissipative, ce nouvel ingrédient peut parfois mener à de nouveaux phénomènes physiques excitants.

Chapitre 4

Circulateur micro-onde supraconducteur

Nous nous intéressons maintenant aux circulateurs, des dispositifs qui permettent d'obtenir des couplages unidirectionnels entre deux systèmes quantiques. Ceux-ci sont disponibles dans le domaine des circuits micro-onde, mais puisqu'ils sont basés sur les ferrites, ils ne peuvent pas s'intégrer à des circuits supraconducteurs. Ainsi, un défi important du domaine de l'électrodynamique quantique en circuit est la réalisation d'un circulateur sur puce (*on-chip*). Plusieurs groupes travaillent présentement sur cette question [39–42]. Pour relever ce défi, nous utilisons une autre approche pour créer la non-réciprocité. Celle-ci consiste à varier d'une manière temporelle les paramètres dont dépend un circuit. On s'intéresse plus particulièrement au cas où les inductances d'un circuit varient dans le temps puisque de telles inductances peuvent facilement être réalisées à l'aide d'un ensemble de jonctions Josephon.

Dans ce chapitre, nous commençons par définir plus précisément le concept de circulateur et nous expliquons pourquoi ces dispositifs sont cruciaux pour essentiellement toutes les expériences dans le domaine des circuits électriques supraconducteurs. Nous étudions aussi le fonctionnement des circulateurs. Nous utilisons ensuite la théorie développée au chapitre 2 pour décrire l'opérateur de transfert d'un circuit avec des inductances variables. Cet opérateur nous renseigne sur la manière dont les signaux à l'entrée du circuit sont reliés aux signaux à sa sortie. Nous utilisons l'opérateur de transfert obtenu pour étudier les principes physiques derrière la conception d'un circulateur. Finalement, nous utilisons ces concepts pour décrire un design de circulateur proposé avec nos collaborateurs de JILA. Les travaux décrits dans ce chapitre ont mené à une publication [17].

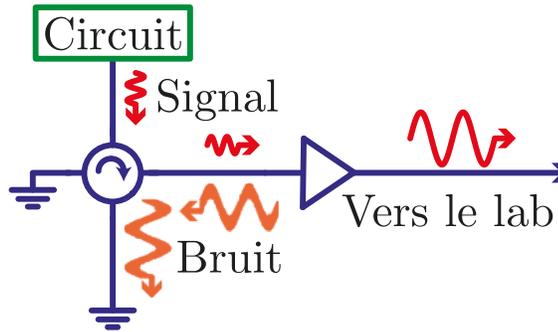


FIGURE 4.1 Utilisation typique d’un circulateur dans un circuit électrique quantique. Le dispositif circulaire est le circulateur. Le signal qui entre dans le circulateur doit sortir dans le premier port à sa gauche. Autrement dit, il doit suivre le sens horaire illustré par la flèche sur le circulateur. Le circulateur envoie le signal de faible amplitude du circuit électrique quantique vers l’amplificateur. De même, grâce au circulateur, le bruit de l’amplificateur n’atteint pas le circuit électrique quantique.

4.1 Les circulateurs

4.1.1 Définition et utilité

Un circulateur est un dispositif qui envoie le signal qu’il reçoit en entrée au premier port se trouvant à sa gauche (circulateur horaire) ou sa droite (circulateur antihoraire). On dit qu’un circulateur est non réciproque puisqu’il n’est pas invariant sous un échange entre les entrées et les sorties. Autrement dit, la matrice de transfert qui relie les signaux à l’entrée du circulateur aux signaux à sa sortie n’est pas hermitique. Par exemple, pour un circulateur à quatre ports, on a

$$\Phi_{\text{out}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_{\text{in}}(t). \quad (4.1)$$

Il est utile de noter que la non-hermiticité de la matrice de transfert est équivalente à une non-réciprocité sous inversion du temps puisqu’inverser le temps revient à échanger les sorties et les entrées, soit à prendre le conjugué hermitique de la matrice de transfert.

La figure 4.1 illustre un circulateur en action. Sur cette figure, le circulateur permet au signal du circuit électrique quantique d’atteindre l’amplificateur, mais isole le circuit du

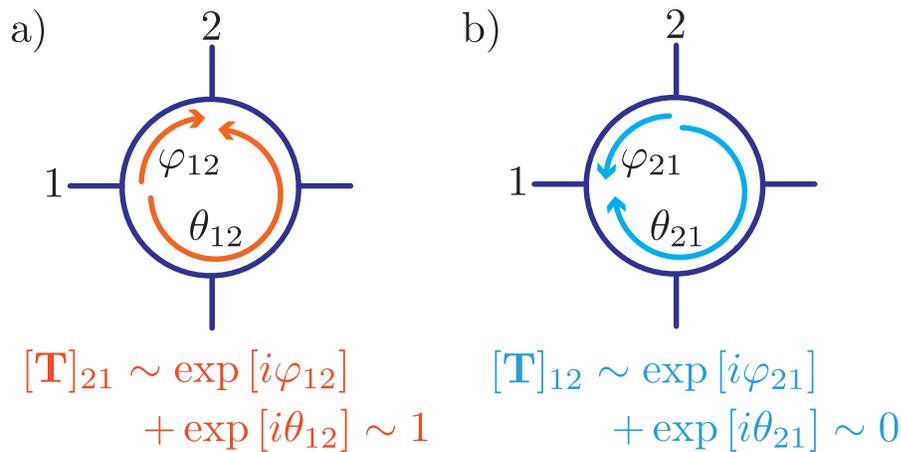


FIGURE 4.2 Principe de fonctionnement d'un circulateur horaire. a) La phase φ_{12} que gagne le champ électromagnétique lorsqu'il voyage du port 1 à 2 interfère constructivement avec la phase θ_{12} que gagne le champ électromagnétique lorsqu'il voyage du port 1 à 2 par le chemin le plus long. Ainsi, le signal est transmis. b) La phase $\varphi_{21} \neq -\varphi_{12}$ que gagne le champ électromagnétique lorsqu'il voyage du port 2 à 1 interfère destructivement avec la phase θ_{21} que gagne le champ électromagnétique lorsqu'il voyage du port 1 à 2 par le chemin le plus long. Ainsi, le signal n'est pas transmis.

bruit de l'amplificateur. Il s'agit d'une situation typique où les circulateurs sont nécessaires. On peut aussi imaginer utiliser un circulateur pour obtenir une interaction unidirectionnelle entre deux atomes artificiels. Pichler et ses collaborateurs prédisent qu'une telle interaction donnerait lieu à plusieurs phénomènes physiques intéressants [43]. Dans un autre ordre d'idée, on peut imaginer qu'un circuit électrique quantique A prépare un état exotique qui est utilisé par un circuit électrique quantique B. Dans ce cas, on veut que l'état puisse passer du circuit A au circuit B, mais on ne veut pas que le circuit B interagisse directement avec le circuit A. Il s'agit d'une autre situation où un circulateur est utile [15,44].

4.1.2 Principe de fonctionnement

Le principe de fonctionnement d'un circulateur est basé sur le fait que la phase φ_{12} que gagne le champ électromagnétique lorsqu'il passe du port 1 au port 2 n'est pas équivalente à la phase φ_{21} qu'il gagne lorsqu'il passe du port 2 au port 1. Ce principe est illustré sur la figure 4.2 pour un circulateur horaire. En a), on voit que la phase φ_{12} que gagne le champ électromagnétique lorsqu'il voyage du port 1 à 2 interfère constructivement avec la phase θ_{12} que gagne le champ électromagnétique lorsqu'il voyage du port 1 à 2 par le chemin le plus long. Ainsi, le signal est transmis. Par contre, en b), la phase $\varphi_{21} \neq -\varphi_{12}$ que gagne

le champ électromagnétique lorsqu'il voyage du port 2 à 1 interfère destructivement avec la phase θ_{21} que gagne le champ électromagnétique lorsqu'il voyage du port 2 à 1 par le chemin le plus long. Ainsi, le signal n'est pas transmis.

L'explication ci-dessus est incomplète puisqu'elle ne prend pas en compte tous les chemins possibles que peut emprunter le champ électromagnétique. Par exemple, en a), le champ électromagnétique peut faire un tour complet avant d'être transmis du port 1 au port 2. Dans ce cas, la phase gagnée est $2\phi_{12} + \theta_{21}$. L'opérateur de transfert obtenue dans la section 4.2.1 tient compte de ce genre de parcours.

L'explication associée à la figure 4.2 ignore un point crucial, l'origine de la non-réciprocité. Autrement dit, pourquoi $\phi_{21} \neq -\phi_{12}$? Cette question est abordée dans la section suivante.

Circulateur passif et actif

Il y a deux moyens typiques pour obtenir un système non réciproque. Le premier est d'utiliser un champ magnétique. On sait qu'un champ magnétique brise la symétrie sous inversion du temps. Ainsi, on peut construire un circulateur en couplant des guides d'ondes à une cavité dans laquelle on place une ferrite. Une fois dans la cavité, le champ électromagnétique acquiert une phase différente selon le sens dans lequel il se propage à cause du champ magnétique. Il est donc possible, avec un design approprié, de réaliser un circulateur [34]. On qualifie ce circulateur de passif puisqu'aucun contrôle externe n'est nécessaire pour qu'il fonctionne. Les circulateurs à ferrite dans la gamme des micro-ondes ont typiquement une largeur de bande très grande (plusieurs GHz) et ils peuvent gérer un signal d'entrée de puissance très élevée. Cependant, comme nous l'avons déjà mentionné, ils peuvent difficilement être intégrés avec les circuits supraconducteurs en raison de la présence de la ferrite. De plus, le niveau de perte des circulateurs à ferrite commerciaux, quoique faible avec des pertes d'insertion d'environ 0.1 dB, est trop élevé pour certaines applications des circuits électriques quantiques.

Pour pallier ces difficultés, nous considérons les circulateurs actifs. Le principe à la base de leur fonctionnement est qu'un système dont les paramètres dépendent du temps est généralement non réciproque. Par exemple, la référence [45] montre qu'il est possible de créer un champ magnétique effectif en modulant périodiquement le couplage entre deux oscillateurs harmoniques. Avec cette idée en tête, on peut imaginer utiliser le modèle jouet illustré à la figure 4.3a) pour réaliser un circulateur. Sur cette figure, on observe trois lignes à transmission connectées capacitivement à trois inductances. On suppose que la pièce centrale du circuit tourne, ce qui a pour conséquence que les capacités entre les lignes à transmission et le circuit varient périodiquement dans le temps. Les lignes à transmission jouent le rôle

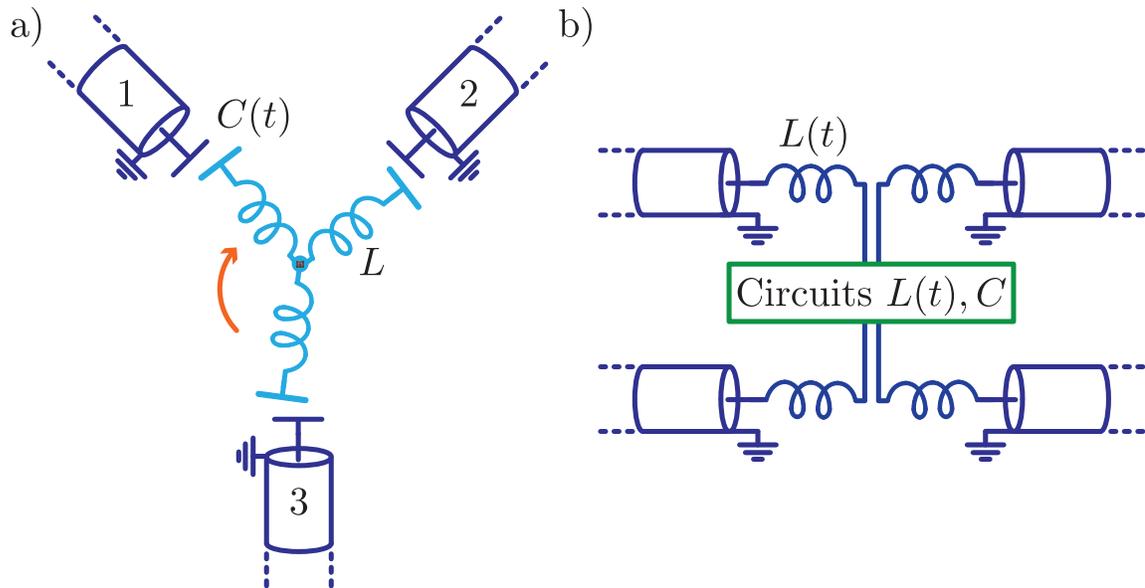


FIGURE 4.3 Modèles de circuits potentiels pour implémenter un circulateur actif. a) Modèle jouet où trois lignes à transmission sont couplées capacitivement à trois inductances. La pièce du milieu comportant les trois inductances tourne pour que les capacités $C(t)$ dépendent du temps. Le point central est mis à la terre. b) Modèle pour implémenter un circulateur à l'aide d'inductances variables.

des guides d'onde du circulateur à ferrite, les circuits LC jouent le rôle des modes de la cavité et la dépendance temporelle des capacités joue le rôle du champ magnétique. Intuitivement, un photon arrivant au port 1 sortira au port 2 et jamais en 3 si la fréquence de rotation est appropriée, c'est-à-dire reliée au facteur de qualité du mode. En changeant le sens de rotation, on peut toutefois faire passer le signal du port 1 au port 3. Le sens de la rotation joue donc le rôle de l'orientation du champ magnétique. L'idée derrière la figure 4.3a) a récemment été utilisée pour construire un circulateur [42]. Cependant, puisque les capacités variantes sont implémentées à l'aide de diodes, ce circulateur présente des pertes significatives.

Une alternative au modèle où les capacités varient dans le temps périodiquement est un modèle où les inductances varient périodiquement dans le temps. Celui-ci est illustré à la figure 4.3b). L'avantage de ce dernier modèle est qu'on sait comment implémenter des inductances variables à l'aide de jonctions Josephson [46]. En utilisant des travaux récents sur la non-réciprocité [40], le groupe de Michel Devoret à Yale a utilisé une idée similaire pour réaliser un circulateur [39]. Cependant, ce circulateur réalise une conversion de fréquence entre le signal en entrée et le signal à la sortie. Ainsi, un analogue du circulateur à ferrite intégré où le signal circule sans conversion de fréquence est un outil qui manque toujours au domaine des circuits supraconducteurs quantiques.

Dans le but de remédier à ce manque, nous étudions en plus de détails le schéma illustré à la figure 4.3b) où un ensemble de lignes à transmission sont couplées à travers des circuits LC dont les inductances peuvent dépendre du temps. Nous présentons une méthode pour analyser un tel système dans la section 4.2. Nous utilisons ensuite cette méthode pour présenter les lignes directrices de la conception d'un circulateur actif dans la section 4.3. Finalement, nous utilisons cette méthode pour modéliser un design de circulateur actif proposé avec nos collaborateurs à la section 4.4 [17].

4.2 Modulation des paramètres de circuits LC couplés inductivement à des lignes à transmission

Nous utilisons la théorie d'entrée-sortie développée à la section 2.3 pour modéliser un ensemble de circuits LC couplés à des lignes à transmission, comme illustré à la figure 4.3b). On suppose que le couplage entre les lignes à transmission et les circuits LC est inductif et qu'il peut dépendre du temps. On suppose aussi que la matrice de capacité ne dépend pas du temps. À l'aide des équations (2.63) à (2.66), on trouve

$$\Phi_{\text{out}}(t) = \Phi(0) - \Phi_{\text{in}}(t) \quad (4.2)$$

$$\partial_t \Phi(0) = 16\pi \frac{Z}{R_K} \left(-\Omega_{LF}(t) \Phi(0) + \Omega_L^T(t) \Psi \right) + 2\partial_t \Phi_{\text{in}}(t) \quad (4.3)$$

$$\partial_t^2 \Psi = 2 \frac{(2e)^2}{\hbar} \mathbf{C}_S^{-1} [-\Omega_{LS}(t) \Psi + \Omega_L(t) \Phi(0)]. \quad (4.4)$$

On considère que la dépendance temporelle du couplage inductif est périodique. Ainsi, on peut écrire $\Omega_L(t)$ sous forme d'une série de Fourier

$$\Omega_L(t) = \omega_L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Xi_{L,n} e^{-in\Omega t}, \quad (4.5)$$

où Ω est la fréquence d'oscillation fondamentale de $\Omega_L(t)$. Nous normalisons les matrices jouant le rôle des coefficients de Fourier $\Xi_{L,n}$ avec la fréquence inductive

$$\omega_L = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2L'}, \quad (4.6)$$

où L est l'inductance du système qu'on choisit comme valeur de normalisation. On suppose que les matrices d'énergie inductive du système $\Omega_{LS}(t)$ et du champ électromagnétique

$\Omega_{LF}(t)$ ont la même fréquence d'oscillation fondamentale Ω que la matrice $\Omega_L(t)$. Ainsi, on peut écrire

$$\Omega_{LS}(t) = \omega_L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{LS,n}(t) e^{-in\Omega t} \quad (4.7)$$

$$\Omega_{LF}(t) = \omega_L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{LF,n}(t) e^{-in\Omega t} \quad (4.8)$$

En utilisant ces développements en série de Fourier, on peut récrire les équations (4.3) et (4.4) comme

$$\partial_t \Phi(0) = \frac{Z}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\Omega t} \left(-\mathbf{E}_{LF,n} \Phi(0) + \mathbf{E}_{L,n}^T \Psi \right) + 2\partial_t \Phi_{in}(t) \quad (4.9)$$

$$\partial_t^2 \Psi = \Omega_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\Omega t} \left[-\mathbf{E}_{LS,n} \Psi + \mathbf{E}_{L,n} \Phi(0) \right], \quad (4.10)$$

où nous avons introduit la matrice

$$\Omega_0^2 = \frac{\mathbf{C}_S^{-1}}{L}. \quad (4.11)$$

Les éléments diagonaux de cette matrice représentent les fréquences de résonance nues des circuits LC tandis que les éléments hors diagonaux représentent le couplage éventuel entre les différents circuits LC. On utilise les équations (4.9) à (4.10) et l'équation d'entrée-sortie (4.2) dans la prochaine section afin d'obtenir l'opérateur de transfert qui décrit le système.

4.2.1 Opérateur de transfert

Le but de la section est d'obtenir une relation entre le signal qui entre dans le circuit et celui qui en sort, incluant l'information en fréquence de ce signal. Pour y arriver, nous utilisons un opérateur de transfert. Dans le but d'obtenir l'opérateur de transfert représentant le circuit général illustré à la figure 4.3b), on effectue la transformée de Fourier de l'équation (4.2) et des équations (4.9) à (4.10). On obtient

$$\Phi_{out}(\omega) = \Phi(\omega) - \Phi_{in}(\omega) \quad (4.12)$$

$$\Phi(\omega) = ir_Z(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\mathbf{E}_{LF,n} \Phi(\omega - n\Omega) + \mathbf{E}_{L,n}^T \Psi(\omega - n\Omega) \right] + 2\Phi_{in}(\omega) \quad (4.13)$$

$$-\omega^2 \Psi(\omega) = \Omega_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\mathbf{E}_{LS,n} \Psi(\omega - n\Omega) + \mathbf{E}_{L,n} \Phi(\omega - n\Omega) \right]. \quad (4.14)$$

Nous avons supposé que $\omega \neq 0$, ce qui nous permet de définir le ratio entre l'impédance des lignes à transmission et l'impédance des inductances de couplage

$$r_Z(\omega) = \frac{Z}{\omega L}. \quad (4.15)$$

Pour simplifier les équations (4.13) et (4.14), nous introduisons l'opérateur de déplacement de fréquence $\mathcal{S}_\omega(n\Omega)$ défini comme

$$\mathcal{S}_\omega(n\Omega)f(\omega) = f(\omega - n\Omega). \quad (4.16)$$

On montre facilement à l'aide de développement en série de Taylor que $\mathcal{S}_\omega(\omega_1) = \exp[-\omega_1 \partial_\omega]$ [47]. À l'aide de cette définition, on peut écrire les expressions ci-haut sous la forme plus compacte

$$\Phi(\omega) = i \frac{r_Z(\omega)}{2} \mathcal{D}(\omega) \mathcal{S}_L^T \Psi(\omega) + \mathcal{D}(\omega) \Phi_{\text{in}}(\omega) \quad (4.17)$$

$$-\omega^2 \Psi(\omega) = -\Omega_0^2 \mathcal{S}_{LS} \Psi(\omega) + \Omega_0^2 \mathcal{S}_L \Phi(\omega), \quad (4.18)$$

où nous avons introduit l'opérateur de connexion directe

$$\mathcal{D}(\omega) = 2 \left[1 + i r_Z(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{E}_{LE,n} \mathcal{S}_\omega(n\Omega) \right]^{-1}, \quad (4.19)$$

l'opérateur de conversion de fréquence aux bornes

$$\mathcal{S}_L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{E}_{L,n} \mathcal{S}_\omega(n\Omega) \quad (4.20)$$

et l'opérateur de conversion de fréquence interne

$$\mathcal{S}_{LS} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{E}_{LS,n} \mathcal{S}_\omega(n\Omega). \quad (4.21)$$

La variation des fréquences de résonance des circuits LC entraîne une conversion de la fréquence du signal emmagasiné à l'intérieur de ces modes. C'est pourquoi l'opérateur de conversion de fréquence interne \mathcal{S}_{LS} convertit la fréquence du signal qui se trouve à l'intérieur des circuits LC. De même, la modulation des inductances de couplage entraîne une conversion de la fréquence du signal qui pénètre ou sort des circuits LC. Ainsi, l'opérateur de conversion de fréquence aux bornes \mathcal{S}_L convertit la fréquence des signaux lorsqu'ils passent entre les lignes à transmission et les circuits LC. Finalement, la raison pour laquelle

on nomme $\mathcal{D}(\omega)$ l'opérateur de connexion directe sera plus claire plus bas. On remarque que les opérateurs \mathcal{S}_{LS} , \mathcal{S}_L et $\mathcal{D}(\omega)$ sont simplement des matrices lorsqu'il n'y a pas de dépendance temporelle.

Avec quelques manipulations algébriques supplémentaires sur les équations (4.17) à (4.18) et en utilisant l'équation (4.12), on trouve finalement la relation

$$\Phi_{\text{out}}(\omega) = \mathcal{T}(\omega) \Phi_{\text{in}}(\omega) \quad (4.22)$$

avec l'opérateur de transfert

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathcal{D}(\omega) - \mathbf{1} + i \frac{r_Z(\omega)}{2} \mathcal{D}(\omega) \mathcal{S}_L^T \left(\mathcal{S}_{LS} - \Omega_0^{-2} \omega^2 - \frac{i}{2} \mathcal{S}_L r_Z(\omega) \mathcal{D}(\omega) \mathcal{S}_L^T \right)^{-1} \mathcal{S}_L \mathcal{D}(\omega). \quad (4.23)$$

Notez qu'aucune approximation n'a été effectuée pour obtenir ce résultat. Les deux premiers termes de cet opérateur représentent la connexion directe entre l'entrée et la sortie. Lorsqu'un signal passe à travers cette connexion directe, les modes des circuits LC ne sont pas excités. On peut interpréter la connexion directe comme étant le résultat de l'inhomogénéité des lignes à transmission autour du point où elles sont connectées aux circuits LC. En effet, aux points de connexion, l'inductance par unité de longueur des lignes à transmission est soudainement changée. Ce changement entraîne une modification des modes propres des lignes à transmission. En général, ces modes peuvent être délocalisés entre les bornes du dispositif, d'où le nom connexion directe. L'opérateur de connexion directe $\mathcal{D}(\omega)$ représente donc le passage du signal électromagnétique à travers ces inhomogénéités dans les lignes à transmission.

Le troisième terme de l'équation (4.23) représente la connexion entre l'entrée et la sortie à travers les circuits LC. Le terme est proportionnel à $r_Z(\omega)$. Tel que discuté à la section 4.4.2, puisque l'opérateur de connexion directe $\mathcal{D}(\omega)$ dépend aussi de $r_Z(\omega)$, l'intensité de la connexion est maximale lorsque $r_Z(\omega)$ est tel que l'impédance du circuit correspond à l'impédance des lignes à transmission. On analyse maintenant le troisième terme de l'équation (4.23) en partant de la droite, c'est-à-dire de l'entrée. C'est d'abord l'opérateur de connexion directe $\mathcal{D}(\omega)$ qui agit sur le signal en entrée puisque ce dernier passe dans les inhomogénéités inductives des lignes à transmission. Ensuite, c'est l'opérateur de conversion de fréquence aux bornes \mathcal{S}_L qui agit sur le signal. Il représente le passage du signal à travers la connexion inductive entre les lignes à transmission et les circuits LC. Ensuite, le facteur

$$\left(\mathcal{S}_{LS} - \Omega_0^{-2} \omega^2 - \frac{i}{2} \mathcal{S}_L r_Z(\omega) \mathcal{D}(\omega) \mathcal{S}_L^T \right)^{-1} \quad (4.24)$$

représente la physique qui a lieu à l'intérieur des circuits LC. Le terme $\mathcal{S}_{LS} - \Omega_0^{-2}\omega^2$ représente la physique résonante et le terme imaginaire proportionnel à $r_Z(\omega)$ représente la dissipation et le décalage de Lamb des fréquences de résonance des circuits LC. La dissipation est importante puisqu'elle assure l'existence de l'inverse dans l'équation (4.24). On doit interpréter cette fonction inverse sur les opérateurs en utilisant le développement en série de Taylor, aussi nommé série de Neumann dans ce cas précis. Ainsi, on peut réécrire l'équation (4.24) comme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbf{1} - \mathcal{S}_{LS} + \frac{i}{2} \mathcal{S}_L r_Z(\omega) \mathcal{D}(\omega) \mathcal{S}_L^T + \Omega_0^{-2}\omega^2 \right)^k. \quad (4.25)$$

On interprète cette série dans l'esprit de la section 4.1.2 où on explique le principe de fonctionnement d'un circulateur. Dans cette section, on montre que le circulateur fonctionne puisque les différents chemins que peut emprunter le champ électromagnétique interfèrent. Ici, chacun des termes de la somme représente un « chemin » que peut emprunter le champ électromagnétique. On additionne tous ces chemins qui interfèrent entre eux.

Finalement, le signal électromagnétique sort des circuits LC. Ceci est modélisé par le facteur $\mathcal{D}(\omega) \mathcal{S}_L^T$ à gauche du troisième terme de l'opérateur de transfert de l'équation (4.23). L'opérateur de conversion de fréquence aux bornes \mathcal{S}_L^T représente le signal qui passe à travers l'inductance variable et l'opérateur de connexion directe $\mathcal{D}(\omega)$ agit sur le signal lorsqu'il passe à travers l'inhomogénéité inductive de la ligne à transmission dans laquelle il sort.

En terminant cette section, on remarque que lorsque le facteur de qualité des circuits LC est grand, ces derniers ne répondent qu'à leur fréquence de résonance ω_0 . Dans ce cas, on peut évaluer les facteurs qui dépendent de la fréquence à ω_0 . On trouve ainsi

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathcal{D} - \mathbf{1} + i \frac{r_Z}{2} \mathcal{D} \mathcal{S}_L^T \left(\mathcal{S}_{LS} - i \frac{r_Z}{2} \mathcal{S}_L \mathcal{D} \mathcal{S}_L^T - \Omega_0^{-2}\omega^2 \right)^{-1} \mathcal{S}_L \mathcal{D}, \quad (4.26)$$

où $r_Z = r_Z(\omega_0)$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\omega_0)$. Cette approximation est connue sous le nom d'*approximation de Markov* [25]. Elle est pratique puisqu'elle fait tomber la dépendance en fréquence de $r_Z(\omega)$ et $\mathcal{D}(\omega)$. Ainsi, après cette approximation, ces quantités commutent avec l'opérateur de déplacement de fréquence $\mathcal{S}_\omega(\omega_1)$.

Exemple

Nous utilisons l'opérateur de transfert présenté ci-dessus pour décrire le circuit illustré à la figure 2.3b) où un condensateur est connecté à une ligne à transmission par une inductance. On considère le cas le plus simple où l'inductance ne varie pas dans le temps. Pour ce cas,

l'opérateur de connexion directe est

$$\mathcal{D}(\omega) = \frac{2}{1 + ir_Z(\omega)}, \quad (4.27)$$

tandis que l'opérateur de conversion de fréquence aux bornes est simplement $\mathcal{S}_L = 1$ et de même pour l'opérateur de conversion de fréquence interne $\mathcal{S}_{LS} = 1$. Puisqu'il n'y a aucune variation temporelle de l'inductance, les opérateurs dont dépend l'opérateur de transfert sont simplement des matrices. Autrement dit, ils ne dépendent pas de l'opérateur de déplacement de fréquence $S_\omega(n\Omega)$. De plus, puisque le cas considéré est unidimensionnel, les matrices sont de tailles 1×1 , c'est-à-dire qu'elles sont en fait des scalaires. Ainsi, pour cet exemple, l'opérateur de transfert est simplement le coefficient de réflexion du circuit LC à l'extrémité de la ligne à transmission. On trouve qu'on peut récrire le coefficient de réflexion comme

$$\mathcal{T}(\omega) = \frac{1}{1 + ir_Z(\omega)} \left(2 + [\delta\omega_0(\omega) + i\kappa(\omega)] \left(\frac{\Omega_0^2 - \Omega_0\delta\omega_0(\omega) - \omega^2}{2\Omega_0} - \frac{i}{2}\kappa(\omega) \right)^{-1} \right) - 1 \quad (4.28)$$

avec la fréquence de résonance nue $\Omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Nous avons introduit le taux de dissipation

$$\kappa(\omega) = \frac{r_Z(\omega)\Omega_0}{1 + r_Z^2(\omega)} \quad (4.29)$$

et le décalage de Lamb de la fréquence de résonance

$$\delta\omega_0(\omega) = \frac{r_Z^2(\omega)\Omega_0}{1 + r_Z^2(\omega)}. \quad (4.30)$$

On rappelle finalement que $r_Z(\omega)$ est le ratio entre l'impédance de la ligne à transmission et celle de l'inductance en entrée, c'est-à-dire $r_Z(\omega) = Z/(\omega L)$.

On remarque d'abord que lorsque la fréquence $\omega \rightarrow 0$, l'impédance de l'inductance est nulle et celle de la capacité tend vers l'infini. Dans ce cas, le signal subit une réflexion molle et $\mathcal{T}(\omega) = 1$. On remarque aussi que le taux de dissipation $\kappa(\omega)$ est maximal lorsque l'impédance ωL de l'inductance est adaptée à l'impédance Z de la ligne à transmission, c'est-à-dire lorsque $r_Z(\omega) = 1$. D'un autre côté, lorsque l'impédance de la ligne à transmission est négligeable par rapport à l'impédance de l'inductance, le ratio $r_Z(\omega) \rightarrow 0$. Le signal subit alors une réflexion molle parce qu'il passe d'un milieu de faible impédance à un milieu de forte impédance. Dans ce cas, le taux de dissipation $\kappa(\omega)$ et le décalage de Lamb $\delta\omega_0(\omega)$ tendent vers 0 et l'opérateur de transfert $\mathcal{T}(\omega) = 1$. Inversement, lorsque l'impédance ωL au bout de la ligne à transmission est négligeable par rapport à l'impédance Z de la ligne à transmission, le ratio $r_Z(\omega) \rightarrow \infty$. Dans cette limite, le signal subit une réflexion dure

puisqu'il passe d'un milieu avec une impédance forte à un milieu qui a une impédance faible. Dans ce cas, l'opérateur de transfert $\mathcal{T}(\omega) = -1$, le taux de dissipation $\kappa(\omega)$ tend vers 0 et le décalage de Lamb $\delta\omega_0(\omega)$ tend vers sa valeur maximale de $2\Omega_0$.

On trouve la fréquence de résonance habillée ω_r du circuit en annulant la partie réelle du dénominateur de l'opérateur de transfert,

$$\frac{\Omega_0^2 - \Omega_0\delta\omega_0(\omega_r) - \omega_r^2}{2\Omega_0} = 0. \quad (4.31)$$

On obtient

$$\omega_r = \Omega_0 \sqrt{1 - \frac{Z^2}{L/C}}. \quad (4.32)$$

À cette résonance, on associe le facteur de qualité

$$Q = \frac{\omega_r}{\kappa(\omega_r)} = \frac{\sqrt{L/C}}{Z}. \quad (4.33)$$

La fréquence de résonance existe seulement lorsque le circuit LC est sous-amorti, c'est-à-dire lorsque le facteur de qualité $Q > 1$. On remarque que cette condition nécessite que l'impédance Z de la ligne à transmission soit plus petite que l'impédance caractéristique $\sqrt{L/C}$ du circuit LC, c'est-à-dire $Z < \sqrt{L/C}$. Cette condition implique aussi que la fréquence de résonance de l'équation (4.32) est toujours réelle.

4.3 Conception d'un circulateur actif

On utilise maintenant l'opérateur de transfert de l'équation (4.26) pour trouver des conditions suffisantes pour la conception d'un circulateur à l'aide d'un ensemble de circuits LC aux inductances modulables. Nous utilisons la version de l'opérateur de transfert sur laquelle l'approximation de Markov a été effectuée pour faire ressortir plus facilement la physique qualitative du dispositif au dépend de la physique quantitative. Au contraire, à la section 4.4, nous utilisons la version de l'opérateur de transfert sur laquelle aucune approximation n'a été faite pour analyser quantitativement un circuit se comportant comme un circulateur.

4.3.1 Modulation des paramètres internes

Considérons d'abord le cas où seuls les paramètres internes du circuit sont modulés. C'est l'approche utilisée dans la référence [42]. Par *paramètres internes*, on entend les fréquences de résonance des circuits LC et leurs taux de couplage entre eux. Par exemple, sur la figure 4.3b), considérer que seuls les paramètres internes varient dans le temps revient à supposer que les inductances de couplages entre les lignes à transmission et le circuit (la boîte verte) sont fixes. Dans ce cas, les inhomogénéités des lignes à transmission sont fixes, ce qui fait que l'opérateur de connexion directe \mathcal{D} est simplement une matrice puisqu'il ne peut pas causer de conversion de fréquence. Il en va de même pour l'opérateur de conversion de fréquence aux bornes \mathcal{S}_L qui ne peut pas lui non plus causer de conversion de fréquence. Pour rendre clair que ces opérateurs ne dépendent plus de l'opérateur de déplacement de fréquence $\mathcal{S}_\omega(\omega_1)$, nous introduisons la matrice de connexion directe

$$\mathbf{D} = \mathcal{D} \quad (4.34)$$

et la matrice de connexion aux circuits LC

$$\mathbf{E}_L = \mathcal{S}_L. \quad (4.35)$$

Ainsi, on peut récrire l'opérateur de transfert comme

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathbf{D} - \mathbf{1} + i \frac{r_Z}{2} \mathbf{D} \mathbf{E}_L^T \left(\mathcal{S}_{LS} - i \frac{r_Z}{2} \mathbf{E}_L \mathbf{D} \mathbf{E}_L^T - \Omega_0^{-2} \omega^2 \right)^{-1} \mathbf{E}_L \mathbf{D}. \quad (4.36)$$

On voit que sous ces conditions, le seul opérateur dont dépend l'opérateur de transfert $\mathcal{T}(\omega)$ est l'opérateur de conversion de fréquence interne \mathcal{S}_{LS} . C'est la conséquence de l'hypothèse que seuls les paramètres internes du dispositif sont modulés. Notez que l'opérateur \mathcal{S}_{LS} est maintenant essentiel pour obtenir un opérateur de transfert non réciproque puisque les variations temporelles des paramètres sont la seule cause de non-réciprocité possible dans le circuit considéré.

On examine maintenant l'effet de l'opérateur \mathcal{S}_{LS} qui permet d'obtenir la non-réciprocité. Celui-ci est l'argument d'une fonction inverse. Comme nous l'avons mentionné plus haut, cette fonction inverse doit être interprétée comme une série de Neumann

$$\left(\mathcal{S}_{LS} - i \frac{r_Z}{2} \mathbf{E}_L \mathbf{D} \mathbf{E}_L^T - \Omega_0^{-2} \omega^2 \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\mathbf{F}(\omega) + \sum_{n \neq 0} \mathbf{E}_{LS,n} \mathcal{S}_\omega(n\Omega) \right)^k \quad (4.37)$$

Pour rendre la notation plus compacte, nous avons introduit la fonction matricielle

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{E}_{LS,0} - i\frac{r_Z}{2}\mathbf{E}_L\mathbf{D}\mathbf{E}_L^T - \Omega_0^{-2}\omega^2 - \mathbf{1}. \quad (4.38)$$

On remarque que chaque terme de la série de Neumann fait intervenir le produit de k opérateurs de déplacement de fréquence $\mathcal{S}_\omega(n\Omega)$. Ce produit peut quelquefois être proportionnel à l'identité. Cela se produit par exemple pour

$$\mathcal{S}_\omega(n\Omega)\mathcal{S}_\omega(-n\Omega) = \mathbf{1}. \quad (4.39)$$

Cependant, pour pratiquement tous les termes, ce produit est différent de l'identité. Ainsi, la plupart des termes de l'opérateur de transfert

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathbf{D} - \mathbf{1} + i\frac{r_Z}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathbf{D}\mathbf{E}_L^T \left(\mathbf{F}(\omega) + \sum_{n \neq 0} \mathbf{E}_{LS,n} \mathcal{S}_\omega(n\Omega) \right)^k \mathbf{E}_L \mathbf{D} \quad (4.40)$$

impliquent une conversion de fréquence entre le signal à la sortie du dispositif et le signal à son entrée. Il semble difficile de trouver un régime de paramètres où le dispositif agit d'une manière élastique seulement, c'est-à-dire où il n'y a aucune conversion de fréquence nette entre la sortie et l'entrée. Or, c'est justement ce qu'on souhaite du circulateur. C'est pourquoi nous utilisons une approche différente pour implémenter un circulateur à l'aide de circuits LC.

4.3.2 Modulation des paramètres externes

Nous considérons maintenant le cas où les inductances de couplage entre les lignes à transmission et les circuits LC sont modulées. Nous supposons qu'il est possible de moduler ces inductances de couplage de telle sorte à ce que l'inhomogénéité inductive de chacune des lignes à transmission, causée par la connexion au circuit, soit fixe dans le temps. Par exemple, on peut imaginer que chaque ligne à transmission est connectée par deux inductances aux circuits LC et que ces inductances varient en antiphasé de telles sortes à ce que l'inductance totale du point de vu de la ligne à transmission est constante. Dans ce cas où l'inhomogénéité inductive des lignes à transmission est fixe, l'opérateur de connexion directe ne dépend plus de l'opérateur de déplacement de fréquence $\mathcal{S}_\omega(\omega_1)$, ce qui nous permet d'introduire la matrice de connexion directe $\mathbf{D} = \mathcal{D}$. De même, nous supposons que les fréquences de résonances des circuits LC sont fixes. Encore une fois, on peut imaginer que chacun des modes dépend de deux inductances qui varient en antiphasé de telle sorte à ce que l'inductance totale d'un mode soit fixe. Dans ce cas, l'opérateur de conversion de fréquence

interne peut s'écrire ¹

$$\mathcal{S}_{LS} = \mathbf{1}. \quad (4.41)$$

Nous considérons le cas le plus simple où tous les circuits LC sont résonnant, c'est-à-dire le cas où $\mathbf{\Omega}_0 = \omega_0 \mathbf{1}$. Aussi, rappelons que nous avons déjà effectué l'approximation de Markov qui suppose que toute la dynamique se déroule autour de la fréquence centrale ω_0 . Cette hypothèse implique que $2\omega_0 \gg |\omega - \omega_0|$ ce qui nous permet d'écrire

$$\omega_0^2 - \omega^2 = [2\omega_0 - (\omega_0 - \omega)](\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega). \quad (4.42)$$

Sous ces conditions, on a l'opérateur de transfert

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathbf{D} - \mathbf{1} + i \frac{r_Z \omega_0}{4} \mathbf{D} \mathcal{S}_L^T \left(\omega_0 - \omega - i \frac{r_Z \omega_0}{4} \mathcal{S}_L \mathbf{D} \mathcal{S}_L^T \right)^{-1} \mathcal{S}_L \mathbf{D}. \quad (4.43)$$

Nous supposons que les inductances sont modulées sinusoidalement à la fréquence Ω . Dans ce cas,

$$\mathcal{S}_L = \sum_{n=\pm 1} \mathfrak{E}_{L,n} \mathcal{S}_\omega(n\Omega). \quad (4.44)$$

Les matrices $\mathfrak{E}_{L,n}$ contiennent l'amplitude relative des inductances et leur phase de modulation. Selon l'équation (4.5), puisque $\mathbf{\Omega}_L(t)$ est réel, $\mathfrak{E}_{L,-1} = \mathfrak{E}_{L,1}^*$. En utilisant ces hypothèses, on trouve que la dissipation, c'est-à-dire le terme qui va comme le carré de l'opérateur de conversion de fréquence aux bornes \mathcal{S}_L , est

$$\begin{aligned} \frac{r_Z \omega_0}{4} \mathcal{S}_L \mathbf{D} \mathcal{S}_L^T &= \frac{r_Z \omega_0}{4} \left(\mathfrak{E}_{L,1} \mathbf{D} \mathfrak{E}_{L,1}^\dagger + \mathfrak{E}_{L,1} \mathbf{D} \mathfrak{E}_{L,1}^T \right) \\ &+ \frac{r_Z \omega_0}{4} \left[\mathfrak{E}_{L,1} \mathbf{D} \mathfrak{E}_{L,1}^T \mathcal{S}_\omega(2\Omega) + \mathfrak{E}_{L,1}^* \mathbf{D} \mathfrak{E}_{L,1}^\dagger \mathcal{S}_\omega(-2\Omega) \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ainsi, pour que le dispositif ne cause pas de conversion de fréquence, on requiert

$$\mathfrak{E}_{L,1} \mathbf{D} \mathfrak{E}_{L,1}^T = \mathbf{0} \quad (4.46)$$

$$\mathfrak{E}_{L,1}^* \mathbf{D} \mathfrak{E}_{L,1}^\dagger = \mathbf{0}. \quad (4.47)$$

Physiquement, ces conditions sont respectées si la dissipation totale des circuits LC est fixe dans le temps. Ça peut être le cas si, par exemple, chaque circuit LC est couplé aux lignes à transmission par deux inductances qui varient en antiphase. Pour simplifier l'analyse, on

1. Dans le cas général, \mathcal{S}_{LS} n'est pas strictement égal, mais proportionnel à $\mathbf{1}$. Nous considérons ici le cas le plus simple où la constante de proportionnalité est un. Cette simplification ne restreint pas la généralité des conclusions de cette section.

requiert aussi

$$\frac{r_Z \omega_0}{4} \left(\mathbf{E}_{L,1} \mathbf{D} \mathbf{E}_{L,1}^\dagger + \mathbf{E}_{L,1}^* \mathbf{D} \mathbf{E}_{L,1}^T \right) = \left(\frac{\kappa}{2} + i \delta \omega_0 \right) \times \mathbf{1}, \quad (4.48)$$

avec κ et $\delta \omega_0$ deux nombres réels. La condition ci-dessus impose une dissipation κ et un décalage de Lamb $\delta \omega_0$ homogènes pour les circuits LC. Avec les conditions imposées ci-dessus, on peut récrire l'opérateur de transfert comme

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathbf{D} - \mathbf{1} + i \frac{r_Z \omega_0}{4} \mathbf{D} \mathcal{S}_L^T \left(\omega_0 + \delta \omega_0 - i \frac{\kappa}{2} - \omega \right)^{-1} \mathcal{S}_L \mathbf{D}. \quad (4.49)$$

Dans le but de séparer la contribution élastique et la contribution inélastique à l'opérateur de transfert, on le récrit comme

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathbf{D} - \mathbf{1} + i \frac{r_Z \omega_0}{4} \sum_{m,n=\pm 1} \frac{\mathbf{D} \mathbf{E}_{L,m}^T \mathbf{E}_{L,n} \mathbf{D}}{\omega_0 + \delta \omega_0 - i \kappa / 2 - \omega + m \Omega} \mathcal{S}_\omega[(m+n)\Omega]. \quad (4.50)$$

Il devient alors apparent que pour que les termes inélastiques tombent, on requiert

$$\mathbf{E}_{L,1}^T \mathbf{E}_{L,1} = \mathbf{0} \quad (4.51)$$

$$\mathbf{E}_{L,1}^\dagger \mathbf{E}_{L,1}^* = \mathbf{0}. \quad (4.52)$$

Cette condition impose que le dispositif n'effectue aucune conversion de fréquence nette sur le signal. Dans ce cas, l'opérateur de transfert devient

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathbf{D} - \mathbf{1} + i \frac{r_Z \omega_0}{4} \left(\frac{\mathbf{D} \mathbf{E}_{L,1}^T \mathbf{E}_{L,1}^* \mathbf{D}}{\omega_0 + \delta \omega_0 - i \kappa / 2 - \omega + \Omega} + \frac{\mathbf{D} \mathbf{E}_{L,1}^\dagger \mathbf{E}_{L,1} \mathbf{D}}{\omega_0 + \delta \omega_0 - i \kappa / 2 - \omega - \Omega} \right). \quad (4.53)$$

On remarque qu'il ne s'agit plus d'un opérateur de transfert, mais d'une *matrice* de transfert. En effet, les restrictions imposées sur le produit des matrices $\mathbf{E}_{L,1}$ et \mathbf{D} font tomber tous les termes qui dépendent de l'opérateur de déplacement de fréquence $\mathcal{S}_\omega(\omega_1)$. Nous imposons maintenant une dernière condition. Nous voulons que la matrice de transfert à la résonance $\mathcal{T}(\omega_0 + \delta \omega_0)$ soit égale à la matrice de transfert d'un circulateur \mathbf{M} , par exemple la matrice de transfert de l'équation (4.1), c'est-à-dire

$$\mathbf{M} = \mathcal{T}(\omega_0 + \delta \omega_0) = \mathbf{D} - \mathbf{1} - \frac{r_Z \omega_0}{4} \left(\frac{\mathbf{D} \mathbf{E}_{L,1}^T \mathbf{E}_{L,1}^* \mathbf{D}}{\kappa / 2 + i \Omega} + \frac{\mathbf{D} \mathbf{E}_{L,1}^\dagger \mathbf{E}_{L,1} \mathbf{D}}{\kappa / 2 - i \Omega} \right). \quad (4.54)$$

On remarque que le membre de droite de l'égalité n'est en général pas hermitique pour $\Omega \neq 0$. Cette propriété est essentielle puisque le membre de gauche, la matrice de transfert d'un circulateur \mathbf{M} , est aussi non hermitique.

Pour utiliser l'information que contient cette section afin d'implémenter un circulateur, on peut optimiser les matrices $\mathbf{E}_{L,1}$ et \mathbf{D} numériquement pour qu'elles respectent les conditions imposées ci-dessus. Notez que κ et Ω sont aussi des paramètres qu'on peut varier dans ce processus d'optimisation. Le problème avec cette approche est qu'une fois que nous avons trouvé les matrices $\mathbf{E}_{L,1}$ et \mathbf{D} appropriés, il faut encore trouver un circuit électrique qui implémente la matrice \mathbf{D} requise. Une autre approche est d'utiliser l'intuition physique développée ici pour construire un circuit qui répond aux conditions appropriées. C'est l'approche utilisée avec nos collaborateurs de JILA pour concevoir le circulateur présenté dans la prochaine section [17]. On rappelle que nous trouvons qu'on peut construire un circulateur à partir d'un circuit dont le couplage inductif aux ports d'entrées-sorties est modulé temporellement. Nous imposons que ce couplage soit varié de telle sorte à ce que les inhomogénéités inductives des lignes à transmission, les fréquences de résonance ainsi que la dissipation totale des modes propres du circuit soient fixes dans le temps. Autrement dit, nous voulons concevoir un circuit qui présente des variations temporelles locales, mais dont les propriétés globales sont constantes. C'est cet aspect du circuit qui permettra au circulateur d'être élastique, c'est-à-dire de n'effectuer aucune conversion de fréquence nette entre son entrée et sa sortie.

4.4 Description d'un nouveau design de circulateur actif

Dans cette section, nous analysons un design de circulateur proposé avec nos collaborateurs de JILA, au Colorado [17]. Ce design est illustré à la figure 4.4a). On remarque que chaque ligne à transmission est connectée par quatre inductances aux condensateurs internes. On peut regrouper ces inductances en deux paires qui varient en antiphase. Ainsi, l'augmentation d'une inductance est toujours compensée par la diminution d'une autre inductance. C'est ce qui permet à ce circuit de présenter une inhomogénéité inductive constante du point de vue des lignes à transmission. De même, c'est ce qui permet aux fréquences de résonance et aux taux de dissipation des modes du circuit d'être constants. La variation en quadrature de phase des deux inductances d'une même paire assure que ce circuit se comporte comme un circulateur. Finalement, nous verrons que le choix de la fréquence de variation des inductances Ω permet à l'impédance du circuit d'être adaptée à la ligne à transmission et que le choix de l'amplitude relative de variation des inductances ϵ influence la largeur de bande du circulateur.

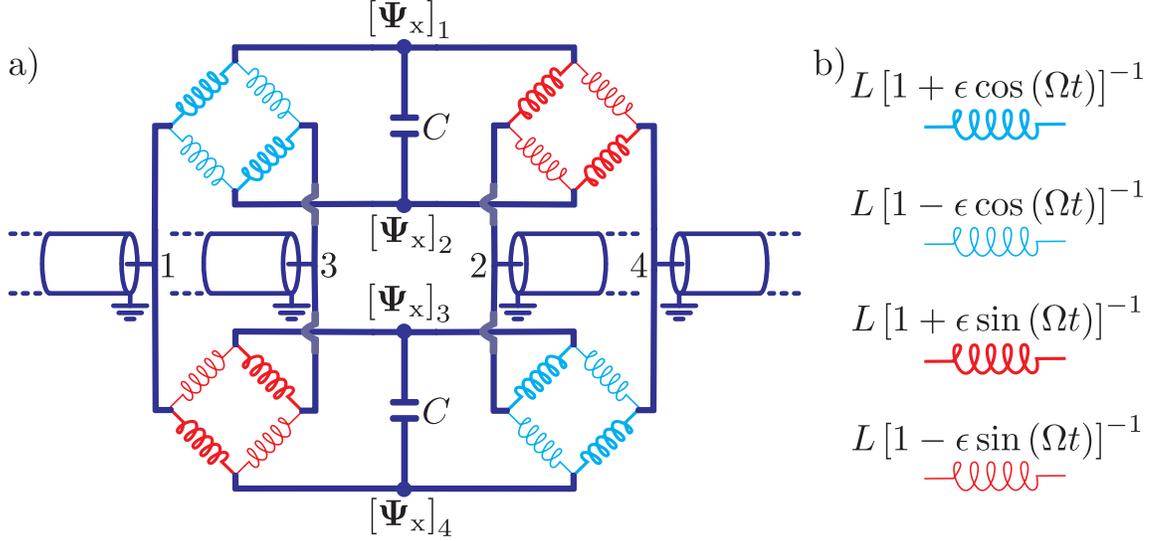


FIGURE 4.4 a) Design du circulateur proposé avec nos collaborateurs de JILA. b) Schéma de variation des inductances.

Suivant la notation introduite au chapitre 2, le Lagrangien associé au circuit de la figure 4.4a) est $\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_I$ avec le Lagrangien des circuits LC,

$$\mathcal{L}_S = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2} [\partial_t \Psi_x] \mathbf{C}_{xS} [\partial_t \Psi_x] - \Psi_x \hbar \Omega_{xLS} \Psi_x, \quad (4.55)$$

le Lagrangien du champ électromagnétique dans les lignes à transmission

$$\mathcal{L}_F = \mathcal{L}_{Fb} - \Phi(0) \hbar \Omega_{LF} \Phi(0) \quad (4.56)$$

et le Lagrangien d'interaction

$$\mathcal{L}_I = 2\Psi_x \hbar \Omega_{xL} \Phi(0). \quad (4.57)$$

Nous avons aussi défini le Lagrangien du champ électromagnétique dans les lignes à transmission en l'absence des circuits LC

$$\mathcal{L}_{Fb} = \int dx \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{[\partial_t \Phi(x)]c[\partial_t \Phi(x)]}{2} - \frac{[\partial_x \Phi(x)][\partial_x \Phi(x)]}{2l} \right). \quad (4.58)$$

La raison pour laquelle nous ajoutons des indices « x » à nos symboles sera claire dans la

section 4.4.1. La matrice de capacité \mathbf{C}_{xS} du circuit est

$$\mathbf{C}_{xS} = \begin{pmatrix} C & -C & 0 & 0 \\ -C & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -C \\ 0 & 0 & -C & C \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

De même, la matrice de connexion inductive est

$$[\hbar\Omega_{xL}]_{ik} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2L_{ik}} \quad (4.60)$$

avec L_{ik} l'inductance entre le point $[\Psi_x]_i$ du circuit et la ligne à transmission d'indice k . Nous avons aussi introduit la matrice de renormalisation des énergies des circuits LC

$$[\hbar\Omega_{xLS}]_{ij} = \delta_{ij} \sum_k [\hbar\Omega_{xL}]_{jk} \quad (4.61)$$

et la matrice de renormalisation de l'énergie du champ électromagnétique dans les lignes à transmission

$$[\hbar\Omega_{LF-}]_{kl} = \delta_{kl} \sum_j [\hbar\Omega_{xL}]_{jk}. \quad (4.62)$$

Nous avons de même utilisé les symboles c et l pour représenter la capacité et l'inductance par unité de longueur des lignes à transmission. Nous voulons maintenant faire correspondre les paramètres dans ces Lagrangiens aux paramètres dans l'opérateur de transfert de l'équation (4.23). Cela s'avère impossible pour l'instant puisque la matrice \mathbf{C}_{xS} n'est pas inversible. Nous résolvons ce problème dans la prochaine section.

4.4.1 Élimination des modes sans capacité

Puisque la matrice \mathbf{C}_{xS} n'est pas inversible, certaines de ces valeurs propres sont nulles. Dans le but de résoudre ce problème, nous diagonalisons cette matrice à l'aide d'une

transformation \mathbf{U} . On trouve

$$\mathbf{U}\mathbf{C}_{\text{XS}}\mathbf{U}^\dagger = \begin{pmatrix} & & 0 & 0 \\ & \mathbf{C}_S & & \\ & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.63)$$

avec $\mathbf{C}_S = 2C \times \mathbf{1}$. Le vecteur de flux normalisé est, dans cette base, $\mathbf{U}\Psi_x = \{\Psi, \Psi_+\}$ avec

$$[\Psi]_i = \frac{1}{\sqrt{2}} ([\Psi_x]_{2i} - [\Psi_x]_{2i-1}) \quad (4.64)$$

et

$$[\Psi_+]_i = \frac{1}{\sqrt{2}} ([\Psi_x]_{2i} + [\Psi_x]_{2i-1}). \quad (4.65)$$

On remarque que les modes Ψ_+ du circuit de la figure 4.4a) n'ont pas de capacité. Une manière typique de résoudre ce problème est d'associer une capacité parasitique C_p à ces modes. Cette solution a l'avantage d'être physiquement réaliste. En effet, dans un circuit électrique, il n'existe aucun mode qui a une capacité complètement nulle. Si on veut négliger les capacités parasitiques pour développer plus facilement une intuition physique du circuit, on les fait tendre vers zéro à la fin du calcul, une fois que l'Hamiltonien est obtenu et que la matrice de capacité \mathbf{C}_{XS} est inversée.

Un autre moyen de résoudre le problème, qui mène au même résultat, est d'utiliser les équations du mouvement des modes Ψ_+ . Puisque ces modes n'ont pas de capacités, les équations du mouvement fixent la valeur de Ψ_+ . On peut ensuite éliminer Ψ_+ du Lagrangien. Cette solution a l'avantage de réduire les dimensions du problème considéré. Dans le cas présent, les dimensions passent de quatre à deux. C'est la solution décrite dans ce paragraphe que nous utilisons ci-dessous.

Dans le but d'écrire les équations du mouvement de Ψ_+ , on réécrit les Lagrangien dans la base $\mathbf{U}\Psi_x$. On obtient

$$\mathcal{L}_S = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2} [\partial_t \Psi] \mathbf{C}_S [\partial_t \Psi] - \begin{pmatrix} \Psi & \Psi_+ \end{pmatrix} \hbar \mathbf{U} \Omega_{\text{xLS}} \mathbf{U}^\dagger \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi_+ \end{pmatrix}, \quad (4.66)$$

et

$$\mathcal{L}_I = 2 \begin{pmatrix} \Psi & \Psi_+ \end{pmatrix} \hbar \mathbf{U} \Omega_{xL} \Phi(0). \quad (4.67)$$

Pour bien séparer les contributions de Ψ et Ψ_+ à l'énergie potentielle, on introduit les matrices correspondant au sous-espace de Ψ , celles correspondant au sous-espace de Ψ_+ et celles couplant ces deux sous-espaces. On a

$$\mathbf{U} \Omega_{xLS} \mathbf{U}^\dagger = \begin{pmatrix} \Omega_{LS-} & \Omega_{LSg}^T \\ \Omega_{LSg} & \Omega_{LS+} \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

et

$$\mathbf{U} \Omega_{xL} = \begin{pmatrix} \Omega_{L-} \\ \Omega_{L+} \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

À l'aide de ces matrices, on trouve que les équations du mouvement pour Ψ_+ sont

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_+} = \Omega_{LS+} \Psi_+ + \Omega_{LSg} \Psi - \Omega_{L+} \Phi(0) \quad (4.70)$$

avec la solution

$$\Psi_+ = \Omega_{LS+}^{-1} \Omega_{L+} \Phi(0) - \Omega_{LS+}^{-1} \Omega_{LSg} \Psi. \quad (4.71)$$

Tel qu'annoncé plus haut, Ψ_+ ne dépend pas du temps. On utilise cette équation pour éliminer Ψ_+ des Lagrangiens. On trouve

$$\mathcal{L}_S = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2} [\partial_t \Psi] \mathbf{C}_S [\partial_t \Psi] - \Psi \hbar \Omega_{LS} \Psi, \quad (4.72)$$

$$\mathcal{L}_F = \mathcal{L}_{Fb} - \Phi(0) \hbar \Omega_{LF} \Phi(0) \quad (4.73)$$

et

$$\mathcal{L}_I = 2 \Psi \hbar \Omega_L \Phi(0), \quad (4.74)$$

avec les matrices d'énergie inductive renormalisées

$$\Omega_{LS} = \Omega_{LS-} - \Omega_{LSg}^T \Omega_{LS+}^{-1} \Omega_{LSg} \quad (4.75)$$

$$\Omega_L = \Omega_{L-} - \Omega_{LSg}^T \Omega_{LS+}^{-1} \Omega_{L+} \quad (4.76)$$

$$\Omega_{LF} = \Omega_{LF-} - \Omega_{L+}^T \Omega_{LS+}^{-1} \Omega_{L+}. \quad (4.77)$$

Dans les prochaines sections, nous faisons correspondre les paramètres dans ces Lagrangiens

aux paramètres dans l'opérateur de transfert de l'équation (4.23).

4.4.2 Variation sinusoïdale des énergies inductives de couplage

Supposons maintenant que nous varions les inductances du circuit comme illustré à la figure 4.4b). Dans ce cas, l'énergie inductive varie selon

$$[\hbar\Omega_{xL}(t)]_{il} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2L} [1 + \epsilon \cos(\Omega t + \phi_{il})], \quad (4.78)$$

avec la matrice de phase qu'on déduit de la figure 4.4b),

$$\phi_{il} = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{il}. \quad (4.79)$$

En se servant des résultats de la section 4.4.1, on trouve que lorsque l'énergie inductive est variée de cette manière,

$$[\Omega_{LS}]_{ij} = 4\delta_{ij}\omega_L, \quad (4.80)$$

$$[\Omega_L(t)]_{jl} = \frac{\omega_L\epsilon}{\sqrt{2}} \sum_{n=\pm 1} \exp[-in\Omega t] [\Theta_n]_{jl}, \quad (4.81)$$

et

$$[\Omega_{LF}]_{kl} = \omega_L (4\delta_{kl} - 1), \quad (4.82)$$

avec

$$[\Theta_n]_{jl} = -\sin[(\phi_{2j,l} - \phi_{2j-1,l})/2] \exp[-in(\phi_{2j,l} + \phi_{2j-1,l} - \pi)/2]. \quad (4.83)$$

Nous avons utilisé la fréquence inductive ω_L définie à l'équation (4.6). On remarque que l'énergie inductive du système $\hbar\Omega_{LS}$ et l'énergie inductive renormalisant l'énergie du champ électromagnétique dans les lignes à transmission $\hbar\Omega_{LF}$ ne dépendent pas du temps, comme requis dans la section 4.3.2 pour la conception d'un circulateur. De plus, on voit que dû à l'élimination des modes Ψ_+ effectuée à la section 4.4.1, la matrice $\hbar\Omega_{LF}$ n'est pas diagonale. Autrement dit, comme il est expliqué à la section 4.2.1, les modes modifiés par l'inhomogénéité des lignes à transmission sont délocalisés.

On peut maintenant relier les paramètres de la section courante aux paramètres de

l'opérateur de transfert. On obtient

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathcal{D}(\omega) - \mathbf{1} + i \frac{\omega_0 r_Z(\omega)}{8} \mathcal{D}(\omega) \mathcal{S}_L^T \left(\omega_0 - \frac{i\omega_0}{8} \mathcal{S}_L r_Z(\omega) \mathcal{D}(\omega) \mathcal{S}_L^T - \frac{\omega^2}{\omega_0} \right)^{-1} \mathcal{S}_L \mathcal{D}(\omega) \quad (4.84)$$

avec

$$[\mathcal{D}(\omega)]_{kl} = \frac{2}{4r_Z(\omega) - i} [r_Z(\omega) - i\delta_{kl}], \quad (4.85)$$

et la fréquence de résonance nue

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{(2C)(L/4)}}. \quad (4.86)$$

Pour simplifier l'opérateur de transfert davantage, on étudie le terme de l'équation (4.84) relié à la dissipation et au décalage de Lamb. On trouve

$$\frac{\omega_0}{4} \mathcal{S}_L r_Z(\omega) \mathcal{D}(\omega) \mathcal{S}_L^T = \sum_{n=\pm 1} \frac{2\kappa_0(\omega + n\Omega) - i\delta\omega_0(\omega + n\Omega)}{2} \mathbf{1} + \Delta_M(\omega) \sigma_y \quad (4.87)$$

Nous avons ici utilisé la matrice de Pauli σ_y et nous avons défini le taux de dissipation nu

$$\kappa_0(\omega) = \frac{\omega_0 \epsilon^2 r_Z(\omega)}{1 + 16r_Z^2(\omega)}, \quad (4.88)$$

le décalage de Lamb

$$\delta\omega_0(\omega) = \frac{8\omega_0 \epsilon^2 r_Z^2(\omega)}{1 + 16r_Z^2(\omega)} \quad (4.89)$$

et la correction non Markovienne

$$\Delta_M(\omega) = \frac{1}{2} \{2\kappa_0(\omega + \Omega) - 2\kappa_0(\omega - \Omega) - i[\delta\omega_0(\omega + \Omega) - \delta\omega_0(\omega - \Omega)]\}. \quad (4.90)$$

Le nom donné à cette quantité est justifié un peu plus bas. On remarque d'abord que le résultat ne dépend pas de l'opérateur de déplacement de fréquence $\mathcal{S}_\omega(\omega_1)$. C'est grâce à la propriété

$$\Theta_{\pm 1} \mathcal{D}(\omega - m\Omega) \Theta_{\pm 1}^T = \mathbf{0}, \quad (4.91)$$

des matrices Θ_n . Autrement dit, les conditions de phase selon lesquelles nous varions les inductances gardent la dissipation totale constante pour chaque circuit LC. Comme nous l'expliquons dans la section 4.3, cette propriété aide à obtenir un dispositif qui n'effectue

aucune conversion de fréquence nette entre le signal à l'entrée et à la sortie.

Dans le paragraphe précédent, nous avons introduit la correction non Markovienne $\Delta_M(\omega)$. Comme son nom le suggère, ce taux est présent dans notre calcul puisque nous n'avons pas fait l'approximation de Markov. Lorsque ce taux n'est pas zéro, la matrice qu'on inverse à l'équation (4.84),

$$\left[\omega_0 - \frac{i}{2} \left(\sum_{n=\pm 1} \frac{2\kappa_0(\omega + n\Omega) - i\delta\omega_0(\omega + n\Omega)}{2} \mathbf{1} + \Delta_M(\omega)\sigma_y \right) - \frac{\omega^2}{\omega_0} \right], \quad (4.92)$$

n'est pas diagonale. Comme nous l'expliquons dans la section 4.2.1, cette matrice représente ce qui se passe à l'intérieur des circuits LC. Ainsi, il est utile de la diagonaliser pour bien comprendre la dynamique de ces circuits. On trouve les valeurs propres

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{\omega_0} \left(\omega_0^2 - \frac{\omega_0}{2} \delta\omega_0(\omega \pm \Omega) - \omega^2 \right) - i\kappa_0(\omega \pm \Omega). \quad (4.93)$$

Nous rappelons que la fonction $\delta\omega_0(\omega)$, définie à l'équation (4.89), représente le décalage de Lamb tandis que la fonction $\kappa_0(\omega)$, définie à l'équation (4.88), représente la dissipation. Ainsi, les modulations à la fréquence Ω entraînent deux décalages de Lamb et deux taux de dissipation différents. Autrement dit, nous avons deux modes avec des fréquences de résonance et des taux de dissipation différents. Pour trouver les fréquences de résonance ω_r^{\pm} , on résout l'équation

$$\omega_0^2 - \frac{\omega_0}{2} \delta\omega_0(\omega_r^{\pm} \pm \Omega) - [\omega_r^{\pm}]^2 = 0, \quad (4.94)$$

c'est-à-dire qu'on trouve les valeurs ω_r^{\pm} pour lesquelles la partie réelle des valeurs propres λ_{\pm} est nulle. On remarque que cette dernière équation n'est pas quadratique à cause de la fonction du décalage de Lamb $\delta\omega_0(\omega)$ qui est évaluée à $\omega_r^{\pm} \pm \Omega$. Il est cependant facile de résoudre cette équation numériquement. Avec des valeurs pertinentes expérimentalement, c'est-à-dire $Z = 50 \text{ Ohm}$, $L = 1 \text{ nH}$, $C = 1 \text{ pF}$, $\epsilon \approx 0.7$ et $\Omega = \kappa_0(\omega_0)/2$, on trouve les solutions $\omega_r^+/(2\pi) = 6679 \text{ MHz}$ et $\omega_r^-/(2\pi) = 6677 \text{ MHz}$ [17]. Puisque le taux de dissipation nu est $\kappa_0[\omega_r^{\pm}]/(2\pi) = 179 \text{ MHz}$, la différence de 2 MHz entre ω_r^+ et ω_r^- est complètement négligeable. On peut donc négliger la correction non Markovienne $\Delta_M(\omega)$.

On s'intéresse maintenant à la dynamique du circuit pour des petits décalages de fréquence relatifs $\Delta/\omega_r = (\omega_r - \omega)/\omega_r$, avec ω_r la fréquence de résonance habillée. Ceci nous permet de récrire l'opérateur de transfert dans l'approximation Markovienne décrite à la section 4.2.1. On commence par calculer la fréquence de résonance habillée ω_r en résolvant

maintenant l'équation

$$\omega_0^2 - \frac{\omega_0}{2} \delta\omega_0(\omega_r) - \omega_r^2 = 0. \quad (4.95)$$

À l'aide de l'équation (4.89), on trouve

$$\omega_r^2 = -\frac{\omega_0^2}{2} [16r_Z^2(\omega_0) - 1] + \frac{\omega_0^2}{2} \sqrt{(16r_Z^2(\omega_0) + 1)^2 - 16r_Z^2(\omega_0)\epsilon^2}. \quad (4.96)$$

On remarque que la fréquence de résonance dépend de ϵ^2 , le carré de l'amplitude de modulation des inductances. En pratique, comme nous le montrons plus loin, cette quantité peut être variée *in situ*. Ainsi, la fréquence de résonance peut être modifiée. Autour de la résonance, c'est-à-dire pour un petit décalage de fréquence Δ , on a

$$\omega_0^2 - \frac{\omega_0}{2} \delta\omega_0(\omega_r - \Delta) - (\omega_r - \Delta)^2 \approx 2\omega_r \Delta \left(1 - \frac{\delta\omega_0(\omega_r)\omega_0}{2[1 + 16r_Z^2(\omega_r)]\omega_r^2} \right). \quad (4.97)$$

À l'aide des valeurs expérimentalement pertinentes introduites ci-dessus, on trouve que le deuxième terme du côté droit de cette expression vaut environ 0.006. Ainsi, on peut le négliger devant 1. Finalement, sous les approximations introduites dans les deux derniers paragraphes, l'opérateur de transfert de l'équation (4.84) s'écrit

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathcal{D} - \mathbf{1} + i \frac{\omega_0^2 r_Z}{16\omega_r} \mathcal{D} \mathcal{S}_L^T \left(\omega_r - \omega - \frac{i}{2} \kappa \right)^{-1} \mathcal{S}_L \mathcal{D}, \quad (4.98)$$

avec $r_Z = r_Z(\omega_r)$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\omega_r)$ et le taux de dissipation renormalisé

$$\kappa = \frac{\omega_0}{\omega_r} \kappa_0(\omega_r) = \left(\frac{\omega_0}{\omega_r} \right) \frac{\omega_0 \epsilon^2 r_Z}{1 + 16r_Z^2}. \quad (4.99)$$

Pour établir un lien plus intuitif entre l'opérateur de transfert et le circuit qu'il représente, il est utile d'explicitier les produits d'opérateurs présents dans l'expression représentant l'opérateur de transfert à l'équation (4.98). On obtient

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathcal{D} - \mathbf{1} + \sum_{m,n=\pm 1} \mathbf{T}_{mn}(\omega) \mathcal{S}_\omega[(m+n)\Omega] \quad (4.100)$$

avec les matrices de transfert correspondant à une conversion de fréquence de $n\Omega$ à l'entrée des circuits LC et $m\Omega$ à leur sortie,

$$\mathbf{T}_{mn}(\omega) = - \left(\frac{1 + 16r_Z^2}{16} \right) \frac{\mathcal{D} \Theta_m^T \Theta_n \mathcal{D}}{2i(\omega_r - \omega + m\Omega)/\kappa + 1}. \quad (4.101)$$

On peut aussi récrire l'opérateur de transfert comme

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathcal{D} - \mathbf{1} + \sum_{x=-2}^2 \mathbf{T}_x(\omega) \mathcal{S}_\omega[x\Omega] \quad (4.102)$$

avec la matrice de transfert associée à une conversion de fréquence *nette* de $x\Omega$

$$\mathbf{T}_x(\omega) = \sum_{y=-2}^2 \mathbf{T}_{(x+y)/2, (x-y)/2}(\omega). \quad (4.103)$$

On désigne par conversion de fréquence *nette* la conversion de fréquence totale qu'il y a entre l'entrée et la sortie, c'est-à-dire la somme des conversion de fréquence ayant lieu à ces endroits.

Les conditions de phases avec lesquelles les inductances sont variées, illustrées à la figure 4.4b) et encodées dans les équations (4.79) et (4.83), sont telles que

$$\Theta_{\pm 1}^T \Theta_{\pm 1} = \mathbf{0}. \quad (4.104)$$

Ainsi, les matrices de transfert $\mathbf{T}_{\pm 1, \pm 1}(\omega)$ associées à des conversions de fréquence nette de $\mp 2\Omega$ sont nulles. Il est remarquable que le circuit n'induit pas de conversion de fréquence nette malgré la dépendance temporelle des paramètres qui le caractérisent. Pour comprendre cet attribut, il faut réaliser que bien que les propriétés locales du circuit dépendent du temps, ses propriétés globales sont fixes. Autrement dit, les inductances dépendent du temps, mais la fréquence de résonance et le taux de dissipation des circuits LC sont fixes grâce aux conditions de phase choisie à l'équation (4.79).

En utilisant la propriété $\mathbf{T}_{\pm 1, \pm 1}(\omega) = \mathbf{0}$, on peut simplifier l'opérateur de transfert davantage pour finalement obtenir

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathcal{D} - \mathbf{1} + \frac{4r_Z + i}{4r_Z - i} \left(\frac{\Theta_1^T \Theta_1^* / 4}{2i(\omega_r - \omega + \Omega) / \kappa + 1} + \frac{\Theta_1^\dagger \Theta_1 / 4}{2i(\omega_r - \omega - \Omega) / \kappa + 1} \right). \quad (4.105)$$

Dans la limite où l'impédance des inductances est beaucoup plus petite que l'impédance des lignes à transmission, c'est-à-dire dans la limite où $4r_Z = 4Z / (\omega_r L) \gg 1$, on trouve la

matrice de transfert à la résonance

$$\mathcal{T}(\omega_r) \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{8r_Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.106)$$

lorsqu'on choisit la fréquence de modulation $\Omega = \kappa/2$. Comme pour le modèle jouet présenté à la figure 4.3a), il faut choisir la « fréquence de rotation » Ω en fonction du taux de dissipation (facteur de qualité) κ des circuits LC de telle sorte à ce qu'un photon qui rentre dans le circuit par le port 1 « ait le temps » de sortir par le port 2. Pour $r_Z \rightarrow \infty$, la matrice de transfert $\mathcal{T}(\omega_r)$ est celle d'un circulateur, comme souhaité. Cependant, dans cette limite, la largeur de bande κ tend vers zéro.

Pour étudier plus en détail ce compromis, on définit l'isolation

$$I = \left| \frac{[\mathcal{T}(\omega_r)]_{21}}{[\mathcal{T}(\omega_r)]_{12}} \right|. \quad (4.107)$$

Il s'agit de l'amplitude du signal qui est transmis du port 1 au port 2 comparée à l'amplitude du signal qui est transmis du port 2 au port 1. Dans un circulateur parfait, l'isolation tend vers l'infini. Pour le circuit étudié, on trouve que

$$I = \sqrt{1 + 4(4r_Z)^2}. \quad (4.108)$$

Comme annoncé ci-dessus, l'isolation tend vers l'infini avec r_Z . Cependant, le produit entre la largeur de bande et l'isolation, pour des fréquences ω_r et ω_0 constantes et une isolation considérable, c'est-à-dire $(4r_Z)^2 \gg 1$, vaut

$$\kappa I \approx \frac{\omega_0^2 \epsilon^2}{\omega_r 2}. \quad (4.109)$$

Autrement dit, augmenter r_Z permet d'obtenir une meilleure isolation, mais la largeur de bande diminue simultanément de telle sorte à ce que le produit κI reste constant. Ce genre de compromis entre une quantité désirable, l'isolation ici, et la largeur de bande est typique dans le domaine de l'amplification [48].

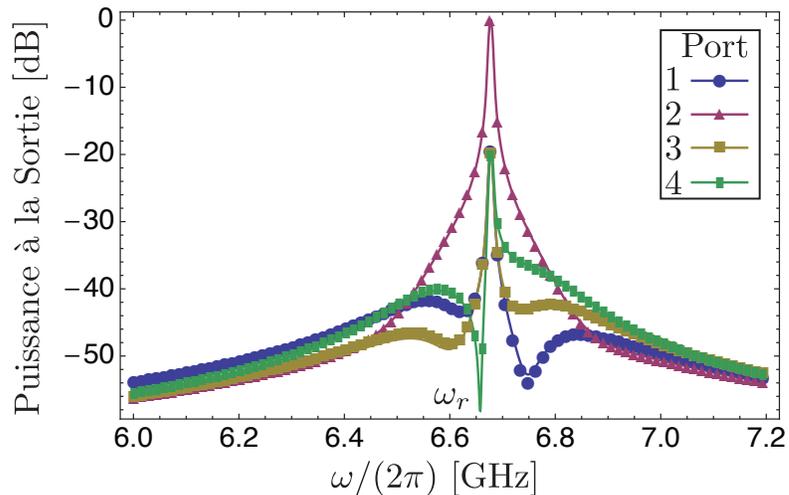


FIGURE 4.5 Spectre du circulateur sous des variations sinusoïdales de l'énergie inductive. Les points représentent les résultats des simulations numériques tandis que les lignes pleines représentent les résultats obtenus à l'aide de l'opérateur de transfert. Nous choisissons $Z = 50$ Ohm, $L = 1$ nH, $C = 1$ pF, $\epsilon \approx 0.7$ et $\Omega = \kappa/2$. Le signal en entrée pour la simulation numérique est $[\Phi_{\text{in}}(t)]_i = \exp[-(0.01\kappa t)^2] \cos(\omega_r t) \delta_{i1}$. Le temps final de la simulation est $t_f = 418$ ns. Changer le port dans lequel est envoyé le signal d'entrée résulte en une permutation cyclique des ports, d'une manière conforme à un circulateur (non montré).

Simulations numériques du circulateur

Pour étudier le circulateur quantitativement, on simule numériquement les équations d'entrée-sortie sans approximations (4.2) à (4.4) en fonction du temps avec les paramètres pertinents expérimentalement décrits ci-dessus. On choisit la fréquence de modulation des inductances $\Omega = \kappa/2$ de telle sorte à ce que le dispositif se comporte comme un circulateur. On envoie un signal d'entrée $[\Phi_{\text{in}}(t)]_i = \exp[-(0.01\kappa t)^2] \cos(\omega_r t) \delta_{ik}$. L'indice k représente le port dans lequel on envoie le signal. On choisit un indice k différent dans chaque simulation pour tester les quatre ports. Dans le but de comparer ces simulations numériques au modèle théorique développé dans cette section, on effectue ensuite la transformée de Fourier discrète sur le résultat $\Phi_{\text{out}}(t)$ de ces simulations. On obtient ainsi $\Phi_{\text{out}}(\omega)$, qu'on peut comparer au résultat analytique $\mathcal{T}(\omega) \Phi_{\text{in}}(\omega)$.

Les résultats des simulations décrites dans le paragraphe précédent sont illustrés à la figure 4.5. La figure illustre le cas où le signal d'entrée est envoyé dans le port 1. Les points représentent les résultats des simulations numériques tandis que les lignes pleines représentent les résultats analytiques obtenus à l'aide de l'opérateur de transfert de l'équation (4.105). Changer le port dans lequel est envoyé le signal d'entrée résulte en une permutation cy-

clique des ports, d'une manière conforme à un circulateur (non montré). La fréquence de résonance, avec les paramètres pertinents expérimentalement décrits ci-dessus, est à $\omega = \omega_r \approx 2\pi \times 6.67$ GHz. À cette fréquence, le dispositif se comporte bel et bien comme un circulateur. On voit que pratiquement tout le signal est routé vers le port 2. La largeur de bande observée est de l'ordre de $\kappa \approx 2\pi \times 200$ MHz, ce qui est compatible avec le taux de dissipation de $2\pi \times 191$ MHz calculé. Les imperfections à la résonance sont du niveau de -20 dB. Elles sont dues à la faible taille du ratio entre l'impédance des lignes à transmission et l'impédance des inductances. En effet, avec les paramètres choisis, $4r_Z \approx 4.76$ ce qui n'est pas beaucoup plus grand que 1 comme requis pour avoir un circulateur parfait.

Dans le contexte de l'électrodynamique quantique en guide d'onde ou en circuit, les dispositifs typiquement connectés aux circulateurs sont les atomes artificiels et les amplificateurs supraconducteurs. Leur largeur de bande est de l'ordre de la dizaine de MHz. Ainsi, la largeur de bande de ~ 200 MHz du circulateur décrit ci-dessus est amplement suffisante pour ces applications, surtout en considérant que la fréquence de résonance du circulateur peut être modifiée *in situ*. De plus, le niveau d'imperfection de -20 dB du circulateur n'est pas problématique puisque des erreurs de 1% sont typiques dans la plupart des expériences du domaine, sauf celles dans le domaine du calcul quantique.

Dans les sections suivantes, nous examinons comment il est possible d'implémenter des inductances qui dépendent du temps. Nous utilisons ensuite l'opérateur de transfert pour étudier les nouvelles imperfections introduites lors de l'implémentation de ces inductances variables. Cette étude nous permet d'obtenir un portrait global du circulateur et de ses imperfections. Nous concluons le chapitre en utilisant ce portrait pour évaluer les performances du circulateur.

4.4.3 Implémentation des inductances modulables à l'aide de SQUIDs

Nous avons jusqu'à maintenant supposé qu'il existe des inductances variables sans perte. Un moyen pour implémenter de telles inductances est d'utiliser un SQUID (*superconducting quantum interference device*). Un SQUID consiste en deux jonctions Josephson en parallèle. On peut montrer que lorsque les deux jonctions Josephson sont identiques, l'énergie E_S du SQUID est [29, 49]

$$E_S = - [2E_J \cos(\varphi(t)/2)] \cos(\phi) \quad (4.110)$$

avec ϕ le flux normalisé² aux bornes du SQUID et $\varphi(t)$ le flux magnétique (normalisé aussi) qui traverse le SQUID. Cette équation indique qu'on peut considérer le SQUID comme une

2. Les flux sont normalisés par $\Phi_0/(2\pi)$, avec Φ_0 le quantum de flux.

seule jonction Josephson d'énergie Josephson effective $E'_J(t) = 2E_J \cos(\varphi(t)/2)$. Autrement dit, un SQUID est équivalent à une jonction Josephson avec une énergie Josephson modulable à l'aide du flux magnétique $\varphi(t)$.

Pour faire le lien entre un SQUID et une inductance modulable, on développe en série le cosinus de ϕ dont dépend l'énergie du SQUID. On obtient

$$E_S = - [2E_J \cos(\varphi(t)/2)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \phi^{2n}. \quad (4.111)$$

On peut laisser tomber le terme à $n = 0$ qui ne dépend pas de ϕ puisqu'il est proportionnel à la matrice identité dans l'Hamiltonien. Ainsi, on peut écrire l'énergie du SQUID comme

$$E_S = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{\phi^2}{2L_J(t)}. \quad (4.112)$$

avec l'inductance Josephson non linéaire

$$L_J(t) = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{\sec(\phi)}{2E_J \cos(\varphi(t)/2)}. \quad (4.113)$$

Comme annoncé dans le chapitre 1, la jonction Josephson et le SQUID se comportent comme des inductances non linéaires, c'est-à-dire des inductances qui dépendent de la valeur de ϕ à leurs bornes. L'analyse du circulateur effectuée dans ce chapitre suppose une inductance linéaire. Ainsi, on s'intéresse au cas où ϕ est petit, c'est-à-dire le cas où la tension appliquée aux bornes du SQUID est petite. Dans ce cas, l'inductance Josephson s'écrit

$$L_J(t) \approx \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1 - \phi^2/2}{2E_J \cos(\varphi(t)/2)}. \quad (4.114)$$

Au premier ordre en ϕ , on peut considérer le SQUID comme une inductance linéaire modulable à l'aide du flux magnétique $\varphi(t)$.

Dans le but d'augmenter la tension limite à laquelle le SQUID cesse de se comporter comme une inductance linéaire, on connecte plusieurs SQUIDs identiques en série [50]. De cette manière, la chute de tension est répartie uniformément à travers les SQUIDs. Avec N SQUIDs, le changement de flux généralisé aux bornes de chaque SQUID est $\int d\tau V(\tau)/N = \phi/N$. Ainsi, aux bornes de l'un de ces N SQUIDs, l'inductance Josephson est

$$L_J(t) \approx \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1 - (\phi/N)^2/2}{2E_J \cos(\varphi(t)/2)}. \quad (4.115)$$

La répartition de la chute de tension à travers tous les SQUIDs en série diminue donc la non-linéarité des SQUIDs par un facteur N^2 . Elle augmente aussi la tension limite d'opération, c'est-à-dire la tension où l'inductance devient non linéaire, par un facteur N . Utiliser plusieurs SQUIDs comporte aussi certains désavantages. Par exemple, un circuit qui comporte plusieurs SQUIDs est nécessairement d'une dimension plus importante qu'un circuit qui n'en comporte qu'un seul. On considère ici des valeurs N entre 10 et 100. Ceci limite la population des circuits LC dont le circulateur est constitué à environ 100 photons puisque pour un signal de cette intensité, le caractère non linéaire de l'inductance Josephson commence à se manifester [17].

4.4.4 Variation sinusoïdale du flux dans les SQUIDs

On peut donc réaliser une inductance modulable avec un ou plusieurs SQUIDs. On simplifie ici la discussion en considérant cet ensemble comme une inductance L que l'on peut modifier à l'aide d'un flux magnétique extérieur. Bien qu'il soit possible de moduler ce flux magnétique de telle sorte à ce que l'énergie inductive varie sinusoïdalement comme indiqué à l'équation (4.78), il est souvent plus simple de varier le flux magnétique sinusoïdalement [17]. Dans ce cas, l'énergie inductive est

$$[\hbar\Omega_{xL}(t)]_{il} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2L} \cos(\lambda \cos(\Omega t + \phi_{il}) + \phi_0), \quad (4.116)$$

c'est-à-dire que le flux est modulé autour de la valeur fixe ϕ_0 avec une amplitude λ . Pour gagner une meilleure intuition sur l'influence des paramètres λ et ϕ_0 sur le circulateur, on réécrit ce résultat sous la forme de série de Fourier en utilisant l'expansion de Jacobi-Anger [47]. On obtient

$$[\hbar\Omega_{xL}(t)]_{il} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2L} [\cos(\phi_0) e_{il}(t) - \sin(\phi_0) o_{il}(t)] \quad (4.117)$$

avec l'expansion paire

$$e_{il}(t) = J_0(\lambda) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(\lambda) \cos[2n(\Omega t + \phi_{il})] \quad (4.118)$$

et impaire

$$o_{il}(t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n-1}(\lambda) \cos[(2n-1)(\Omega t + \phi_{il})]. \quad (4.119)$$

Dans les expressions ci-dessus, $J_n(\lambda)$ représente une fonction de Bessel de première espèce. On remarque que le choix de ϕ_0 contrôle le poids entre les fonctions de Bessel paires et impaires.

Le but que nous fixons est d'émuler les variations d'énergie inductive sinusoïdale décrites à l'équation (4.78) à l'aide des variations décrites ci-dessus à l'équation (4.116). Autrement dit, nous voulons être en mesure de négliger les harmoniques élevées de l'équation (4.117). Ces harmoniques sont proportionnelles aux fonctions de Bessel $J_n(\lambda)$, avec $n \geq 2$. Or, on remarque que

$$\frac{J_{n+1}(\lambda)}{J_n(\lambda)} \sim \frac{\lambda}{2(n+1)}. \quad (4.120)$$

Ainsi, on choisit $\lambda \ll 2$ pour s'assurer que l'amplitude des harmoniques diminue rapidement. Ceci nous permet aussi d'effectuer un développement en série de Taylor autour de $\lambda = 0$. Au troisième ordre en λ , on obtient

$$e_{il}(t) = J_0(\lambda) - 2J_2(\lambda) \cos [2(\Omega t + \phi_{il})] \quad (4.121)$$

et

$$o_{il}(t) = 2J_1(\lambda) \cos [\Omega t + \phi_{il}] - 2J_3(\lambda) \cos [3(\Omega t + \phi_{il})], \quad (4.122)$$

où nous avons utilisé la propriété $\mathcal{O}(J_n[\lambda]) = \mathcal{O}(\lambda^n)$ des fonctions de Bessel de première espèce.

En se servant des résultats de la section 4.4.1, on trouve que lorsque l'énergie inductive est variée selon l'équation (4.116), on a au troisième ordre en λ

$$[\mathbf{\Omega}_{LS}]_{ij} = 4 \cos(\phi_0) J_0(\lambda) \omega_L \delta_{ij}, \quad (4.123)$$

$$[\mathbf{\Omega}_L(t)]_{il} = \frac{\cos(\phi_0) J_0(\lambda) \omega_L}{\sqrt{2}} \left(2 \tan(\phi_0) \frac{J_1(\lambda)}{J_0(\lambda)} \right) \sum_{n=-1}^2 (-1)^{n+1} \frac{J_{2n-1}(\lambda)}{J_1(\lambda)} [\mathbf{\Theta}_{2n-1}]_{il} e^{-i(2n-1)\Omega t} \quad (4.124)$$

et

$$[\mathbf{\Omega}_{LF}]_{kl} = \cos(\phi_0) J_0(\lambda) \omega_L (4\delta_{kl} - 1) \quad (4.125)$$

avec

$$[\mathbf{\Theta}_n]_{il} = \sin [|n|(\phi_{2i,l} - \phi_{2i-1,l})/2] \exp \left[-in \left(\frac{\phi_{2i,l} + \phi_{2i-1,l}}{2} - \frac{\pi}{2|n|} \right) \right]. \quad (4.126)$$

Nous avons utilisé la fréquence inductive ω_L définie à l'équation (4.6). On remarque qu'avec le choix de phase de l'équation (4.79), les matrices $\mathbf{\Theta}_{2n} = \mathbf{0}$. On choisit $0 < \phi_0 < \pi/2$. Grâce à ce choix, il est possible de mapper les matrices obtenues ci-dessus sur celles obtenues dans la section où nous considérons les modulations sinusoïdales de l'énergie inductive, c'est-à-dire la section 4.4.2. On trouve une correspondance entre les deux cas lorsqu'on

renormalise l'inductance

$$L \rightarrow L / [\cos(\phi_0) J_0(\lambda)] \quad (4.127)$$

et lorsqu'on remplace l'amplitude des variations de l'inductance ϵ

$$\epsilon \rightarrow 2 \tan(\phi_0) \frac{J_1(\lambda)}{J_0(\lambda)}. \quad (4.128)$$

Une fois cette correspondance établie, il subsiste deux différences entre le cas où nous varions l'énergie inductive sinusoïdalement et le cas, considéré ici, où nous varions le flux sinusoïdalement. La première différence est que $\Theta_n \rightarrow -\Theta_n$. Puisque la matrice de transfert et la dissipation dépendent toujours d'un produit de deux matrices Θ_n et Θ_m , cette différence n'a aucun impact physique.

La deuxième différence avec le cas où l'énergie inductive est variée sinusoïdalement est la présence de la deuxième harmonique, à la fréquence 3Ω , dans la fonction d'énergie inductive effective $\hbar\Omega_L(t)$ de l'équation (4.124). Cette modification ne change pas la dissipation à l'ordre considéré en λ . Cependant, cette modification ajoute des termes de conversions de fréquence à l'opérateur de transfert. On trouve en effet

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathcal{D} - \mathbf{1} + \sum_{n=\pm 1} \mathbf{T}_{n,-n}(\omega) - \frac{J_3(\lambda)}{J_1(\lambda)} \sum_{n=\pm 1} [\mathbf{T}_{n1,n3}(\omega) + \mathbf{T}_{n3,n1}(\omega)] \mathcal{S}_\omega[n4\Omega], \quad (4.129)$$

avec les matrices de transfert $\mathbf{T}_{mn}(\omega)$ définies à l'équation (4.101). On observe que la variation sinusoïdale du flux introduit un canal qui convertit la fréquence à $\pm 4\Omega$. L'amplitude de ce canal est $J_3(\lambda)/J_1(\lambda)$. Des valeurs pertinentes expérimentalement pour λ et ϕ_0 sont 0.38 et $\pi/3$ [17]. Pour ces valeurs, l'amplitude du canal de conversion de fréquence est de $J_3(\lambda)/J_1(\lambda) \approx 0.006$, soit environ -22 dB en amplitude, ou -44 dB en puissance. Ces corrections ne sont donc pas importantes en pratique.

Nous testons la théorie développée ci-dessus en comparant les résultats prédits par l'opérateur de transfert à des simulations numériques exactes. Les détails sur la méthodologie derrière ces simulations numériques sont donnés dans la section 4.4.2 et les résultats sont présentés à la figure 4.6. On y illustre le cas où le signal d'entrée est envoyé dans le port 1. Les points représentent les résultats des simulations numériques tandis que les lignes pleines représentent les résultats obtenus analytiquement à l'aide de l'opérateur de transfert. Changer le port dans lequel est envoyé le signal d'entrée résulte en une permutation cyclique des ports, d'une manière conforme à un circulateur (non montré). À la résonance, c'est-à-dire lorsque $\omega = \omega_r \approx 2\pi \times 6.6$ GHz, le dispositif se comporte bel et bien comme un circulateur. Pratiquement tout le signal est routé vers le port 2. Les imperfections à la résonance sont du

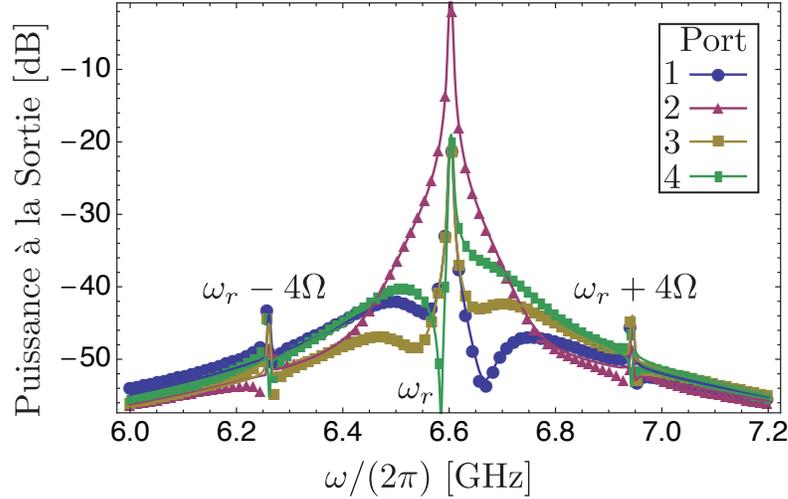


FIGURE 4.6 Spectre du circulateur sous des variations sinusoïdales du flux magnétique. Les points représentent les résultats des simulations numériques tandis que les lignes pleines représentent les résultats obtenus à l'aide de l'opérateur de transfert. Nous choisissons $Z = 50$ Ohm, $L = 0.5$ nH, $C = 1$ pF, $\lambda = 0.38$, $\phi_0 = \pi/3$ et $\Omega = \kappa/2$. Le signal en entrée pour la simulation numérique est $[\Phi_{\text{in}}(t)]_i = \exp[-(0.01\kappa t)^2] \cos(\omega_r t) \delta_{i1}$. Le temps final de la simulation est $t_f = 466$ ns. Changer le port dans lequel est envoyé le signal d'entrée résulte en une permutation cyclique des ports, d'une manière conforme à un circulateur (non montré).

niveau de -20 dB. Comme dans le cas décrit dans la section 4.4.2, elles sont dues à la faible taille du ratio entre l'impédance des lignes à transmission et l'impédance des inductances. En effet, avec les paramètres choisis, $4r_Z \approx 4.64$. La différence principale entre cette figure et la figure 4.5 est la présence de bandes latérales à $\omega_r \pm 4\Omega$. Il s'agit du canal de conversion de fréquence prédit par l'équation (4.129). Comme prédit, son amplitude est d'environ -44 dB en puissance, ce qui le rend négligeable par rapport aux autres imperfections du circulateur qui sont du niveau de -20 dB. En conclusion, il est remarquable que la variation sinusoïdale du flux soit équivalente à la variation sinusoïdale de l'énergie inductive sous une simple renormalisation des paramètres. En particulier, les imperfections supplémentaires introduites sont négligeables.

4.4.5 Conclusions sur les performances du circulateur

Le circulateur introduit dans cette section peut être intégré à un circuit électrique quantique supraconducteur, ce qui est pratiquement impossible pour un circulateur à ferrite. Comme nous le mentionnons plus haut, les dispositifs typiquement connectés à ce circula-

teur sont les atomes artificiels et les amplificateurs supraconducteurs. La largeur de bande de ~ 200 MHz du circulateur proposé ici est beaucoup plus grande que la largeur de bande typique de ces dispositifs et est donc suffisante. De plus, il faut considérer que la fréquence de résonance du circulateur peut être modifiée *in situ*. Le niveau d'imperfection de -20 dB du circulateur est typique dans la plupart des expériences du domaine, sauf celles qui ont comme objectif le calcul quantique tolérant aux fautes. Ainsi, ce circulateur est un nouvel outil qui ouvre la porte à de nombreuses nouvelles expériences avec les circuits électriques quantiques. Nos collaborateurs à JILA construisent présentement le circulateur proposé dans cette section.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons introduit un cadre théorique pour l'électrodynamique quantique en guide d'onde. Ce cadre théorique permet de traiter les éléments continus dans les circuits électriques supraconducteurs, comme les lignes à transmission. Il permet aussi de traiter les connexions entre les éléments continus et les éléments localisés (*lumped elements*). Nous présentons la théorie d'entrée-sortie dans ce contexte. Comme son nom l'indique, celle-ci relie les observables à l'entrée du circuit aux observables à sa sortie. Nous obtenons aussi une équation maîtresse qui permet de prédire la dynamique du circuit lorsque l'information à l'intérieur d'une ligne à transmission infinie connectée au circuit est perdue ou ignorée.

On utilise d'abord la théorie développée pour étudier la situation où deux circuits représentant des atomes sont connectés à une ligne à transmission. On trouve que la physique dans ce type de circuit dépend de la distance entre les deux atomes artificiels. Si la phase φ acquise par le champ électromagnétique lorsqu'il voyage d'un atome à l'autre est un multiple entier de π , on observe qu'un état (sombre) est complètement découplé de la ligne à transmission tandis qu'un autre (brillant) est couplé avec une intensité deux fois plus forte. Lorsque la phase φ est un multiple impair de $\pi/2$, les deux atomes artificiels subissent une interaction cohérente J . Nous suggérons des protocoles pour observer des signatures expérimentales de cette physique. Ces suggestions ont entre autres permis à nos collaborateurs du groupe d'Andreas Wallraff de l'ETH à Zurich de faire la première mesure de l'interaction cohérente J entre deux atomes.

On utilise aussi le cadre théorique pour étudier un circuit où le couplage inductif à des lignes à transmission varie dans le temps. Nous sommes intéressés par ce type de circuit puisqu'il est non réciproque ce qui ouvre la possibilité de l'utiliser pour implémenter un circulateur. On obtient un opérateur de transfert qui décrit comment le circuit transmet un signal électromagnétique d'une ligne à transmission à l'autre. On utilise l'opérateur de transfert pour étudier comment les inductances doivent varier dans le temps pour que le

circuit se comporte comme un circulateur. Nous étudions ensuite un modèle concret de circuit proposé avec nos collaborateurs de JILA, aux États-Unis. Nous montrons que ce circuit se comporte bien comme un circulateur, avec des imperfections au niveau de -20 dB et une largeur de bande d'environ 200 MHz.

Le cadre théorique introduit dans cette thèse se démarque des autres par sa généralité. Il représente l'interaction entre des circuits électriques à éléments localisés quelconques et des lignes à transmission d'une manière compacte et assez formelle pour être traitée d'une manière automatisée. Un tel cadre sera essentiel pour comprendre les circuits électriques supraconducteurs dont la complexité ne cesse de croître [51–53]. Il a aussi le potentiel d'être à la base de logiciels qui aideront à concevoir les circuits électriques quantiques du futur.

Le chapitre sur les deux atomes artificiels connectés à une ligne à transmission ouvre la porte à de nombreuses expériences. On peut par exemple imaginer reproduire des expériences qui sont difficiles à réaliser à l'aide de *vrais* atomes. On peut aussi imaginer créer des réseaux de lignes à transmission et d'atomes artificiels dans le but d'étudier leur physique ou bien dans le but de simuler des systèmes complexes difficiles à étudier directement [37, 38]. Ce type d'idées ouvre la porte à la simulation de la physique à N corps dissipative à l'aide de l'électrodynamique quantique en guide d'onde. L'aspect dissipatif de l'interaction est intéressant puisque comme nous l'avons vu avec l'état brillant et l'état sombre au chapitre 3, la dissipation peut créer une interaction à longue distance entre les différents atomes artificiels.

Le chapitre sur le circulateur introduit une façon différente d'étudier les circuits paramétriques. On peut imaginer utiliser cette méthode pour étudier d'autres circuits paramétriques intéressants comme les amplificateurs. Le circulateur introduit dans ce chapitre ouvre aussi la porte à de nombreuses expériences qui requièrent un couplage non réciproque [43]. Nous prévoyons que ce circulateur, ou une de ses variantes, sera un outil important pour l'élaboration de nouvelles technologies quantiques.

Annexe A

Limite continue du Hamiltonien représentant les connexions capacitives

Le but de cette annexe est de prendre la limite $x_0 \rightarrow 0$ du Hamiltonien

$$H = 4 \begin{pmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{Q}/(2e) \end{pmatrix} \frac{e^2}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\text{Sb}} & -\mathbf{C}_g \\ -\mathbf{C}_g^T & x_0 \mathbf{c} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{Q}/(2e) \end{pmatrix} + U. \quad (\text{A.1})$$

En utilisant le *Fact 2.17.3* de la référence [54], on peut effectuer l'inverse de la matrice d'une manière explicite. On obtient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\text{Sb}} & -\mathbf{C}_g \\ -\mathbf{C}_g^T & x_0 \mathbf{c} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_S^{-1} & \mathbf{C}_S^{-1} \mathbf{C}_g (\mathbf{c} x_0)^{-1} \\ (\mathbf{c} x_0)^{-1} \mathbf{C}_g^T \mathbf{C}_S^{-1} & [(\mathbf{c} x_0)^{-1} \mathbf{C}_g^T \mathbf{C}_S^{-1} \mathbf{C}_g + 1] (\mathbf{c} x_0)^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

et $\mathbf{C}_S = \mathbf{C}_{\text{Sb}} - \mathbf{C}_g (\mathbf{c} x_0)^{-1} \mathbf{C}_g^T$. Dans ce qui suit, nous utilisons une notation à double indice pour repérer un point dans une des lignes à transmission. Par exemple, l'élément $\mathbf{Q}_{[km]}$ fait référence à la charge au point m dans la ligne à transmission d'indice k .

On récrit d'abord le Hamiltonien en explicitant le produit matriciel de la matrice par

bloc,

$$H = 4\frac{e^2}{2}\mathbf{n}\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{n} + e\mathbf{n}\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{C}_g(\mathbf{c}x_0)^{-1}\mathbf{Q} + e\mathbf{Q}(\mathbf{c}x_0)^{-1}\mathbf{C}_g^T\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{n} + \frac{1}{2}\mathbf{Q}(\mathbf{c}x_0)^{-1}\left[\mathbf{C}_g^T\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{C}_g + (\mathbf{c}x_0)\right](\mathbf{c}x_0)^{-1}\mathbf{Q} + U. \quad (\text{A.3})$$

On explicite maintenant certains produits matriciels à l'intérieur du Hamiltonien,

$$H = 4\frac{e^2}{2}\mathbf{n}\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{n} + U + \frac{1}{2}\sum_{[km]}\mathbf{Q}_{[km]}(\mathbf{c}x_0)_{[km]}^{-1}\mathbf{Q}_{[km]} + e\sum_{ij[km]}\mathbf{n}_i\left[\mathbf{C}_S^{-1}\right]_{ij}\left[\mathbf{C}_g\right]_{j[km]}(\mathbf{c}x_0)_{[km]}^{-1}\mathbf{Q}_{[km]} + e\sum_{[km]ji}\mathbf{Q}_{[km]}(\mathbf{c}x_0)_{[km]}^{-1}\left[\mathbf{C}_g^T\right]_{[km]j}\left[\mathbf{C}_S^{-1}\right]_{ji}\mathbf{n}_i + \frac{1}{2}\sum_{[km]ij[lm]}\mathbf{Q}_{[km]}(\mathbf{c}x_0)_{[km]}^{-1}\left[\mathbf{C}_g^T\right]_{[km]i}\left[\mathbf{C}_S^{-1}\right]_{ij}\left[\mathbf{C}_g\right]_{j[lm]}(\mathbf{c}x_0)_{[lm]}^{-1}\mathbf{Q}_{[lm]}. \quad (\text{A.4})$$

Notez que \mathbf{n}_i commute avec $\mathbf{Q}_{[km]}$ puisque ces opérateurs agissent sur des espaces de Hilbert différents. De plus, notez que puisque H est hermitique, la matrice de capacité \mathbf{C}_S^{-1} doit être symétrique. En conséquence, on peut simplifier le Hamiltonien encore et on obtient

$$H = 4\frac{e^2}{2}\mathbf{n}\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{n} + U + \frac{1}{2}\sum_{[km]}\mathbf{Q}_{[km]}(\mathbf{c}x_0)_{[km]}^{-1}\mathbf{Q}_{[km]} + 2e\sum_{ij[km]}\mathbf{n}_i\left[\mathbf{C}_S^{-1}\right]_{ij}\left[\mathbf{C}_g\right]_{j[km]}(\mathbf{c}x_0)_{[km]}^{-1}\mathbf{Q}_{[km]} + \frac{1}{2}\sum_{[km]ij[lm]}\mathbf{Q}_{[km]}(\mathbf{c}x_0)_{[km]}^{-1}\left[\mathbf{C}_g^T\right]_{[km]i}\left[\mathbf{C}_S^{-1}\right]_{ij}\left[\mathbf{C}_g\right]_{j[lm]}(\mathbf{c}x_0)_{[lm]}^{-1}\mathbf{Q}_{[lm]}. \quad (\text{A.5})$$

On introduit maintenant le vecteur de densité de charge en fonction de la position,

$$\mathbf{q}_k(mx_0) = \mathbf{Q}_{[km]}/x_0, \quad (\text{A.6})$$

la matrice diagonale de densité de capacité en fonction de la position

$$x_0\bar{\mathbf{c}}_k(mx_0) = (\mathbf{c}x_0)_{[km]} \quad (\text{A.7})$$

et la matrice de densité de capacité de couplage en fonction de la position

$$[\mathbf{c}_g(mx_0)]_{jk} = [\mathbf{C}_g]_{j[km]}/x_0. \quad (\text{A.8})$$

On récrit le Hamiltonien à l'aide de ces quantités et on obtient

$$\begin{aligned}
H = & 4\frac{e^2}{2}\mathbf{n}\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{n} + \frac{1}{2}\sum_{mn}x_0^2\mathbf{q}(mx_0)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(mx_0)\mathbf{c}_g^T(mx_0)\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{c}_g(nx_0)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(nx_0)\mathbf{q}(nx_0) \\
& + \frac{1}{2}\sum_m x_0\mathbf{q}(mx_0)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(mx_0)\mathbf{q}(mx_0) + 2e\sum_m x_0\mathbf{n}\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{c}_g(mx_0)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(mx_0)\mathbf{q}(mx_0) + U.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Nous sommes finalement prêts à prendre la limite $x_0 \rightarrow 0$. On obtient

$$\begin{aligned}
H = & 4\frac{e^2}{2}\mathbf{n}\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{n} + \frac{1}{2}\int dx dy \mathbf{q}(x)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(x)\mathbf{c}_g^T(x)\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{c}_g(y)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(y)\mathbf{q}(y) \\
& + \frac{1}{2}\int dx \mathbf{q}(x)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(x)\mathbf{q}(x) + 2e\int dx \mathbf{n}\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{c}_g(x)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(x)\mathbf{q}(x) + U.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Il s'agit du Hamiltonien que l'on souhaitait obtenir. Son interprétation physique est effectuée dans la section 2.2.1. Notez qu'avec les définitions faites ci-dessus,

$$\mathbf{C}_S = \mathbf{C}_{Sb} - \int dx \mathbf{c}_g(x)\bar{\mathbf{c}}^{-1}(x)\mathbf{c}_g^T(x). \tag{A.11}$$

Annexe B

Limite continue de l'énergie potentielle représentant les connexions inductives

Le but de cette annexe est de prendre la limite $x_0 \rightarrow 0$ des énergies potentielles

$$U_{IL} = \sum_{j[km]} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{(\Psi_j - \hat{\Phi}_{[km]})^2}{2L_{j[km]}} \quad (\text{B.1})$$

$$U_{IJ} = - \sum_{j[km]} [\mathbf{E}_J]_{j[km]} \cos(\Psi_j - \hat{\Phi}_{[km]}). \quad (\text{B.2})$$

On remarque que x_0 n'apparaît pas explicitement dans ces expressions. On l'introduit en définissant la matrice de densité d'énergie due aux connexions par des jonctions Josephson

$$[\epsilon_J(mx_0)]_{jk} = [\mathbf{E}_J]_{j[km]} / x_0, \quad (\text{B.3})$$

la matrice de densité d'énergie due aux connexions par des inducteurs

$$[\epsilon_L(mx_0)]_{jk} = \frac{1}{x_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2L_{j[km]}}, \quad (\text{B.4})$$

la matrice de densité d'énergie renormalisant les énergies du système

$$[\epsilon_{LS}(mx_0)]_{ij} = \delta_{ij} \sum_k [\epsilon_L(mx_0)]_{jk} \quad (\text{B.5})$$

et la matrice de densité d'énergie renormalisant l'énergie du champ électromagnétique dans les lignes à transmission

$$[\epsilon_{LF}(mx_0)]_{kl} = \delta_{kl} \sum_j [\epsilon_L(mx_0)]_{jk}. \quad (\text{B.6})$$

À l'aide de ces concepts, les énergies potentielles d'interaction s'écrivent

$$U_{IL} = \sum_m x_0 [\Psi \epsilon_{LS}(mx_0) \Psi - 2\Psi \epsilon_L(mx_0) \Phi(mx_0) + \Phi(mx_0) \epsilon_{LF}(mx_0) \Phi(mx_0)] \quad (\text{B.7})$$

$$U_{IJ} = - \sum_m x_0 \cos[\Psi] \epsilon_J(mx_0) \cos[\Phi(mx_0)] - \sum_m x_0 \sin[\Psi] \epsilon_J(mx_0) \sin[\Phi(mx_0)]. \quad (\text{B.8})$$

Nous avons aussi introduit le vecteur $\Phi(x)$ dont l'élément k représente le flux généralisé à la position x dans la ligne à transmission d'indice k . Les fonctions trigonométriques des vecteurs de flux généralisé doivent être évaluées élément par élément. Par exemple, l'élément k du vecteur $\cos[\Psi]$ est $\cos[\Psi_k]$. Nous prenons finalement la limite $x_0 \rightarrow 0$ pour obtenir

$$U_{IL} = \int dx [\Psi \epsilon_{LS}(x) \Psi - 2\Psi \epsilon_L(x) \Phi(x) + \Phi(x) \epsilon_{LF}(x) \Phi(x)] \quad (\text{B.9})$$

$$U_{IJ} = - \int dx \cos[\Psi] \epsilon_J(x) \cos[\Phi(x)] - \int dx \sin[\Psi] \epsilon_J(x) \sin[\Phi(x)]. \quad (\text{B.10})$$

Annexe C

Obtention de la relation d'entrée-sortie

Le but de cette annexe est d'obtenir la relation d'entrée sortie. En considérant les restrictions décrites dans la section 2.3, on peut récrire le Hamiltonien du circuit électrique quantique connecté à des lignes à transmission de l'équation (2.51) comme $H = H_S + H_F + H_I$ avec le Hamiltonien du circuit quantique

$$H_S = 4\frac{e^2}{2}\mathbf{n}\mathbf{C}_S^{-1}\mathbf{n} + \Psi\hbar\Omega_{LS}\Psi + U_S, \quad (\text{C.1})$$

le hamiltonien du champ électromagnétique dans les lignes à transmission,

$$H_F = H_{Fb} + \Phi(0)\hbar\Omega_{LF}\Phi(0) \quad (\text{C.2})$$

et le Hamiltonien d'interaction

$$H_I = -2\Psi\hbar\Omega_L\Phi(0). \quad (\text{C.3})$$

Nous ne considérons pas le cas où les lignes à transmission sont connectées par une jonction Josephson ce qui a pour conséquence que $U_{IJ} = 0$. Le Hamiltonien H_{Fb} du champ électromagnétique dans les lignes à transmission déconnectées est donné à l'équation (2.55). Pour alléger la notation, nous avons défini la matrice de renormalisation des énergies du circuit électrique quantique

$$[\hbar\Omega_{LS}]_{ij} = \delta_{ij} \sum_k [\hbar\Omega_L]_{jk} \quad (\text{C.4})$$

et la matrice de renormalisation de l'énergie du champ électromagnétique dans les lignes à transmission

$$[\hbar\Omega_{LF}]_{kl} = \delta_{kl} \sum_j [\hbar\Omega_L]_{jk}. \quad (\text{C.5})$$

On passe maintenant dans la représentation de Heisenberg où, on le rappelle, les états sont constants et les opérateurs évoluent dans le temps selon l'équation [24]

$$\partial_t A = \frac{i}{\hbar} [H, A]. \quad (\text{C.6})$$

À l'aide de cette expression, on trouve l'ensemble d'équations

$$\partial_t \mathbf{n} = -2\Omega_{LS}\Psi + 2\Omega_L\Phi(0) + \frac{i}{\hbar} [U_S, \mathbf{n}] \quad (\text{C.7})$$

$$\partial_t \Psi = \frac{(2e)^2}{\hbar} \mathbf{C}_S^{-1} \mathbf{n} \quad (\text{C.8})$$

$$\partial_t \mathbf{q}(x) = \frac{\Phi_0}{2l\pi} \theta(-x) [\partial_x^2 \Phi(x)] + \delta(x) \left(-\frac{\Phi_0}{2l\pi} [\partial_x \Phi(x)] - 4e\Omega_{LF}\Phi(0) + 4e\Psi\Omega_L \right) \quad (\text{C.9})$$

$$\partial_t \Phi(x) = \frac{2\pi\mathbf{q}(x)}{\Phi_0 c}. \quad (\text{C.10})$$

Il s'agit des équations du mouvement qui décrivent le montage.

On s'intéresse d'abord à la physique du champ électromagnétique dans les lignes à transmission lorsque $x < 0$. Dans ce cas, les équations (C.9) et (C.10) se simplifient à

$$\partial_t \mathbf{q}(x) = \frac{\Phi_0}{2l\pi} \partial_x^2 \Phi(x) \quad (\text{C.11})$$

$$\partial_t \Phi(x) = \frac{2\pi\mathbf{q}(x)}{\Phi_0 c}. \quad (\text{C.12})$$

En dérivant l'équation (C.12) par rapport au temps et en utilisant l'équation (C.11) pour substituer $\partial_t \mathbf{q}(x)$ on obtient

$$\partial_t^2 \Phi(x) = v^2 \partial_x^2 \Phi(x). \quad (\text{C.13})$$

Il s'agit d'une équation d'onde pour le vecteur de flux normalisé. On voit que le flux se déplace à la vitesse v dans les lignes à transmission. On sait que la solution de l'équation d'onde a la forme [27]

$$\Phi(x, t) = \Phi_{\text{in}}(t - x/v) + \Phi_{\text{out}}(t + x/v). \quad (\text{C.14})$$

On nomme le premier terme $\Phi_{\text{in}}(t)$ parce qu'il se déplace vers la droite. Ainsi, il vient de

$x \rightarrow -\infty$ et il se dirige vers le circuit électrique quantique à $x = 0$. Il s'agit donc du signal d'entrée, ou *input*, du circuit. De même, $\Phi_{\text{out}}(t)$ se déplace vers la gauche ce qui en fait le signal de sortie, ou *output*, du montage.

Pour faire le lien entre le signal d'entrée et de sortie, nous nous intéressons maintenant au comportement du champ électromagnétique dans les lignes à transmission autour du point $x = 0$. Pour étudier ce champ électromagnétique, on intègre les équations (C.9) et (C.10) entre $x = -\epsilon$ et $x = 0$ avec ϵ qui tend vers 0. Ceci nous permet d'isoler la contribution des termes proportionnels à des distributions de Dirac. On obtient

$$[\partial_x \Phi(x)]_{x=0^-} = \frac{8el\pi}{\Phi_0} (-\Omega_{LF} \Phi(0) + \Psi \Omega_L) \quad (\text{C.15})$$

La dérivée spatiale est évaluée au point $x = 0^-$ puisqu'elle n'existe pas au point $x = 0$, c'est-à-dire au point où les lignes à transmission se terminent. Puisque cette dérivée est évaluée à un endroit où $x < 0$, nous pouvons utiliser les résultats obtenus ci-dessus, qui décrivent le champ électromagnétique dans les lignes à transmission lorsque $x \neq 0$, pour l'évaluer. Nous dérivons l'équation (C.14) par rapport à la position pour obtenir

$$\partial_x \Phi(x, t) = \frac{1}{v} [-\partial_t \Phi_{\text{in}}(t - x/v) + \partial_t \Phi_{\text{out}}(t + x/v)]. \quad (\text{C.16})$$

Nous ne voulons pas utiliser cette expression pour remplacer la dérivée spatiale dans l'équation (C.15) directement puisqu'elle dépend du vecteur de flux normalisé à la sortie, $\Phi_{\text{out}}(t)$. Pour éliminer cette dépendance, on dérive l'équation (C.14) par rapport au temps. On obtient

$$\partial_t \Phi(x, t) = \partial_t \Phi_{\text{in}}(t - x/v) + \partial_t \Phi_{\text{out}}(t + x/v). \quad (\text{C.17})$$

On utilise les équations (C.16) et (C.17) pour éliminer la dérivée spatiale dans l'équation (C.15). On obtient

$$\partial_t \Phi(0) = \frac{8vel\pi}{\Phi_0} (-\Omega_{LF} \Phi(0) + \Psi \Omega_L) + 2\partial_t \Phi_{\text{in}}(t). \quad (\text{C.18})$$

En résumé, on peut relier ce qui est mesuré à la sortie d'un montage aux signaux électromagnétiques imposés en entrée avec l'équation

$$\Phi_{\text{out}}(t) = \Phi(0) - \Phi_{\text{in}}(t) \quad (\text{C.19})$$

où

$$\partial_t \Phi(0) = 16\pi \frac{Z}{R_K} \left(-\Omega_{LF} \Phi(0) + \Omega_L^T \Psi \right) + 2\partial_t \Phi_{\text{in}}(t) \quad (\text{C.20})$$

$$\partial_t \Psi = \frac{(2e)^2}{\hbar} \mathbf{C}_S^{-1} \mathbf{n} \quad (\text{C.21})$$

$$\partial_t \mathbf{n} = -2\Omega_{LS} \Psi + 2\Omega_L \Phi(0) + \frac{i}{\hbar} [U_S, \mathbf{n}]. \quad (\text{C.22})$$

Nous avons utilisé $R_K = h/e^2$, le quantum de résistance, aussi connu sous le nom de constante de von Klitzing.

Annexe D

Forme abstraite du Hamiltonien pour l'obtention de l'équation maîtresse

Le but de cette annexe est de récrire le Hamiltonien d'interaction de l'équation (2.59) et le Hamiltonien du champ électromagnétique des lignes à transmission de l'équation (2.76) d'une manière propice à l'obtention de l'équation maîtresse pour la section 2.4.

D'abord, on récrit le Hamiltonien d'interaction comme

$$H_I = \hbar \sum_{r=\pm 1} \sum_j \mathbf{n}_j \int_0^\infty dk \sqrt{v} \sqrt{\frac{\kappa_{C,j}(kv)}{2\pi}} \left[\varphi_{C,j}(rkv) b(rk) + \varphi_{C,j}^*(rkv) b^\dagger(rk) \right] \\ + \hbar \sum_{r=\pm 1} \sum_j \mathbf{\Psi}_j \int_0^\infty dk \sqrt{v} \sqrt{\frac{\kappa_{L,j}(kv)}{2\pi}} \left[\varphi_{L,j}(rkv) b(rk) + \varphi_{L,j}^*(rkv) b^\dagger(rk) \right]. \quad (\text{D.1})$$

avec le taux de relaxation dû au couplage capacitif

$$\kappa_{C,j}(\omega) = \frac{Z\omega(2e)^2}{2\hbar} \left[\left[\mathbf{C}_S^{-1} \right]_{jj} C_{g,j} \right]^2 \quad (\text{D.2})$$

et le taux de relaxation dû au couplage inductif

$$\kappa_{L,j}(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2Z}{\hbar\omega}} \left[\frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{1}{2L_j} \right] \right)^2. \quad (\text{D.3})$$

Nous avons aussi introduit la fonction de phase capacitive

$$\varphi_{C,j}(\omega) = i \exp [i\omega x_j/v] \quad (\text{D.4})$$

et la fonction de phase inductive

$$\varphi_{L,j}(\omega) = -\exp [i\omega x_j/v]. \quad (\text{D.5})$$

L'avantage d'introduire toute cette notation est que maintenant, le terme capacitif a exactement la même forme que le terme inductif. Ainsi, on peut récrire le Hamiltonien comme

$$H_I = \hbar \sum_{r=\pm 1} \sum_j \theta_j \int_0^\infty dk \sqrt{v} \sqrt{\frac{\kappa_j(kv)}{2\pi}} \left[\varphi_j(rkv) b(rk) + \varphi_j^*(rkv) b^\dagger(rk) \right]. \quad (\text{D.6})$$

Si le sous-circuit j est couplé d'une manière capacitive, $\theta_j = \mathbf{n}_j$, $\kappa_j(\omega) = \kappa_{C,j}(\omega)$ et $\varphi_j(r\omega) = \varphi_{C,j}(r\omega)$. De même, si le sous-circuit j est couplé d'une manière inductive, $\theta_j = \mathbf{\Psi}_j$, $\kappa_j(\omega) = \kappa_{L,j}(\omega)$ et $\varphi_j(r\omega) = \varphi_{L,j}(r\omega)$.

On introduit maintenant $b_r(\omega) = b(rk)/\sqrt{v}$. Ainsi,

$$[b_r(\omega_1), b_s^\dagger(\omega_2)] = \delta_{rs} \delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (\text{D.7})$$

On peut récrire le Hamiltonien d'interaction en fonction de cet opérateur

$$H_I = \hbar \sum_{r=\pm 1} \sum_j \theta_j \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\kappa_j(\omega)}{2\pi}} \left[\varphi_j(r\omega) b_r(\omega) + \varphi_j^*(r\omega) b_r^\dagger(\omega) \right] \quad (\text{D.8})$$

et le Hamiltonien du champ électromagnétique dans la ligne à transmission

$$H_F = \sum_{r=\pm 1} \int_0^\infty d\omega \hbar \omega b_r^\dagger(\omega) b_r(\omega). \quad (\text{D.9})$$

Annexe E

Obtention de l'équation maîtresse

Le but de cette annexe est d'obtenir l'équation maîtresse à partir de l'équation (2.101). En utilisant les fonctions de corrélation du champ électromagnétique spécifiées à l'équation (2.102), on trouve, après plusieurs manipulations, que

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho(t) = & \sum_{r=\pm 1} \sum_{mnj} \sum_{pqk} \int_0^\infty d\tau d\omega_1 d\omega_2 \sqrt{\frac{\kappa_j(\omega_1)\kappa_k(\omega_2)}{(2\pi)^2}} \left\{ \right. \\
& + \varphi_j^*(r\omega_1) \varphi_k(r\omega_1) e^{-i(\omega_{mnj}-\omega_{pqk})t} \delta(\omega_1 - \omega_2) (N(\omega_1) + 1) \\
& \times \left[\sigma_-^{mnj} \rho(t) \sigma_+^{pqk} \left(e^{i(\omega_1-\omega_{pqk})\tau} + e^{-i(\omega_1-\omega_{mnj})\tau} \right) \right. \\
& \quad \left. - \rho(t) \sigma_+^{pqk} \sigma_-^{mnj} e^{i(\omega_1-\omega_{pqk})\tau} - \sigma_+^{pqk} \sigma_-^{mnj} \rho(t) e^{-i(\omega_1-\omega_{mnj})\tau} \right] \\
& + \varphi_j(r\omega_1) \varphi_k^*(r\omega_1) e^{i(\omega_{mnj}-\omega_{pqk})t} \delta(\omega_1 - \omega_2) N(\omega_1) \\
& \times \left[\sigma_+^{mnj} \rho(t) \sigma_-^{pqk} \left(e^{-i(\omega_1-\omega_{pqk})\tau} + e^{i(\omega_1-\omega_{mnj})\tau} \right) \right. \\
& \quad \left. - \rho(t) \sigma_-^{pqk} \sigma_+^{mnj} e^{-i(\omega_1-\omega_{pqk})\tau} - \sigma_-^{pqk} \sigma_+^{mnj} \rho(t) e^{i(\omega_1-\omega_{mnj})\tau} \right] \\
& + \varphi_j(r\omega_1) \varphi_k(r\omega_2) e^{-i(\omega_1-\omega_{mnj})t-i(\omega_2-\omega_{pqk})(t-\tau)} \delta(2\omega_s - \omega_1 - \omega_2) M(\omega_1) \\
& \times \left[\sigma_+^{mnj} \rho(t) \sigma_+^{pqk} + \sigma_+^{pqk} \rho(t) \sigma_+^{mnj} - \rho(t) \sigma_+^{pqk} \sigma_+^{mnj} - \sigma_+^{mnj} \sigma_+^{pqk} \rho(t) \right] \\
& + \varphi_k^*(r\omega_2) \varphi_j^*(r\omega_1) e^{i(\omega_2-\omega_{pqk})(t-\tau)+i(\omega_1-\omega_{mnj})t} \delta(2\omega_s - \omega_1 - \omega_2) M^*(\omega_1) \\
& \times \left[\sigma_-^{pqk} \rho(t) \sigma_-^{mnj} + \sigma_-^{mnj} \rho(t) \sigma_-^{pqk} - \sigma_-^{mnj} \sigma_-^{pqk} \rho(t) - \rho(t) \sigma_-^{pqk} \sigma_-^{mnj} \right] \left. \right\}. \tag{E.1}
\end{aligned}$$

Ce résultat intermédiaire encombrant illustre bien la physique des circuits électriques quantiques en interaction avec le champ électromagnétique de la ligne à transmission. Chaque terme fait intervenir un opérateur σ_{\pm}^{mnj} et un opérateur σ_{\pm}^{pqk} . Ainsi, ces termes représentent les sous-circuits électriques quantiques d'indice j et k qui interagissent entre eux à travers le champ électromagnétique de la ligne à transmission. Les intégrales sur τ ont la forme

$$\int_0^{\infty} d\tau d\omega_1 \exp [i(\omega_1 - \omega_{pqk})\tau] = \pi \int_0^{\infty} d\omega_1 \delta(\omega_1 - \omega_{pqk}) + i\text{P} \int_0^{\infty} \frac{d\omega_1}{\omega_1 - \omega_{pqk}}. \quad (\text{E.2})$$

Ces intégrales sur τ représentent l'émission d'un photon d'énergie $\hbar\omega_1 = \hbar\omega_{pqk}$ par le sous-circuit électrique quantique d'indice k . Ce photon peut être virtuel, ce qui est représenté par la partie imaginaire de l'équation (E.2), ou non. Les photons virtuels mènent à une évolution unitaire. Les distributions de Dirac de l'équation (E.1) qui dépendent à la fois de ω_1 et ω_2 impliquent que l'interaction entre deux sous-circuits se produit à travers des photons d'une énergie bien définie. Elles proviennent du choix des fonctions de corrélation du champ électromagnétique fait à l'équation (2.102). En résumé, l'interaction entre le sous-circuit d'indice k et le sous-circuit d'indice j consiste en l'émission d'un photon, virtuel ou non, par le sous-système k . Ce photon d'énergie $\hbar\omega_{pqk}$ est ensuite absorbé par le sous-circuit d'indice j . Évidemment, si la différence d'énergie entre les deux transitions est grande, c'est-à-dire si

$$|\omega_{mnj} - \omega_{pqk}| \gg \sqrt{\kappa_j(\omega_{mnj})\kappa_k(\omega_{mnj})}, \quad (\text{E.3})$$

l'interaction n'a pas lieu en moyenne puisqu'elle ne conserve pas l'énergie. Cette physique est encodée dans le facteur $e^{i(\omega_{mnj} - \omega_{pqk})t}$. Lorsque la différence d'énergie entre les transitions est grande, ce facteur oscille rapidement et on peut le remplacer par sa valeur moyenne, nulle. C'est l'approximation séculaire [25].

Dans l'explication du dernier paragraphe, il y a une asymétrie entre le sous-circuit qui émet le photon et le sous-circuit qui l'absorbe. En effet, le sous-circuit émet un photon à une de ses fréquences de résonance, ω_{pqk} , tandis que dans le cas général où $\omega_{pqk} \neq \omega_{mnj}$, le sous-circuit d'indice j absorbe un photon qui est hors résonance. Cette asymétrie n'est pas un problème fondamental puisque comme nous l'avons expliqué dans le dernier paragraphe, on peut utiliser l'approximation séculaire pour négliger les termes qui font intervenir des décalages de fréquences significatifs entre ω_{pqk} et ω_{mnj} . Cependant, dans les simulations numériques, cette asymétrie peut mener à une matrice densité qui n'est pas exactement positive. D'autres méthodes pour trouver l'équation maîtresse produisent des résultats plus symétriques [25,30]. Selon l'interprétation physique associée à ces méthodes, le sous-circuit d'indice k émet un photon résonant à ω_{pqk} et le sous-circuit d'indice j absorbe un photon, résonant aussi, à ω_{mnj} . La symétrie est rétablie, mais cette interprétation nécessite

la conversion de fréquence $\omega_{pqk} \rightarrow \omega_{mnj}$ du photon quelque part entre les deux sous-circuits électriques quantiques. Cette conversion entre en contradiction avec les fonctions de corrélations choisies pour le champ électromagnétique dans la ligne à transmission à l'équation (2.102). Ces fonctions de corrélations spécifient qu'il n'y a pas de corrélation entre les photons de différentes fréquences.

Évidemment, toutes les méthodes pour trouver l'équation maîtresse doivent être équivalentes dans la limite décrite par l'équation (E.3) où le décalage entre les fréquences de transition est petite. Dans le but de trouver une interprétation qui n'entre pas en contradiction avec les relations de l'équation (2.102) et où l'émetteur et l'absorbeur jouent un rôle symétrique, nous introduisons une méthode différente d'obtenir l'équation maîtresse. Cette méthode semble avoir été utilisée par Ficek et Tanas dans la référence [21], mais ils ne l'ont pas décrite. Selon cette méthode, les *deux* sous-circuits quantiques interagissent à travers un photon qui est hors résonance. La fréquence de ce photon est

$$\omega_{mnj,pqk} = \frac{\omega_{mnj} + \omega_{pqk}}{2}, \quad (\text{E.4})$$

soit la fréquence moyenne entre les deux transitions. Dans le but de soutenir cette interpré-

tation, nous récrivons l'équation maîtresse comme

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho(t) = & \sum_{r=\pm 1} \sum_{mnj} \sum_{pqk} \int_0^\infty d\tau d\omega_1 d\omega_2 \sqrt{\frac{\kappa_j(\omega_1) \kappa_k(\omega_2)}{(2\pi)^2}} \left\{ \right. \\
& + \varphi_j^*(r\omega_1) \varphi_k(r\omega_1) e^{-i(\omega_{mnj} - \omega_{pqk})t} \delta(\omega_1 - \omega_2) (N(\omega_1) + 1) \\
& \quad \times e^{i(\omega_{mnj} - \omega_{pqk})\tau/2} \left[\sigma_-^{mnj} \rho(t) \sigma_+^{pqk} \left(e^{i(\omega_1 - \omega_0)\tau} + e^{-i(\omega_1 - \omega_0)\tau} \right) \right. \\
& \quad \quad \left. - \rho(t) \sigma_+^{pqk} \sigma_-^{mnj} e^{i(\omega_1 - \omega_0)\tau} - \sigma_+^{pqk} \sigma_-^{mnj} \rho(t) e^{-i(\omega_1 - \omega_0)\tau} \right] \\
& + \varphi_j(r\omega_1) \varphi_k^*(r\omega_1) e^{i(\omega_{mnj} - \omega_{pqk})t} \delta(\omega_1 - \omega_2) N(\omega_1) \\
& \quad \times e^{i(\omega_{pqk} - \omega_{mnj})\tau/2} \left[\sigma_+^{mnj} \rho(t) \sigma_-^{pqk} \left(e^{-i(\omega_1 - \omega_0)\tau} + e^{i(\omega_1 - \omega_0)\tau} \right) \right. \\
& \quad \quad \left. - \rho(t) \sigma_-^{pqk} \sigma_+^{mnj} e^{-i(\omega_1 - \omega_0)\tau} - \sigma_-^{pqk} \sigma_+^{mnj} \rho(t) e^{i(\omega_1 - \omega_0)\tau} \right] \\
& + \varphi_j(r\omega_1) \varphi_k(r\omega_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_0)t + i(\omega_2 - \omega_0)\tau} \delta(2\omega_s - \omega_1 - \omega_2) M(\omega_1) \\
& \quad \times e^{-i(\omega_{pqk} - \omega_{mnj})\tau/2} \left[\sigma_+^{mnj} \rho(t) \sigma_+^{pqk} + \sigma_+^{pqk} \rho(t) \sigma_+^{mnj} - \rho(t) \sigma_+^{pqk} \sigma_+^{mnj} - \sigma_+^{mnj} \sigma_+^{pqk} \rho(t) \right] \\
& + \varphi_k^*(r\omega_2) \varphi_j^*(r\omega_1) e^{i(\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_0)t - i(\omega_2 - \omega_0)\tau} \delta(2\omega_s - \omega_1 - \omega_2) M^*(\omega_1) \\
& \quad \times e^{i(\omega_{pqk} - \omega_{mnj})\tau/2} \left[\sigma_-^{pqk} \rho(t) \sigma_-^{mnj} + \sigma_-^{mnj} \rho(t) \sigma_-^{pqk} - \sigma_-^{mnj} \sigma_-^{pqk} \rho(t) - \rho(t) \sigma_-^{pqk} \sigma_-^{mnj} \right] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{E.5}$$

Pour alléger la notation, nous avons introduit $\omega_0 = \omega_{mnj, pqk}$. Nous effectuons maintenant une approximation à l'ordre zéro en $(\omega_{pqk} - \omega_{mnj})\tau/2$. Notez que si ce décalage en fréquence n'est pas petit, on peut négliger le terme complet à l'aide de l'approximation séculaire. Ainsi,

cette approximation n'est jamais mauvaise. Sous cette approximation, on trouve

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho = & -i [H_S, \rho] + \sum_{mnj} \sum_{pqk} \left\{ \right. \\
& -i \left[\Delta_j^N(\omega_{mnj,pqk}) \left(\sigma_-^{mnj} \sigma_+^{pqj} - \sigma_+^{pqj} \sigma_-^{mnj} \right) + J_{jk}(\omega_{mnj,pqk}) \sigma_+^{pqk} \sigma_-^{mnj}, \rho \right] \\
& + \gamma_{jk}(\omega_{mnj,pqk}) (N(\omega_{mnj,pqk}) + 1) \left(\sigma_-^{mnj} \rho \sigma_+^{pqk} - \frac{1}{2} \left\{ \rho, \sigma_+^{pqk} \sigma_-^{mnj} \right\} \right) \\
& + \gamma_{jk}(\omega_{mnj,pqk}) N(\omega_{mnj,pqk}) \left(\sigma_+^{mnj} \rho \sigma_-^{pqk} - \frac{1}{2} \left\{ \rho, \sigma_-^{pqk} \sigma_+^{mnj} \right\} \right) \\
& + \left(\frac{1}{2} \left[\gamma_{jk}^M(\omega_{mnj,pqk}) M(2\omega_s - \omega_{mnj,pqk}) + i \Delta_{jk}^M(\omega_{mnj,pqk}) \right] \right. \\
& \quad \left. \times \left(\sigma_+^{mnj} \rho \sigma_+^{pqk} + \sigma_+^{pqk} \rho \sigma_+^{mnj} - \rho \sigma_+^{pqk} \sigma_+^{mnj} - \sigma_+^{mnj} \sigma_+^{pqk} \rho \right) e^{-i2\omega_s t} + \text{c.h.} \right) \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Nous avons introduit les taux

$$\Delta_j^N(\omega_0) = \frac{\mathbb{P}}{\pi} \int_0^\infty d\omega_1 \frac{\kappa_j(\omega_1)}{\omega_1 - \omega_0} N(\omega_1) \tag{E.7}$$

$$J_{jk}(\omega_0) = -\frac{\mathbb{P}}{\pi} \int_0^\infty d\omega_1 \sqrt{\kappa_j(\omega_1) \kappa_k(\omega_1)} \frac{\cos(\omega_1(x_k - x_j)/v)}{\omega_1 - \omega_0} \tag{E.8}$$

$$\gamma_{jk}(\omega_0) = 2\sqrt{\kappa_j(\omega_0) \kappa_k(\omega_0)} \cos(\omega_0(x_k - x_j)/v) \tag{E.9}$$

$$\gamma_{jk}^M(\omega_0) = \sum_{r=\pm 1} \sqrt{\kappa_j(2\omega_s - \omega_0) \kappa_k(\omega_0)} \varphi_j(r[2\omega_s - \omega_0]) \varphi_k(r\omega_0) \tag{E.10}$$

$$\Delta_{jk}^M(\omega_0) = \sum_{r=\pm 1} \frac{\mathbb{P}}{\pi} \int_0^\infty d\omega_1 \sqrt{\kappa_j(2\omega_s - \omega_1) \kappa_k(\omega_1)} \frac{\varphi_j(r[2\omega_s - \omega_1]) \varphi_k(r\omega_1)}{\omega_1 - \omega_0} M(2\omega_s - \omega_1). \tag{E.11}$$

Nous interprétons l'équation maîtresse et ces taux dans la section 2.4.4.

Annexe F

Obtention de la relation d'entrée-sortie liée à l'équation maîtresse

Le but de cette annexe est d'obtenir une relation d'entrée-sortie dans le même langage que celui utilisé dans l'équation maîtresse. Pour y arriver, nous suivons une méthode similaire à ce qu'on retrouve dans la littérature [23].

Le Hamiltonien total est $H = H_F + H_I + H_S$, avec

$$H_F = \sum_{r=\pm 1} \int_0^\infty d\omega \hbar \omega b_r^\dagger(\omega) b_r(\omega) \quad (\text{F.1})$$

$$H_I = \hbar \sum_{r=\pm 1} \sum_{mnj} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\kappa_j(\omega)}{2\pi}} \left[\varphi_j^*(r\omega) b_r^\dagger(\omega) \sigma_-^{mnj} + \text{c.h.} \right]. \quad (\text{F.2})$$

Dans la représentation de Heisenberg,

$$\partial_t b_r(\omega, t) = -i\omega b_r(\omega, t) - i \sum_{mnj} \sqrt{\frac{\kappa_j(\omega)}{2\pi}} \varphi_j^*(r\omega) \sigma_-^{mnj}. \quad (\text{F.3})$$

On peut résoudre cette équation formellement. On obtient, pour des conditions initiales $t_i < t$,

$$b_r(\omega, t | t_i) = e^{-i\omega t} b_r(\omega, t_i) - i \sum_{mnj} \sqrt{\frac{\kappa_j(\omega)}{2\pi}} \varphi_j^*(r\omega) \int_{t_i}^t d\tau e^{-i\omega(t-\tau)} \sigma_-^{mnj}(\tau) \quad (\text{F.4})$$

et pour des conditions initiales $t_f > t$,

$$b_r(\omega, t | t_f) = e^{-i\omega t} b_r(\omega, t_f) + i \sum_{mnj} \sqrt{\frac{\kappa_j(\omega)}{2\pi}} \varphi_j^*(r\omega) \int_t^{t_f} d\tau e^{-i\omega(t-\tau)} \sigma_-^{mnj}(\tau). \quad (\text{F.5})$$

Puisque le moment que nous choisissons pour imposer les conditions initiales ne doit pas influencer la physique, $b_r(\omega, t | t_i) = b_r(\omega, t | t_f)$. Ainsi,

$$b_{\text{out}}^r(t) = b_{\text{in}}^r(t) - i \sum_{mnj} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sqrt{\kappa_j(\omega)} \varphi_j^*(r\omega) \int_{t_i}^{t_f} d\tau e^{-i\omega(t-\tau)} \sigma_-^{mnj}(\tau). \quad (\text{F.6})$$

Nous avons défini

$$\begin{aligned} b_{\text{out}}^r(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} b_r(\omega, t_f) \\ b_{\text{in}}^r(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} b_r(\omega, t_i). \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Dans le but d'effectuer l'approximation de Markov, on passe dans un référentiel tournant à l'aide de la transformation

$$U = \exp [iH_S t / \hbar]. \quad (\text{F.8})$$

On trouve

$$b_{\text{out}}^r(t) = b_{\text{in}}^r(t) - i \sum_{mnj} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sqrt{\kappa_j(\omega)} \varphi_j^*(r\omega) \int_{t_i}^{t_f} d\tau e^{-i\omega(t-\tau)} e^{i\omega_{mnj}\tau} \sigma_-^{mnj}(\tau). \quad (\text{F.9})$$

On effectue ensuite un changement de variable $\tau = t - \tau_1$ dans l'intégrale pour obtenir

$$b_{\text{out}}^r(t) = b_{\text{in}}^r(t) - i \sum_{mnj} \frac{e^{i\omega_{mnj}t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sqrt{\kappa_j(\omega)} \varphi_j^*(r\omega) \int_{t-t_f}^{t-t_i} d\tau_1 e^{-i(\omega_{mnj}-\omega)\tau_1} \sigma_-^{mnj}(t - \tau_1). \quad (\text{F.10})$$

On peut maintenant effectuer l'approximation de Markov. On suppose aussi que t_i est loin dans le passé et t_f , loin dans le futur. On obtient

$$b_{\text{out}}^r(t) = b_{\text{in}}^r(t) - i \sum_{mnj} \frac{e^{i\omega_{mnj}t}}{2\pi} \sigma_-^{mnj}(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sqrt{\kappa_j(\omega)} \varphi_j^*(r\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 e^{-i(\omega_{mnj}-\omega)\tau_1} \quad (\text{F.11})$$

Après quelques manipulations supplémentaires, on obtient, de retour dans le référentiel du laboratoire,

$$b_{\text{out}}^r(t) = b_{\text{in}}^r(t) - i \sum_{mnj} \sqrt{\kappa_j(\omega_{mnj})} \varphi_j^*(r\omega_{mnj}) \sigma_-^{mnj}(t). \quad (\text{F.12})$$

C'est la relation d'entrée-sortie recherchée.

Annexe G

Simplification de la fréquence de l'interaction d'échange

Le but de cette annexe est de simplifier la fréquence de l'interaction d'échange de l'équation (2.107) dans le cas où le couplage entre les sous-circuits quantiques et la ligne à transmission est de nature capacitive. Dans ce cas, on peut écrire

$$J_{jk}(\omega_0) = -\frac{\kappa_{jk} P}{2 \pi} \int_0^\infty d\omega_1 \frac{\omega_1 \cos(\omega_1 d_{jk}/v)}{\omega_0 (\omega_1 - \omega_0)}. \quad (\text{G.1})$$

où $\kappa_{jk} = 2\sqrt{\kappa_j(\omega_0)\kappa_k(\omega_0)}$ et $d_{jk} = x_j - x_k$. On effectue le changement de variable $\omega_2 = \omega_1 - \omega_0$ pour obtenir

$$J_{jk}(\omega_0) = -\frac{\kappa_{jk} P}{2 \pi} \int_{-\omega_0}^\infty d\omega_2 \frac{\omega_2 + \omega_0 \cos[(\omega_2 + \omega_0)d_{jk}/v]}{\omega_0 \omega_2}. \quad (\text{G.2})$$

On simplifie ensuite l'intégrale en utilisant une identité trigonométrique,

$$\begin{aligned} J_{jk}(\omega_0) = & -\cos(\omega_0 d_{jk}/v) \frac{\kappa_{jk} P}{2 \pi} \int_{-\omega_0}^\infty d\omega_2 \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_2} \right) \cos(\omega_2 d_{jk}/v) \\ & + \sin(\omega_0 d_{jk}/v) \frac{\kappa_{jk} P}{2 \pi} \int_{-\omega_0}^\infty d\omega_2 \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_2} \right) \sin(\omega_2 d_{jk}/v). \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

Pour retirer les unités des intégrales, on effectue le changement de variable $\kappa_{jk}x = \omega_2$. On obtient

$$J_{jk}(\omega_0) = -\cos(\omega_0 d_{jk}/v) \frac{\kappa_{jk} P}{2 \pi} \int_{-\omega_0/\kappa_{jk}}^{\infty} dx \left(\frac{\kappa_{jk}}{\omega_0} + \frac{1}{x} \right) \cos(\kappa_{jk} x d_{jk}/v) \\ + \sin(\omega_0 d_{jk}/v) \frac{\kappa_{jk} P}{2 \pi} \int_{-\omega_0/\kappa_{jk}}^{\infty} dx \left(\frac{\kappa_{jk}}{\omega_0} + \frac{1}{x} \right) \sin(\kappa_{jk} x d_{jk}/v). \quad (\text{G.4})$$

À l'ordre 0 en κ_{jk}/ω_0 ,

$$J_{jk}(\omega_0) = -\cos(\omega_0 d_{jk}/v) \frac{\kappa_{jk} P}{2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} \cos(\kappa_{jk} x d_{jk}/v) \\ + \sin(\omega_0 d_{jk}/v) \frac{\kappa_{jk} P}{2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} \sin(\kappa_{jk} x d_{jk}/v). \quad (\text{G.5})$$

La première intégrale est nulle puisqu'elle est impaire. Ainsi,

$$J_{jk}(\omega_0) = \sin(\omega_0 d_{jk}/v) \frac{\kappa_{jk} P}{2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} \sin(\kappa_{jk} x d_{jk}/v). \quad (\text{G.6})$$

Finalement, on exécute la dernière intégrale pour obtenir

$$J_{jk}(\omega_0) = \frac{\kappa_{jk}}{2} \sin(\omega_0 |d_{jk}|/v). \quad (\text{G.7})$$

Annexe H

Changement de base de l'équation maîtresse

Le but de cette annexe est de récrire l'équation maîtresse de l'équation (3.2) dans une base appropriée au régime de paramètre considéré. Dans la section H.1, on considère le cas où la distance entre les transmons est telle que la grandeur de la phase φ acquise par le champ électromagnétique entre ceux-ci est $\varphi = m\pi$, avec $m \in \mathbb{N}^*$. C'est le régime d'interaction dissipative. Dans la section H.2, on considère le cas où la distance entre les transmons est telle que $\varphi = (2m + 1)\pi/2$, avec $m \in \mathbb{N}$. C'est le régime d'interaction cohérente.

H.1 Régime d'interaction dissipative

Dans ce régime, la grandeur de la phase φ acquise par le champ électromagnétique lorsqu'il passe d'un transmon à l'autre est $\varphi = m\pi$, avec $m \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, l'équation maîtresse de l'équation (3.2) se simplifie à

$$\partial_t \rho = -i \sum_j \left[\frac{\Delta}{2} \sigma_z^j + (\epsilon_j \sigma_+^j + \text{c.h.}), \rho \right] + \mathcal{L}_\gamma \rho, \quad (\text{H.1})$$

avec le terme dissipatif

$$\mathcal{L}_\gamma \rho = \sum_{jk} \gamma_{jk} \left(\sigma_-^j \rho \sigma_+^k - \frac{1}{2} \{ \rho, \sigma_+^k \sigma_-^j \} \right). \quad (\text{H.2})$$

Nous sommes passés dans un référentiel tournant à la fréquence du signal de pilotage ω_d pour rendre le Hamiltonien indépendant du temps. Ainsi, $\Delta = \omega_0 - \omega_d$. Pour simplifier le terme dissipatif, on mappe la matrice densité ρ de taille 4×4 sur un vecteur colonne $\vec{\rho}$ de taille 16×1 . Pour y arriver, on place les colonnes de ρ une à la suite de l'autre. Dans ce cas, on peut récrire le terme de dissipatif comme [55]

$$\mathcal{L}_\gamma \vec{\rho} = \sum_{kj} \gamma_{kj} \left[\sigma_{b-}^k \left(\sigma_{f+}^j \right)^T - \frac{1}{2} \sigma_{b+}^j \sigma_{b-}^k - \frac{1}{2} \left(\sigma_{f+}^j \right)^T \left(\sigma_{f-}^k \right)^T \right] \vec{\rho}, \quad (\text{H.3})$$

avec le mappage

$$A\rho \rightarrow 1 \otimes A\vec{\rho} = A_b\vec{\rho} \quad (\text{H.4})$$

$$\rho A \rightarrow A^T \otimes 1\vec{\rho} = A_f^T\vec{\rho}. \quad (\text{H.5})$$

Le T fait référence à l'opération de transposition matricielle. On peut maintenant récrire le terme de dissipation comme

$$\mathcal{L}_\gamma \vec{\rho} = \left[\sigma_{b-} \mathbf{Y} \sigma_{f+}^T - \frac{1}{2} \sigma_{b+} \mathbf{Y} \sigma_{b-}^T - \frac{1}{2} \sigma_{f+} \mathbf{Y} \sigma_{f-}^T \right] \vec{\rho}, \quad (\text{H.6})$$

avec la matrice des taux de relaxation \mathbf{Y}

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & (-1)^m \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \\ (-1)^m \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} & \gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{H.7})$$

Nous avons aussi défini les vecteurs d'opérateurs

$$\sigma_{b\pm} = \begin{pmatrix} \sigma_{b\pm}^0 & \sigma_{b\pm}^1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{f\pm} = \begin{pmatrix} [\sigma_{f\pm}^0]^T & [\sigma_{f\pm}^1]^T \end{pmatrix}. \quad (\text{H.8})$$

Nous diagonalisons \mathbf{Y} et nous retournons dans la représentation où ρ est une matrice pour obtenir

$$\mathcal{L}_\gamma \rho = \sum_{\mu=B,D} \Gamma_\mu \mathcal{D} [\sigma_-^\mu] \rho, \quad (\text{H.9})$$

avec les taux de dissipation

$$\Gamma_\mu = (\gamma_0 + \gamma_1) \delta_{B\mu} \quad (\text{H.10})$$

et les opérateurs

$$\sigma_-^\mu = \frac{(\Gamma_\mu - \gamma_1) \sigma_-^0 + (-1)^m \sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \sigma_-^1}{\sqrt{(\Gamma_\mu - \gamma_1)^2 + \gamma_0 \gamma_1}}. \quad (\text{H.11})$$

On définit aussi $\sigma_+^\mu = [\sigma_-^\mu]^\dagger$. Les termes $\Gamma_\mu \mathcal{D} [\sigma_-^\mu] \rho$ représentent la relaxation de l'état $\sigma_+^\mu |gg\rangle$ à un taux Γ_μ ,

$$\Gamma_\mu \mathcal{D} [\sigma_-^\mu] \rho = \Gamma_\mu \left(\sigma_-^\mu \rho \sigma_+^\mu - \frac{1}{2} \{ \sigma_+^\mu \sigma_-^\mu, \rho \} \right). \quad (\text{H.12})$$

Pour obtenir une meilleure intuition physique, il est utile de récrire le reste de l'équation maîtresse à l'aide des opérateurs σ_\pm^μ . On obtient

$$\partial_t \rho = -i \left[2\Delta |ee\rangle \langle ee| + \Delta \sum_{\mu=B,D} |\mu\rangle \langle \mu| + \sum_{\mu=B,D} (\epsilon_\mu \sigma_+^\mu + \text{c.h.}), \rho \right] + \Gamma_B \mathcal{D} [\sigma_-^B] \rho \quad (\text{H.13})$$

avec

$$\epsilon_D = i \exp [i\omega_d x_0 / v] \sqrt{\frac{P}{\hbar\omega_0}} \sqrt{\frac{\gamma_0 \gamma_1}{2(\gamma_0 + \gamma_1)}} (\exp [-i\Delta d / v] - 1) \quad (\text{H.14})$$

$$\epsilon_B = i \exp [i\omega_d x_0 / v] \sqrt{\frac{P}{\hbar\omega_0}} \sqrt{\frac{1}{2(\gamma_0 + \gamma_1)}} (\gamma_0 + \gamma_1 \exp [-i\Delta d / v]) \quad (\text{H.15})$$

et les états $|\mu\rangle = \sigma_+^\mu |gg\rangle$. Par hypothèse,

$$\varphi = \omega_0 d / v = m\pi. \quad (\text{H.16})$$

Ainsi, $d/v \sim 1/\omega_0$. En utilisant cette relation, on trouve qu'à l'ordre zéro en Δ/ω_0 ,

$$\exp [-i\Delta d / v] \approx 1. \quad (\text{H.17})$$

Sous cette approximation, $\epsilon_D \approx 0$ et

$$\epsilon_B \approx i \exp [i\omega_d x_0 / v] \sqrt{\frac{P}{\hbar\omega_0}} \sqrt{\frac{\Gamma_B}{2}}. \quad (\text{H.18})$$

H.2 Régime d'interaction cohérente

Dans ce régime, la grandeur de la phase φ acquise par le champ électromagnétique lorsqu'il passe d'un transmon à l'autre est $\varphi = (2m + 1)\pi/2$, avec $m \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, l'équation maîtresse de l'équation (3.2) se simplifie à

$$\partial_t \rho = -i [H, \rho] + \sum_j \gamma_j \mathcal{D} [\sigma_-^j] \rho \quad (\text{H.19})$$

avec le Hamiltonien

$$H = \frac{\Delta}{2} \sum_j \sigma_z^j + J \left(\sigma_+^1 \sigma_-^2 + \sigma_+^2 \sigma_-^1 \right) + \sum_j \left(\epsilon_j \sigma_+^j + \text{c.h.} \right). \quad (\text{H.20})$$

Nous sommes passés dans un référentiel tournant à la fréquence du signal de pilotage. Ainsi, $\Delta = \omega_0 - \omega_d$. On peut diagonaliser la partie du hamiltonien indépendante du signal de pilotage pour obtenir

$$H = 2\hbar\Delta |ee\rangle \langle ee| + \sum_{\mu=\pm 1} \hbar\omega_{\mu J} |\mu J\rangle \langle \mu J| + \sum_j \left(\hbar\epsilon_j \sigma_+^j + \text{c.h.} \right). \quad (\text{H.21})$$

Nous avons introduit les énergies propres

$$\hbar\omega_{\mu J} = \hbar(\Delta + \mu J) \quad (\text{H.22})$$

et les états propres $|\mu J\rangle = \sigma_+^{\mu J} |gg\rangle$ avec

$$\sigma_+^{\mu J} = \left[\sigma_-^{\mu J} \right]^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sigma_+^1 + \mu \sigma_+^0 \right). \quad (\text{H.23})$$

Pour obtenir une meilleure intuition physique, il est utile de récrire le reste de l'équation maîtresse à l'aide des opérateurs $\sigma_\pm^{\mu J}$. On obtient

$$\partial_t \rho = -i [H, \rho] + \sum_j \gamma_j \mathcal{D} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sigma_-^{+J} - (-1)^j \sigma_-^{-J} \right) \right] \rho \quad (\text{H.24})$$

avec le Hamiltonien

$$H = 2\hbar\Delta |ee\rangle \langle ee| + \sum_{\mu=\pm 1} \hbar\omega_{\mu J} |\mu J\rangle \langle \mu J| + \sum_{\mu=\pm 1} \left(\hbar\epsilon_{\mu J} \sigma_+^{\mu J} + \text{c.h.} \right) \quad (\text{H.25})$$

et

$$\epsilon_{\mu J} \approx i \exp [i\omega_d x_0 / v] \sqrt{\frac{P}{\hbar\omega_0}} \left(\mu \sqrt{\frac{\gamma_0}{4}} + i \text{sign}[J] \sqrt{\frac{\gamma_1}{4}} \right). \quad (\text{H.26})$$

Bibliographie

- [1] B. D. Josephson. *Physics Letters* **1**(7), 251–253 (1962). [3](#), [4](#)
- [2] A. O. Caldeira et A. J. Leggett. *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211–214 (1981). [4](#)
- [3] John M. Martinis, Michel H. Devoret, et John Clarke. *Phys. Rev. B* **35**, 4682–4698 (1987). [4](#)
- [4] V Bouchiat, D Vion, P Joyez, D Esteve, et M H Devoret. *Physica Scripta* **1998**(T76), 165 (1998). [4](#)
- [5] Alexandre Blais, Ren-Shou Huang, Andreas Wallraff, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004). [4](#), [5](#)
- [6] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, et J. S. Tsai. *Nature* **398**(6730), 786–788 (1999). [4](#)
- [7] Peter W. Shor. Dans *Proceedings of the 35nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Shafi Goldwasser, ed.)*, (1994). [5](#)
- [8] S. Haroche et J.M. Raimond. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons*. Oxford Graduate Texts. OUP Oxford, (2006). [5](#)
- [9] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R. S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Nature* **431**(7005), 162–167 (2004). [5](#)
- [10] C. Lang, C. Eichler, L. Steffen, J. M. Fink, M. J. Woolley, A. Blais, et A. Wallraff. *Nat Phys* **9**(6), 345–348 (2013). [5](#)
- [11] R. Barends, J. Kelly, A. Megrant, A. Veitia, D. Sank, E. Jeffrey, T. C. White, J. Mutus, A. G. Fowler, B. Campbell, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, A. Dunsworth, C. Neill, P. O’Malley, P. Roushan, A. Vainsencher, J. Wenner, A. N. Korotkov, A. N. Cleland, et John M. Martinis. *Nature* **508**(7497), 500–503 (2014). [5](#)
- [12] O. Astafiev, A. M. Zagoskin, Jr. Abdumalikov, A. A., Yu. A. Pashkin, T. Yamamoto, K. Inomata, Y. Nakamura, et J. S. Tsai. *Science* **327**(5967), 840–843 (2010). [5](#), [39](#), [53](#), [61](#)
- [13] Kevin Lalumière, Barry C. Sanders, A. F. van Loo, A. Fedorov, A. Wallraff, et A. Blais. *Phys. Rev. A* **88**, 043806 (2013). [6](#), [40](#)
- [14] Arjan F. van Loo, Arkady Fedorov, Kevin Lalumière, Barry C. Sanders, Alexandre Blais, et Andreas Wallraff. *Science* **342**(6165), 1494–1496 (2013). [6](#), [40](#), [48](#), [56](#), [58](#), [61](#), [63](#), [64](#)
- [15] N. Roch, E. Schwartz, M. F. Motzoi, C. Macklin, R. Vijay, W. Eddins, A. N. Korotkov, A. B. Whaley, K. M. Sarovar, et I. Siddiqi. *Phys. Rev. Lett.* **112**, 170501 (2014). [6](#), [69](#)
- [16] Kevin Lalumière et Alexandre Blais. *Physics* **7**, 45 (2014). [6](#)

- [17] Joseph Kerckhoff, Kevin Lalumière, Benjamin J. Chapman, Alexandre Blais, et K. W. Lehnert. arXiv :1502.06041, (2015). [6](#), [67](#), [72](#), [83](#), [90](#), [97](#), [99](#)
- [18] Michel H. Devoret. Dans *Quantum Fluctuations, Les Houches, Session LXIII*, (1995). [7](#), [8](#), [9](#), [14](#)
- [19] Michel Devoret, Benjamin Huard, Robert J Schoelkopf, et Leticia F. Cugliandolo. *Quantum Machines: Measurement and Control of Engineered Quantum Systems: Lecture Notes of the Les Houches Summer School: Volume 96, July 2011*. Oxford, (2014). [7](#), [8](#), [14](#)
- [20] Bernard Yurke et John S. Denker. *Phys. Rev. A* **29**(3), 1419–1437 (1984). [8](#), [23](#)
- [21] Z. Ficek et R. Tanas. *Physics Reports* **372**(5), 369 – 443 (2002). [8](#), [34](#), [36](#), [117](#)
- [22] Rodney Loudon. *The quantum theory of Light*. Oxford Science publications, 3rd edition, (2000). [8](#), [13](#), [30](#), [31](#)
- [23] D. F. Walls et G. J. Milburn. *Quantum Optics*. Springer, (1994). [11](#), [22](#), [23](#), [25](#), [26](#), [32](#), [34](#), [59](#), [60](#), [61](#), [63](#), [120](#)
- [24] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, et Franck Laloë. *Mécanique quantique I*. Hermann, (1998). [12](#), [26](#), [110](#)
- [25] C. W. Gardiner et P. Zoller. *Quantum Noise*. Gardiner, 3rd edition, (2004). [22](#), [23](#), [33](#), [34](#), [51](#), [76](#), [116](#)
- [26] Anton Frisk Kockum, Per Delsing, et Göran Johansson. *Phys. Rev. A* **90**, 013837 (2014). [22](#)
- [27] B. Yurke. *Quantum Squeezing*. Springer, (2004). [23](#), [25](#), [110](#)
- [28] Johannes M. Fink. *Quantum Nonlinearities in Strong Coupling Circuit QED*. Thèse de Doctorat, ETH Zurich, (2010). [28](#)
- [29] Jens Koch, Terri M. Yu, Jay Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, Alexandre Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Phys. Rev. A* **76**(4), 042319 (2007). [32](#), [40](#), [95](#)
- [30] J. Gough et M.R. James. *Comm. Math. Phys.* **287**(3), 1109 (2009). [37](#), [116](#)
- [31] J. Gough et M.R. James. *Automatic Control, IEEE Transactions on* **54**(11), 2530–2544 (2009). [37](#)
- [32] Nikolas Tezak, Armand Niederberger, Dmitri S. Pavlichin, Gopal Sarma, et Hideo Mabuchi. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **370**(1979), 5270–5290 (2012). [37](#)
- [33] R. H. Dicke. *Phys. Rev.* **93**, 99–110 (1954). [44](#)
- [34] David M. Pozar. *Microwave Engineering*. Wiley, 3rd edition, (2005). [50](#), [70](#)
- [35] Marcus P. da Silva, Deniz Bozyigit, Andreas Wallraff, et Alexandre Blais. *Phys. Rev. A* **82**, 043804 (2010). [50](#), [58](#)
- [36] B. R. Mollow. *Phys. Rev.* **188**, 1969–1975 (1969). [61](#)
- [37] Yao-Lung L. Fang et Harold U. Baranger. arXiv:1503.00209 (2015). [65](#), [103](#)
- [38] Baptiste Royer, Kevin Lalumière, Arne Grimsmo, et Alexandre Blais. Dans *APS March Meeting Y39*, (2015). [65](#), [103](#)

- [39] K. M. Sliwa, M. Hatridge, A. Narla, S. Shankar, L. Frunzio, R. J. Schoelkopf, et M. H. Devoret. *arXiv:1503.00209* (2015). [67](#), [71](#)
- [40] Leonardo Ranzani et José Aumentado. *New Journal of Physics* **17**(2), 023024 (2015). [67](#), [71](#)
- [41] A. Metelmann et A. A. Clerk. *arXiv:1502.07274* (2015). [67](#)
- [42] Nicholas A. Estep, Dimitrios L. Sounas, Jason Soric, et Andrea Alu. *Nat Phys advance online publication*, – (2014). [67](#), [71](#), [79](#)
- [43] Hannes Pichler, Tomás Ramos, Andrew J. Daley, et Peter Zoller. *arXiv:1411.2963* (2014). [69](#), [103](#)
- [44] K. W. Murch, S. J. Weber, K. M. Beck, E. Ginossar, et I. Siddiqi. *Nature* **499**(7456), 62–65 (2013). [69](#)
- [45] Kejie Fang, Zongfu Yu, et Shanhui Fan. *Nat Photon* **6**(11), 782–787 (2012). [70](#)
- [46] Nicholas A. Masluk, Ioan M. Pop, Archana Kamal, Zlatko K. Mineev, et Michel H. Devoret. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 137002 (2012). [71](#)
- [47] George B. Arfken et Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, 6th edition, (2005). [74](#), [97](#)
- [48] A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, Florian Marquardt, et R. J. Schoelkopf. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1155–1208 (2010). [93](#)
- [49] M. Tinkham. *Introduction to superconductivity*. McGraw-Hill, (1996). [95](#)
- [50] Christopher Eichler et Andreas Wallraff. *EPJ Quantum Technology* **1**(2), 1–19 (2014). [96](#)
- [51] A. D. Córcoles, Easwar Magesan, Srikanth J. Srinivasan, Andrew W. Cross, M. Steffen, Jay M. Gambetta, et Jerry M. Chow. *arXiv:1410.6419* (2014). [103](#)
- [52] J. Kelly, R. Barends, A. G. Fowler, A. Megrant, E. Jeffrey, T. C. White, D. Sank, J. Y. Mutus, B. Campbell, Yu Chen, Z. Chen, B. Chiaro, A. Dunsworth, I. C. Hoi, C. Neill, P. J. J. O’Malley, C. Quintana, P. Roushan, A. Vainsencher, J. Wenner, A. N. Cleland, et John M. Martinis. *Nature* **519**(7541), 66–69 (2015). [103](#)
- [53] Sergio Boixo, Troels F. Ronnow, Sergei V. Isakov, Zhihui Wang, David Wecker, Daniel A. Lidar, John M. Martinis, et Matthias Troyer. *Nat Phys* **10**(3), 218–224 (2014). [103](#)
- [54] Dennis S. Bernstein. *Matrix Mathematics: Theory, Facts and Formulas*. Princeton University Press, (2009). [104](#)
- [55] T Schulte-Herbrüggen, A Spörl, N Khaneja, et S J Glaser. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **44**(15), 154013 (2011). [126](#)