

**Suites maximales vertes des
carquois acycliques à trois sommets**

par

Olivier LAMBERT

mémoire présenté au Département de mathématiques et d'informatique
en vue de l'obtention du grade de maître en sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, juillet 2013



Library and Archives
Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-95116-3

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-95116-3

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

Le 3 juillet 2013

*le jury a accepté le mémoire de Monsieur Olivier Lambert
dans sa version finale.*

Membres du jury

Professeur Thomas Brüstle
Directeur de recherche
Département de mathématiques

Professeur David Smith
Évaluateur interne
Département de mathématiques

Professeure Virginie Charette
Président rapporteur
Département de mathématiques

Pour ma famille
qui m'a soutenu
tout au long
de ce travail.

SOMMAIRE

Les algèbres amassées sont très intéressantes, entre autre du point de vue de la théorie des représentations. Leurs côtés combinatoires sont immenses et on a probablement seulement effleuré le sujet. Dans ce mémoire, nous allons amorcer l'étude d'une propriété combinatoire pour un cas particulier d'algèbres amassées. Nous espérons que notre travail jettera les bases pour l'étude du cas général. Notre but sera de prouver le théorème suivant :

Théorème 0.1. *Tous les carquois acycliques et connexes à trois sommets ont un nombre fini de suites maximales vertes.*

Nous allons donc expliquer tout ce qu'il y a à savoir sur les carquois et par la suite, présenter la preuve de ce théorème. Comme supplément, nous donnerons en plus la liste complète de toutes les suites maximales vertes possibles pour ces carquois.

Mots-clés : carquois ; acyclique ; mutation ; suite maximale verte ; trois sommets.

REMERCIEMENTS

Pour commencer, je remercie évidemment mon directeur de maîtrise, M. Thomas Brüstle, qui par son enseignement, a été une source de motivation. Il m'a consacré beaucoup de son temps pour des explications, des corrections, etc. Je veux aussi remercier tout le personnel de l'Université de Sherbrooke d'être aussi accueillant. Tout le monde semble aimer son travail et l'environnement qui en résulte est très agréable. Je remercie aussi l'Université de Sherbrooke qui offre un programme bien adapté aux besoins des étudiants, incluant un soutien financier.

Olivier Lambert
Sherbrooke, avril 2013

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE	iii
REMERCIEMENTS	iv
TABLE DES MATIÈRES	v
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 — Carquois	4
1.1 Définitions	4
1.2 Mutations de carquois	7
1.3 Exemples	10
1.4 Représentation en matrice	11
CHAPITRE 2 — Suites maximales vertes	14
2.1 Carquois cadré	14
2.1.1 Sommets rouges et verts	16

2.1.2	Matrice associée aux carquois cadrés	19
2.1.3	Effet d'une mutation sur la matrice \mathcal{C}	21
2.2	Suites maximales vertes	22
2.3	Grphe d'échange orienté	26
CHAPITRE 3 — Résultats importants		29
3.1	Résultat pour certains carquois cycliques	29
3.2	Une partie du graphe d'échange orienté	31
3.3	Situation n'ayant que des suites infinies	33
CHAPITRE 4 — Carquois acycliques à trois sommets		41
4.1	Supposons $a \geq 2$ et $b \geq 2$	42
4.1.1	Pour $c \geq 1$	44
4.1.2	Pour $c = 0$	46
4.2	Supposons $a \geq 2, b = 1$	48
4.2.1	Pour $c \geq 2$	48
4.2.2	Pour $c = 1$	49
4.2.3	Pour $c = 0$	50
4.3	Supposons $a = 1, b \geq 2$ et $c \geq 2$	51
4.4	Supposons $a \geq 2, b = 0$ et $c \geq 2$	53
4.5	Supposons $a = 0, b \geq 2$ et $c \geq 2$	54

4.6	Supposons $a \geq 2, b = 0$ et $c = 1$ ou $a = 1, b = 0$ et $c \geq 2$	54
4.7	Supposons $a = 0, b \geq 2$ et $c = 1$ ou $a = 0, b = 1$ et $c \geq 2$	56
4.8	Supposons $a = 1, b \geq 2$ et $c = 0$	57
4.9	Supposons $a = 1, b \geq 2$ et $c = 1$	58
4.10	Supposons $a = 1, b = 1$ et $c \geq 2$	59
4.11	Supposons que l'on n'a pas de flèches multiples	60
	CONCLUSION	61
	Annexe A	62
	BIBLIOGRAPHIE	63

INTRODUCTION

Les algèbres amassées (de l'anglais « cluster algebras ») ont été introduites par Sergey Formin et Andrei Zelevinsky dans leur article « Cluster Algebras I : Foundations » [FZ01]. Très rapidement, cette nouvelle classe d'algèbres intéresse plusieurs mathématiciens provenant de différentes branches. On constate un engouement accru et le sujet s'est développé rapidement depuis le début des années 2000. Pour une introduction sur le sujet, on peut se référer aux articles [Fom10], [Zel04], [Zel05], [Zel07] et [FZ03] ou bien au portail [Fom].

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, une algèbre amassée \mathfrak{A} de rang n est un anneau commutatif (unifère), intègre, engendré dans un corps ambiant \mathfrak{F} par un ensemble de générateurs (peut-être infini) appelés variables amassées. Ces variables amassées sont obtenues par une application itérative d'un procédé appelé mutation de graine (de l'anglais « seed mutation »).

Ici, une graine dans \mathfrak{A} est une paire (X, B) telle que :

- $X \subset \mathfrak{F}$ où X a n éléments qui engendrent \mathfrak{F} .
- B est une matrice antisymétrisable. (C'est-à-dire qu'il existe une matrice diagonale D de sorte que DB est antisymétrique)

Les éléments de X sont des variables amassées et X est appelé amas.

À partir d'une graine, il existe une opération nous permettant d'en obtenir une autre à partir de chaque élément de X , il s'agit d'une mutation de graine. Parfois, en effectuant

une série de mutations de graine, nous allons retrouver une graine que nous avons déjà vue. Par contre, il est possible d'obtenir un nombre infini de graines et un nombre infini de variables amassées.

Il est possible, pour chaque graine, d'obtenir un unique carquois en prenant les variables amassées comme sommets et en utilisant la matrice antisymétrisable pour définir les flèches. Les carquois seront définis au chapitre 1 et, dans notre cas, nous utiliserons seulement les matrices antisymétriques, qui sont bien évidemment des matrices antisymétrisables.

À partir de la graine (X, B) formée d'un amas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et d'une matrice $B = (b_{i,j})$, on définit une mutation de graine μ_k formée d'une mutation $\mu_k(X)$ sur l'amas et d'une mutation $\mu_k(B)$ en k à la matrice B . Dans un premier temps, nous posons $\mu_k(x) = X' = \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k'}, x_{k+1}, \dots, x_n\}$, où

$$\mu_k(x_k) = x'_k = \frac{\prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}}}{x_k}.$$

La mutation de matrice $\mu_k(B)$, plus complexe, est définie au chapitre 1.4.1 ; on donnera présentement seulement un exemple. En faisant ces deux opérations, nous obtenons une nouvelle graine $(X', \mu_k(B))$.

Exemple 0.2. Prenons la graine (X, B) où $X = \{x_1, x_2\}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Regardons le résultat de $\mu_1(X, B)$: On a $\prod_{b_{i1}>0} x_i^{b_{i1}}$ qui est un produit nul, donc égal à 1 et $\prod_{b_{i1}<0} x_i^{-b_{i1}} = x_2$. Donc $x'_1 = \frac{1+x_2}{x_1}$ et dans ce cas ci la mutation de la matrice donne $-B$. On obtient donc la graine $(\{\frac{1+x_2}{x_1}, x_2\}, -B)$.

Nous pourrions continuer l'exercice pour obtenir les cinq variables amassées suivantes :

$$\left\{ x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}, \frac{1+x_1}{x_2} \right\}.$$

À partir de la graine (X, B) , ce sont les cinq seules variables amassées possibles. En continuant à faire le procédé, on va revenir sur des variables que nous avons déjà vues.

En mathématique, on va souvent transposer un problème dans une situation déjà connue ou bien plus facile à manipuler. Par exemple, on se sert des matrices pour résoudre un système d'équation. On utilise aussi un couple de coordonnées avec certaines restrictions plutôt que de travailler avec des nombres imaginaires. Pour trouver des résultats, on expérimente une façon de travailler dans un domaine plus facile à manipuler et lorsque l'on a ces résultats, on peut alors les transposer dans le domaine d'origine.

Un lien a été trouvé entre les algèbres amassées et certains carquois. Ce lien a été utilisé en théorie des représentations comme on peut le voir dans les articles suivants : [Ami11], [Rei10] et [Lec10]. Originellement expliqué dans [Kel11], à partir des suites maximales vertes, on peut construire des identités dilogarithmes quantiques (de l'anglais « quantum dilogarithm identities ») qui sont présentes dans les algèbres amassées. Une suite maximale verte est une suite de mutations effectuées selon certains critères. Nous allons étudier ces suites maximales vertes dans les carquois acycliques à trois sommets. Plus précisément, ce travail consiste à montrer que pour ce type de carquois, il y a un nombre fini de suites maximales vertes. L'article [BDP13] aborde ce même sujet et il sert de référence pour les définitions et lorsque mentionné pour certains théorèmes.

CHAPITRE 1

Carquois

1.1 Définitions

Un carquois est un regroupement de flèches qui ont toutes une source et un but. Les sources et les buts sont appelés les sommets du carquois. Pour fixer une notation, on écrit :

$$\alpha : s \longrightarrow b \quad \text{ou} \quad s \xrightarrow{\alpha} b$$

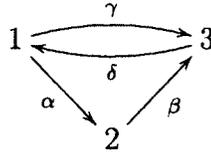
pour une flèche α de source s et de but b . Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition 1.1. *Carquois*

Un carquois est défini par un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ où :

- Q_0 est l'ensemble des sommets ;
- Q_1 est l'ensemble des flèches ;
- s est une fonction $s : Q_1 \rightarrow Q_0$ qui associe chaque flèche au sommet qui est sa source ;
- b est une fonction $b : Q_1 \rightarrow Q_0$ qui associe chaque flèche au sommet qui est son but.

Exemple 1.2. *Le carquois :*



est défini par le quadruplet $Q = (\{1, 2, 3\}, \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, s, b)$ où $s(\alpha) = 1, b(\alpha) = 2, s(\beta) = 2, b(\beta) = 3, s(\delta) = 3, b(\delta) = 1, s(\gamma) = 1$ et $b(\gamma) = 3$.

Définition 1.3. *Boucle.*

Une boucle est une flèche ayant le même sommet comme source et comme but.



Définition 1.4. *Chemin de longueur n*

Étant donné un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$, un chemin de longueur n est une suite $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de n flèches tel que $b(\alpha_{i-1}) = s(\alpha_i)$ (pour $i = 2, \dots, n$).

Exemple 1.5. Dans l'Exemple 1.2, $(\alpha, \beta, \delta, \alpha)$ est un chemin de longueur 4 et (α, β) est un chemin de longueur 2.

Définition 1.6. *n -cycle.*

Un n -cycle est un chemin de longueur n tel que $s(\alpha_1) = b(\alpha_n)$.

Exemple 1.7. Dans l'Exemple 1.2, (α, β, δ) est un 3-cycle.

Remarque 1.8. Une boucle est un 1-cycle.

Définition 1.9. *Cycle*

On appelle cycle tout n -cycle pour $n \geq 2$.

Exemple 1.10. Dans l'Exemple 1.2, (α, β, δ) et $(\gamma, \delta, \alpha, \beta, \delta)$ sont des cycles.

Définition 1.11. *Source*

Étant donné un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$, on dit d'un sommet $i \in Q_0$ qu'il est une source si Q n'a aucune flèche ayant i comme but.

Définition 1.12. *Puits*

Étant donné un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$, on dit d'un sommet $i \in Q_0$ qu'il est un puits si Q n'a aucune flèche ayant i comme source.

Définition 1.13. *Carquois acyclique*

Un carquois acyclique est un carquois qui ne possède aucun cycle, c'est-à-dire, aucune boucle et aucun n -cycle pour tout $n \geq 2$.

Définition 1.14. *Carquois connexe*

Étant donné un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$, on définit son graphe sous-jacent $G(Q)$ comme étant le graphe ayant Q_0 comme ensemble de sommets et \bar{Q}_1 comme ensemble d'arêtes, où \bar{Q}_1 est obtenu de Q_1 en ignorant simplement l'orientation des flèches de Q_1 . Alors Q est dit connexe si son graphe sous-jacent $G(Q)$ est connexe.

Exemple 1.15. Le carquois suivant n'est pas connexe.

$$1 \longrightarrow 2 \quad 3 \longleftarrow 4 \longrightarrow 5$$

On peut dire par contre que la partie du carquois $3 \longleftarrow 4 \longrightarrow 5$ est connexe car, sans considérer le sens des flèches, on peut trouver un chemin entre chaque paire de sommets.

Dans le présent travail, nous allons utiliser certains carquois et comme ils vont apparaître fréquemment, nous allons leur donner un nom.

Définition 1.16. *Bon carquois.*

Un « bon carquois » est un carquois connexe qui n'a pas de boucle ni de 2-cycle. Dans l'Exemple 1.2, il y a un 2-cycle ; il ne s'agit donc pas d'un bon carquois.

De plus, comme nous n'allons pas utiliser les noms des flèches et qu'il va parfois y en avoir plusieurs ayant les mêmes buts et sources, nous allons les représenter par une seule flèche et écrire sur celle-ci le nombre de flèches qu'elle représente. S'il y a quatre flèches ayant la même source s et le même but b , nous allons les représenter comme suit :

$$s \xrightarrow{4} b$$

1.2 Mutations de carquois

La mutation d'un carquois, introduite dans [Kel12], est faite seulement à partir de bons carquois. C'est un procédé qui se fait sur les sommets, mais qui amène des modifications sur les flèches seulement. En aucun cas Q_0 sera modifié.

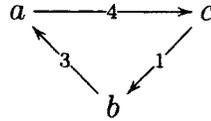
Définition 1.17. *Soit Q un bon carquois. La mutation au sommet i , notée $\mu_i(Q)$, est effectuée en trois étapes :*

1- Pour chaque chemin de longueur 2 allant de j vers k et passant par i , on ajoute une flèche de j vers k .

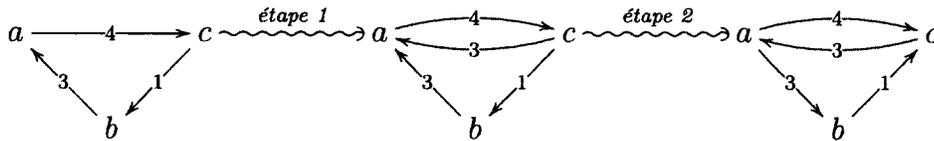
2- On inverse le sens de toutes les flèches ayant i comme source ou comme but, soit toutes les flèches touchant à i .

3- On élimine tous les 2-cycles, c'est-à-dire que s'il y a p flèches de a vers b et q flèches de b vers a , avec $m = \min\{p, q\}$, alors on enlève m flèches dans chaque sens.

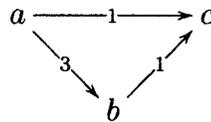
Exemple 1.18. Prenons le carquois Q suivant :



Voyons ce qui se produit lors d'une mutation au sommet b :



Finalement, après l'étape 3, on obtient le carquois $\mu_b(Q)$:



Remarque 1.19. Lors d'une mutation sur un puits ou sur une source, seule la deuxième étape est nécessaire.

Lemme 1.20. Le carquois résultant d'une mutation est un bon carquois.

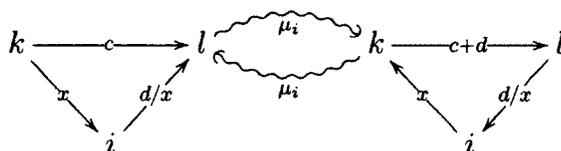
Démonstration. Soit $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ un bon carquois sur lequel on effectue une mutation en $i \in Q_0$. On suppose que $\mu_i(Q)$ n'est pas un bon carquois ; il y a donc soit une boucle, soit un 2-cycle. La dernière étape consistant à annuler tous les 2-cycles, on est sûr qu'il s'agit d'une boucle.

Il n'y avait pas de boucle dans Q , donc s'il y en a une dans $\mu_i(Q)$, elle a été ajoutée par la mutation. Pour que cela soit possible, il doit y avoir dans Q un chemin de longueur 2 passant par i qui débute et termine au même sommet. Il s'agit donc d'un 2-cycle ce qui implique que Q n'était pas un bon carquois, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. □

Le prochain lemme montre que la mutation de carquois est un processus involutif.

Lemme 1.21. [FZ01, Kel11] À partir d'un carquois Q , en faisant la mutation deux fois de suite au même sommet i , on retrouve Q , c'est-à-dire : $\mu_i(\mu_i(Q)) = Q$.

Démonstration. On veut montrer que pour toute paire de sommets k et l , il y a le même nombre de flèches avant et après les mutations au sommet i , et dans le même sens. Supposons que l'on a c flèches de k vers l et d chemins de longueur 2 passant par i de k vers l . Après la première mutation, on a $c + d$ flèches de k vers l . Dans $\mu_i(Q)$, il y a d chemins de longueur 2 passant par i de l vers k . En appliquant la deuxième mutation, on ajoute d flèches de l vers k . Dans la troisième étape de la mutation, on annule tous les 2-cycles donc aux $c + d$ flèches de k vers l , on enlève d flèches de l vers k pour obtenir c flèches de k vers l .

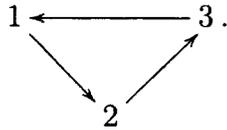


Nous pouvons faire le même raisonnement avec c ou d négatif ou nul, les calculs restent les mêmes. De plus, si on a $k = i$ ou $l = i$, on inverse le sens des flèches deux fois avec les deux mutations et on retourne au sens de départ sans toucher à la quantité.

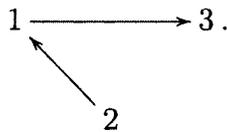
Il en résulte donc que, entre chaque paire de sommets d'un carquois Q , on a le même nombre de flèches et dans le même sens après avoir fait deux mutations consécutives au même sommet. Donc, on a bien que $\mu_i(\mu_i(Q)) = Q$. \square

1.3 Exemples

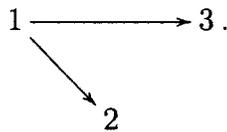
Exemple 1.22. *Considérons le carquois Q suivant :*



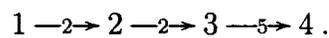
En effectuant une mutation sur le sommet 1, on obtient $\mu_1(Q)$:



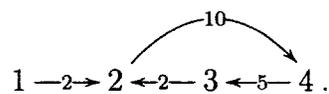
On peut facilement vérifier que si l'on refait une mutation au sommet 1, on retourne au carquois Q . Par contre, nous pouvons faire une mutation au sommet 2 pour avoir $\mu_2(\mu_1(Q))$:



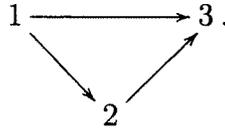
Exemple 1.23. *Considérons le carquois Q suivant :*



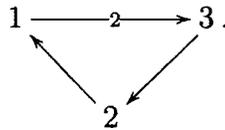
En effectuant la mutation au sommet 3, on obtient $\mu_3(Q)$:



Exemple 1.24. Prenons Q :



Nous avons $\mu_2(Q)$:

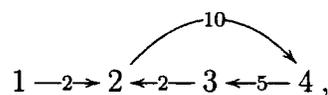


Dans ce cas, il y a deux flèches de 1 vers 3, car à celle qui était déjà là, on en ajoute une pour le chemin de longueur 2 de 1 vers 3 passant par 2.

1.4 Représentation en matrice

Nous considérons les algèbres amassées définies par des matrices antisymétriques. On s'intéresse au bon carquois, car il est possible de les mettre en relation avec ces matrices antisymétriques. On peut trouver un unique bon carquois à partir d'une matrice antisymétrique et vice-versa.

Nous allons représenter un bon carquois en une matrice en prenant en position (i, j) le nombre de flèches ayant i comme source et j comme but. Si les flèches vont du sommet j au sommet i , on met la valeur négative pour représenter le sens des flèches. On inscrit évidemment 0 dans le cas où il n'y a aucune flèche entre les deux sommets. On va obtenir une matrice antisymétrique, car en prenant un bon carquois, il n'y a pas de boucle ni de 2-cycles. On a donc des 0 sur la diagonale et on n'a pas d'ambiguïté pour les autres données. Par exemple, si nous prenons le carquois $\mu_3(Q)$ de l'Exemple 1.23 :



on lui associe la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & -10 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mutations de matrices

Il y a une technique pour faire une mutation sur une matrice. Il s'agit de la technique pour une mutation sur une graine, vue dans l'introduction. Cette technique est appliquée seulement sur des matrices antisymétriques et a été créée par Fomin et Zelevinsky.

Soit $B = (b_{i,j})$ une matrice antisymétrique à valeurs entières et $1 \leq k \leq n$, on définit $\mu_k(B) = (b'_{i,j})$ par :

$$b'_{i,j} = \begin{cases} -b_{i,j} & \text{si } i = k \text{ ou } j = k; \\ b_{i,j} + [b_{i,k}]_+ \cdot [b_{k,j}]_+ - [b_{i,k}]_- \cdot [b_{k,j}]_- & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $[x]_+ = \max(x, 0)$ et $[y]_- = \min(y, 0)$. Cette notion de mutation sur les matrices antisymétriques coïncide parfaitement avec les mutations de bons carquois. Comparons les mutations dans les deux cas. Si nous faisons une mutation en $k = i$ ou en $k = j$, on ne fait que changer le sens des flèches, donc dans la matrice qui représente le carquois, on change le signe de $b_{i,j}$. Sinon, on regarde le nombre de chemins de i vers j ou de j vers i passant par k . S'il y en a, $b_{i,k}$ et $b_{k,j}$ ont le même signe et on additionne ou on soustrait le nombre de chemins à $b_{i,j}$. Dans le cas où il n'y a pas de tel chemin, il va y avoir deux multiplications par 0 et le nombre $b_{i,j}$ demeurera inchangé. La troisième étape des mutations de carquois (annulation des 2-cycles) se fait automatiquement dans ce cas-ci.

CHAPITRE 2

Suites maximales vertes

Nous définissons dans ce chapitre la notion de suite maximale verte, qui est un élément central de ce mémoire. Nous allons nous référer à [Kel12] et [BDP13] pour les notions et définitions.

2.1 Carquois cadré

Définition 2.1. *Un carquois cadré, noté $\hat{Q} = (\hat{Q}_0, \hat{Q}_1, \hat{s}, \hat{b})$, est un bon carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ que l'on double avec une copie de tous les sommets. On a $\hat{Q}_0 = Q_0 \cup \{i' \mid i \in Q_0\}$. On ajoute par la suite une flèche de chaque sommet original vers sa copie, de sorte que $\hat{Q}_1 = Q_1 \cup \left(\bigcup_{i \in Q_0} \{\alpha_i : i \rightarrow i'\} \right)$. On note $\{i' \mid i \in Q_0\} = Q'_0$. Finalement, on a que les fonctions \hat{s} et \hat{b} sont les fonctions s et b auxquelles on ajoute l'information des nouvelles flèches.*

Exemple 2.2. *Si l'on prend le carquois Q suivant :*

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3,$$

on lui associe le carquois cadré \widehat{Q} suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3. \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1' & & 2' & & 3' \end{array}$$

Définition 2.3. *Carquois gelé*

Un carquois gelé est un carquois R obtenu de \widehat{Q} avec des mutations effectuées sur les sommets de Q , donc $R = \mu_{i_1} \circ \mu_{i_2} \circ \dots \circ \mu_{i_s}(\widehat{Q})$ pour des sommets $i_j \in Q_0$. Entre autre, un carquois cadré est un carquois gelé.

Définition 2.4. Dans un carquois gelé R , on appelle les sommets dans Q'_0 les sommets gelés et les sommets dans Q_0 les sommets originaux. On a $R_0 = Q_0 \cup Q'_0$.

Définition 2.5. Un carquois co-cadré, noté $\check{Q} = (\check{Q}_0, \check{Q}_1, \check{s}, \check{b})$, est un bon carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ que l'on double avec une copie de tous les sommets. On a $\check{Q}_0 = Q_0 \cup \{i' | i \in Q_0\}$. On ajoute par la suite une flèche de chaque copie vers son sommet correspondant, de sorte que $\check{Q}_1 = Q_1 \cup \left(\bigcup_{i \in Q_0} \{\alpha_i : i' \rightarrow i\} \right)$. Finalement, on a que les fonctions \check{s} et \check{b} sont les fonctions s et b auxquelles on ajoute l'information des nouvelles flèches.

À partir de Q de l'Exemple 2.2, on obtient le carquois co-cadré \check{Q} suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3. \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1' & & 2' & & 3' \end{array}$$

2.1.1 Sommets rouges et verts

À partir d'un carquois gelé, on attribue aux sommets dans Q_0 la couleur rouge ou verte choisie de la façon suivante.

Définition 2.6. *Soit R un carquois gelé obtenu à partir d'un bon carquois Q .*

Un sommet $i \in Q_0$ est vert s'il n'y a pas de flèche se terminant en i et commençant en un des sommets gelés, $j' \in Q'_0$.

Un sommet $i \in Q_0$ est rouge s'il n'y a pas de flèche commençant en i vers un des sommets gelés, $j' \in Q'_0$.

Le théorème suivant est une reformulation du Théorème 2.6 dans [BDP13] et apporte des précisions sur la coloration des sommets.

Théorème 2.7. *Soit R un carquois gelé obtenu à partir d'un bon carquois Q . Pour tout $i \in Q_0$, on a que i est soit rouge, soit vert. Il y a donc au moins une flèche de i vers un sommet gelé ou d'un sommet gelé vers i . De plus, s'il y a plusieurs flèches entre i et des sommets gelés, elles ont soit toutes i comme source ou toutes i comme but. (On ne peut pas avoir une flèche de i vers un sommet gelé ainsi qu'une flèche d'un sommet gelé vers i).*

Corollaire 2.8. *Dans un carquois gelé R , il n'y a jamais de flèches entre deux sommets gelés.*

Démonstration. Nous prouvons ce corollaire à l'aide d'une récurrence sur la longueur de la suite de mutations. Le cas de base est \hat{Q} et ne possède pas de flèches entre deux sommets gelés par construction. Supposons que pour tous les carquois gelé obtenus par une suite de mutation de longueur $k - 1$, il n'y a pas de flèche entre deux sommets gelés. On veut montrer que c'est tout aussi vrai pour les carquois gelés obtenus avec une suite de mutation de longueur k .

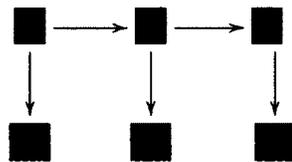
Supposons que $R = \mu_{i_k}(\dots(\mu_{i_2}(\mu_{i_1}(\widehat{Q}))))$ possède une flèche de i' vers j' , deux sommets gelés. Par hypothèse, cette flèche n'existait pas dans $\mu_{i_{k-1}}(\dots(\mu_{i_2}(\mu_{i_1}(\widehat{Q}))))$. Cette flèche provient donc de la dernière mutation effectuée au sommet i_k . Il y avait donc un chemin de longueur 2 de i' vers j' passant par i_k , ce qui est en contradiction avec le Théorème 2.7.

□

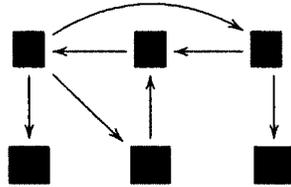
L'avantage d'un carquois cadré, c'est de nous donner une certaine restriction par rapport aux mutations que nous pouvons effectuer. En effet, nous allons dorénavant appliquer des mutations seulement sur les sommets qui sont verts. Donc, aucune mutation sur les sommets rouges ni sur les sommets gelés, que nous allons différencier en leur donnant une couleur bleue. Avec notre définition de carquois cadré et notre méthode de mutation, il est important de remarquer que lorsque nous complétons une mutation sur un sommet k , celui-ci devient automatiquement rouge, car nous inversons la direction de toutes les flèches incidentes à k , en particulier celles en lien avec les sommets gelés.

Notez aussi que dans \widehat{Q} , tous les sommets non gelés sont verts. C'est seulement après la première mutation qu'il apparaît des sommets rouges.

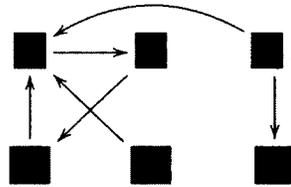
Exemple 2.9. Reprenons le carquois \widehat{Q} de l'Exemple 2.2 et ajoutons les couleurs appropriées :



Après avoir appliqué au carquois cadré \hat{Q} une mutation au sommet 2, nous avons $\mu_2(\hat{Q})$



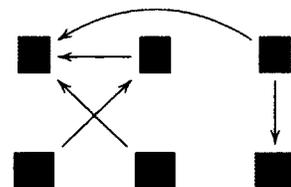
Si nous voulons lui appliquer une autre mutation, nous ne pouvons pas le faire au sommet 2, car il est devenu rouge. Effectuons maintenant la mutation au sommet 1. Nous obtenons donc $\mu_1(\mu_2(\hat{Q}))$



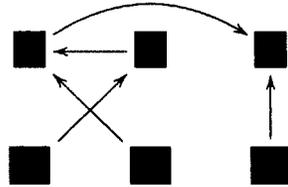
Il est donc possible pour un sommet rouge de redevenir vert après avoir effectué une mutation sur un autre sommet. Dans la situation présente, le sommet 2 est redevenu vert, il est donc maintenant possible de faire la mutation sur ce sommet.

Nous avons ensuite :

$\mu_2(\mu_1(\mu_2(\hat{Q}))) :$



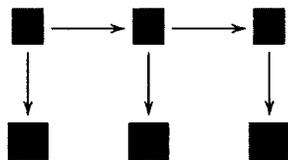
$\mu_3(\mu_2(\mu_1(\mu_2(\hat{Q})))) :$



Dans cette situation, il n'est plus possible d'effectuer de mutations puisqu'il n'y a plus de sommets verts.

2.1.2 Matrice associée aux carquois cadrés

Habituellement, pour un carquois à six sommets, nous aurions besoin d'une matrice 6×6 pour la représenter. Par exemple, regardons un carquois cadré \hat{Q} ainsi que sa matrice associée.



$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Par contre, lorsque nous sommes en présence d'un carquois gelé, nous pouvons trouver une représentation plus simple. En construisant la matrice associée, nous mettons tous les sommets gelés à la fin de la matrice, en gardant le même ordre que les sommets originaux. Si i précède j dans la matrice de Q , alors i' précède j' dans la matrice de \hat{Q} . Nous allons toujours avoir des 0 dans la partie en bas à droite (3×3), car il n'y a jamais de flèches entre deux sommets gelés en vertu du Corollaire 2.8. De plus, nous avons la même information dans la partie en haut à droite et en bas à gauche (3×3). Nous utiliserons la

matrice simplifiée :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Pour un carquois gelé, on a la matrice M . Pour Q , on notait la matrice associée B . Nous allons noter C la matrice des flèches des sommets originaux vers les sommets gelés et nous l'appellerons C -matrice. Nous avons donc une matrice augmentée $M = (B|C)$.

Remarque 2.10. *Pour tout carquois \hat{Q} , la matrice C est égale à l'identité.*

À partir d'une matrice $M = (B|C)$ d'un carquois gelé R obtenu de Q , nous avons une nouvelle méthode pour obtenir la couleur d'un sommet.

- (1) Un sommet $i \in Q_0$ est vert si la i^e ligne de la matrice C n'a pas d'élément négatif.
- (2) Un sommet $i \in Q_0$ est rouge si la i^e ligne de la matrice C n'a pas d'élément positif.

En se référant au Théorème 2.7, nous savons qu'une ligne de la matrice C ne peut pas être nulle et qu'elle ne peut pas avoir des éléments de signes opposés.

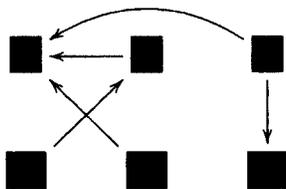
Définition 2.11. *Ligne positive*

Dans une C -matrice, on dit qu'une ligne est positive si elle ne contient aucun élément négatif.

Définition 2.12. *Ligne négative*

Dans une C -matrice, on dit qu'une ligne est négative si elle ne contient aucun élément positif.

Si on prend $\mu_2(\mu_1(\mu_2(\hat{Q})))$ de l'Exemple 2.9 :



$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

En prenant seulement la matrice C , nous avons :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons facilement vérifier que les sommets 1 et 2 sont rouges, car les 2 premières lignes sont des lignes négatives. Réciproquement, on vérifie que le sommet 3 est vert par la troisième ligne, qui est positive.

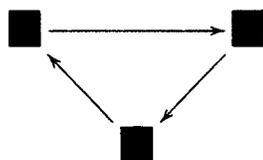
2.1.3 Effet d'une mutation sur la matrice C

Pour faciliter l'affichage, on va souvent représenter un carquois Q accompagné d'une C -matrice. On va donc regarder ce qui se produit sur une C -matrice lors d'une mutation. Prenons une C -matrice quelconque, $C = (c_i)$ où c_i représente la i^e ligne de la matrice C . Notez que pour chaque c_i , on dit que c_i est positive ou négative selon les Définitions 2.11 et 2.12. On note respectivement $c_i > 0$ ou $c_i < 0$.

On veut voir ce que nous obtenons après une mutation en k . Premièrement, pour effectuer un mutation en k , nous devons avoir que k est un sommet vert et donc que $c_k > 0$. Regardons ce que nous obtenons comme matrice $C' = \mu_k(C)$.

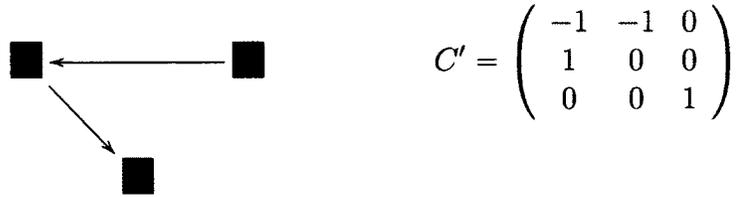
$$c'_i = \begin{cases} -c_i & \text{si } i = k; \\ c_i + bc_k & \text{s'il y a } b \text{ flèches de } i \text{ vers } k; \\ c_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 2.13. Si on prend $\mu_2(\hat{Q})$ de l'Exemple 2.9 :



$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par une mutation du sommet 1, on obtient le résultat suivant :



On a :

- $c'_1 = -c_1$ (car on fait une mutation en 1) ;
- $c'_2 = c_2 + c_1$ (car il y avait une flèche de 2 vers 1) ;
- $c'_3 = c_3$ (car il n'y avait pas de flèche de 3 vers 1).

2.2 Suites maximales vertes

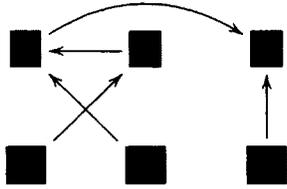
Définition 2.14. *Suite de mutation verte.*

Une suite de mutation verte pour Q est une suite $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_l)$, avec $i_i \in Q_0$, telle que pour tout $1 \leq k \leq l$, le sommet i_k est vert dans $\mu_{i_{k-1}}(\dots(\mu_{i_1}(\hat{Q})))$, où on convient de poser $\mu_{i_0}(\hat{Q}) = \hat{Q}$. On définit l comme étant la longueur de la suite \mathbf{i} .

Définition 2.15. *Suite maximale verte.*

À partir de \hat{Q} , une suite de mutation verte \mathbf{i} est dite maximale si après les l mutations dans l'ordre, tous les sommets de Q_0 sont rouges. Autrement dit, si dans $\mu_{i_l}(\dots(\mu_{i_1}(\hat{Q})))$ il n'y a aucun sommet vert, alors \mathbf{i} est une suite maximale verte.

Dans l'Exemple 2.9, nous avons la suite $\mathbf{i} = (2, 1, 2, 3)$ qui est une des suites maximales vertes possibles. On note le carquois résultant $\mu_{\mathbf{i}}(\hat{Q})$.



$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Définition 2.16. *Isomorphisme de carquois*

On dit que deux carquois Q et Q' sont isomorphes si on peut définir une fonction $f : Q_0 \rightarrow Q'_0$ telle que pour tout $i, j \in Q_0$, s'il y a b flèches de i vers j dans Q , alors il y a b flèches de $f(i)$ vers $f(j)$ dans Q' .

Exemple 2.17. *Les deux carquois suivants sont isomorphes :*



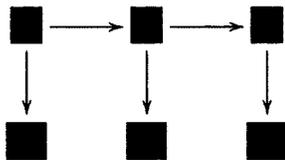
On prend la fonction f suivante : $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$.

Lemme 2.18. *Soient \hat{Q} un carquois cadré et i une suite maximale verte. On a $\mu_i(\hat{Q}) \simeq \check{Q}$.*

Démonstration. On doit se référer à la Proposition 2.10 de [BDP13]. □

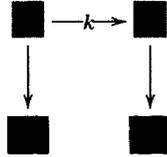
Remarque 2.19. *Soient \hat{Q} un carquois cadré et i une suite maximale verte. En vertu du Lemme 2.18, on a que $\mu_i(Q) \simeq Q$. Autrement dit, après avoir effectué une suite maximale verte, si on prend seulement les sommets originaux, on obtient un carquois isomorphe à Q .*

Pour rester dans l'Exemple 2.9, on peut voir que $\mu_3(\mu_2(\mu_1(\mu_2(\hat{Q})))) \simeq \check{Q}$. La remarque est plus évidente en réorganisant les sommets de $\mu_3(\mu_2(\mu_1(\mu_2(\hat{Q}))))$:

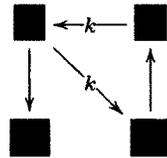


Parfois, il est possible, à partir d'un carquois gelé, qu'on ne puisse pas faire une suite de mutations et obtenir seulement des sommets rouges. Il existe des suites de mutations vertes infinies. Dans ces situations, il va toujours y avoir un ou plusieurs sommets verts.

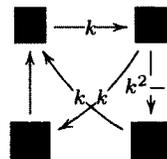
Exemple 2.20. Si l'on prend \hat{Q} :



avec $k \geq 2$. Nous pouvons faire une mutation en 1 ou en 2. En exécutant la mutation en 1 et ensuite en 2, nous avons deux sommets rouges. Il s'agit donc d'une suite maximale verte. Par contre, en effectuant la première mutation en 2, nous obtenons $\mu_2(\hat{Q})$:



Ensuite, on peut effectuer une mutation en 1. On a alors $\mu_1(\mu_2(\hat{Q}))$:

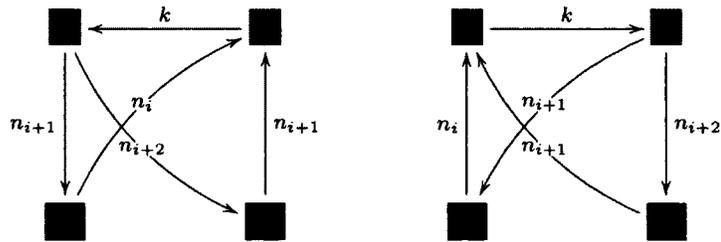


Nous pouvons par la suite effectuer une mutation en 2 qui remet le sommet 1 vert et ainsi de suite. Nous avons une suite de mutations vertes infinies qui alternent entre 1 et 2. Nous pouvons faire la démonstration de l'infinité de cette suite en utilisant une récurrence. Nous allons utiliser la règle suivante : $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, $n_s = kn_{s-1} - n_{s-2}$ pour tout $s \geq 2$.

Nous pouvons facilement vérifier que $n_{s+1} > n_s$ pour tout $s \geq 1$. Nous avons que $n_1 > n_0$, supposons que $n_{i+1} > n_i$, regardons pour $n_{i+2} = kn_{i+1} - n_i$.

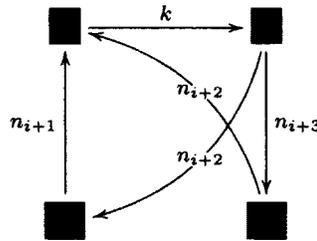
Nous avons $n_{i+2} > (k-1)n_{i+1}$. Or $(k-1) \geq 1$ donc : $n_{i+2} > n_{i+1}$.

Nous allons montrer qu'il y a seulement deux situations possibles, qui sont les suivantes :

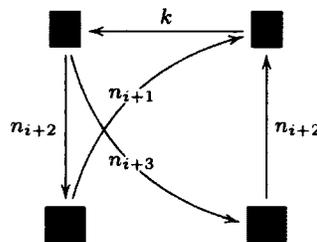


Pour $\mu_2(\hat{Q})$, nous avons le premier cas avec $i = 0$ et pour $\mu_1(\mu_2(\hat{Q}))$ le deuxième cas avec $i = 1$. On veut montrer que les mutations à partir du cas de gauche nous mènent à droite et vice-versa.

Voyons la mutation au sommet 1 à partir du cas de gauche :



En prenant $i' = i + 1$, on obtient directement le cas de droite. Voyons maintenant la mutation au sommet 2 à partir du cas de droite.



Encore une fois, en prenant $i' = i + 1$, on retourne au cas de gauche. Nous avons cette récurrence pour tout $i \in \mathbb{N}$; il est donc impossible d'obtenir deux sommets rouges.

Proposition 2.21. *Pour $Q = 1 \xrightarrow{-k} 2$, avec $k \geq 2$, il y a exactement une suite maximale verte et une suite infinie.*

2.3 Graphe d'échange orienté

L'idée d'un graphe d'échange orienté est de pouvoir visualiser rapidement toutes les suites maximales vertes. Dans un graphe orienté, nous représentons par un cercle vert le carquois cadré et un cercle rouge le carquois co-cadré. Nous allons par la suite représenter chaque mutation possible par une flèche et chaque carquois résultant d'une mutation par un point. Lorsqu'il y a une ou plusieurs suites infinies à partir d'un carquois gelé, on indique par des points de suspension qu'il est possible de continuer, sans nécessairement indiquer toutes les possibilités.

Nous ne donnerons pas de définition exacte pour un graphe d'échange orienté, car la description ci-haut est suffisante pour nos besoins. Pour une définition plus détaillée, on peut se référer à la Définition 2.11 de [BDP13].

Voici maintenant deux exemples qui expliquent bien la construction d'un graphe d'échange orienté.

Exemple 2.22. *On va construire le graphe d'échange orienté du carquois de l'Exemple 2.20.*



Nous avons à gauche du cercle vert la suite infinie que nous connaissons. Entre les deux cercles de couleur, il y a la suite maximale verte. Si l'on commence par le carquois cadré, c'est tout ce que nous avons. Par contre, il existe des carquois qui peuvent être obtenus en

appliquant à \check{Q} des mutations aux sommets rouges. En faisant cela, nous allons retrouver les suites maximales vertes que nous avons déjà, en commençant par la fin, ainsi que de nouvelles suites infinies qui n'atteindront jamais \hat{Q} . Dans notre cas, cette suite infinie est représentée à droite du cercle rouge.

Dans un graphe d'échange orienté, seul le cercle vert n'a que des flèches sortantes et seul le cercle rouge n'a que des flèches entrantes. De plus, pour un carquois Q à n sommets, chaque point va avoir n flèches entrantes et sortantes. Dans notre exemple, comme il s'agit d'un carquois Q à deux sommets, chaque point du graphe d'échange orienté est connecté à deux flèches. Le cercle vert a deux flèches sortantes, le cercle rouge a 2 flèches entrantes et tous les autres points ont une flèche dans chaque sens.

Il ne sera pas toujours possible d'écrire sur une flèche quelle est la mutation correspondante car parfois, il y aura deux ou plusieurs suites de mutations possible pour se rendre à un même point. Les deux suites de mutations résultent à deux carquois isomorphes qui ont les sommets dans un ordre différent. Ce qui est une mutation au sommet i pour le premier peut être une mutation au sommet j pour l'autre, mais cela correspond à la même mutation. Nous allons mieux comprendre cette possibilité dans l'exemple suivant.

Exemple 2.23. *Regardons le graphe d'échange orienté du carquois Q suivant :*

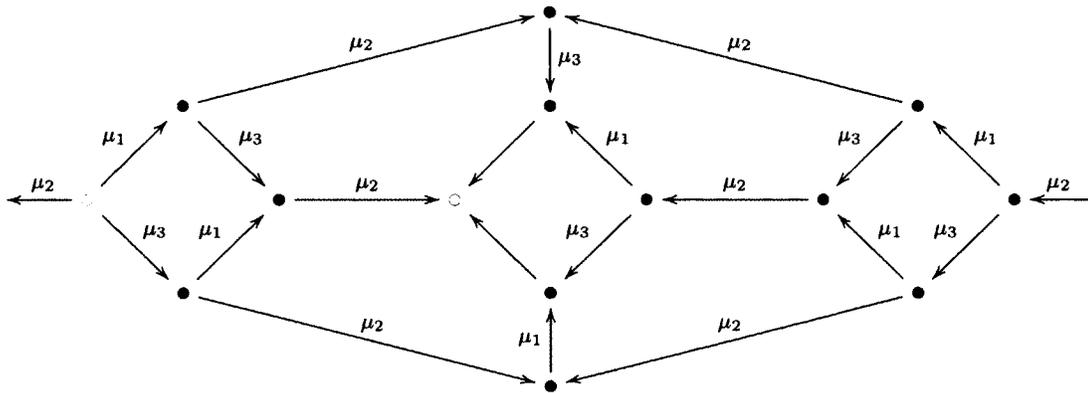
$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3.$$

Tout d'abord, voici la liste de toutes les suites maximales vertes (il n'y a pas de suites infinies pour ce carquois) : $(1,2,3,2)$, $(1,3,2)$, $(2,1,2,3,1)$, $(2,1,3,2,1,3)$, $(2,1,3,2,3,1)$, $(2,3,1,2,1,3)$, $(2,3,1,2,3,1)$, $(2,3,2,1,3)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1,2)$.

Pour construire le graphe d'échange orienté, nous voulons avoir pour chaque point trois flèches entrantes ou sortantes, à savoir autant de flèches que de sommets dans Q . Le seul endroit où il y a trois flèches sortantes est au cercle vert. De même pour trois flèches

entrantes au cercle rouge.

Voyons maintenant le graphe d'échange orienté :



La flèche qui va vers la gauche à partir du cercle vert se termine complètement à droite.

De plus, nous pouvons mieux comprendre pourquoi il n'est pas toujours possible de savoir quelle sera la mutation à un endroit donné. Lorsqu'il y a convergence de 2 chemins, on a 2 carquois isomorphes, donc les sommets peuvent être numérotés différemment.

Par exemple, on voit que les chemins $(3,2,1)$ et $(2,3,1,2,3)$ donnent respectivement les 2 carquois gelés suivants :



Notons les carquois respectivement E et F . Pour bien voir l'isomorphisme, on prend l'application $f : E \rightarrow F$ suivante : $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3, f(1') = 3', f(2') = 2'$ et $f(3') = 1'$. On peut effectuer respectivement une mutation en 1 ou en 2, mais dans le graphe d'échange orienté, cela correspond à la même flèche.

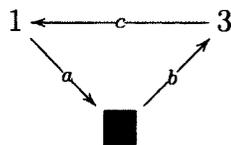
CHAPITRE 3

Résultats importants

Le but de ce chapitre est de faire la démonstration que lorsque l'on obtient une certaine configuration, il n'est plus nécessaire de chercher des suites maximales vertes, car nous pouvons être sûrs qu'il n'y en a pas. Au lieu de trouver pour chaque cas une preuve qu'il n'y a que des suites infinies, on va tenter de trouver des situations plus générales où il n'y a pas de suite maximale verte.

3.1 Résultat pour certains carquois cycliques

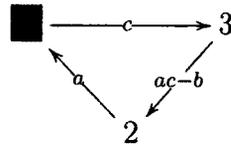
Lemme 3.1. *Considérons un carquois gelé dont la partie des sommets originaux Q_0 est donnée par :*



telle que le sommet 2 est rouge, $c > a$; $c > b$ et $a, b, c \geq 2$. Alors on ne pourra jamais, en faisant des mutations sur les sommets verts, obtenir un carquois où le nombre total

de flèches, entre les sommets 1, 2 et 3, est inférieur à $a + b + c$

Démonstration. Nous voulons montrer par récurrence que, dès qu'il y a une mutation effectuée, le nombre total de flèches du carquois augmente et nous retournons à la même situation. On ne connaît pas la couleur des sommets 1 et 3, mais si nous avons cette situation avec trois sommets rouges, la preuve est terminée, car le nombre de flèches ne peut pas diminuer. Dans le cas où nous avons le sommet 1 vert, voyons le résultat de la mutation :



On ne connaît pas la couleur du sommet 2 dans ce cas, il peut être redevenu vert et il peut être resté rouge. Ce dont nous avons besoin pour vérifier la récurrence, c'est :

$$(1) : ac - b > c \text{ et } ac - b > a$$

$$(2) : a + c + (ac - b) \geq a + b + c \text{ (Automatique si (1) est vérifié)}$$

On a :

$$ac - b \geq 2c - b = c + c - b > c > a$$

où la première inégalité suit de $a \geq 2$ et la seconde suit de $c > b$.

En conclusion, en effectuant une mutation au sommet 1, on retourne à la situation de départ avec trois côtés ayant un nombre de flèches plus grand ou égal à 2 et dont le côté ayant le plus grand nombre de flèches est opposé à un sommet rouge.

Si l'on avait effectué la mutation au sommet 3, on aurait seulement inversé les a et les b pour obtenir le même résultat. Encore une fois, on ne connaît pas la couleur des deux autres sommets mais s'il y en a un vert, le nombre de flèches peut seulement augmenter.

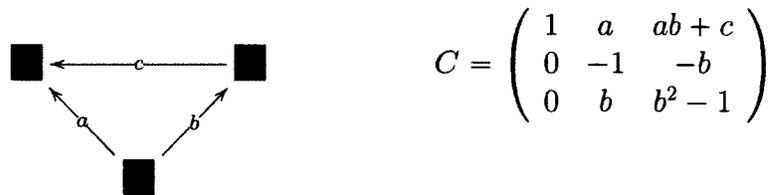
□

Démonstration. Nous allons travailler avec les C -matrices au lieu des sommets gelés pour faciliter l'affichage. Nous avons $\mu_3(Q)$:



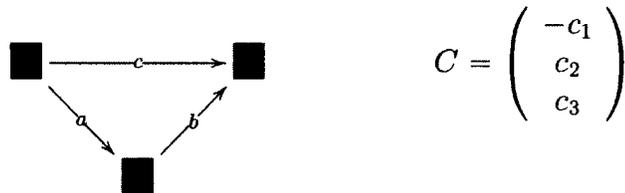
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant une mutation en 2, on obtient $\mu_2(\mu_3(Q))$:



$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & ab + c \\ 0 & -1 & -b \\ 0 & b & b^2 - 1 \end{pmatrix}$$

On constate que le sommet 3 est redevenu vert. En mutant au sommet 1, le sommet 2 redevient vert et on a la même situation. On veut prouver que nous avons une suite infinie $(3,2,1,3,2,1,\dots)$ de sorte que nous avons toujours deux sommets verts. Pour ce faire, on va prendre une matrice C quelconque et on va prouver que la situation est récurrente. Supposons que l'on a la situation suivante :



$$C = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

tel que c_i représente la i^{e} ligne de la matrice C . Dans ce cas, la première ligne est négative, les autres sont positives.

On suppose que $-c_1 + cc_3$ est une ligne positive. Regardons le résultat de la mutation en 3 :



$$C = \begin{pmatrix} -c_1 + cc_3 \\ c_2 + bc_3 \\ -c_3 \end{pmatrix}$$

Pour qu'il y ait une récurrence, on veut voir si la mutation en 2 fait en sorte que le sommet 3 redevient vert. Si c'est le cas, on retrouve toutes les hypothèses de base et on peut donc conclure qu'il y a une suite infinie $(3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots)$ de sorte qu'il y a toujours deux sommets verts.

On doit regarder la troisième ligne de la C -matrice après la mutation en 2 et voir si elle est positive. On obtient à la 3^e ligne, $b(c_2 + bc_3) - c_3 = bc_2 + (b^2 - 1)c_3$

Nous savons que $b \geq 1$ et que c_2 et c_3 sont positives, nous constatons alors que la troisième ligne est positive ce qui prouve la récurrence. Nous avons donc montré qu'il y a une suite infinie $(3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots)$ telle qu'il y a toujours deux sommets verts. Nous ne savons par contre rien sur ce qui se produit lorsque nous sortons de cette suite, par exemple, si une suite commence par $(3, 2, 1, 3, 2, 3)$, cette proposition ne nous informe pas sur le reste de cette suite. □

3.3 Situation n'ayant que des suites infinies

Proposition 3.4. *Soit Q un bon carquois tel que, après un certain nombre de mutations, nous avons la situation suivante :*

$$\blacksquare \xleftarrow{a} \blacksquare \xrightarrow{b} \blacksquare \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

où $-c_2 + ac_1 > 0$; $-c_2 + bc_3 > 0$; $a \geq 2$ et $b \geq 2$. Alors il n'y a pas de suite maximale verte possible à partir de cette situation.

Démonstration. En se servant des hypothèses de base, nous pouvons affirmer que les lignes $-c_2 + ac_1$ et $-c_2 + bc_3$ sont positives. Comme le carquois est symétrique, nous allons prouver qu'après une mutation au sommet 1, on ne trouve que des suites infinies. On saura alors que c'est tout aussi vrai pour les mutations en 3. Voyons ce que l'on

obtient par la mutation en 1.

$$\blacksquare \xrightarrow{-a} \blacksquare \xrightarrow{-b} \blacksquare \quad C = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 + ac_1 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Si on fait la mutation au sommet 2, on obtient ab flèches de 1 vers 3 et on inverse les flèches existantes. On peut alors appliquer le Lemme 3.2 pour savoir qu'il n'y a pas de suite maximale verte. On regarde alors la mutation au sommet 3 qui nous donne :

$$\blacksquare \xrightarrow{-a} \blacksquare \xleftarrow{-b} \blacksquare \quad C = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 + ac_1 + bc_3 \\ -c_3 \end{pmatrix}$$

On n'a alors pas le choix de faire la mutation en 2.

$$\blacksquare \xleftarrow{-a} \blacksquare \xrightarrow{-b} \blacksquare \quad C = \begin{pmatrix} (a^2 - 1)c_1 - ac_2 + abc_3 \\ c_2 - ac_1 - bc_3 \\ (b^2 - 1)c_3 - bc_2 + abc_1 \end{pmatrix}$$

Il reste à vérifier qu'une mutation en 1 ou en 3 va rendre le sommet 2 vert.

Par une mutation en 1, on a à la deuxième ligne :

$$\begin{aligned} & c_2 - ac_1 - bc_3 + a((a^2 - 1)c_1 - ac_2 + abc_3) \\ &= (a(a^2 - 1) - a)c_1 + (a^2 + 1)c_2 + (a^2b - b)c_3, \end{aligned}$$

ce qui donne une ligne positive. Le calcul est identique pour une mutation au sommet 3. Nous savons donc qu'il est impossible d'obtenir 3 sommets rouges. Il est donc impossible d'obtenir une suite maximale verte. \square

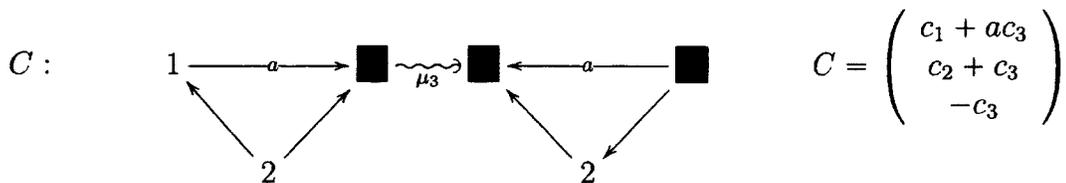
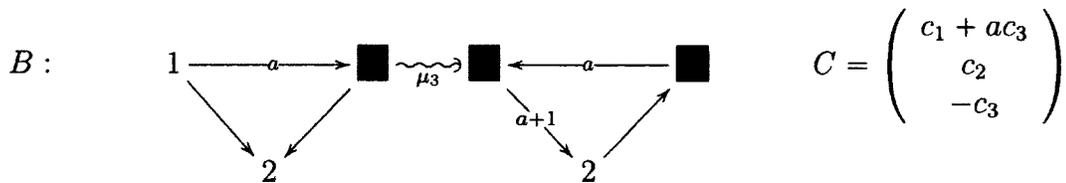
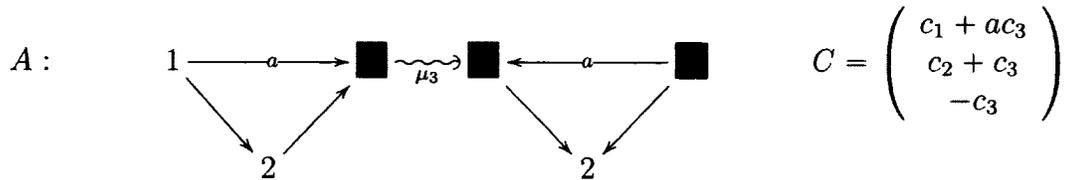
Proposition 3.5. *Soit Q un carquois à trois sommets de sorte qu'il y ait seulement une paire de sommet relié par plus d'une flèche. Si on effectue une mutation au but de ces multiples flèches et que le nouveau but (après la mutation) de ces multiples flèches est vert, alors il n'y a pas de suite maximale verte possible. Une seule exception : cette proposition n'est pas applicable si on a un carquois cyclique et que le nombre total de flèches est 4 (le nombre de flèches multiples est alors 2).*

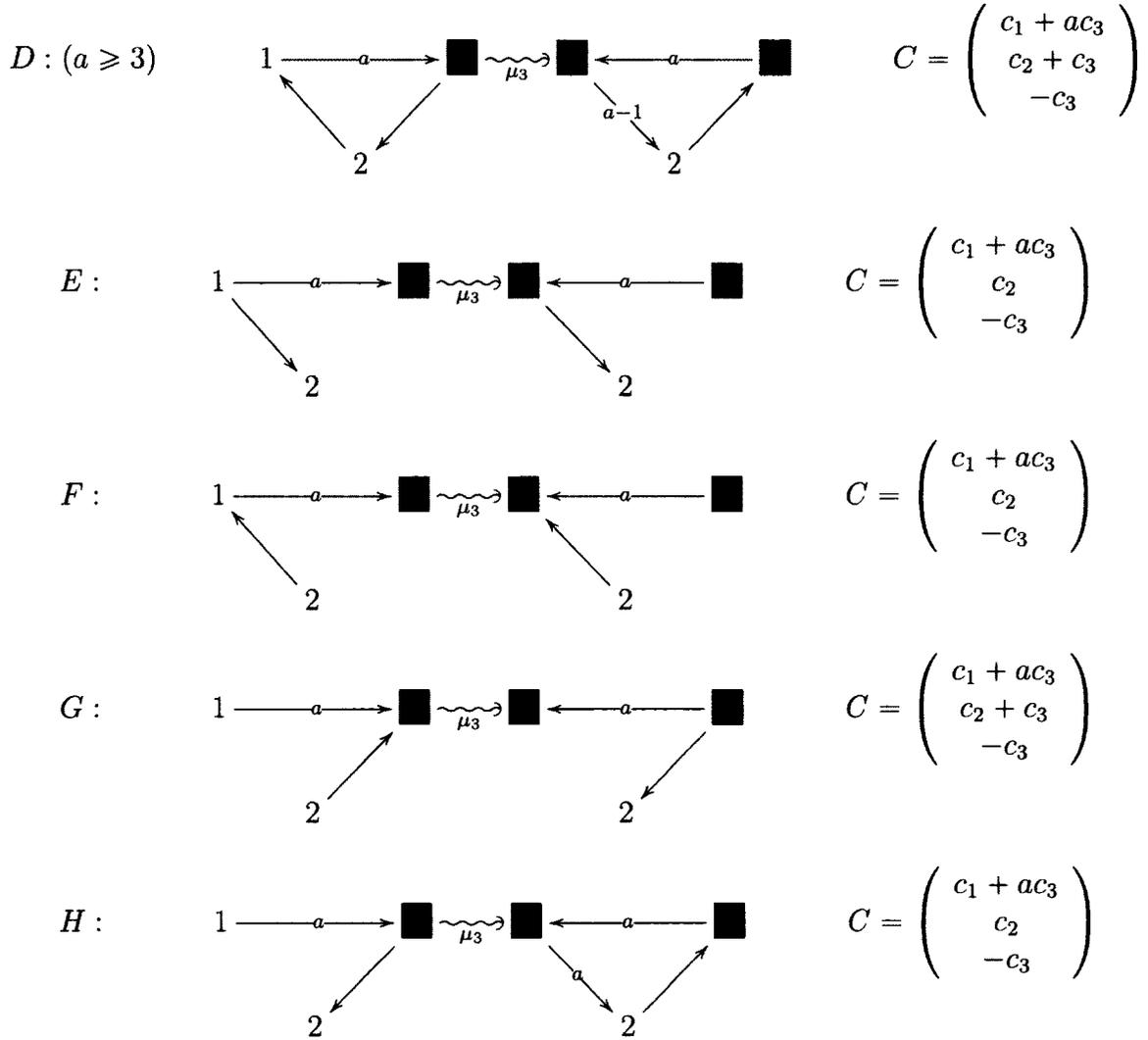
Pour illustrer cette proposition, on doit avoir un carquois comme le suivant :



tel que $c_1 + ac_3$ est une ligne positive et les flèches reliant le sommet 2 sont soit simples, soit 0, dans n'importe quel sens. Si $a = 2$ et si on a une flèche de 3 vers 2 et une de 2 vers 1, on ne peut pas appliquer cette proposition. On sait aussi que c_3 est une ligne positive. En ayant ces conditions et en faisant une mutation au sommet 3, on n'aura pas de suite maximale verte.

Démonstration. Il y a un total de huit différents cas selon l'orientation des flèches que nous ne connaissons pas. Nous voulons montrer que dans chacun de ces huit cas, soit on retourne au début d'un autre cas, soit on a une suite infinie. Alors on aura démontré qu'il n'y a pas de suite maximale verte possible.

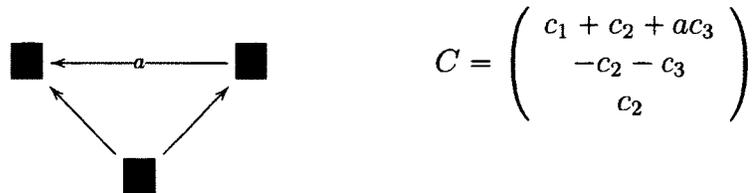




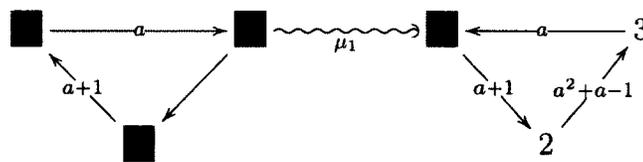
Commençons par regarder la mutation en 1 pour les carquois mutés $\mu_3(\hat{Q})$ pour les huit possibilités. Dans les cas A, C, E, F et G , on retrouve toutes les hypothèses de base de la proposition. On va donc avoir un carquois résultant que l'on retrouve déjà dans cette liste. Pour les cas B, D et H , une mutation au sommet 1 produit une situation que l'on connaît bien, celle qui se résout par le Lemme 3.2. On a donc, pour les huit possibilités, seulement besoin de voir ce qui se produit par une mutation au sommet 2 car le sommet 3 est toujours rouge. On va, à partir de maintenant, considérer que le sommet 2

est vert après la mutation en 3. On a donc que c_2 (B, E, F, H) ou $c_2 + c_3$ (A, C, D, G) est une ligne positive. Voyons maintenant le résultat des mutations en 2 pour les huit cas.

Cas A :

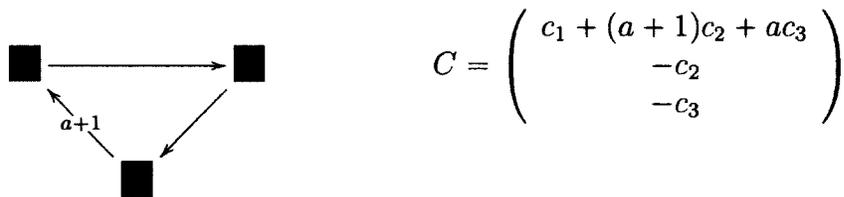


La mutation au sommet 1 nous renvoie dans un des cas de base, car on a toutes les hypothèses de la proposition. On regarde alors la mutation au sommet 3 :



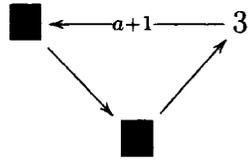
Grâce au Lemme 3.2, on sait que cela donne seulement des suites infinies

Cas B :



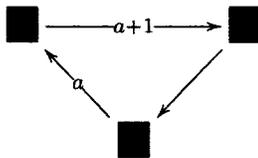
On doit donc faire une mutation au sommet 1, qui est un cas de base de la proposition, car une mutation en 1 rétablit la couleur verte du sommet 2 et on a $a' = a + 1$ donc $a' \geq 3$. On est alors ramené au cas D et le nombre total de flèches est suffisant pour appliquer la proposition.

Cas C :



$$C = \begin{pmatrix} c_1 + ac_3 \\ -c_2 - c_3 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

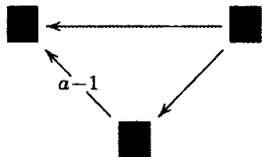
La mutation au sommet 1 fait en sorte que le sommet 3 devient vert (s'il ne l'est pas déjà). On est donc revenu à un cas de base de la proposition. Il faut vérifier ce qui se produit avec une mutation au sommet 3. On doit donc poser c_2 comme étant une ligne positive. On obtient alors :



$$C = \begin{pmatrix} c_1 + ac_3 \\ -c_3 \\ -c_2 \end{pmatrix}$$

En faisant la mutation au sommet 1, le sommet 2 redevient vert et on a le cas du Lemme 3.2. On a donc seulement des suites infinies.

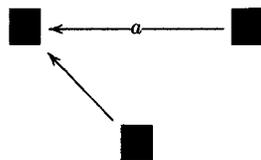
Cas D :



$$C = \begin{pmatrix} c_1 + (a-1)c_2 + (2a-1)c_3 \\ -c_2 - c_3 \\ -c_3 \end{pmatrix}$$

On a que $a-1 \geq 2$ et qu'en mutant en 1, le sommet 2 redevient vert ; on est donc revenu à un cas de base de la proposition.

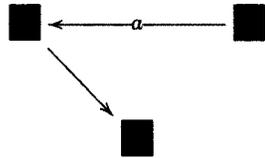
Cas E :



$$C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + ac_3 \\ -c_2 \\ -c_3 \end{pmatrix}$$

On est alors forcé de faire une mutation en 1 et on retrouve les hypothèses de base de la proposition.

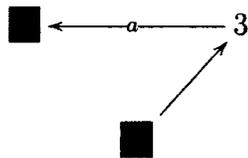
Cas F :



$$C = \begin{pmatrix} c_1 + ac_3 \\ -c_2 \\ -c_3 \end{pmatrix}$$

On est alors forcé de faire une mutation en 1 et on retrouve les hypothèses de base de la proposition.

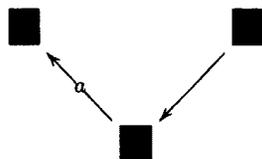
Cas G :



$$C = \begin{pmatrix} c_1 + ac_3 \\ -c_2 - c_3 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

La mutation en 1 est un cas de base de la proposition. Le mutation en 3, si elle est possible, nous force ensuite à faire une mutation en 1 et nous donne un cas du Lemme 3.2.

Cas H :



$$C = \begin{pmatrix} c_1 + ac_2 + ac_3 \\ -c_2 \\ -c_3 \end{pmatrix}$$

Encore une fois, la mutation en 1 fait en sorte que le sommet 2 redevient vert. On a donc un cas de base de la proposition.

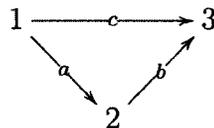
Dans tous les cas, soit on a une suite infinie, soit on revient à un des cas de la proposition. On ne va donc jamais avoir tous les sommets rouges et donc, aucune suite maximale verte n'est possible à partir d'un des cas de cette proposition. □

CHAPITRE 4

Carquois acycliques à trois sommets

Théorème 4.1. *Tous les carquois acycliques et connexes à trois sommets ont un nombre fini de suites maximales vertes.*

Pour obtenir tous les carquois de cette catégorie, on regarde le carquois Q ci-dessous :



avec $a, b, c \geq 0$. La seule restriction est que seulement une des trois valeurs peut être 0 pour ainsi avoir un carquois connexe. Tous les carquois acycliques connexes à trois sommets y sont alors représentés.

Le but de cette section est de prouver qu'il y a toujours une quantité finie de suites maximales vertes. Il y a une infinité de carquois différents. Parfois, des valeurs différentes de a, b et c peuvent donner des carquois qui ont les mêmes suites maximales vertes ; ils sont donc regroupés en une seule section. Il arrive aussi souvent que plusieurs cas différent

très peu. Pour éviter les répétitions, ces cas sont donc regroupés et les différences sont faites séparément.

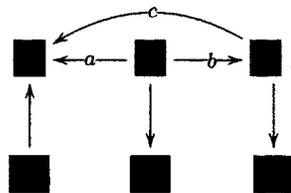
Un tableau contenant tous les résultats est fourni en Annexe A. Celui-ci sert de référence et peut aider à mieux comprendre. On remarque que la suite $\mathbf{i} = (1, 2, 3)$ est toujours une suite maximale verte peu importe les valeurs de a, b et c (voir l'Annexe A). Comme la mutation est toujours effectuée à un sommet source, on n'ajoute jamais de flèches, on va seulement changer le sens des flèches existantes. Entre deux sommets de Q_0 , on change le sens deux fois, et pour les flèches vers les sommets gelés, une fois seulement pour obtenir directement \check{Q} .

Remarque 4.2. *Dans tous les carquois acycliques à n sommets, il existe au moins une suite maximale verte de longueur n . On obtient une telle suite de mutations en effectuant une mutation à chaque sommet de façon à ce que pour chaque flèche du carquois acyclique, la mutation de sa source soit effectuée avant la mutation de son but. Chaque mutation de la suite est alors effectuée dans un sommet source. Avec le même raisonnement que précédemment, on peut affirmer que cette suite est bien une suite maximale verte.*

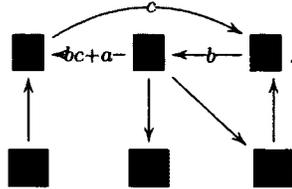
4.1 Supposons $a \geq 2$ et $b \geq 2$

Dans cette situation, on veut montrer que $\mathbf{i} = (1, 2, 3)$ est la seule suite maximale verte possible. On doit alors regarder les autres suites et vérifier que ce sont toutes des suites infinies.

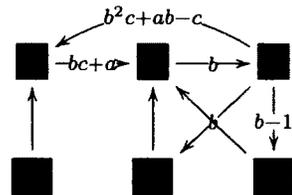
Regardons $\mu_1(\hat{Q})$:



Nous savons que si l'on fait la mutation en 2, la seule possibilité est une mutation en 3 pour avoir la suite maximale verte déjà connue. Donc, pour étudier les autres possibilités, on fait la mutation en 3. On a $\mu_3(\mu_1(\hat{Q}))$:



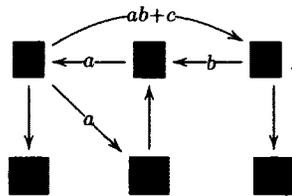
On n'a pas d'autre choix que d'effectuer la mutation au sommet 2, on a $\mu_2(\mu_3(\mu_1(\hat{Q})))$:



tel que $b^2c + ab - c$ est plus grand que b et $bc + a$, donc en se référant au Lemme 3.2 on ne peut pas obtenir de suite maximale verte.

Nous savons donc qu'en commençant par une mutation en 1, il y a une seule suite maximale verte possible. Nous allons maintenant regarder les suites commençant par une mutation au sommet 2.

Regardons $\mu_2(\hat{Q})$:



Nous savons que $ab + c$ est plus grand que a et que b . On peut utiliser le Lemme 3.2 pour savoir qu'il n'y aura aucune suite maximale verte commençant par 2.

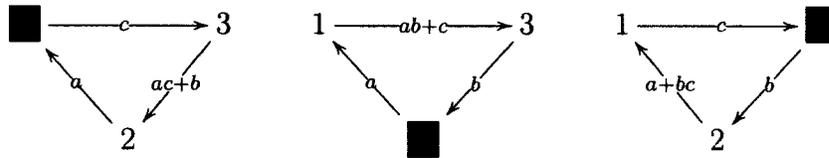
Jusqu'à présent, on avait que c pouvait prendre n'importe quelle valeur naturelle, même

nulle. Par contre, nous allons devoir séparer les cas pour les suites de mutations commençant par 3.

4.1.1 Pour $c \geq 1$

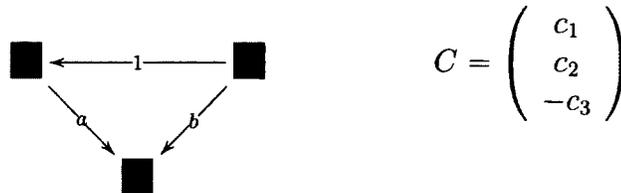
En vertu de la Proposition 3.3, nous avons la suite infinie $i = (3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots)$. Il faut donc voir ce qui se produit lorsque nous sortons de cette suite et voir si c'est possible d'obtenir une suite maximale verte.

Il y a trois façons de sortir de cette séquence : faire une mutation en 1 après une en 3, faire une mutation en 2 après une en 1 ou faire une mutation en 3 après une en 2. Voici les trois carquois obtenus dans ces cas-là. Selon l'endroit dans la suite où on effectue cette mutation, la matrice C va être différente. Par contre, le nombre de flèches entre les sommets originaux vont être respectivement les suivants :

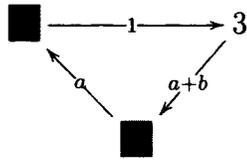


Dans le deuxième cas, on voit que c'est la situation du Lemme 3.2 ; il n'y aura pas de suite maximale verte. Si $c > 1$, on a cette situation dans les trois cas. Pour $c = 1$, on va faire la preuve qu'il n'y a pas de suite maximale verte dans le premier et dernier cas.

Nous allons regarder ce qu'il en était avant la dernière mutation pour le premier cas. Donc après les mutations en $(3, 2, 1, \dots, 3, 2, 1, 3)$:



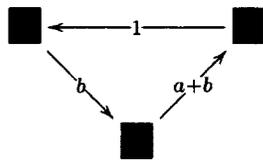
Ensuite, par la mutation en 1, on a :



$$C = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_2 \\ -c_3 + c_1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, on ne peut pas savoir si le sommet 3 est rouge ou vert, mais ce n'est pas nécessaire de le savoir. En mutant au sommet 2, on obtient $a(a+b) - 1$ flèche de 3 vers 1 ; c'est égal à $a^2 + ab - 1$ et c'est plus grand que $a+b$ et que a . Donc, on se retrouve dans la situation du Lemme 3.2 et il n'y a que des suites infinies. Dans le cas où le sommet 3 est vert, on doit avoir que la ligne $-c_3 + c_1$ est positive.

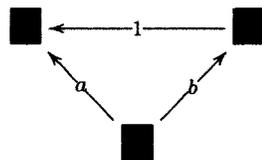
Regardons le résultat de la mutation en 3 :



$$C = \begin{pmatrix} -c_1 + (-c_3 + c_1) \\ c_2 \\ c_3 - c_1 \end{pmatrix}$$

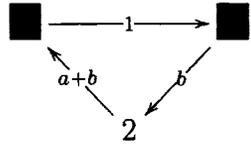
Dans ce cas, on sait que le sommet 1 reste rouge, car la première ligne est $-c_1 + (-c_3 + c_1) = -c_3$ et on sait que c'est une ligne négative. Par la suite, on n'a d'autre choix que de faire la mutation en 2 et on peut voir facilement qu'il n'y aura que des suites infinies à partir de maintenant en utilisant le Lemme 3.2.

Nous allons maintenant regarder ce qu'il en est pour le troisième cas. Regardons ce que nous avons avant la dernière mutation, donc après les mutations en $(3,2,1,\dots,3,2,1,3,2)$:



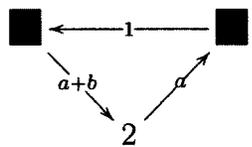
$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Ensuite, par la mutation en 3, on obtient :



$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_2 + bc_3 \\ -c_3 \end{pmatrix}$$

On ne connaît pas la couleur du sommet 2, mais s'il est vert ($-c_2 + bc_3$ est une ligne positive), une mutation en ce sommet nous donne les critères du Lemme 3.2, donc nous allons voir ce qui se produit avec une mutation au sommet 1.



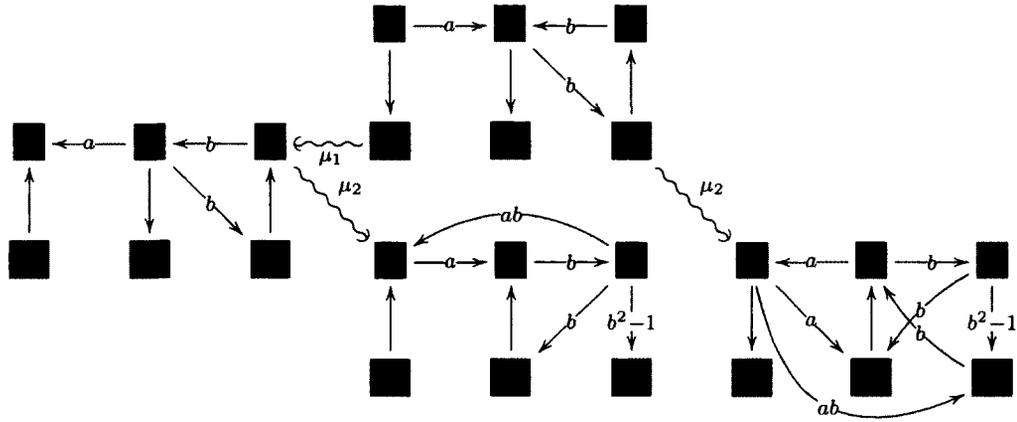
$$C = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 + bc_3 + (a+b)c_1 \\ -c_3 \end{pmatrix}$$

On ne connaît pas la couleur du sommet 2, par contre, s'il était rouge, le carquois ne serait pas isomorphe à \check{Q} , donc en vertu du Lemme 2.18, nous n'avons pas une suite maximale verte. Nous savons donc qu'il y a au moins un sommet vert, et comme on est sûr que les sommets 1 et 3 sont rouges, on est obligé d'avoir le sommet 2 vert. Donc, on continue avec une mutation en 2 et on obtient encore une fois un cas qui se résout avec le Lemme 3.2.

4.1.2 Pour $c = 0$

Il reste à vérifier qu'avec $c = 0$, en effectuant une première mutation au sommet 3, il n'y a pas de suite maximale verte.

Nous avons donc $\mu_3(\widehat{Q})$:



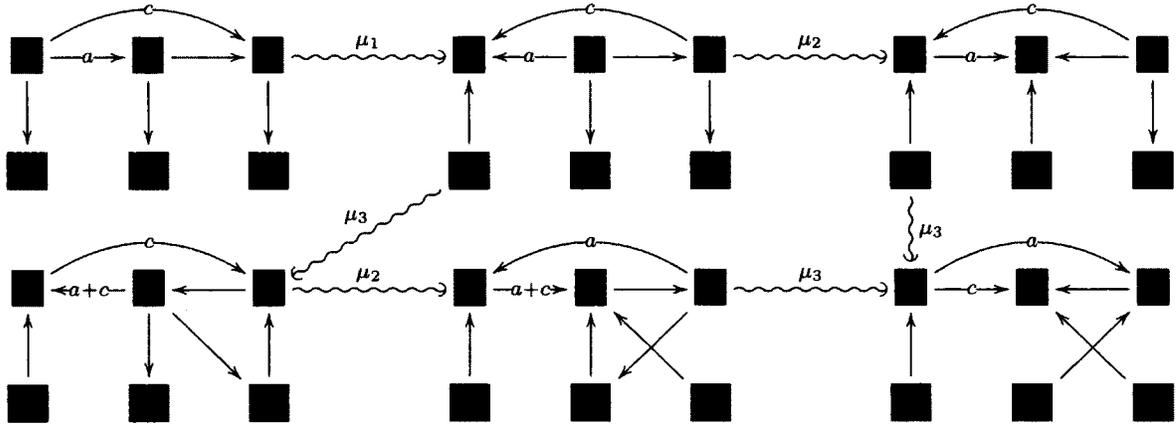
Dans le premier cas, $\mu_2(\mu_1(\mu_3(\widehat{Q})))$, on sait à l'aide du Lemme 3.2 qu'il n'y a pas de suite maximale verte possible et dans le deuxième cas, $\mu_2(\mu_3(\widehat{Q}))$, on a la même conclusion à l'aide de la Proposition 3.4, car la C -matrice est alors

$$\begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ 0 & -1 & -b \\ 0 & b & b^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

On a maintenant prouvé que dans le cas où a et b sont plus grands ou égaux à 2, peu importe la valeur de c , il y a un nombre fini de suites maximales vertes.

4.2 Supposons $a \geq 2, b = 1$

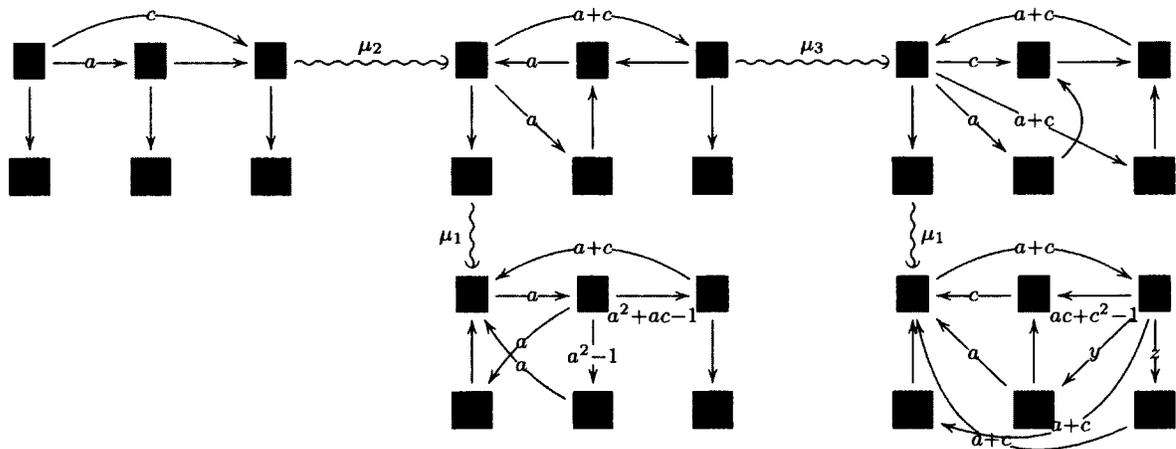
Commençons par étudier ce cas lorsque la première mutation est effectuée au sommet 1 :



Cela représente deux suites maximales vertes et c'est vrai peu importe la valeur de c . Dans les cas où la suite commence par une mutation en 2 ou en 3, nous allons devoir séparer les situations selon la valeur de c .

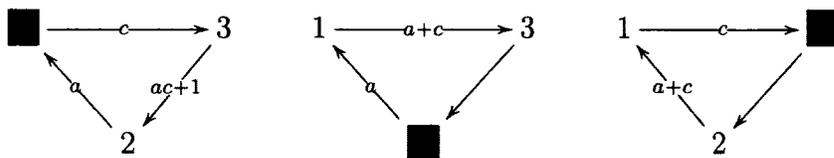
4.2.1 Pour $c \geq 2$

Regardons ce qui se produit lorsque la première mutation est au sommet 2 :



Nous voyons que si la première mutation est au sommet 2, nous pouvons, dans les deux cas ci-haut, appliquer le Lemme 3.2. Il n'y a donc pas de suite maximale verte commençant par 2. Il reste à voir pour la première mutation en 3.

Dans ce cas, par la Proposition 3.3, nous savons qu'il y a une suite infinie $(3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots)$. Comme précédemment, nous avons trois possibilités de carquois lorsque nous sortons de cette suite.

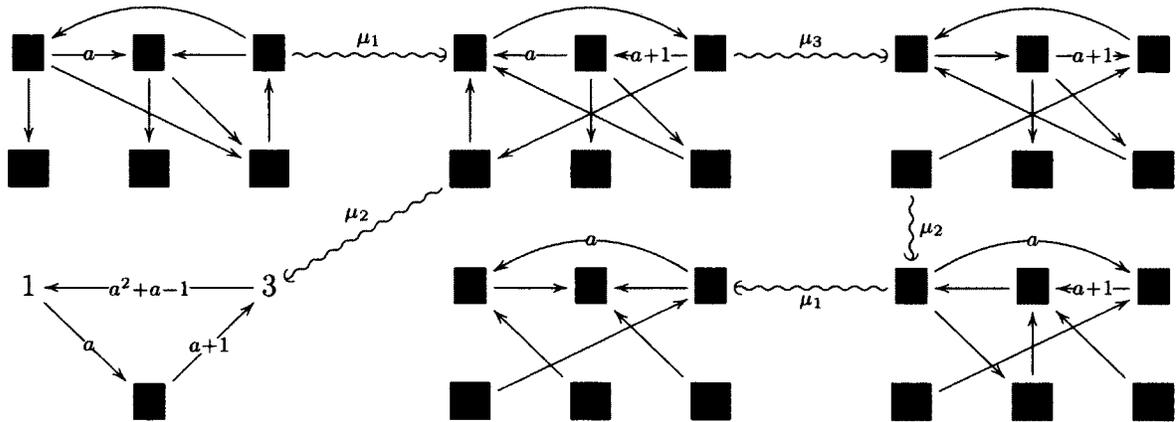


Nous avons une situation similaire à $(a \geq 2, b \geq 2, c = 1)$ que nous avons vue à la Section 4.1.1. En s'y référant, nous pouvons voir que les preuves sont valides dans le cas présent. En prenant respectivement le deuxième, troisième et premier cas de la Section 4.1.1, nous voyons que nous avons affaire à la même situation.

4.2.2 Pour $c = 1$

On sait par la Proposition 3.5 que si la première mutation est effectuée au sommet 2, toutes les suites résultantes sont infinies.

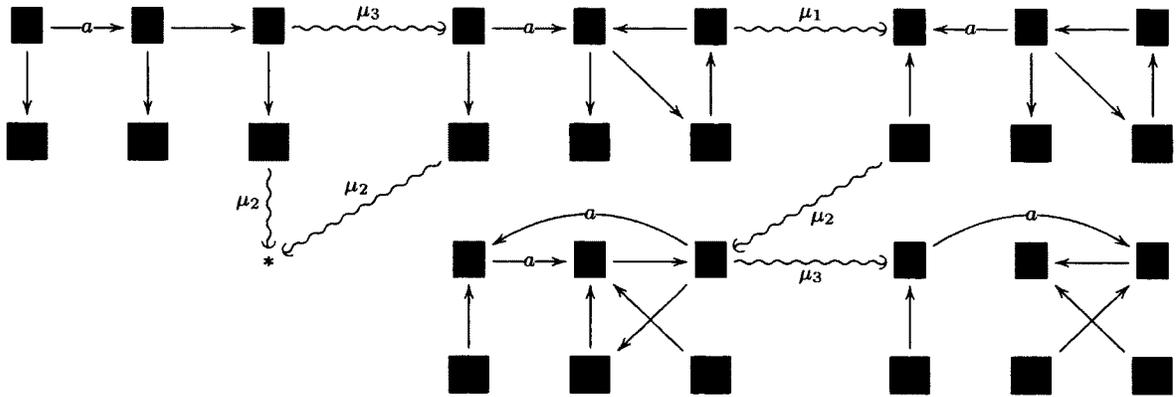
Voyons maintenant ce qu'il se produit lorsque la première mutation est au sommet 3.



On peut voir qu'après la mutation en 3, la mutation en 2 (qui n'est pas affichée) donne seulement des suites infinies par la Proposition 3.5. Alors on regarde la 2^e mutation au sommet 1 qui nous donne encore deux choix. Si on mute en 2, on obtient seulement des suites infinies, ce qui se vérifie par le Lemme 3.2. Si on mute en 3, on obtient la suite maximale verte $\mathbf{i} = (3, 1, 3, 2, 1)$.

4.2.3 Pour $c = 0$

On connaît déjà le résultat pour les suites de mutations commençant par 1, voyons maintenant ce qu'il se produit dans les autres cas.

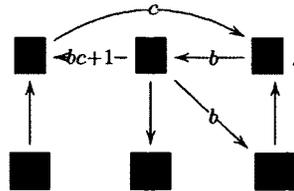


* Proposition 3.5

On peut voir que nous avons la suite maximale verte $\mathbf{i} = (3, 1, 2, 3)$ et que si nous essayons autre chose, nous allons nous retrouver dans la situation de la Proposition 3.5. Nous pouvons donc être certains que c'est la seule suite maximale verte qui ne commence pas par 1.

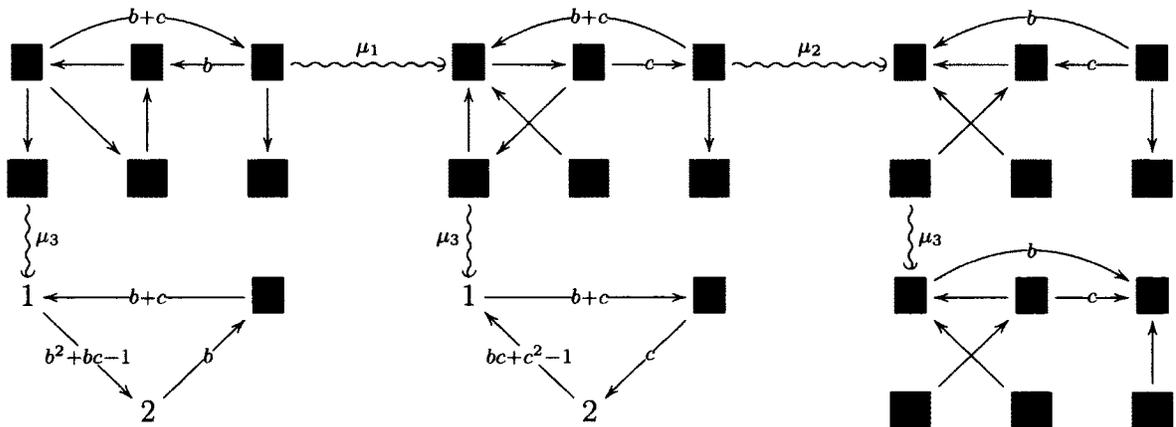
4.3 Supposons $a = 1, b \geq 2$ et $c \geq 2$

On a encore une fois la suite maximale verte $\mathbf{i} = (1, 2, 3)$. Les autres suites qui commencent en 1 ont une deuxième mutation au sommet 3, ce qui nous donne $\mu_3(\mu_1(\hat{Q}))$:



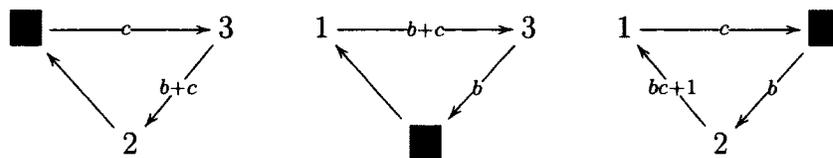
Avec le Lemme 3.2, on sait qu'il n'y a pas de suite maximale verte commençant par $(1, 3)$.

Regardons maintenant le cas où la première mutation est au sommet 2.



On a donc une autre suite maximale verte soit $i = (2, 1, 2, 3)$ et si l'on diverge de cette suite on peut immédiatement appliquer le Lemme 3.2 et on peut être sûr qu'il n'y a pas d'autre suite maximale verte.

On va maintenant regarder les suites lorsque la première mutation est au sommet 3. En vertu de la Proposition 3.3, il existe trois possibilités de carquois qu'il faut regarder.

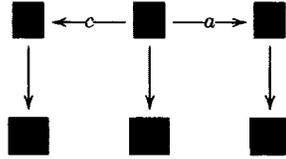


Ce cas est similaire à ceux de la Section 4.1.1. Si on regarde respectivement le troisième, premier et deuxième cas de cette section, on peut voir qu'il s'agit de la même situation et que la preuve est valide dans notre situation, nous n'avons donc pas de suite maximale verte à partir de l'un de ces carquois.

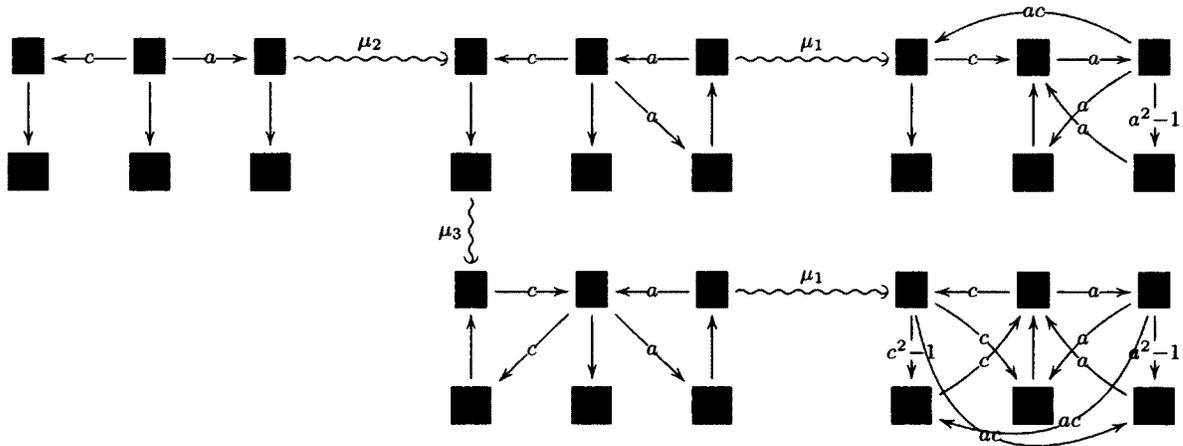
Nous avons donc deux suites maximales vertes dans cette section.

4.4 Supposons $a \geq 2, b = 0$ et $c \geq 2$

Après une réorganisation de l'ordre des sommets, on a le carquois cadré suivant :



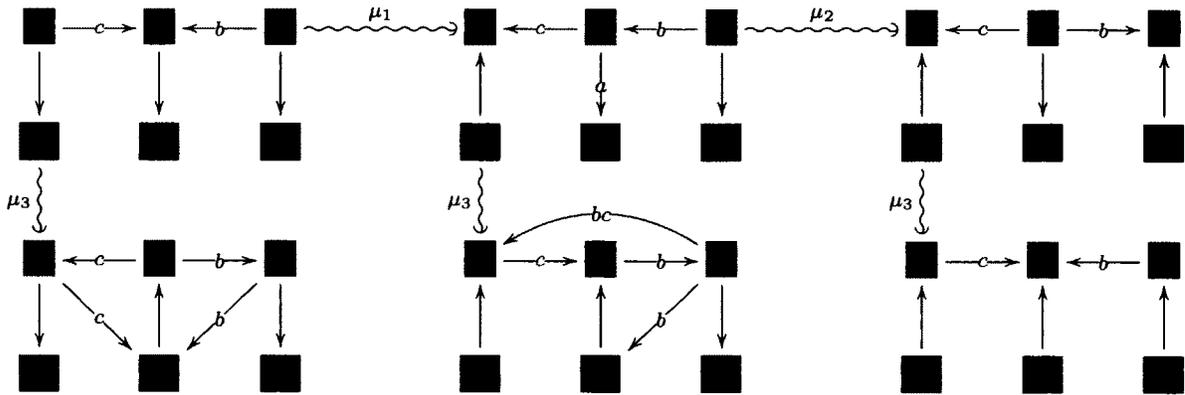
C'est un carquois symétrique, donc si on a une suite quelconque, on peut inverser dans la suite les 2 et les 3 et on va avoir deux résultats isomorphes. L'exemple le plus utile est pour la suite maximale verte déjà connue, soit $i = (1, 2, 3)$. On peut donc être sûr que nous avons aussi la suite maximale $i = (1, 3, 2)$. Du coup, nous avons toutes les suites possibles commençant au sommet 1. Nous allons maintenant regarder les suites commençant au sommet 2 en sachant que les suites commençant par 3 sont les mêmes, donc on aura la même quantité de suites maximales vertes dans les deux cas. Regardons donc ce qui se produit lorsque la première mutation est au sommet 2.



Il y a deux débuts de suites possibles, soient $\mu_1(\mu_2(\hat{Q}))$ et $\mu_1(\mu_3(\mu_2(\hat{Q})))$. Le premier cas est un cas du Lemme 3.2 et le deuxième de la Proposition 3.4. On est donc sûr qu'il n'y aura pas de suite maximale verte commençant par 2 ou par 3.

4.5 Supposons $a = 0, b \geq 2$ et $c \geq 2$

Après une réorganisation de l'ordre des sommets, voici les débuts de suites possibles.

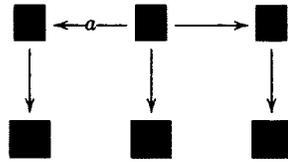


Pour $\mu_3(\hat{Q})$ on utilise la Proposition 3.4 pour savoir qu'il n'y aura pas de suite maximale verte. Pour $\mu_3(\mu_1(\hat{Q}))$, on peut utiliser le Lemme 3.2. De plus, on a encore une symétrie entre les sommets 1 et 2, donc on a le même résultat pour $\mu_3(\mu_2(\hat{Q}))$. On a donc seulement deux suites maximales vertes, soient $\mathbf{i} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{i} = (2, 1, 3)$.

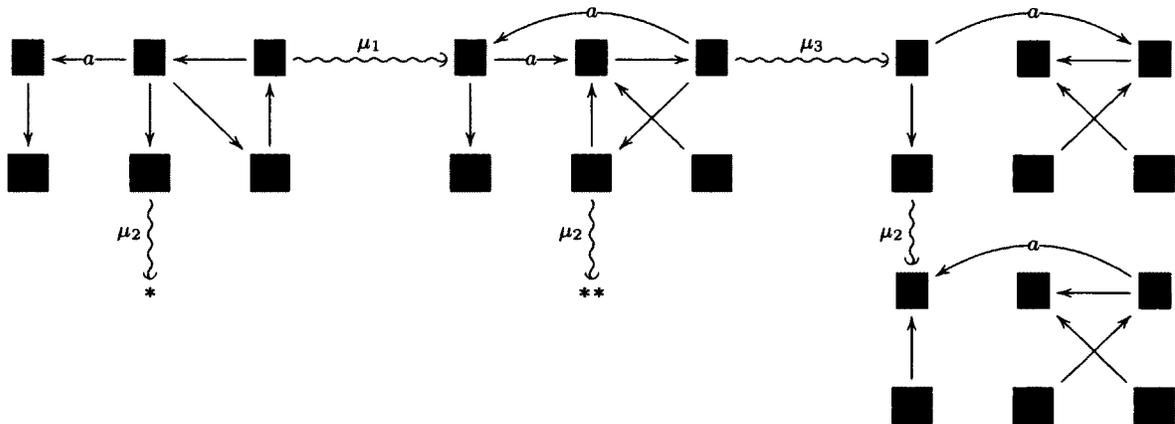
4.6 Supposons $a \geq 2, b = 0$ et $c = 1$ ou $a = 1, b = 0$ et $c \geq 2$

Nous combinons ces deux possibilités, car elles résultent en deux carquois isomorphes. Dans les deux cas, nous avons un sommet source, des flèches multiples vers un sommet, et une flèche simple vers l'autre sommet.

Dans les deux cas, nous avons un carquois cadré isomorphe à celui-ci :



Nous pouvons voir que nous avons les suites maximales vertes $\mathbf{i} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{i} = (1, 3, 2)$, car nous faisons toujours la mutation à un sommet source. De plus, si on commence par une mutation au sommet 2, on est dans le cas de la Proposition 3.5 ; nous n'avons donc pas de suite maximale verte. Il reste à étudier les suites commençant par 3.



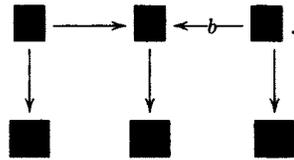
* Proposition 3.5

** Lemme 3.2

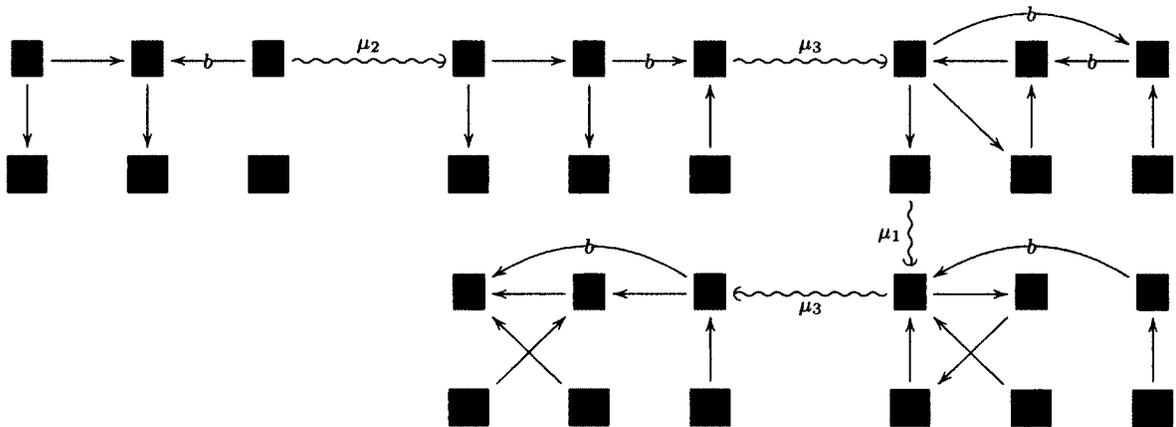
Nous avons la suite maximale verte $\mathbf{i} = (3, 1, 3, 2)$. Les autres possibilités donnent seulement des suites infinies en vertu de la Proposition 3.5 (pour $\mu_3(\mu_2(\hat{Q}))$) et du Lemme 3.2 (pour $\mu_2(\mu_1(\mu_3(\hat{Q})))$).

4.7 Supposons $a = 0, b \geq 2$ et $c = 1$ ou $a = 0, b = 1$ et $c \geq 2$

Dans les deux cas, nous avons un carquois cadré isomorphe à celui-ci :



Nous pouvons voir que nous avons les suites maximales vertes $\mathbf{i} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{i} = (2, 1, 3)$, car nous faisons toujours la mutation à un sommet source. De plus, si l'on commence par une mutation au sommet 3 ou par $(1,3)$, on est dans le cas de la Proposition 3.5; nous n'avons donc pas de suite maximale verte. Il reste à regarder pour les suites commençant par $(2,3)$.



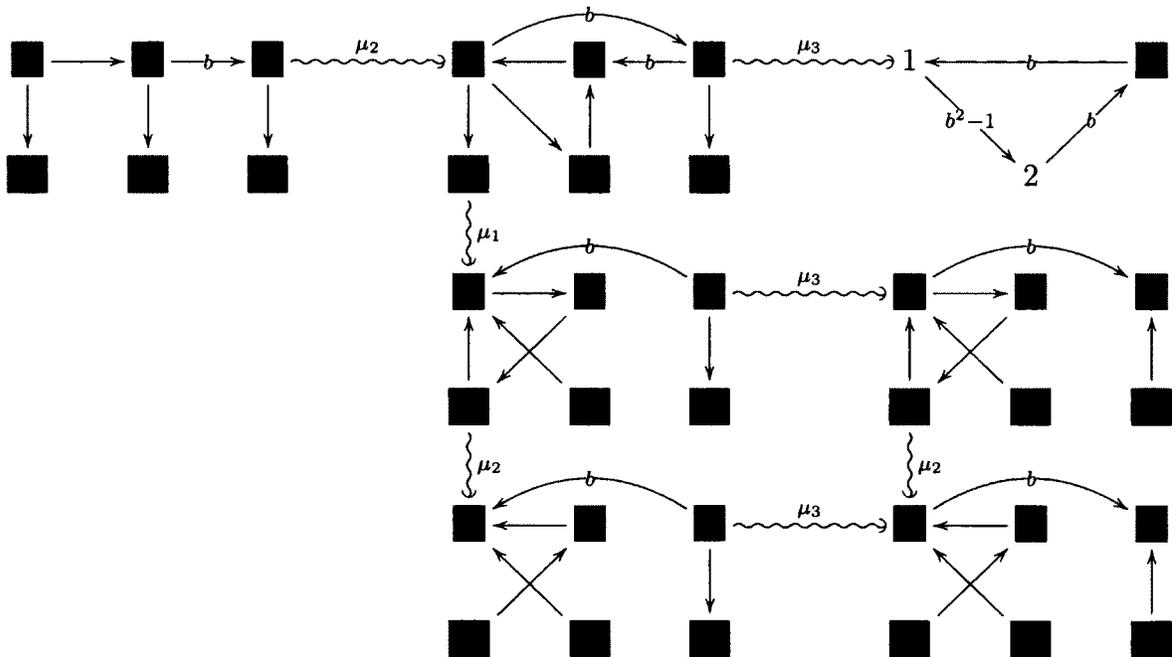
Nous avons la suite maximale verte $\mathbf{i} = (2, 3, 1, 3)$. Il n'y a pas d'autres possibilités commençant par $(2,3)$.

4.8 Supposons $a = 1, b \geq 2$ et $c = 0$

Par la Proposition 3.5, nous savons que les suites commençant par 3 ou par (1,3) sont toutes infinies.

Nous avons aussi la suite maximale verte $\mathbf{i} = (1, 2, 3)$.

Il reste à regarder les suites commençant par une mutation au sommet 2.

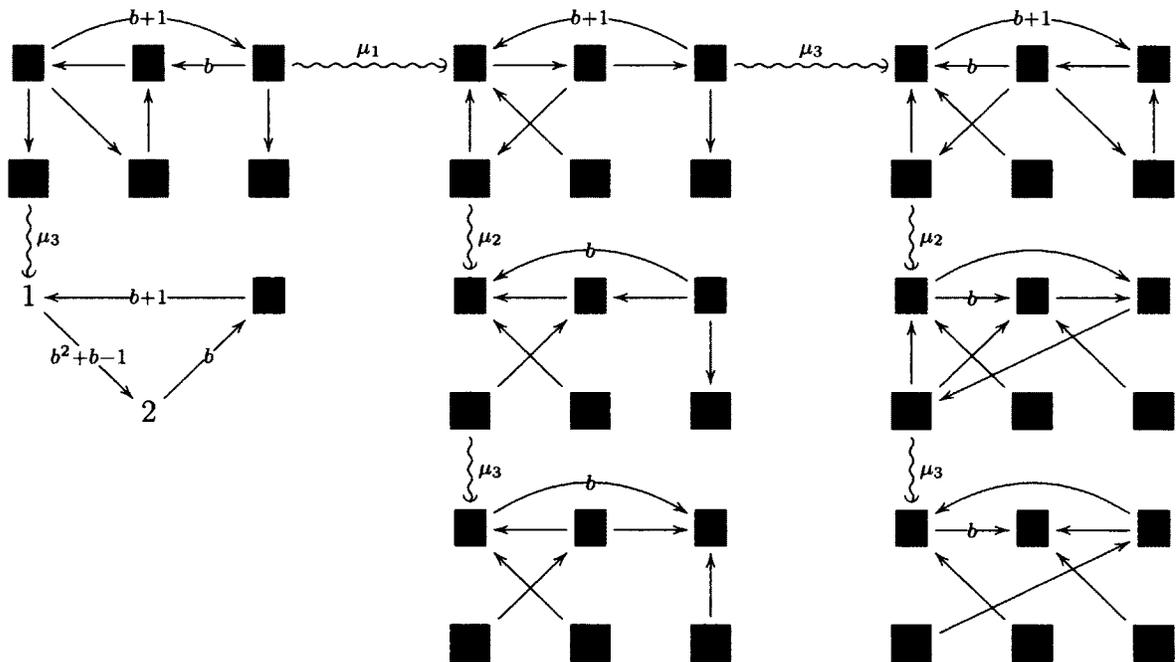


Grâce au Lemme 3.2, on sait que les suites commençant par (2,3) sont toutes infinies.

On a donc deux suites maximales vertes : $\mathbf{i} = (2, 1, 3, 2)$ et $\mathbf{i} = (2, 1, 2, 3)$.

4.9 Supposons $a = 1, b \geq 2$ et $c = 1$

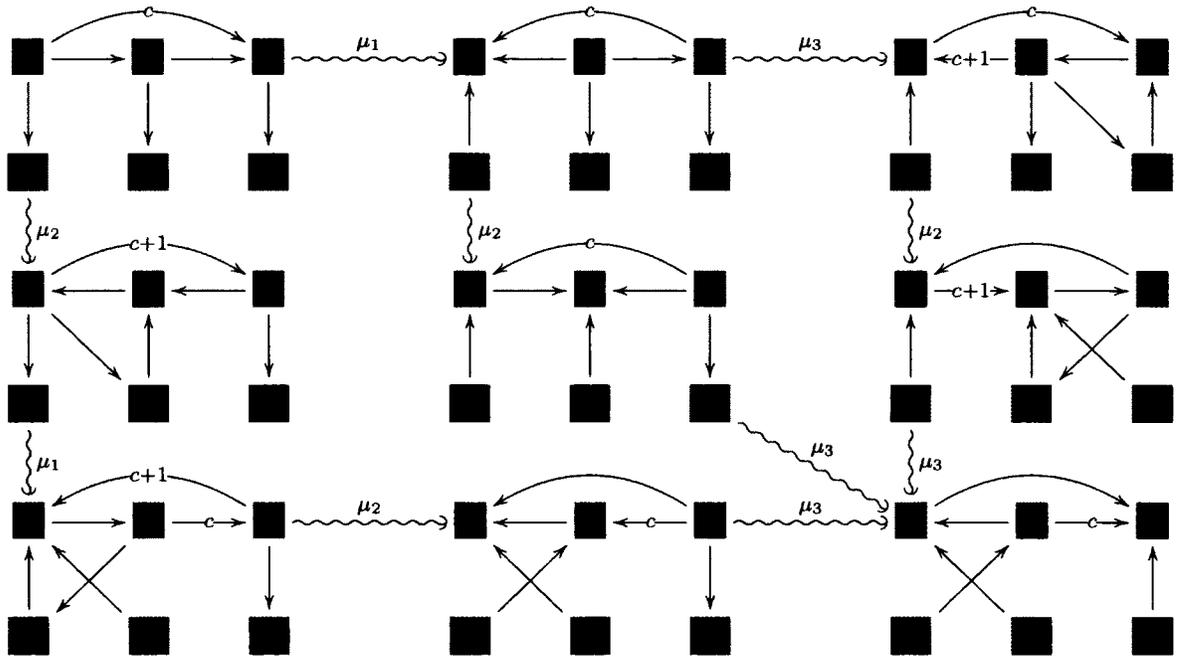
Comme dans le cas précédent, pour les suites commençant par 1 ou par 3, la seule suite maximale verte est $\mathbf{i} = (1, 2, 3)$. Les autres possibilités nous mènent toutes à la Proposition 3.5. Il nous faudra donc faire les vérifications pour les suites commençant par une mutation au sommet 2.



On a deux suites maximales vertes commençant par 2 : $\mathbf{i} = (2, 1, 2, 3)$ et $\mathbf{i} = (2, 1, 3, 2, 3)$. Si on essaie de commencer par $(2, 3)$, en se référant au Lemme 3.2, nous voyons que l'on n'a que des suites infinies.

4.10 Supposons $a = 1, b = 1$ et $c \geq 2$

Voyons d'abord ces trois suites maximales vertes : $\mathbf{i} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{i} = (1, 3, 2, 3)$ et $\mathbf{i} = (2, 1, 2, 3)$



Pour le dernier carquois, il y a trois possibilités qui sont isomorphes, nous en avons seulement mis une pour simplifier. Regardons maintenant les cas qui ne sont pas représentés ci-dessus. Si la première mutation est au sommet 3, on est dans le cas de la Proposition 3.5. Si on commence par 2 et ensuite 3, on est dans la même proposition. (Notez que nous avons un cycle, donc on doit être sûr d'avoir plus de deux flèches là où il y a des flèches multiples. C'est présentement le cas, car nous avons $c + 1$ avec $c \geq 2$.) Finalement, si on commence une suite par $(2, 1, 3)$, on a seulement des suites infinies, ce qui se vérifie par le Lemme 3.2. Il n'y a donc que trois suites maximales vertes dans cette section.

4.11 Supposons que l'on n'a pas de flèches multiples

Dans le cas où a, b et c sont soit 0, soit 1. Il y a quatre carquois connexes possibles.



Ce sont tous des cas qui ont déjà été étudiés. Pour le dernier, le graphe d'échange orienté a été fourni dans l'Exemple 2.23. Pour les autres, on peut les retrouver entre autres dans [BDP13], et ils ont tous un nombre fini de suites maximales vertes.

CONCLUSION

Nous avons donc, pour chaque carquois acyclique à trois sommets, montré qu'il y a un nombre fini de suites maximales vertes. Nous avons en plus, par la Proposition 3.3 et par le fait qu'il y a toujours un nombre fini de suites maximales vertes, fait la démonstration qu'il peut parfois y avoir un nombre infini de suites infinies.

Les recherches sur les carquois à trois sommets ne sont qu'un début. Nous espérons que ces résultats pourront être extrapolés sur les carquois ayant plus de sommets. Nous croyons que dans tous les cas, il y a toujours un nombre fini de suites maximales vertes. Nous n'avons pas de contre-exemple, mais pas de preuve non plus.

Nous avons aussi remarqué que lorsqu'il y a une mutation effectuée au but de plusieurs flèches provenant du même sommet, nous obtenons seulement des suites infinies. Si nous avons $i \xrightarrow{a} j$, avec $a \geq 2$, en faisant la mutation en j , nous aurons seulement des suites infinies, peu importe le reste du carquois. Encore une fois, il s'agit seulement d'une hypothèse que nous n'avons pas réussi à prouver sans toutefois avoir trouvé un contre-exemple. Si nous avons un carquois à trois sommets, cette hypothèse est vraie, car nous avons trouvé toutes les suites maximales vertes possibles et dans aucune d'entre elles nous avons une telle mutation.

ANNEXE A

Toutes les suites maximales vertes possibles selon les différentes valeurs de a, b et c .

On prend 2 pour représenter ≥ 2 et S.M.V. pour suite maximale verte.

a	b	c	nbr de S.M.V.	liste des suites maximales vertes
2	2	2	1	(1,2,3)
2	2	1	1	(1,2,3)
2	2	0	1	(1,2,3)
2	1	2	2	(1,2,3), (1,3,2,3)
2	1	1	3	(1,2,3), (1,3,2,3), (3,1,3,2,1)
2	1	0	3	(1,2,3), (1,3,2,3), (3,1,2,3)
2	0	2	2	(1,2,3), (1,3,2)
2	0	1	3	(1,2,3), (1,3,2), (3,1,3,2)
1	2	2	2	(1,2,3), (2,1,2,3)
1	2	1	3	(1,2,3), (2,1,2,3), (2,1,3,2,3)
1	2	0	3	(1,2,3), (2,1,2,3), (2,1,3,2)
1	1	2	3	(1,2,3), (2,1,2,3), (1,3,2,3)
1	1	1	5	(1,2,3), (1,3,2,3), (2,1,2,3), (2,1,3,2,3), (3,1,3,2,3)
1	1	0	9	(1,2,3), (1,3,2,3), (2,1,2,3), (2,1,3,2), (2,3,1,3,2), (3,1,2,3), (3,2,3,1,2,3), (3,2,1,3,2,3), (3,2,1,2,3)
1	0	2	3	(1,2,3), (1,3,2), (2,1,2,3)
1	0	1	10	(1,2,3), (1,3,2), (2,1,2,3), (2,1,3,2,3), (2,3,1,2,3,1), (2,3,1,3,2,1), (3,1,3,2), (3,1,2,3,2), (3,2,1,3,2,1), (3,2,1,2,3,1)
0	2	2	2	(1,2,3), (2,1,3)
0	2	1	3	(1,2,3), (2,1,3), (2,3,1,3)
0	1	2	3	(1,2,3), (2,1,3), (1,3,2,3)
0	1	1	10	(1,2,3), (1,3,2,3), (2,1,3), (2,3,1,3), (3,1,2,3,1,2), (3,1,2,3,2,1), (3,1,3,2,1), (3,2,1,3,2,1), (3,2,1,3,1,2), (3,2,3,1,2)

Bibliographie

- [Ami11] C. Amiot. On Generalized Cluster Categories. *Representations of algebras and related topics*, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich :1–53, 2011.
- [BDP13] T. Brüstle, G. Dupont, and M. Pérotin. On Maximal Green Sequences. *arXiv*, abs/1205.2050v2, 2013.
- [Dup10] G. Dupont. Mutation de carquois. *Camus 1*, pages 99–117, 2010.
- [Fom] S. Fomin. Cluster Algebras Portal.
- [Fom10] S. Fomin. Total Positivity and Cluster Algebras. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II (New Delhi)*, Hindustan Book Agency, pages 125–145, 2010.
- [FZ01] S. Fomin and A Zelevinsky. Cluster Algebras I : Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2) :497–529, 2001.
- [FZ03] S. Fomin and A Zelevinsky. Cluster Algebras : notes for the cdm-03 conference. *Current developments in mathematics, 2003*, Int. Press, Somerville, MA, pages 1–34, 2003.
- [Kel11] B. Keller. On Cluster Theory and Quantum Dilogarithm Identities. *Representations of algebras and related topics*, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich :85–116, 2011.

- [Kel12] B. Keller. Cluster Algebras and Derived Categories. *arXiv : 1202.4161, proceedings of the GCOE conference "Derived categories 2011 Tokyo"*, abs/1202.4161v4, 2012.
- [Lec10] B. Leclerc. Cluster Algebras and Representation Theory. *Proceedings of the international Congress of Mathematicians. Volume IV (New Delhi), Hindustan Book Agency*, pages 2471–2488, 2010.
- [Rei10] I. Reiten. Tilting Theory and Cluster Algebras. *appear in Trieste Proceedings of Workshop January 2006, arXiv : 1012.6014*, 2010.
- [Zel04] A. Zelevinsky. Cluster Algebras : notes for 2004 IMCC (Chonju, Korea, August 2004. *arXiv : 0407414*, 2004.
- [Zel05] A. Zelevinsky. Cluster Algebras ; Origins, Results ans Conjectures. *Advances in algebra towards millennium problems, SAS Int. Publ., Delhi*, pages 85–105, 2005.
- [Zel07] A. Zelevinsky. What is a Cluster Algebra? *Notices of the A.M.S. 54, no. 11*, pages 1494–1495, 2007.