



**UNIVERSITÉ DE
SHERBROOKE**

Faculté de génie

Département de génie mécanique

**ÉTUDE NUMÉRIQUE D'UN ÉCOULEMENT
DIPHASIQUE CRITIQUE DANS UN
CONVERGENT-DIVERGENT**

Thèse de doctorat (Ph.D.)
Spécialité : génie mécanique

Sylvain MARTEL

Jury : Luc FRÉCHETTE (directeur)
Yves MERCADIER (co-directeur)
Michel DOSTIE
Nicolas GALANIS
Mikhail Sorin (Rapporteur)



Library and Archives
Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-93269-8

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-93269-8

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

*À Nadia et mes trois enfants,
Benjamin, Antoine et Florence.
Merci de votre patience
et de votre appui.*

RÉSUMÉ

Cette thèse a pour but de présenter les travaux liés à l'étude numérique des écoulements critiques diphasiques dans la tuyère primaire d'un éjecteur utilisé pour améliorer le rendement d'un cycle de réfrigération.

En premier lieu, les bases d'un modèle d'écoulement multiphasique ainsi que les termes de source associés sont présentés. Les développements entourant les points singuliers ainsi que les conditions critiques sont également présentés. Deux schémas numériques unidimensionnels sont proposés pour l'étude d'un écoulement critique diphasique particulière. Les comparaisons des flux massiques critiques ainsi que des profils de pression numériques et expérimentaux montrent que le modèle représente bien l'évolution de l'écoulement diphasique. L'existence d'un point critique situé à un endroit différent du col géométrique a été vérifiée. L'étude numérique présente également une validation des conditions critiques utilisées ainsi que les effets des déséquilibres sur la position du point critique et sur l'écoulement. Des travaux supplémentaires sont cependant requis pour mieux comprendre le phénomène entourant les chocs en écoulements diphasiques et pour accroître la plage de taux de vide couverte par les schémas numériques.

Mots-clés : Écoulements critiques diphasiques, modélisation numérique, conditions critiques, étude numérique.

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier mon co-directeur, le Professeur Yves Mercadier, pour sa supervision exceptionnelle ainsi que pour son support durant mes travaux. Son aide a fait en sorte que ces dernières années à Sherbrooke soient une très bonne expérience d'apprentissage.

Je voudrais également exprimer ma gratitude au Dr. Michel Dostie de l'Institut de Recherche d'Hydro-Québec. Ses commentaires constructifs et ses suggestions ont été d'un aide incalculable tout au long de mes travaux.

Un merci spécial au Professeur Luc Fréchette pour avoir pris le flambeau de ma direction pour la fin de mon doctorat et les judicieux commentaires lors des dernières étapes de mes travaux.

Merci également aux autres membres du jury, Professeur Mikhail Sorin et Professeur Nicolas Galanis pour leurs commentaires précieux et leur soutien.

Pour leur support financier, j'aimerais remercier le Conseil de Recherche en Science Naturel et en Génie du Canada (CRSNG), le Fond Québécois de la Recherche sur la Nature et les Technologies (FQRNT) ainsi que la Chaire du CRSNG en Efficacité Énergétique Industrielle de l'Université de Sherbrooke gérée par le Professeur Nicolas Galanis.

Un merci spécial aux membres du département de génie mécanique et des études graduées pour toute l'aide concernant les détails administratifs.

Finalement, je voudrais remercier ma conjointe pour son amour, sa patience et sa compréhension durant cette aventure. Je n'aurais pas fait tout ce chemin sans toi.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ.....	I
REMERCIEMENTS.....	III
TABLE DES MATIÈRES	V
LISTE DES FIGURES	IX
LISTE DES TABLEAUX.....	XI
LISTE DES SYMBOLES.....	XIII
1 INTRODUCTION.....	1
1.1 RÉFRIGÉRATION ASSISTÉE PAR ÉJECTEUR	3
1.2 OBJECTIFS DU PROJET DE RECHERCHE	5
1.3 PLAN DE LA THÈSE ET CONTRIBUTIONS ORIGINALES	6
2 CONTEXTE ET PROBLÉMATIQUE.....	9
2.1 MODÉLISATION DES ÉJECTEURS	9
2.2 DÉFINITION D'UN ÉCOULEMENT CRITIQUE MULTIPHASIQUE	13
2.3 MODÉLISATIONS D'ÉCOULEMENTS CRITIQUES MULTIPHASIQUES.....	17
2.4 CONCLUSION	21
3 MODÉLISATION D'UN ÉCOULEMENT MULTIPHASIQUE	23
3.1 ÉQUATIONS DE CONSERVATION GÉNÉRALES MULTIPHASIQUES.....	23
3.2 ÉQUATIONS MOYENNÉES	26
3.2.1 <i>Moyenne volumique.....</i>	26
3.2.2 <i>Moyenne surfacique.....</i>	27
3.2.3 <i>Moyenne temporelle simple.....</i>	29
3.2.4 <i>Moyenne composée.....</i>	29
3.2.5 <i>Coefficients de corrélation.....</i>	30
3.3 MODÈLE MULTIPHASIQUE UNIDIMENSIONNEL.....	30
3.3.1 <i>Équations de conservation.....</i>	31
3.3.2 <i>Équations de mélange.....</i>	33
3.4 TERMES DE SOURCE AUX PAROIS	34
3.4.1 <i>Terme de source de masse.....</i>	34
3.4.2 <i>Terme de source de quantité de mouvement.....</i>	34
3.4.3 <i>Terme de source d'énergie.....</i>	35
3.5 TERMES DE SOURCE INTERPHASIQUES.....	36
3.5.1 <i>Terme de source de masse.....</i>	36
3.5.2 <i>Terme de source de quantité de mouvement.....</i>	39
3.5.3 <i>Terme de source d'énergie.....</i>	41
3.6 TERMES DE SOURCE RELIÉS AUX FORCES DE VOLUME.....	43
3.7 FRACTIONNEMENT	43
3.8 SOMMAIRE DE LA MODÉLISATION D'UN ÉCOULEMENT MULTIPHASIQUE PARTICULAIRE.....	44
4 ÉCOULEMENTS CRITIQUES MULTIPHASIQUES	45

4.1	SYSTÈME D'ÉQUATIONS 1D EN RÉGIME PERMANENT	45
4.2	DIAGONALISATION DE LA MATRICE JACOBIENNE J_F	46
4.3	CONDITION CRITIQUE.....	47
4.4	FAMILLE DE POINTS SINGULIERS	48
4.4.1	<i>Définition des ratios</i>	49
4.4.2	<i>Points singuliers</i>	50
4.5	POSITION DU POINT CRITIQUE	52
4.5.1	<i>Cas d'un écoulement diphasique en déséquilibre mécanique</i>	53
4.5.2	<i>Cas d'un écoulement diphasique en déséquilibre thermique</i>	54
4.5.3	<i>Cas d'un écoulement diphasique avec changement de phase</i>	55
5	MÉTHODES NUMÉRIQUES DE SOLUTION D'UN ÉCOULEMENT CRITIQUE DIPHASIQUE EN RÉGIME PERMANENT	57
5.1	SCHÉMA SIMPLE COMPRESSIBLE DIPHASIQUE.....	57
5.1.1	<i>Valeurs initiales</i>	58
5.1.2	<i>Résolution de l'équation de quantité de mouvement</i>	59
5.1.3	<i>Résolution de l'équation de correction de pression</i>	61
5.1.4	<i>Correction des pressions et des vitesses</i>	64
5.1.5	<i>Résolution de l'équation de conservation de l'énergie</i>	65
5.1.6	<i>Changement de phase</i>	65
5.1.7	<i>Déséquilibre mécanique</i>	66
5.1.8	<i>Déséquilibre thermique</i>	67
5.1.9	<i>Critère de convergence</i>	69
5.2	SCHÉMA DE RÉOLUTION DES FLUX DE MÉLANGE	69
5.2.1	<i>Système décentré avant utilisant les équations de mélange</i>	69
5.2.2	<i>Mise à jour des variables primitives</i>	70
5.2.3	<i>Gestion du débit d'entrée en fonction des conditions de sortie</i>	72
5.2.4	<i>Déséquilibres entre les phases</i>	73
5.2.5	<i>Convergence des résultats</i>	74
5.2.6	<i>Algorithme du schéma numérique</i>	74
5.3	CONDITIONS AUX LIMITES.....	76
6	RÉSULTATS ET DISCUSSIONS.....	77
6.1	VALIDATION DU SCHÉMA SIMPLE COMPRESSIBLE	77
6.1.1	<i>Étude de la convergence du schéma SIMPLE compressible</i>	77
6.1.2	<i>Écoulements monophasiques</i>	80
6.1.3	<i>Écoulements diphasiques sans changement de phase</i>	81
6.1.4	<i>Écoulements diphasiques avec changement de phase</i>	90
6.2	VALIDATION DU SCHÉMA FLUX-M.....	91
6.2.1	<i>Étude de la convergence du schéma</i>	91
6.2.2	<i>Comparaison avec le schéma SIMPLE compressible</i>	94
6.2.3	<i>Précision</i>	95
6.3	VALIDATION DES CONDITIONS CRITIQUES.....	97
6.3.1	<i>Point singulier</i>	97
6.3.2	<i>Discussion sur la position du point critique</i>	100
6.3.3	<i>Validation de la position du point critique</i>	102
6.3.4	<i>Valeurs propres</i>	104
6.4	LABORATOIRE NUMÉRIQUE.....	106
6.4.1	<i>Effet du rapport de débit sur le profil de pression</i>	107
6.4.2	<i>Effet du rapport de débit sur le débit critique</i>	108

6.4.3	<i>Effet du rapport de débit sur la position du point critique</i>	110
6.4.4	<i>Effet du déséquilibre mécanique</i>	111
6.4.5	<i>Effet de la masse virtuelle</i>	114
6.4.6	<i>Effet du déséquilibre thermique</i>	116
6.4.7	<i>Effet du changement de phase</i>	118
6.4.8	<i>Effet du fractionnement des gouttes</i>	120
6.4.9	<i>Évolutions d'un cas à l'équilibre et d'un cas en déséquilibre sans changement de phase</i>	123
6.4.10	<i>Distinction entre le régime du mélange et le régime de la phase compressible</i>	126
6.5	DISCUSSION SUR L'ÉTUDE ET LES SCHÉMAS NUMÉRIQUES	128
7	CONCLUSION	131
	ANNEXE A : ÉQUATIONS DE CONSERVATION UNIDIMENSIONNELLE	135
A.1	CONSERVATION DE LA MASSE	135
A.2	CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT	136
A.3	CONSERVATION DE L'ÉNERGIE.....	139
	ANNEXE B : ARTICLE DOSTIE ET AL. (2009)	145
	ANNEXE C : TERMES $\frac{\partial F_b^{\Sigma\{i\}}}{\partial Y_i}$	179
	LISTE DES RÉFÉRENCES	185

LISTE DES FIGURES

FIGURE 1.1 : PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT D'UN ÉJECTEUR.	2
FIGURE 1.2 : CYCLE DE RÉFRIGÉRATION À ÉJECTEUR DE DENSO/TOYOTA ET SON DIAGRAMME P-H.	4
FIGURE 2.1 : PERFORMANCE D'ENTRAÎNEMENT EN FLUX INDUIT [MARNOWSKI, 2007].	11
FIGURE 2.2 : PROFIL DE PRESSION DANS L'ÉJECTEUR [MARNOWSKI, 2007].	11
FIGURE 2.3 : PROFIL DE PRESSION DANS LA TUYÈRE POUR UN ÉCOULEMENT AIR-EAU EN DÉSÉQUILIBRE THERMIQUE ET MÉCANIQUE (RAPPORT DE DÉBIT ENTRE 1.5 ET 2.5) [LEMONNIER ET SELMER-OLSEN, 1992].	18
FIGURE 3.1 : ÉCOULEMENT À N PHASES.	25
FIGURE 3.2 : REPRÉSENTATION VOLUMIQUE D'UN TUBE À SECTION VARIABLE.	26
FIGURE 3.3 : TUBE À SECTION VARIABLE.	28
FIGURE 5.1 : VOLUME DE CONTRÔLE POUR L'ÉQUATION DE CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT.	59
FIGURE 5.2 : VOLUME DE CONTRÔLE POUR L'ÉQUATION DE CONTINUITÉ.	62
FIGURE 5.3 : ALGORITHME DU SCHÉMA FLUX-M.	75
FIGURE 6.1 : GÉOMÉTRIE DE LA TUYÈRE UTILISÉE PAR ELLIOTT ET WEINBERG (1968).	82
FIGURE 6.2 : COMPARAISON AVEC LE PROFIL DE PRESSION D'ELLIOTT ET WEINBERG (1968).	83
FIGURE 6.3 : GÉOMÉTRIE DE LA TUYÈRE UTILISÉE PAR CAROFANO ET MCMANUS (1969).	84
FIGURE 6.4 : COMPARAISON AVEC LE PROFIL DE PRESSION DE CAROFANO ET MCMANUS (1969).	85
FIGURE 6.5 : GÉOMÉTRIE DE LA TUYÈRE UTILISÉE PAR LEMONNIER ET SELMER-OLSEN (1992) (DIMENSIONS EN MM).	86
FIGURE 6.6 : COMPARAISON AVEC LES PROFILS DE PRESSION DE LEMONNIER ET SELMER-OLSEN (1992) OBTENUS AVEC UN FAIBLE RAPPORT DE DÉBIT (1.5 À 2.5).	88
FIGURE 6.7 : COMPARAISON AVEC LES PROFILS DE PRESSION DE LEMONNIER ET SELMER-OLSEN (1992) OBTENUS AVEC UN HAUT RAPPORT DE DÉBIT (27 À 50).	88
FIGURE 6.8 : GÉOMÉTRIE DE LA TUYÈRE UTILISÉE PAR STÄDTKE ET AL. (2005).	89
FIGURE 6.9 : COMPARAISON AVEC LES PROFILS DE PRESSION ET DE VITESSE DE STÄDTKE (2006).	90
FIGURE 6.10 : GÉOMÉTRIE DE LA TUYÈRE UTILISÉE PAR STARKMAN ET AL. (1964).	90
FIGURE 6.11 : COMPARAISON AVEC LE PROFIL DE PRESSION DE STARKMAN ET AL. (1964).	91
FIGURE 6.12 : IMPERFECTION AU POINT CRITIQUE OBTENUE AVEC LE SCHÉMA SIMPLE COMPRESSIBLE.	96
FIGURE 6.13 : IMPERFECTION DANS LA RÉGION DU CHOC DROIT OBTENUE AVEC LE SCHÉMA SIMPLE COMPRESSIBLE.	97
FIGURE 6.14 : VARIATION DES FLUX DE MÉLANGE, EXPRIMÉS EN FONCTION D'UNE SEULE VARIABLE PRIMITIVE. ...	98
FIGURE 6.15 : PROFILS DE PRESSION ET DE TEMPÉRATURE.	99
FIGURE 6.16 : PROFILS DES VITESSES ET DU RAPPORT DE GLISSEMENT.	99
FIGURE 6.17 : TERMES DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT POUR LA PHASE COMPRESSIBLE.	101
FIGURE 6.18 : VARIATIONS RELATIVES DES VARIABLES PRIMITIVES.	102

FIGURE 6.19 : LES TROIS VALEURS PROPRES D'UN SYSTÈME DIPHASIQUE EN FONCTION DE LA VITESSE DE LA PHASE DE RÉFÉRENCE.....	106
FIGURE 6.20 : PROFILS DE PRESSION POUR DIFFÉRENTS RAPPORTS DE DÉBIT.....	107
FIGURE 6.21 : PROFILS DE GLISSEMENT POUR DIFFÉRENTS RAPPORTS DE DÉBIT.....	108
FIGURE 6.22 : DÉBIT MASSIQUE DE MÉLANGE EN FONCTION DE LA PRESSION DE SORTIE POUR DIFFÉRENTS RAPPORTS DE DÉBIT.....	109
FIGURE 6.23 : DÉBIT DE MÉLANGE EN FONCTION DE LA PRESSION DE SORTIE POUR LA TUYÈRE DE LEMONNIER ET SELMER-OLSEN (1992).....	110
FIGURE 6.24 : POSITION DU POINT CRITIQUE EN FONCTION DE LA PRESSION DE SORTIE POUR DIFFÉRENTS RAPPORTS DE DÉBIT.....	111
FIGURE 6.25 : COMPARAISON DES PROFILS DE PRESSION EN ÉQUILIBRE ET EN DÉSÉQUILIBRE MÉCANIQUE.....	112
FIGURE 6.26 : COMPARAISON DES POSITIONS DU POINT CRITIQUE EN FONCTION DE LA PRESSION DE SORTIE POUR UN CAS EN ÉQUILIBRE ET UN CAS EN DÉSÉQUILIBRE MÉCANIQUE.....	113
FIGURE 6.27 : COMPARAISON DES PROFILS DE DÉBIT MASSIQUE DU MÉLANGE EN FONCTION DE LA PRESSION DE SORTIE POUR UN CAS EN ÉQUILIBRE ET UN CAS EN DÉSÉQUILIBRE MÉCANIQUE.....	114
FIGURE 6.28 : PROFILS DU RAPPORT DE GLISSEMENT AVEC ET SANS L'EFFET DE MASSE VIRTUELLE.....	115
FIGURE 6.29 : PROFILS DU NOMBRE CRITIQUE AVEC ET SANS L'EFFET DE LA MASSE VIRTUELLE.....	116
FIGURE 6.30 : PROFILS DE PRESSION AVEC ET SANS ÉQUILIBRE THERMIQUE.....	117
FIGURE 6.31 : PROFILS DES RAPPORTS DE DÉBITS DANS LA TUYÈRE AVEC ET SANS CHANGEMENT DE PHASE.....	118
FIGURE 6.32 : PROFILS DES TAUX DE VIDE DANS LA TUYÈRE AVEC ET SANS CHANGEMENT DE PHASE.....	119
FIGURE 6.33 : PROFILS DE PRESSION DANS LA TUYÈRE AVEC ET SANS CHANGEMENT DE PHASE.....	119
FIGURE 6.34 : PROFILS DES RAPPORTS DE GLISSEMENT DANS LA TUYÈRE AVEC ET SANS FRACTIONNEMENT.....	121
FIGURE 6.35 : PROFILS DE VITESSE DANS LA TUYÈRE AVEC ET SANS FRACTIONNEMENT.....	122
FIGURE 6.36 : PROFILS DE PRESSION DANS LA TUYÈRE AVEC ET SANS FRACTIONNEMENT.....	122
FIGURE 6.37 : RAPPORT DE TEMPÉRATURE DANS LA TUYÈRE AVEC ET SANS FRACTIONNEMENT.....	123
FIGURE 6.38 : PROFILS DE PRESSION DANS LA TUYÈRE À L'ÉQUILIBRE ET EN DÉSÉQUILIBRE.....	124
FIGURE 6.39 : PROFILS DES VITESSES DANS LA TUYÈRE À L'ÉQUILIBRE ET EN DÉSÉQUILIBRE.....	124
FIGURE 6.40 : PROFILS DES TEMPÉRATURES DANS LA TUYÈRE À L'ÉQUILIBRE ET EN DÉSÉQUILIBRE.....	125
FIGURE 6.41 : PROFILS DE MASSE VOLUMIQUE DANS LA TUYÈRE À L'ÉQUILIBRE ET EN DÉSÉQUILIBRE.....	125
FIGURE 6.42 : PROFILS DU TAUX DE VIDE DANS LA TUYÈRE À L'ÉQUILIBRE ET EN DÉSÉQUILIBRE.....	126
FIGURE 6.43 : PROFILS DE PRESSION DANS LA TUYÈRE POUR TROIS RAPPORTS DE DÉBIT DIFFÉRENTS AVEC DÉSÉQUILIBRE MÉCANIQUE.....	127
FIGURE 6.44 : RÉGIME D'ÉCOULEMENT DU MÉLANGE EN FONCTION DU RÉGIME D'ÉCOULEMENT DE LA PHASE COMPRESSIBLE.....	128
FIGURE 7.1 : TUBE À SECTION VARIABLE.....	138

LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU 3.1 : TERMES DE SUBSTITUTION POUR LES ÉQUATIONS DE CONSERVATION	24
TABLEAU 6.1 : VALEUR DU DÉBIT EN FONCTION DU NOMBRE DE MAILLE (AIR, $P_{IN} = 1$ MPA, $T_{IN} = 400$ K, $P_{OUT} = 0.5$ MPA, $M_{TH} = 3.9715$ KG/S, $F_U = 0.3$, $F_P = 0.8$, $C = 10^{-6}$)	78
TABLEAU 6.2 : VALEUR DU DÉBIT EN FONCTION DU NOMBRE DE MAILLES (AIR-EAU, $F_{M2} = 20$, $P_{IN} = 1$ MPA, $T_{IN} = 400$ K, $P_{OUT} = 0.5$ MPA, $F_U = 0.3$, $F_P = 0.8$, $C = 10^{-6}$)	78
TABLEAU 6.3 : VALEUR DU DÉBIT EN FONCTION DU NOMBRE DE MAILLES (AIR-EAU, $F_{M2} = 40$, $P_{IN} = 1$ MPA, $T_{IN} = 400$ K, $P_{OUT} = 0.5$ MPA, $F_U = 0.3$, $F_P = 0.8$, $C = 10^{-6}$)	78
TABLEAU 6.4 : ERREUR NUMÉRIQUE SUR LE DÉBIT EN FONCTION DU CRITÈRE DE CONVERGENCE POUR 4000 VOLUMES DE CONTRÔLE (AIR, $P_{IN} = 1$ MPA, $T_{IN} = 400$ K, $P_{OUT} = 0.5$ MPA, $M_{TH} = 3.9715$ KG/S, $F_U = 0.3$, $F_P = 0.8$.)	79
TABLEAU 6.5 : VALEUR DU DÉBIT EN FONCTION DES FACTEURS DE RELAXATION POUR 4000 VOLUMES DE CONTRÔLE (AIR, $P_{IN} = 1$ MPA, $T_{IN} = 400$ K, $P_{OUT} = 0.5$ MPA, $M_{TH} = 3.9715$ KG/S, $C = 10^{-6}$)	80
TABLEAU 6.6 : COMPARAISON AVEC LES DONNÉES THÉORIQUES POUR UNE PRESSION D'ENTRÉE DE 1 MPA ET UNE TEMPÉRATURE DE 400 K AVEC LA GÉOMÉTRIE ASTAR [STÄDTKE ET AL. 2005].	81
TABLEAU 6.7 : COMPARAISON AVEC LES DONNÉES D'ELLIOTT ET WEINBERG (1968).	84
TABLEAU 6.8 : COMPARAISON DES DÉBITS POUR LES FAIBLES RAPPORTS DE DÉBIT.	86
TABLEAU 6.9 : COMPARAISON DES DÉBITS POUR LES HAUTS RAPPORTS DE DÉBIT.	87
TABLEAU 6.10 : VALEUR DU DÉBIT EN FONCTION DU NOMBRE DE VOLUME DE CONTRÔLE (AIR, $P_{IN} = 1$ MPA, $T_{IN} = 400$ K, $P_{OUT} = 0.5$ MPA, $M_{TH} = 3.9715$ KG/S, $F_U = 0.3$, $F_P = 0.8$, $C = 10^{-6}$)	92
TABLEAU 6.11 : VALEUR DU DÉBIT EN FONCTION DU NOMBRE DE MAILLE POUR UN RAPPORT DE DÉBIT DE 20 (AIR-EAU, $P_{IN} = 1$ MPA, $T_{IN} = 400$ K, $P_{OUT} = 0.5$ MPA, $F_U = 0.3$, $F_P = 0.8$, $C = 10^{-6}$)	92
TABLEAU 6.12 : VALEUR DU DÉBIT EN FONCTION DU NOMBRE DE MAILLE POUR UN RAPPORT DE DÉBIT DE 40 (AIR-EAU, $P_{IN} = 1$ MPA, $T_{IN} = 400$ K, $P_{OUT} = 0.5$ MPA, $F_U = 0.3$, $F_P = 0.8$, $C = 10^{-6}$)	93
TABLEAU 6.13 : ERREUR NUMÉRIQUE SUR LE DÉBIT EN FONCTION DU CRITÈRE DE CONVERGENCE POUR 4000 VOLUMES DE CONTRÔLE (AIR, $P_{IN} = 1$ MPA, $T_{IN} = 400$ K, $P_{OUT} = 0.5$ MPA, $M_{TH} = 3.9715$ KG/S, $F_U = 0.3$, $F_P = 0.8$.)	93
TABLEAU 6.14 VALEUR DU DÉBIT EN FONCTION DES FACTEURS DE RELAXATION POUR 4000 VOLUMES DE CONTRÔLE (AIR, $P_{IN} = 1$ MPA, $T_{IN} = 400$ K, $P_{OUT} = 0.5$ MPA, $M_{TH} = 3.9715$ KG/S, $C = 10^{-6}$)	94
TABLEAU 6.15 : ÉCOULEMENT MONOPHASIQUE ISENTROPIQUE : AIR, $T_{IN} = 400$ K, $P_{IN} = 1$ MPA	95
TABLEAU 6.16 : COMPARAISON DES SOLUTIONS NUMÉRIQUES AU POINT CRITIQUE	95
TABLEAU 6.17 : COMPARAISON DE LA SECTION CRITIQUE AVANT ET APRÈS CORRECTION (AIR-EAU, $P_{IN} = 1$ MPA, $T_{IN} = 400$ K, $P_{OUT} = 0.5$ MPA)	103
TABLEAU 6.18 : ÉCART ENTRE LE DÉBIT SEUIL ET LE DÉBIT LIMITE.	109
TABLEAU 6.19 : EFFET DE LA MASSE VIRTUELLE SUR LE DÉBIT ET SUR LA POSITION DU POINT CRITIQUE.	116

TABLEAU 6.20 : COMPARAISON DES DÉBITS ET DE LA POSITION DU POINT CRITIQUE AVEC ET SANS DÉSÉQUILIBRE THERMIQUE (* INDIQUE LE DÉBIT SEUIL).	118
TABLEAU 6.21 : EFFET DU CHANGEMENT DE PHASE SUR LE DÉBIT ET SUR LA POSITION DU POINT CRITIQUE.	120
TABLEAU 6.22 : EFFET DU FRACTIONNEMENT SUR LE DÉBIT ET SUR LA POSITION DU POINT CRITIQUE.	120
TABLEAU 6.23 : EFFET DES DÉSÉQUILIBRES SUR LE DÉBIT ET SUR LA POSITION DU POINT CRITIQUE.	124

LISTE DES SYMBOLES

A	Section totale	m^2
A_D	Surface de l'interface entre deux phases	m^2
A_i	Section de la tuyère au volume de contrôle i	m^2
A_k	Section occupée par la phase k	m^2
A_k^D	Aire projetée d'une particule	m^2
A_{kf}	Surface de la frontière du volume de contrôle	m^2
A_{kW}	Surface du volume de contrôle de la phase k en contact avec la paroi	m^2
A_{pk}	Surface d'une particule	m^2
c	Ligne d'interface entre deux phases	-
C	Valeur cible pour la convergence	-
C_D	Coefficient de trainée	-
c_k	Ligne de contact de la phase k avec la paroi	-
C_{pk}	Chaleur massique à pression constante de la phase k	J/kg-K
C^{VM}	Coefficient de masse virtuelle	-
d	Diamètre de la conduite	m
D	Coefficient de diffusion	m^2/s
DIS	Nombre critique	-
E	Flux d'énergie du mélange	W
e_k	Énergie interne de la phase k	m^2/s^2
F	Matrice des flux spatiaux	
F_b^Σ	Flux de mélange b	N/m
$F_b^{\Sigma\{j\}}$	Flux de mélange exprimé selon la variable Y_{j1}	N/m
\bar{F}_{ext}	Vecteur des forces externes par unité de masse	N/kg
f_{hk}	Rapport des enthalpies	-
F_i	Flux i	
$F_i^{\{j\}}$	Flux fonction de la variable primitive Y_j et des autres flux	
f_k	Quantité f_k	
F_k	Flux spatial F de la phase k	
F_k^Σ	Flux de mélange k	
F_k^D	Terme de source lié à la trainée entre les phases	N/m
F_k^W	Terme de source visqueux à la paroi	N/m
f_μ	Coefficient de friction	-
f_{Mk}	Rapport de débit massique	-
f_{Tk}	Rapport des températures	-
h_{ck}	Coefficient de transfert de chaleur	W/m ² -K
h_k	Enthalpie de la phase k	J/kg
h_{km}	Enthalpie moyen de la phase k dans le volume de contrôle	J/kg
h_k^0	Enthalpie de la phase k à une température T_k^0	J/kg

h_{Mk}	Coefficient de transfert massique	m/s
h_{yk}	Enthalpie de changement de phase	J/kg
I	Matrice identité	
J	Flux d'impulsion du mélange	N
\mathbf{J}_F	Matrice Jacobienne	
$\mathbf{J}_F^{(\Lambda)}$	Matrice Jacobienne diagonale	
\mathbf{J}_k	Variable représentant les différents tenseurs des équations de conservation	-
\mathbf{J}_U	Matrice Jacobienne des flux temporels	
k	Coefficient de conductivité thermique	W/m-K
L	Longueur de la tuyère	m
Le	Nombre de Lewis	-
M	Débit massique du mélange	kg/s
M_c	Débit massique critique du mélange	kg/s
M_{col}	Nombre de Mach au col géométrique	-
M_{corr}	Débit massique du mélange corrigé	kg/s
M_k	Débit massique de la phase k	kg/s
M_{km_i}	Débit massique moyen de la phase k dans le volume de contrôle	kg/s
\dot{m}_k	Flux massique de la phase k	kg/m ² -s
M_L	Débit de mélange limite	kg/s
n	Nombre de phase	-
\bar{n}_k	Vecteur normal à l'interface entre deux phases	-
\bar{n}_{kf}	Vecteur normal à la surface du volume de contrôle	-
\bar{n}_{kc}	Normale à la ligne d'interface de la phase k dans le plan z	-
N_k	Débit de particules	Particules/s
\bar{n}_z	Vecteur unitaire de la direction axiale	-
p_{in}	Pression à l'entrée de la tuyère	Pa
P_c	Pression de sortie donnant un débit seuil	Pa
P_{col}	Pression au col géométrique	Pa
p_k	Pression de la phase k	Pa
p_k^D	Pression moyenne à l'interface	Pa
p_{ki}	Pression de la phase k au volume de contrôle i	Pa
p_{kin}	Pression de la phase k à l'entrée	Pa
p_{kout}	Pression de la phase k à la sortie	Pa
P_L	Pression de sortie donnant un débit limite	Pa
Pr	Nombre de Prandtl	-
P_0	Pression de référence	Pa
P_{sat}	Pression de saturation	Pa
\bar{q}_k	Flux de chaleur de la phase k	W/m ²
Re	Nombre de Reynolds	-
Re_m	Nombre de Reynolds du mélange	-
R_1	Constante spécifique des gaz parfait pour la phase 1	J/kg-K

R_k	Constante spécifique des gaz parfait pour la phase k	J/kg-K
r_k	Rapport des pressions	-
r_p	Rayon d'une particule	m
\mathbf{S}	Matrice des termes de source	
s	Entropie	J/kg-K
S_b^Σ	Sommation des termes de source associés aux flux b	
Sc	Nombre de Schmidt	-
Sh	Nombre de Sherwood	-
S_i	Terme de source du flux F_i	
$S_j^{(\Lambda)}$	Regroupement des termes de source	
s_k	Rapport de glissement	-
S_k	Terme de source du flux F_k	
t	Temps	s
t_k	Sous-intervalle durant lequel la phase k est présente	s
T_{in}	Température à l'entrée de la tuyère	K
T_k	Température de la phase k	K
T_{1in}	Température de la phase 1 à l'entrée	K
T_{ki}	Température de la phase k au volume de contrôle i	K
T_k^0	Température de référence de la phase k	K
T_0	Température de référence	K
\mathbf{U}	Matrice des flux temporels	
$\bar{u}_{A_{k1}}$	Vitesse de l'interface A_1	m/s
$\bar{u}_{A_{k2}}$	Vitesse de l'interface A_2	m/s
\bar{u}_D	Vitesse de l'interface entre deux phases	m/s
U_k	Flux temporel U de la phase k	
\bar{u}_k	Vitesse de la phase k	m/s
\bar{u}_{kf}	Vitesse de la frontière du volume de contrôle	m/s
u_{kW}	Vitesse de la phase k à la paroi	m/s
V	Volume total	m ³
V_k	Volume de la phase k	m ³
V_p	Volume de la particule	m ³
We	Nombre de Weber	-
w_i	Valeur de la correction de vitesse au volume de contrôle i	m/s
w_k	Composante axiale de la vitesse de la phase k	m/s
w_{1c}	Vitesse critique de la phase de référence	m/s
w_{km}	Vitesse moyenne de la phase k dans le volume de contrôle i	m/s
w_{ki}	Composante axiale de la vitesse de la phase k au volume de contrôle i	m/s
w_{kin}	Composante axiale de la vitesse de la phase k à l'entrée	m/s
w_k^{mean}	Vitesse moyenne de la phase transformée à l'interface	m/s
w_D	Composante axiale de la vitesse de l'interface entre deux phases	m/s
X_c	Position du point critique	m
\mathbf{Y}	Matrice des variables primitives	

Y_j	Variable primitive j	
Y_{j_1}	Variable primitive j de la phase 1	
$Y_{l(y,p)}$	Variable primitive l associée à la phase p et à la variable y	
x	Coordonnée du système cartésien	m
y	Coordonnée du système cartésien	m
z	Axe de l'écoulement	m
z_{ck}	Facteur de compressibilité de la phase k	-
z_{choc}	Position du choc	m
$z_{début}$	Position du début du choc	m
z_{fin}	Position de la fin du choc	m
z_i	Position du volume de contrôle i	m
<i>Lettres grecques</i>		
α_k	Fraction volumique de la phase k	-
α_{ki}	Fraction volumique de la phase k au volume de contrôle i	-
α_{kin}	Fraction volumique de la phase k à l'entrée	-
γ	Rapport des chaleurs massiques	-
ρ_k	Masse volumique de la phase k	kg/m ³
ρ_{ki}	Masse volumique de la phase k au volume de contrôle i	kg/m ³
ρ_{kin}	Masse volumique de la phase k à l'entrée	kg/m ³
ρ_{yk}	Masse volumique partielle de la phase k à l'état gazeux	kg/m ³
ρ_{sk}	Masse volumique gazeuse de la phase k à l'état saturé	kg/m ³
ψ_k	Quantité relative à la phase k	
φ_D	Terme de source d'entropie à l'interface entre deux phases	
φ_k	Terme de source relié à la variable ψ_k	
ϕ_k	Force de surface	N/m
τ_k	Tenseur des contraintes	N/m ²
Δ	Déterminant de la matrice Jacobienne \mathbf{J}_F	
Δ_j	Déterminant de la matrice Jacobienne \mathbf{J}_F dans laquelle la colonne j est remplacée par \mathbf{S}	
Δ_k	Source d'entropie interne par unité de masse	J/s-K-kg
Δ_D	Source d'entropie par unité de surface	J/s-K-m ²
λ_k	Valeurs propres du système	
μ	Viscosité dynamique du gaz loin de la particule	kg/m-s
μ_∞	Viscosité dynamique du gaz à la température de la particule	kg/m-s
μ_m	Viscosité dynamique du mélange	kg/m-s
μ_s	Viscosité dynamique à la température de l'interface	kg/m-s
σ_k^{MV}	Terme de source de masse à l'intérieur du volume de contrôle	kg/s-m
σ_k^{MW}	Terme de source de masse à la paroi	kg/s-m

σ_k^M	Terme de source de masse interphasique	kg/s-m
σ_k^{JV}	Terme de source de quantité de mouvement à l'intérieur du volume de contrôle	(N/m)
σ_k^{JW}	Terme de source de quantité de mouvement à la paroi	(N/m)
σ_k^J	Terme de source de quantité de mouvement interphasique	(N/m)
$\sigma_k^{J\mu}$	Terme de source de quantité de mouvement associé aux effets visqueux entre les phases	(N/m)
σ_k^{Jm}	Terme de source de quantité de mouvement associé au phénomène de transport entre les phases	(N/m)
σ_k^{Jvm}	Terme de source de quantité de mouvement associé à la masse virtuelle	(N/m)
σ_k^{JmW}	Terme de source de quantité de mouvement associé au transport au travers de la paroi	(N/m)
σ_k^{JAW}	Terme de source de quantité de mouvement associé à la variation de section de l'écoulement	(N/m)
$\sigma_k^{J\mu W}$	Terme de source de quantité de mouvement associé à l'effet visqueux à la paroi	(N/m)
σ_k^{EV}	Terme de source d'énergie à l'intérieur du volume de contrôle	(W/m)
σ_k^{EW}	Terme de source d'énergie à la paroi	(W/m)
σ_k^E	Terme de source d'énergie interphasique	(W/m)
σ_k^{Eq}	Terme de source d'énergie lié aux transferts thermiques entre les phases	(W/m)
$\sigma_k^{E\mu}$	Terme de source d'énergie lié à la dissipation visqueuse entre les phases	(W/m)
σ_k^{Eh}	Terme de source d'énergie lié au transport d'enthalpie entre les phases	(W/m)
σ_k^{Eu}	Terme de source d'énergie lié au transport de l'énergie cinétique entre les phases	(W/m)
σ_k^{EqW}	Terme de source d'énergie lié aux transferts thermiques à la paroi	(W/m)
$\sigma_k^{E\mu W}$	Terme de source d'énergie lié à la dissipation visqueuse à la paroi	(W/m)
σ_k^{EhW}	Terme de source d'énergie lié au transport d'enthalpie au travers de la paroi	(W/m)
σ_k^{EuW}	Terme de source d'énergie lié au transport de l'énergie cinétique au travers de la paroi	(W/m)
τ	Paramètre arbitraire définissant le système autonome	
χ_W	Perte de charge	N/m ²
θ	Rapport des températures	-

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

La complexité entourant les écoulements multiphasiques comporte un grand défi pour sa modélisation. En fait, plusieurs phénomènes se produisent dans ces écoulements et ceux-ci ne sont pas facilement mesurables. Malgré ce fait, de nombreux processus intègrent des machines qui font appel à des écoulements compressibles multiphasiques. Ces écoulements, bien que connus, étudiés et utilisés depuis de nombreuses années, ne sont pas totalement prévisibles et maîtrisés. Cela est d'autant plus vrai dans le cas particulier des écoulements au sein d'éjecteurs multiphasiques.

Tout d'abord, il est important de mentionner qu'un éjecteur est un dispositif versatile qui peut être utilisé dans plusieurs types d'équipements. En fait, il est capable de comprimer, d'aspirer, de mélanger et, dans des conditions de masses volumiques différentes, de séparer des fluides. Son fonctionnement est basé sur l'effet venturi qui permet l'aspiration et l'entraînement d'un fluide secondaire d'un niveau d'énergie moindre à partir d'un fluide moteur de haut niveau d'énergie mécanique. Les éjecteurs sont utilisés depuis les années 1850 aussi bien comme système de compression que comme pompe à vide. Cette caractéristique leur permet donc de répondre à des besoins variés dans les domaines de la pharmacologie, de la pétrochimie, de la chimie, de l'aéronautique et de l'énergie [Bonnington et King, 1972 ; Sun et Eames, 1995].

Par exemple, dans le cadre de la lutte contre la pollution, l'éjecteur est mis à contribution dans le processus de dissociation et de distribution de particules de graisse dans des fluides alimentaires [Adamopoulos et al., 1999]. De plus, parmi les industries faisant appel aux éjecteurs, l'industrie chimique l'utilise pour mélanger des fluides réactifs [Hu et al., 2002]. Les capacités de mélange des éjecteurs sont également utilisées pour le mélange air-carburant dans les chambres de combustion des réacteurs en aéronautique [De Chant et al., 2001]. Les éjecteurs peuvent

également être rencontrés dans le domaine de la production de froid de certains véhicules Toyota [Motor Magazine 2009].

La Figure 1.1 montre une configuration classique d'un éjecteur constitué de deux tuyères coaxiales liées par un collecteur d'aspiration. Cette figure donne également une représentation schématique unidimensionnelle de l'évolution du profil des vitesses le long de l'éjecteur. Quatre zones distinctes décrivant la plupart des types d'éjecteur peuvent être définies. Premièrement, la tuyère primaire est composée d'un convergent-divergent permettant d'accélérer rapidement l'écoulement primaire. À la sortie de cette tuyère, la basse pression et la quantité de mouvement de l'écoulement primaire induisent un mouvement du fluide secondaire. Cette zone correspond à l'initialisation des interactions dans le tube de mélange où les écoulements primaire et secondaire se fondent en un seul écoulement. D'ailleurs, l'interaction entre les deux écoulements peut engendrer de forts effets de cisaillement qui s'apparentent à un phénomène de couche limite à la jonction des deux écoulements. Selon son utilisation, un diffuseur peut convertir l'excédent de l'énergie cinétique, introduit par l'écoulement primaire, en augmentation de pression.

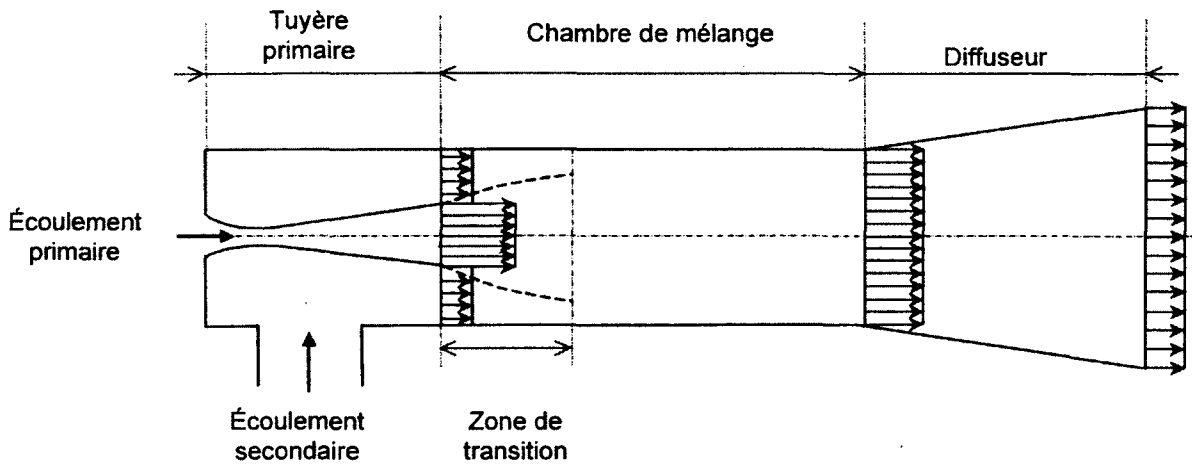


Figure 1.1 : Principe de fonctionnement d'un éjecteur.

Bien que son efficacité soit inférieure aux turbopompes et aux turbo ventilateurs [Alhussan et al., 2006], les éjecteurs offrent plusieurs avantages spécifiques. Premièrement, l'absence de pièce mécanique mobile assure une fiabilité et une grande longévité. De plus, son faible coût de fabrication le rend très attrayant. En plus d'accepter des fluides de toutes natures, il est également

disponible dans une large gamme de caractéristiques et de dimensions allant du millimètre à celle d'un immeuble.

1.1 Réfrigération assistée par éjecteur

Pour des applications comme la production de froid, l'éjecteur permet d'assurer, en tout ou en partie, la compression du fluide frigorigène [Menegay, 1997 ; Chunnanond et al., 2004 ; Bergander, 2006]. Le cycle de réfrigération à compression de vapeur standard emploie une valve de détente afin de diminuer la pression du réfrigérant vers l'évaporateur. L'utilisation d'un éjecteur pour remplacer la valve de détente permet d'effectuer une partie de la compression de la vapeur et d'améliorer le rendement du cycle de réfrigération. Cependant, il y a plusieurs autres configurations possibles de cycles utilisant l'éjecteur dans le but d'améliorer son rendement. L'éjecteur peut ainsi agir, entre autres, comme condenseur, comme pompe, comme compresseur et pour procurer différentes zones de refroidissement. Des analyses théoriques ont d'ailleurs démontrées que l'utilisation d'un éjecteur dans les systèmes de réfrigération permettraient de diminuer jusqu'à 22% la consommation électrique [Kornhauser, 1990 ; Nehdi et al, 2007]. De plus, une étude de Ressources Naturelles Canada [Ressource Naturelles Canada, 2009] indique qu'environ 15% de la consommation totale de l'énergie au Canada sert à la production de froid, incluant la climatisation. Cela peut représenter jusqu'à 280 PJ/an d'économie d'énergie et une réduction importante des effets nocifs pour l'environnement.

D'ailleurs, dans le but d'améliorer la consommation d'essence dans le secteur de l'automobile, Denso a développé un système de refroidissement de l'air assisté par éjecteur qui a été implanté dans la Toyota Prius 2010. Dans ce cycle, présenté à la Figure 1.2, le liquide saturé provenant du condenseur entre dans la tuyère motrice et entraîne le fluide secondaire provenant de l'évaporateur qui, lui, est alimenté par une partie du liquide provenant également du condenseur. Les écoulements primaire et secondaire se combinent dans la section de mélange et entrent dans le diffuseur où une augmentation de pression s'en suit. Une partie de la compression nécessaire dans le cycle de réfrigération est alors réalisée ce qui a pour conséquence de diminuer l'énergie consommée par le compresseur comme le montre le diagramme P-h de la Figure 1.2. Sur ce diagramme, il est important de mentionner que ce qui se passe entre l'entrée de l'éjecteur et sa

sortie n'est pas bien documenté d'où les traits en pointillés qui représentent une estimation du comportement. En fait, les interactions entre les phases, les écoulements primaire et secondaire ainsi que l'effet du développement d'une couche limite entre les écoulements, comme représentés à la Figure 1.1, ne sont pas encore bien expliqués pour des éjecteurs diphasiques.

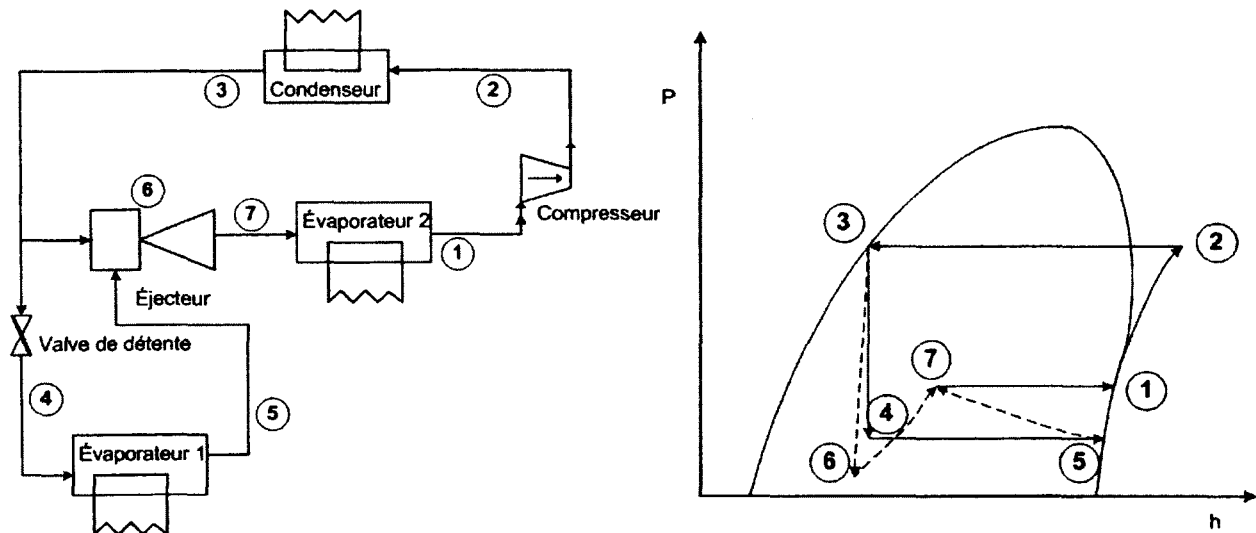


Figure 1.2 : Cycle de réfrigération à éjecteur de Denso/Toyota et son diagramme P-h.

Pour obtenir un rapport de compression permettant d'améliorer le rendement du cycle de réfrigération, l'écoulement dans la tuyère primaire de l'éjecteur doit être critique. Pour un écoulement monophasique, les conditions critiques se produisent lorsque la pression de sortie est suffisamment faible, occasionnant un débit maximal au col géométrique de la tuyère primaire. Ce point se nomme également le point sonique et est lié à la vitesse de propagation dans le fluide. Pour un écoulement diphasique, cela implique également un écoulement avec débit maximal, ou critique, pour maximiser le rapport de compression.

À l'intérieur de la tuyère motrice d'un tel éjecteur, le fluide subit des changements de pression importants ce qui donne lieu à des phénomènes d'évaporation et à des variations considérables des propriétés de l'écoulement tels la pression, la température, le taux de vide et la vitesse de chaque phase. Bien que la condensation/évaporation dans les jets soit étudiée depuis plusieurs années, beaucoup d'incertitudes sur les écoulements de faible titre de vapeur persistent,

notamment concernant les interactions entre les phases, les conditions critiques et l'endroit où celles-ci se produisent dans la tuyère.

1.2 Objectifs du projet de recherche

Dans le cas où l'entrée de la tuyère motrice est un fluide avec un faible taux de vide, il existe peu d'outils numériques permettant de bien prédire le comportement de l'écoulement critique et peu de données expérimentales disponibles pour comparer ces résultats. En fait, les modèles homogènes présentent des erreurs importantes en comparaison avec les données expérimentales et les modèles issus de la recherche sur la sécurité des réacteurs nucléaires sont trop spécifiques et sont difficilement transposables à d'autres conditions d'opération que celles pour lesquelles ils ont été testés [Menegay, 1996]. En réalité, beaucoup de modèles diphasiques, comme celui présenté par Städtke et al. (2005), demeurent associés à des écoulements critiques à haut taux de vide ce qui correspond à des écoulements à gouttes. De plus, lorsque des solutions d'écoulements critiques sont présentées, ceux-ci ne peuvent être expliqués à partir des définitions de blocage utilisées. D'ailleurs, Städtke (2006) rapporte un phénomène de « pseudo-choking » puisqu'il obtient un débit massique maximal sans pour autant avoir de point sonique dans son écoulement diphasique. Avant de se lancer dans la recherche d'une solution d'un écoulement dans un éjecteur, il est nécessaire de bien comprendre le comportement et les interactions interphasiques dans la tuyère primaire puisque les changements y sont prépondérants. D'ailleurs, Menegay (1996), cherchant à modéliser un éjecteur entier, n'a pas réussi à calculer l'écoulement dans la tuyère motrice à cause des difficultés liées aux phénomènes de choc et aux interactions entre les phases.

L'objectif principal de ce travail sera donc d'améliorer la compréhension des écoulements critiques diphasiques dans une tuyère en analysant l'influence du déséquilibre mécanique, du déséquilibre thermique, du changement de phase et du rapport de débit sur les conditions critiques de l'écoulement.

Des outils numériques ont d'ailleurs été développés pour résoudre les écoulements critiques diphasiques dans la tuyère primaire d'un éjecteur afin de valider le rôle de certaines familles de points critiques présentées par Dostie et al. (2009).

1.3 Plan de la thèse et contributions originales

Suite au présent chapitre qui introduit le but et l'objectif général des travaux de recherche, le second chapitre permet de bien comprendre la problématique et les besoins entourant les écoulements diphasiques critiques en tuyère. Ce chapitre expose les principaux travaux sur la modélisation des éjecteurs et des écoulements critiques diphasiques en tuyère et fait ressortir les éléments de recherche à approfondir.

Pour sa part, le troisième chapitre expose le système d'équations pour les écoulements diphasiques et ramène cet ensemble d'équations à un système unidimensionnel. Il présente également les relations utilisées pour la définition des différents termes de source, incluant les déséquilibres thermique et mécanique et le changement de phase.

Quant à lui, le quatrième chapitre présente une définition des écoulements critiques multiphasiques et présente la principale famille de points singuliers utilisé pour déterminer le régime d'écoulement (sous-critique, critique et sur-critique). Il expose également la relation décrivant la variation de section au point critique, qui n'est pas nécessairement au col géométrique et dépend des interactions entre les phases. Finalement, le lien entre les valeurs propres et les points singuliers est brièvement examiné.

Le chapitre 5 présente les méthodes numériques de solution d'un écoulement critique diphasique en régime permanent utilisées dans cette étude. La première méthode est basée sur le schéma SIMPLE compressible et la seconde est basée sur un nouveau schéma strictement conservatif basé sur l'utilisation des flux de mélange.

De son côté, le sixième chapitre présente les résultats et leur discussion. Une comparaison des solutions obtenues numériquement est faite avec des données expérimentales issues de la

littérature. Ce chapitre démontre également l'effet des interactions entre les phases sur l'écoulement critique. De plus, les conditions critiques y sont validées par comparaison à un schéma numérique n'ayant aucun lien avec ce critère et un autre basé sur l'utilisation des flux de mélange où le critère est mis de l'avant pour déterminer l'état de l'écoulement.

Enfin, le dernier chapitre présente les conclusions et les recommandations pour les travaux futurs.

Les principales contributions de cette thèse sont regroupées au niveau des points suivants :

- Validation des conditions critiques par comparaison des solutions numériques avec des données expérimentales.
- Étude du positionnement du point critique.
- Étude de l'influence des interactions entre les phases dans la région du point critique.
- Solution d'écoulements diphasiques critiques sur une plage de rapport de débit allant de 0 à 125 (taux de vide de 1 à 0.65) avec déséquilibres et changement de phase.
- Schéma numérique en régime stationnaire basé sur l'utilisation des flux de mélange.

CHAPITRE 2

CONTEXTE ET PROBLÉMATIQUE

Le but de ce chapitre est d'expliciter le sujet central de cette thèse et de dresser une revue de la modélisation des écoulements dans un éjecteur et plus particulièrement des écoulements multiphasiques dans une tuyère. Ainsi, la modélisation des éjecteurs, la définition d'un écoulement critique et la modélisation des écoulements compressibles multiphasiques seront abordées.

2.1 Modélisation des éjecteurs

Contrairement aux éjecteurs monophasiques, le comportement interne des éjecteurs diphasiques demeure peu documenté puisque les recherches sur ce sujet adoptent plutôt une approche globale qui s'intéresse principalement à la caractérisation des paramètres d'entrée et de sortie de l'éjecteur (pressions, débits) et à l'analyse de leur performance sans se soucier des propriétés locales (pression, vitesse, masse volumique, taux de vide). De ce fait, les interactions entre les phases et entre les écoulements primaire et secondaire ne sont pas bien connues et modélisées.

Un des premiers modèles d'éjecteur air-air fut présenté par Keenan et Newman (1942). Ce modèle est basé sur la dynamique des gaz et la loi des gaz parfaits. Un autre modèle d'éjecteur air-air fut mis de l'avant par Fabri et Siestrunk (1958). Ce modèle tient compte de quatre régimes d'écoulement distinct. Le régime supersonique se produit lorsque le rapport de pression entre l'entrée du primaire et la sortie de l'éjecteur est assez grand pour produire un écoulement supersonique dans la tuyère primaire et également dans la chambre de mélange. Pour un rapport de pression encore plus grand, l'écoulement induit du secondaire devient alors maximal produisant un régime supersonique saturé. Un régime mixte se produit lorsque le rapport de pression diminue et qu'un choc apparaît dans la tuyère primaire conduisant à un écoulement subsonique dans la chambre de mélange. Finalement, pour une pression à l'entrée du primaire encore plus faible, la pression à sa sortie occasionne un décollement de l'écoulement du

primaire et donne un régime mixte avec séparation. Ce modèle 1D calcule les performances globales de l'éjecteur, soit le ratio d'entraînement et le rapport de compression du secondaire. Les auteurs valident leurs résultats en les comparant à des tests expérimentaux. En posant un facteur de perte de charge fixe pour l'ensemble de la chambre de mélange, un bon accord est obtenu avec les données expérimentales. D'ailleurs, une erreur de $\pm 10\%$ est obtenue sur le ratio d'entraînement. Cette erreur est maximale lorsque les conditions d'opération génèrent un régime mixte avec séparation puisque cette évolution est basée sur des observations expérimentales d'écoulements dans les turboréacteurs. Une modélisation 2D et une approche locale pourraient donc permettre d'améliorer la compréhension autour de ces régimes.

Plusieurs études 1D portant sur ces éjecteurs monophasiques ont été entreprises depuis, mais les comparaisons du ratio d'entraînement avec les données expérimentales présentent encore un écart d'environ $\pm 10\%$ comme les résultats présentés par Huang et al. (1999). La solution de l'écoulement est basée sur la détermination d'un col hypothétique généré par l'écoulement et les forces de cisaillement entre les flux primaire et secondaire dans la zone d'initiation de mélange, située entre la sortie de la tuyère primaire et la chambre de mélange de l'éjecteur. Pour les écoulements diphasiques, cet aspect sera probablement amplifié puisque l'influence d'une phase sur une autre complexifiera le problème. Un modèle 2D est alors nécessaire afin de valider cette hypothèse et pour bien comprendre le rôle des interactions entre les écoulements primaire et secondaire.

Pour sa part, Marynowski (2007) a modélisé des écoulements compressibles monophasiques et faiblement diphasiques dans les éjecteurs en régime transitoire en utilisant l'algorithme SIMPLE pour traiter le couplage vitesse/pression. L'auteur compare initialement des profils de pression et les performances d'entraînement en flux induit (débit secondaire) obtenus avec des écoulements d'air sec. La Figure 2.1 montre l'évolution des débits massiques secondaires m_2 en fonction du rapport de pression P_{i1}/P_a où P_{i1} correspond à la pression à l'entrée de la tuyère primaire et P_a à la pression à l'entrée du secondaire. D'un point de vue global, une bonne corrélation entre les solutions numériques et expérimentales est observée.

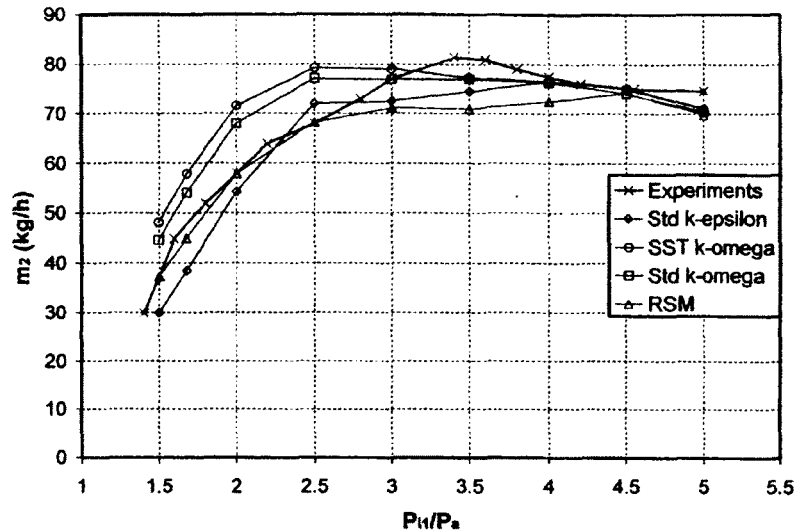


Figure 2.1 : Performance d'entraînement en flux induit [Marynowski, 2007].

Cependant, la Figure 2.2 montre que les simulations numériques obtenues par FLUENT surestiment la détente en sortie de la tuyère primaire. Les pressions calculées sont donc inférieures aux relevés expérimentaux. Les calculs surestiment également l'amplitude des chocs successifs dans la chambre de mélange.

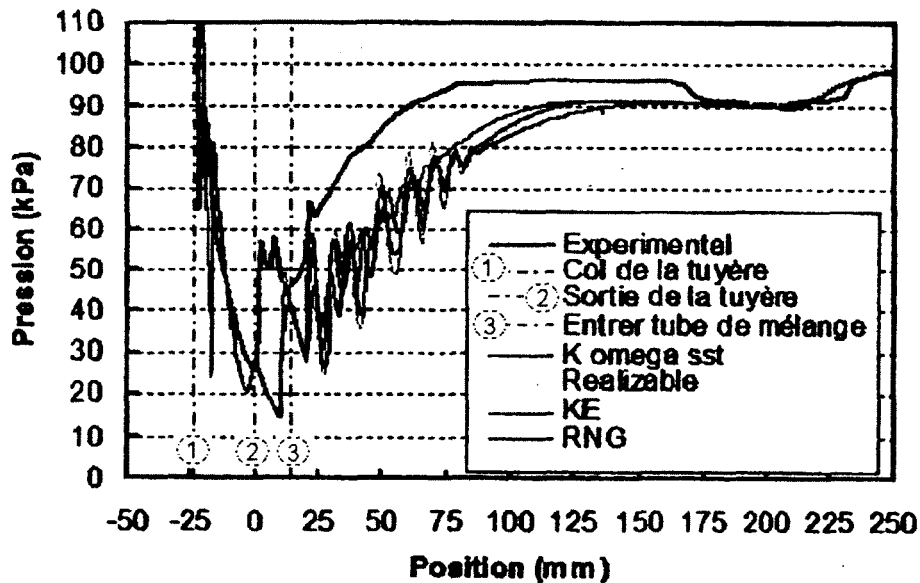


Figure 2.2 : Profil de pression dans l'éjecteur [Marynowski, 2007].

Il incorpore par la suite le phénomène d'évapo-condensation de l'humidité de l'air à son modèle 2D axisymétrique et valide les résultats globaux et locaux par comparaison avec des données

expérimentales d'un éjecteur à air humide obtenus d'un banc d'essais à l'Université de Franche-Comté. Il obtient les mêmes écarts qu'avec un écoulement monophasique. Par contre, les conditions d'opération ($P_{in} = 3.75$ Bar, $T_{in} = 300$ K) et le faible titre massique de vapeur (entre 2 et 6 g d'eau par kg d'air) donne un haut taux de vide dans la tuyère (≈ 1) qui correspond à la fraction volumique occupée par la phase gazeuse. Cet écoulement diphasique garde alors le même comportement qu'un écoulement monophasique bien que des équations de mélange soient utilisées. Déjà, cette étude paramétrique sur le fonctionnement des éjecteurs a mis en évidence des instabilités numériques à l'intérieur du tube de mélange lorsque le jet primaire devient supersonique. En fait, même si les interactions entre les phases ne sont pas importantes, l'auteur a rencontré des difficultés pour des écoulements monophasiques et diphasiques. L'augmentation de l'importance de la phase incompressible, caractérisée par un taux de vide qui se différencie de 1.0, devrait amplifier les interactions entre les phases occasionnant ainsi des difficultés supplémentaires. Ces instabilités rencontrées par Marynowski (2007) nécessitent donc des efforts pour mieux comprendre les interactions entre les phases et leur effet sur l'écoulement.

Zhu et Li (2009) présentent également un modèle 2D axisymétrique pour évaluer la performance des éjecteurs utilisant de la vapeur sèche (R141b) et de la vapeur humide (R11). Ce modèle ne comporte qu'une seule équation d'énergie pour la chambre de mélange et le diffuseur. De plus, ils assument une fonction linéaire pour le profil de vitesse radiale à l'intérieur de l'éjecteur. Le modèle est développé uniquement pour évaluer la performance des éjecteurs (ratio d'entraînement) donc les propriétés locales ne sont pas évaluées en détail. En moyenne, ils obtiennent une erreur de ± 9 % comparativement aux ratios d'entraînement et aux débits obtenus expérimentalement. Il semble alors impératif de regarder plus en détail le comportement local des écoulements dans l'éjecteur pour mieux comprendre et modéliser les performances globales.

De plus, une étude récente sur les éjecteurs gaz-gaz effectuée par Yan et al. (2012) compare également des données expérimentales et des solutions numériques en utilisant, cette fois-ci, du R134a à l'état vapeur surchauffée pour étudier l'effet de la géométrie sur le ratio d'entraînement. Un modèle numérique compressible 2D axisymétrique est utilisé pour comparer le ratio d'entraînement d'une géométrie de référence à d'autres géométries dont certains paramètres, comme le ratio des sections du primaire et du secondaire, l'angle du divergent, la longueur du

diffuseur et la longueur de la chambre de mélange, sont modifiés. Bien que l'auteur démontre des améliorations sur le ratio d'entraînement à rapport de compression donné, les comparaisons avec les données expérimentales sont à $\pm 10\%$ des valeurs réelles.

Parmi les études récentes, aucune ne porte sur les écoulements compressibles diphasiques et même les études sur les écoulements monophasiques comportent des différences de l'ordre de $\pm 10\%$ sur le ratio d'entraînement. De plus, mis à part les études de Marynowski (2007), de Zhu et Li (2009) et de Yan et al. (2012) qui solutionnent l'écoulement localement avec un modèle 2D, les études adoptent majoritairement une approche globale. Toutes ces études permettent de mettre en évidence l'importance de s'attarder sur les phénomènes d'échanges entre les phases ainsi que sur les propriétés de l'écoulement dans la tuyère primaire à l'intérieur de laquelle l'écoulement subit de grands changements sur une courte distance. De plus, pour bien modéliser le comportement de l'écoulement et l'interaction entre les flux primaire et secondaire, la chambre de mélange doit être modélisée par un modèle 2D. Donc, la modélisation d'éjecteur ne peut progresser tant et aussi longtemps que le comportement interne de l'écoulement n'est pas mieux compris, surtout en écoulements diphasiques comme ceux rencontrés dans les applications en lien avec les cycles de réfrigération assistés par éjecteur diphasique.

2.2 Définition d'un écoulement critique multiphasique

Dans beaucoup d'applications utilisant les éjecteurs, les écoulements doivent être supersoniques afin d'obtenir un rapport de compression suffisamment élevé pour améliorer le rendement du cycle de réfrigération. Dans les applications liées à la réfrigération assistée par éjecteur, les écoulements, en plus d'être critiques, sont diphasiques. La compréhension des écoulements critiques multiphasiques ainsi que l'influence des interactions entre les phases doit donc être approfondie.

L'existence d'un débit massique maximal pour des conditions amont fixées et une géométrie donnée lorsque les propriétés de l'écoulement en amont du point critique ne dépendent plus des variations de conditions en aval est un phénomène que l'on nomme « blocage » ou « écoulement critique ». Ce phénomène est une conséquence directe de la compressibilité de l'écoulement et il

est bien documenté pour un écoulement monophasique. Dans ce cas particulier, des définitions équivalentes de l'écoulement critique peuvent être énoncées tant d'un point de vue de débit critique que d'un point de vue des propagations de perturbation de pression puisque les valeurs propres du système sont directement liées à la vitesse du son dans l'écoulement. Selon les données expérimentales en écoulements critiques monophasiques, la courbe du débit massique en fonction de la pression de sortie de la tuyère représente bien ce phénomène. Les données expérimentales en écoulements critiques diphasiques présentent également le même profil d'évolution du débit en fonction de la pression de sortie pour des conditions d'entrée fixes. Cependant, un lien entre les vitesses de propagation et les conditions critiques n'a toujours pas été établi. Tout comme pour un écoulement transsonique, la zone à proximité immédiate de la section critique devrait être le lieu d'une transition entre un régime sous-critique et sur-critique.

L'explication théorique de ce phénomène en écoulement multiphasique demeure toujours incomplète après plus de 60 ans d'efforts tant au niveau de la position du point critique que de l'utilisation d'un critère de blocage universel.

D'ailleurs, Dostie et al. (2009) présentent une analyse des écoulements critiques multiphasiques et présentent des familles de points singuliers liées aux conditions critiques pour des conditions qui se différentient d'un écoulement monophasique (taux de vide différent de 1.0 et déséquilibres entre les phases). Cette analyse est présentée à l'Annexe B.

Avant ces travaux, de nombreux modèles d'écoulements compressibles multiphasiques utilisant différents critères de blocage ou des liens avec le phénomène de propagation ont été formulés. L'introduction d'une plus grande rigueur dans la définition des conditions critiques a été marquée par les travaux de Bourré et al. (1976). Pour un écoulement, le système d'équations de conservation 1D suivant peut être défini :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = \mathbf{S} \quad (2.1)$$

où t est le temps et z décrit l'espace. \mathbf{S} représente la matrice des termes de source alors que \mathbf{U} et \mathbf{F} sont les flux temporels et spatiaux fonctions des variables primitives \mathbf{Y} . Cette équation peut être réécrite sous la forme primitive suivante :

$$\mathbf{J}_U \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{J}_F \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial z} = \mathbf{S} \quad (2.2)$$

où \mathbf{J}_U et \mathbf{J}_F sont les Jacobiens qui relient les variations des flux aux variations des variables primitives :

$$\mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial Y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial Y_n} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{J}_U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial U_1}{\partial Y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial U_n}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial U_n}{\partial Y_n} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

L'étude du régime permanent conduit à un système linéaire où les dérivées des variables dépendantes sont les inconnues :

$$\mathbf{J}_F \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial z} = \mathbf{S} \quad (2.5)$$

En utilisant la règle de Cramer, la solution suivante est obtenue :

$$\frac{\partial Y_j}{\partial z} = \frac{\Delta_j(\mathbf{J}_F)}{\Delta(\mathbf{J}_F)} \quad (2.6)$$

où Δ est le déterminant, Δ_j le déterminant dans lequel la colonne j de la matrice \mathbf{J}_F est remplacée par \mathbf{S} .

Bourré et al. (1976) utilisent l'indétermination du terme de la dérivée spatiale des variables primitives pour déterminer les conditions de blocage. Ce blocage se produit lorsque les déterminants sont nuls :

$$\frac{\partial Y_j}{\partial z} = \frac{\Delta_j(\mathbf{J}_F)}{\Delta(\mathbf{J}_F)} = 0 \quad (2.7)$$

La position où les déterminants sont nuls définit la section critique et ce critère porte le nom de critère des déterminants.

Ils présentent également le critère de propagation de perturbations de pression pour les solutions en régime transitoire par analogie avec les écoulements monophasiques. Cette approche utilisée pour la prédiction du blocage de l'écoulement repose sur les vitesses de propagation d'une perturbation dans le fluide. Selon la théorie des caractéristiques, cette dernière vitesse est obtenue par les valeurs propres du système :

$$\Delta(\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{J}_U^{-1} \mathbf{J}_F) = 0 \quad (2.8)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité et λ_k les valeurs propres. Au point critique, au moins une valeur propre est nulle indiquant une vitesse de propagation nulle de la perturbation. De plus, cette approche pose à priori une équivalence entre le phénomène de blocage et la propagation de perturbation de pression. Ce lien n'a cependant pas encore été formellement démontré de manière générale pour un écoulement multiphasique.

De son côté, Bilicki et al. (1987) présentent une analyse du système en régime permanent défini à l'équation (2.5) pour un système dynamique différentiel. Ils définissent alors le système autonome en introduisant le paramètre τ :

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \Delta(\mathbf{J}_F) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial Y_j}{\partial \tau} = \Delta_j(\mathbf{J}_F) \quad j = 1, n \quad (2.10)$$

Donc, les conditions critiques sont liées aux points singuliers du système autonome lorsque tous les membres des équations (2.9) et (2.10) sont nuls :

$$\Delta(\mathbf{J}_F) = 0 \quad (2.11)$$

$$\Delta_j(\mathbf{J}_F) = 0 \quad j = 1, n \quad (2.12)$$

Cette analyse de Bilicki et al. (1987) fournit une première définition formelle du point critique en termes de point singulier d'un système dynamique différentiel pour des écoulements diphasiques homogènes. Cependant, cette analyse ne contribue pas à expliquer la nature du phénomène d'écoulement critique pour la modélisation d'écoulements multiphasiques.

2.3 Modélisations d'écoulements critiques multiphasiques

Afin de modéliser les écoulements critiques multiphasiques, des approches en régime permanent ou en régime transitoire peuvent être adoptées. Par contre, celles-ci doivent tenir compte des déséquilibres entre les phases pour bien capter leur effet sur les conditions critiques. Le modèle doit être en mesure de bien représenter aussi bien les propriétés globales que les propriétés locales autant pour un écoulement à bulle qu'un écoulement à goutte.

De son côté, Dostie (1988) propose une approche unidimensionnelle en régime permanent peu coûteuse en temps de calcul pour déterminer l'évolution de l'écoulement dans une tuyère. Cette méthode itérative de type « marche avant » permet d'obtenir l'évolution de l'écoulement vers l'état critique en utilisant deux conditions critiques pour chaque phase : un critère d'impulsion et un critère d'énergie. Donc, avec les conditions à l'entrée et en calculant les propriétés de chaque volume de contrôle jusqu'au col, cela permet de déterminer si l'écoulement est critique ou non et d'adapter les conditions initiales et la pression de sortie de sorte à obtenir un débit critique au col. L'auteur considère le phénomène de débit critique comme une propriété intrinsèque du mélange multiphasique. Il utilise les équations de conservation de mélange pour remplacer les équations de conservation de la phase compressible. De plus, l'auteur utilise l'hypothèse voulant que la position de la section critique se situe au col bien qu'il démontre numériquement qu'une zone critique post-col existe. Cependant, l'existence de cette zone n'est toujours pas démontrée expérimentalement et des difficultés de convergence sont observées près du col géométrique. L'auteur doit alors imposer une valeur de glissement entre les phases pour pouvoir continuer le calcul de la solution dans le divergent.

Lemonnier et Selmer-Olsen (1992) utilisent également une approche 1D pour résoudre un modèle numérique avec glissement entre les phases et avec pertes de charge aux parois. Cependant, contrairement à Dostie (1988) qui solutionne directement pour les flux de mélange, ils solutionnent pour les variables primitives et ils utilisent le critère de blocage (2.7). Sans avoir une explication complète et une vue d'ensemble des écoulements critiques, ces travaux vont dans la même direction que le présent travail. Ils présentent également des profils de pression et des mesures de débits expérimentaux d'écoulement qui seront réexaminés au Chapitre 6. Dans ce cas

cependant, le modèle ne représente pas bien le profil de pression dans la section du col droit puisqu'il surestime la dépression comme le présente la Figure 2.3.

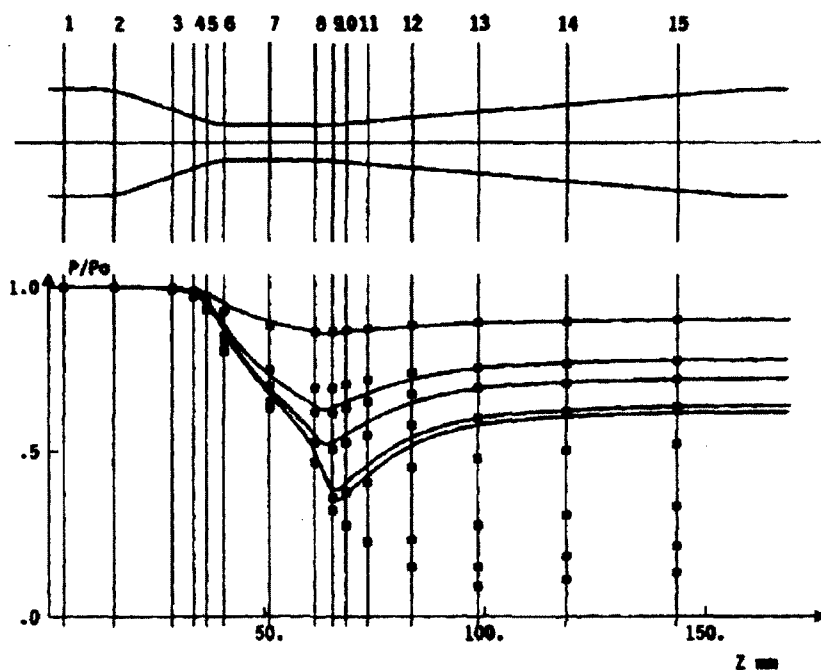


Figure 2.3 : Profil de pression dans la tuyère pour un écoulement air-eau en déséquilibre thermique et mécanique (rapport de débit entre 1.5 et 2.5) [Lemonnier et Selmer-Olsen, 1992].

Le schéma numérique utilisé est limité puisqu'il ne peut calculer des écoulements sur-critiques d'où l'absence de courbes pour les derniers points expérimentaux sur la Figure 2.3. De plus, les auteurs ne peuvent expliquer pourquoi ils obtiennent un débit maximal lorsque le rapport de débit augmente alors que la phase compressible est toujours en régime subsonique. Ce constat illustre bien le manque d'informations entre le phénomène de propagation et les conditions critiques de l'écoulement. Une meilleure compréhension des interactions entre les phases et une définition plus complète du critère de blocage présenté par Bilicki et al. (1987) deviennent alors essentielles pour mieux modéliser l'évolution des profils le long de la tuyère et pour mieux discuter du caractère critique ou non de l'écoulement.

Plusieurs critères de blocage ont été définis pour prédire l'écoulement critique. Elias et Lellouche (1994) présentent une revue de 15 modèles 1D d'écoulement critique diphasique. Ils présentent sept modèles analytiques comme le modèle homogène à l'équilibre, le modèle non-homogène à l'équilibre ou le modèle homogène en déséquilibre. Le modèle homogène est basé sur

l'hypothèse de termes de transfert infinis entre les phases occasionnant des vitesses et des pressions identiques pour les deux phases. Le modèle non-homogène en équilibre permet des vitesses différentes entre les phases tout en maintenant l'équilibre thermique tandis que le modèle homogène en déséquilibre permet uniquement un déséquilibre thermique entre les phases. Les auteurs présentent également trois modèles avec fonctions d'ajustement pour les modèles analytiques afin d'obtenir une forme plus simple décrivant le débit critique permettant ainsi de réduire le temps de calcul nécessaire à la solution du système d'équations. Finalement, les auteurs présentent cinq modèles numériques incluant six équations afin d'obtenir les variations locales des propriétés de chaque phase de l'écoulement (vitesse, pression, masse volumique). Ils évaluent les différents modèles en les comparant avec des données expérimentales d'écoulements critiques disponibles dont ceux de Marviken [Schultz et al. 1981]. Tout d'abord, les modèles analytiques avec fonction d'ajustement donnent des résultats peu concluants pour le calcul du débit critique (± 50 % d'écart). De plus, bien que les modèles numériques donnent de meilleurs résultats, ils démontrent que la capacité de ces modèles à prédire les données de Marviken est très limitée puisque les écarts entre le débit critique mesuré et calculé sont de plus ou moins 50 %. Les auteurs concluent qu'aucun modèle n'est actuellement satisfaisant sur une large plage de conditions d'opération et de géométries.

Depuis cette étude d'Elias et Lellouche (1994), en raison des nombreux efforts pour développer des méthodes de simulation numérique dans le domaine de la thermo-hydraulique nucléaire et avec l'augmentation des capacités de calcul numérique, de nombreux développements en régime transitoire ont été réalisés pour rendre les systèmes complètement hyperboliques. Un tel système a comme avantage numérique de ne posséder que des valeurs propres réelles. Saurel et al. (1999) relèvent qu'un des problèmes du système d'équations hyperboliques réside dans l'occurrence de termes non-conservatifs dans les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie liés aux interfaces entre les phases. Différents artifices sont alors proposés pour corriger cette situation comme l'ajout de masse virtuelle, de corrélation de saut de pression aux interfaces ainsi que des termes de correction de pression [Chung et al. 2001 ; Chung et al. 2002]. Bien que ces artifices soient ajoutés dans le but de stabiliser les schémas numériques, ils n'ont pas toujours directement un sens physique. Alors que la masse virtuelle entraîne parfois des valeurs propres complexes, les relations de saut et de correction de pression sont habituellement en lien avec la

tension de surface des bulles. L'application de ces corrélations est donc limitée à des écoulements à haut taux de vide.

Citu (2003) présente les résultats de ses travaux de doctorat sur les écoulements critiques à bulles à l'équilibre thermique et sans changement de phase. Dans ce modèle 1D en régime transitoire, le rapport de glissement entre les phases est constant. Trois équations de conservation de mélange sont utilisées pour remplacer les équations de conservation de la phase incompressible et deux équations de conservation de la phase gazeuse sont utilisées. Ce modèle n'est valide uniquement que pour une plage de taux de vide allant de 0.01 à 0.1 puisque l'équation de quantité de mouvement de la phase compressible a été simplifiée pour obtenir une forme conservative. L'auteure utilise le critère de blocage de Bilicki et al. (1987) pour obtenir une équation de flux massique critique. Une comparaison des solutions numériques en régime permanent avec des données expérimentales provenant de la littérature fait ressortir que la justesse des résultats de flux massique critique est tributaire du rapport de glissement qui est, dans ce cas, imposé. Pour un écoulement monophasique incompressible utilisant de l'eau comme fluide, le modèle est incapable de bien prédire le profil de pression dans le divergent d'une tuyère. Selon l'auteure, cela est dû au caractère 1D du système d'équations qui ne peut bien représenter les effets bidimensionnels de l'écoulement dans le divergent.

De son côté, Städtke (2006) introduit également, en plus d'un terme de masse virtuelle ajouté pour assurer l'hyperbolicité du système, un terme de correction de pression aux interfaces pour éliminer les problèmes d'instabilités numériques. De plus, ce modèle tient compte de la friction aux parois et des interactions aux interfaces de phase comme la trainée et le déséquilibre thermique. Ce schéma a notamment été capable de représenter numériquement la transition entre un écoulement subsonique et supersonique, des gradients abrupts et des discontinuités dans une tuyère. Cependant, l'auteur présente seulement des résultats pour des écoulements critiques diphasiques très proches des écoulements monophasiques (taux de vide de 0.98) où les interactions interphasiques sont peu importantes et où le mélange se comporte essentiellement comme un écoulement monophasique. D'ailleurs, l'auteur utilise des équations de mélange pour définir une vitesse du son de mélange et ainsi lier les phénomènes de propagation aux phénomènes de blocage comme dans le cas d'un écoulement monophasique. Le lien entre le

phénomène de blocage et les vitesses de propagation n'a cependant pas été établi par Städtke (2006) et les équations de vitesse du son dans le mélange dépendent souvent de facteurs n'ayant aucune représentation physique pour tenir compte du poids de chaque phase. L'utilisation de cette vitesse du son comme comparatif à la vitesse de l'écoulement génère un « pseudo-choking » décrit par l'auteur lorsque l'écoulement, étant subsonique, atteint tout de même un débit maximal. Ce phénomène n'a d'ailleurs pu être expliqué par l'auteur en se basant sur les critères de blocage actuels.

Il est important de mentionner que l'absence de références plus récentes est dû au fait qu'aucun travail important n'a été publié depuis ceux de Städtke (2006) sur les écoulements diphasiques critiques.

2.4 Conclusion

Bref, malgré le nombre d'applications touchées par les écoulements diphasiques critiques, il persiste toujours une incompréhension entourant le phénomène d'écoulement critique. L'analyse des travaux antérieurs a fait ressortir le besoin d'améliorer la compréhension des interactions entre les phases, le besoin de mieux définir un critère de blocage couvrant une plage complète de taux de vide ainsi que le besoin de se diriger vers une modélisation 2D afin de bien rendre compte des interactions complexes dans la chambre de mélange d'un éjecteur.

Tout d'abord, l'étude de l'écoulement critique diphasique 1D dans la tuyère motrice, où les changements sont les plus rapides et importants, sera d'abord privilégiée puisque cette tuyère permet de circonscrire le problème tout en approfondissant les écoulements critiques et en faisant l'étude des interactions entre les phases. Dans cette partie de l'éjecteur, une modélisation 1D devrait permettre d'obtenir des solutions acceptables puisque le temps de résidence et les effets de couche limite sont moins importants que dans la chambre de mélange. Les prochains chapitres représentent donc une contribution à l'étude de ce phénomène, à savoir l'étude numérique d'un écoulement diphasique critique dans une tuyère.

CHAPITRE 3

MODÉLISATION D'UN ÉCOULEMENT MULTIPHASIQUE

Ce chapitre regroupe les équations de conservation pour un système multiphasique multidimensionnel et les lois de fermeture requises y sont présentées. Il définit les concepts théoriques pour tenir compte, entre autres, des transferts entre les phases et des déséquilibres thermiques et mécaniques. Ce cadre théorique permet donc de décrire complètement les écoulements multiphasiques dans un conduit. Plus précisément, le système de conservation 1D pour des écoulements multiphasiques à gouttes sera présenté. Le but n'étant pas d'obtenir une représentation exacte de ces écoulements, mais un modèle permettant d'étudier numériquement l'effet des déséquilibres sur l'écoulement multiphasique critique. Dans ce modèle, la phase continue est considérée comme compressible et les autres phases sont considérées comme condensées sous forme de particules sphériques.

3.1 Équations de conservation générales multiphasiques

L'équation de conservation générale sous forme intégrale présentée par Delhay et al. (1980) est utilisée comme point de départ pour obtenir le système de conservation permettant d'étudier les écoulements critiques.

Soit le volume de contrôle, illustré à la Figure 3.1, dont la frontière A_{kf} se déplace à la vitesse \bar{u}_{kf} . En supposant que ce volume renferme n phases séparées les unes des autres par une interface A_D se déplaçant à une vitesse \bar{u}_D , l'évolution d'une quantité ψ_k relative à la phase k est alors donnée par l'équation de conservation générale sous forme intégrale :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} \rho_k \psi_k dV = & - \int_{A_{kf}} \rho_k \psi_k (\bar{u}_k - \bar{u}_{kf}) \cdot \bar{n}_{kf} dA - \int_{A_D} \rho_k \psi_k (\bar{u}_k - \bar{u}_D) \cdot \bar{n}_k dA \\
& - \int_{A_{kf}} \mathbf{J}_k \cdot \bar{n}_{kf} dA - \int_{A_D} \mathbf{J}_k \cdot \bar{n}_k dA + \int_{V_k} \rho_k \varphi_k dV + \int_{A_D} \varphi_D dA
\end{aligned} \tag{3.1}$$

où ρ_k est la masse volumique de la phase k et V_k est le volume occupé par cette phase. \bar{u}_k et \bar{u}_{kf} sont respectivement les vitesses de la phase k et de la frontière du volume de contrôle alors que \bar{n}_k et \bar{n}_{kf} sont respectivement le vecteur normal à l'interface entre deux phases et le vecteur normal à l'élément de surface dA sur la surface du volume de contrôle. Finalement, \mathbf{J}_k est un tenseur, φ_k représente le terme de source par unité de volume de la variable ψ_k et φ_D le terme de source de ψ_k à l'interface entre deux phases.

Les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement, d'énergie et d'entropie peuvent être obtenues en effectuant les substitutions présentées au Tableau 3.1.

Tableau 3.1 : Termes de substitution pour les équations de conservation

Équation	ψ_k	\mathbf{J}_k	φ_k	φ_D
Masse	1	0	0	0
Quantité de mouvement	\bar{u}_k	$-\boldsymbol{\tau}_k$	\bar{F}_{ext}	0
Énergie	$e_k + \frac{\bar{u}_k \cdot \bar{u}_k}{2}$	$\bar{q}_k - \boldsymbol{\tau}_k \cdot \bar{u}_k$	$\bar{F}_{ext} \cdot \bar{u}_k$	0
Entropie	s	$\frac{\bar{q}_k}{T_k}$	$\frac{\Delta_k}{\rho_k}$	Δ_D

où $e_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2}$ est la somme des énergies interne et cinétique, $\boldsymbol{\tau}_k$ est le tenseur des contraintes, \bar{F}_{ext} est le vecteur des forces externes par unité de masse, \bar{q}_k est le vecteur des flux de chaleur et T_k est la température de la phase k . Le terme $\boldsymbol{\tau}_k \cdot \bar{u}_k$ représente la dissipation visqueuse de l'énergie cinétique en énergie thermique, Δ_k représente la source d'entropie par unité de masse pour la phase k et Δ_D représente la source d'entropie locale par unité de surface à l'interface.

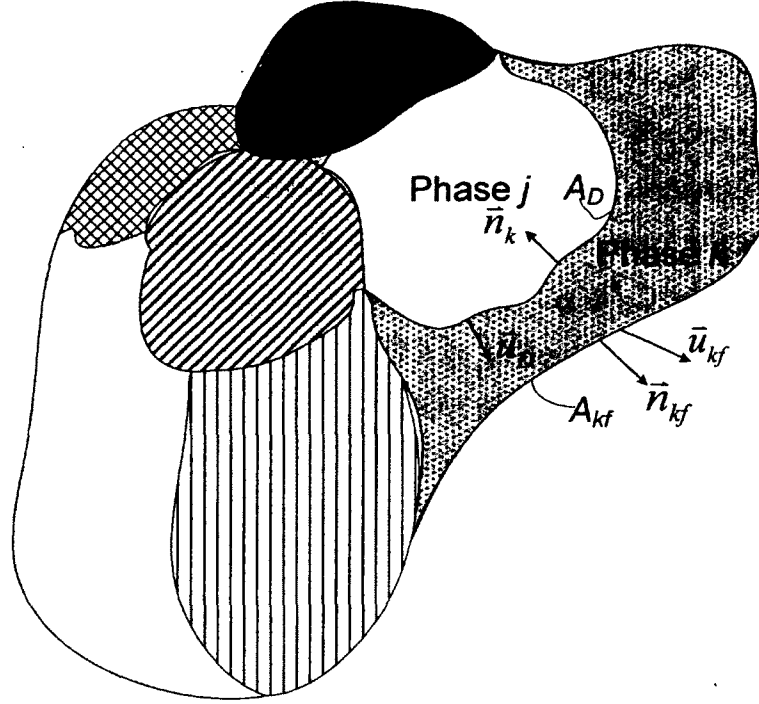


Figure 3.1 : Écoulement à n phases

Le système d'équations de conservation sous forme intégrale (3.1) peut être transformé en utilisant la règle de Leibniz et le théorème de Gauss sous la forme suivante :

$$\sum_k \int_{V_k} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho_k \psi_k + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \bar{u}_k) + \nabla \cdot \mathbf{J}_k - \rho_k \phi_k \right] dV = - \int_{A_D} [\dot{m}_k \psi_k + \bar{n}_k \cdot \mathbf{J}_k + \phi_D] dA \quad (3.2)$$

Le terme \dot{m}_k représente la densité de flux massique de la phase k au travers la discontinuité et est défini comme :

$$\dot{m}_k = \rho_k (\bar{u}_k - \bar{u}_D) \cdot \bar{n}_k \quad (3.3)$$

Puisque, peu importe le volume et la surface, l'équation (3.2) doit être satisfaite, les équations de conservation phasiques locales instantanées et leurs conditions de saut à l'interface A_D peuvent être représentées respectivement par les relations suivantes :

$$\frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \bar{u}_k) + \nabla \cdot \mathbf{J}_k - \rho_k \phi_k = 0 \quad (3.4)$$

$$\sum_k (\dot{m}_k \psi_k + \bar{n}_k \cdot \mathbf{J}_k + \phi_D) = 0 \quad (3.5)$$

où les valeurs des termes ψ_k , \mathbf{J}_k , ϕ_k et ϕ_D sont présentées au Tableau 3.1.

3.2 Équations moyennées

Les variations des propriétés de l'écoulement sont plus complexes sur une base locale en raison du caractère inconnu et imprévisible de l'interface à tout instant. De ce fait, une moyenne des équations de conservation locales et instantanées est faite permettant d'interpréter les mesures locales à l'aide d'opérateurs. Le développement des équations moyennées est basé sur une forme limite des théorèmes de Leibniz et de Gauss. Ces équations jouent un rôle important puisque ce sont elles qui sont généralement utilisées en modélisation numérique. Elles fournissent des paramètres globaux qui se prêtent plus aisément à une interprétation physique ou à des mesures expérimentales. Les moyennes effectuées portent soit sur l'espace, soit sur le temps ou sur les deux à la fois. Les moyennes spatiales peuvent être linéaires, surfaciques ou volumiques. Les moyennes temporelles peuvent être simples ou doubles. Finalement, les équations peuvent être moyennées de manière combinée. Les descriptions des opérateurs de moyenne présentés dans cette section sont exposées en détail par Delhay et al. (1980).

3.2.1 Moyenne volumique

L'obtention des équations moyennées unidimensionnelles pour un volume provient des relations découlant de la Figure 3.2.

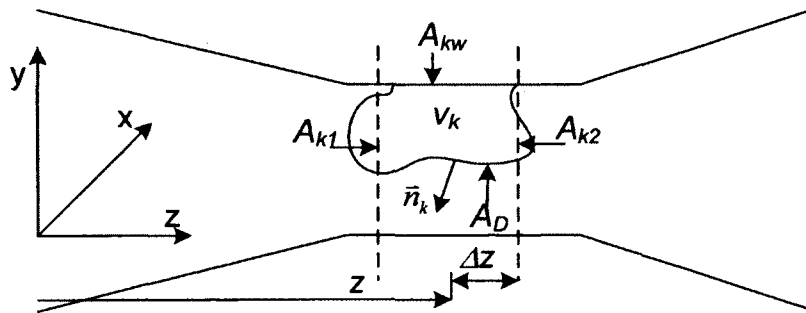


Figure 3.2 : Représentation volumique d'un tube à section variable.

Le volume défini par les plans $z+\Delta z$ et $z-\Delta z$ et par les parois de la conduite coupe le volume occupé par la phase k .

- A_D : interface entre deux phases
- \vec{n}_k : normale à l'interface entre deux phases
- A_{k1} : plan limite du volume de contrôle en $z-\Delta z$

- A_{k2} : plan limite du volume de contrôle en $z + \Delta z$
- A_{kW} : surface de contact avec la paroi
- $\bar{u}_{A_{k1}}$: vitesse de l'interface A_1
- $\bar{u}_{A_{k2}}$: vitesse de l'interface A_2
- \bar{u}_k : vitesse de la phase k
- \bar{u}_D : vitesse de l'interface

L'existence de $\bar{u}_{A_{k1}}$ et $\bar{u}_{A_{k2}}$ implique que les interfaces du volume de contrôle peuvent varier dans le temps.

En utilisant l'équation du bilan global généralisée sur le volume occupé par la phase k et en utilisant la forme limite de la règle de Leibniz de même que celle du théorème de Gauss, l'équation généralisée moyennée sur le volume est obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V_k \langle \rho_k \psi_k \rangle_3 + \frac{\partial}{\partial z} V_k (\langle \rho_k \psi_k w_k \rangle_3 + \langle \bar{n}_z \cdot J_k \rangle_3) - V_k \langle \rho_k \phi_k \rangle_2 = - \int_{A_{k2}} (\rho_k \psi_k \bar{u}_{A_{k2}} \cdot \bar{n}_z) dA \\ - \int_{A_{k1}} (\rho_k \psi_k \bar{u}_{A_{k1}} \cdot \bar{n}_z) dA - \int_{A_D} (\dot{m}_k \psi_k + \bar{n}_k \cdot J_k) dA - \int_{A_{kW}} (\bar{n}_k \cdot \rho_k \psi_k w_k + \bar{n}_k \cdot J_k) dA \end{aligned} \quad (3.6)$$

où

$$\langle f_k \rangle_3 = \frac{1}{V_k} \int_k f_k dV \quad (3.7)$$

Dans ce cas, les intégrales sur A_{k1} et A_{k2} disparaissent si le volume de contrôle est fixe. En divisant cette équation par le volume total V correspondant au volume de contrôle, la fraction volumique de chaque phase α_k dans le volume de contrôle étudié est obtenue.

3.2.2 Moyenne surfacique

Considérons un écoulement multiphasique ayant lieu dans un tube à section variable comme montré à la Figure 3.3.

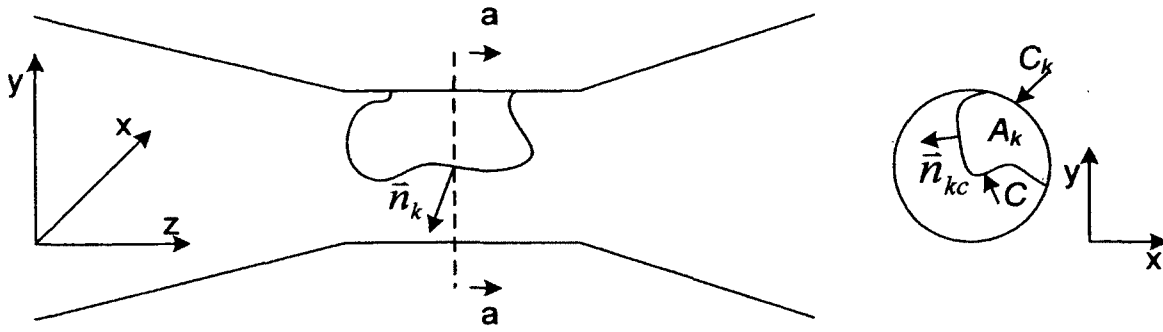


Figure 3.3 : Tube à section variable.

Faisant correspondre l'axe z avec l'axe de la conduite, les paramètres géométriques à une section donnée sont :

- c : ligne d'interface dans le plan z
- c_k : ligne de contact de la phase k avec la paroi imperméable
- A_k : surface occupée par la phase k dans le plan z
- \bar{n}_k : normale à l'interface entre deux phases
- \bar{n}_{kc} : normale à la ligne d'interface dans le plan z
- \bar{u}_D : vitesse de l'interface

La variation dans le temps d'une quantité est donnée par une variante de la règle de Leibniz où l'intégrale de ligne est transformée en intégrale de surface à l'aide d'une variante du théorème de Gauss. Les équations moyennées sont obtenues en intégrant, sur la surface occupée par la phase k , l'équation primaire généralisée (3.2). Ainsi, l'équation généralisée unidimensionnelle moyennée en surface est obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k \psi_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} (A_k \langle \rho_k \psi_k w_k \rangle_2 + A_k \langle \bar{n}_z \cdot \mathbf{J}_k \rangle_2) - A_k \langle \rho_k \phi_k \rangle_2 = \\ - \int_c (\dot{m}_k \psi_k + \bar{n}_k \cdot \mathbf{J}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot \rho_k \psi_k w_k + \bar{n}_k \cdot \mathbf{J}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

où

$$\langle f_k \rangle_2 = \frac{1}{A_k} \int_{A_k} f_k dA \quad (3.9)$$

En divisant cette équation par la section totale à l'endroit de la coupe transversale, la fraction de chaque phase α_k contenue dans le volume de contrôle étudié est obtenue. Il est à noter que cette équation ne restreint pas le type de paroi utilisé. Les parois peuvent donc être imperméables ou poreuses.

3.2.3 Moyenne temporelle simple

Cet opérateur permet d'éliminer les fluctuations des variables principales. En considérant un point de l'écoulement et en observant la quantité f_k transportée par la phase k , le graphique de cette quantité en fonction du temps présentera des discontinuités dues à l'absence de la phase k durant certains intervalles de temps. Lorsqu'un intervalle $[\beta]$ est étudié, $[\beta_k]$ représente le sous-intervalle durant lequel la phase k est présente.

En intégrant l'équation primaire généralisée sur l'intervalle $[\beta_k]$ et en utilisant la forme limite de la règle de Leibniz et du théorème de Gauss, l'équation généralisée moyennée sur le temps est obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\alpha_k \rho_k \psi_k}^x + \nabla \cdot \overline{\alpha_k \rho_k \psi_k \bar{u}_k}^x + \nabla \cdot \overline{\alpha_k \bar{J}_k}^x - \overline{\alpha_k \rho_k \phi_k}^x = \\ - \sum_D \frac{1}{|\bar{u}_D \cdot \bar{n}_k|} (\dot{m}_k \psi_k + \bar{n}_k \cdot \bar{J}_k) \end{aligned} \quad (3.10)$$

où

$$\bar{f}_k^x = \frac{1}{\beta_k} \int_{[\beta_k]} f_k dt \quad (3.11)$$

Ici, α_k représente le taux de présence de la phase k dans l'intervalle $[\beta]$:

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\beta} \quad (3.12)$$

3.2.4 Moyenne composée

Ce type d'équations qui découlent de moyennes temps-surface ou temps-volume fournit le modèle de base pour l'étude des problèmes pratiques d'écoulement diphasiques. Quelque soit l'ordre selon lequel les équations sont moyennées, les équations finales sont équivalentes.

Puisque c'est un modèle 1D qui sera développé à la section 3.3, la moyenne par rapport au temps sur l'intervalle $[\beta]$ de l'équation moyennée sur la surface est présentée :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{A_k \langle \rho_k \psi_k \rangle_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k \langle \rho_k \psi_k w_k \rangle_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k \langle \bar{n}_z \cdot J_k \rangle_2} - \overline{A_k \langle \rho_k \phi_k \rangle_2} = \\ & - \int_c (\dot{m}_k \psi_k + \bar{n}_k \cdot J_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot \rho_k \psi_k w_k + \bar{n}_k \cdot J_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Cette équation est équivalente à l'équation qui aurait été obtenue en moyennant sur la surface l'équation moyennée par rapport au temps. Des équations similaires peuvent être obtenues pour une moyenne volumique.

3.2.5 Coefficients de corrélation

Les opérateurs de moyenne utilisés sur l'espace et le temps donnent des moyennes de produits qui peuvent être exprimées en fonction du produit des moyennes et de coefficients de corrélation :

$$\begin{aligned} \overline{fg} &= A \overline{f} \overline{g} \\ \langle fg \rangle &= B \langle f \rangle \langle g \rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

où A et B sont les coefficients de corrélation temporelle et spatiale respectivement. Dans cette étude, ces coefficients sont posés comme étant unitaire puisque peu d'information permet d'évaluer ces termes plus précisément. De plus, le symbole des opérateurs est laissé de côté afin de simplifier la visualisation des équations. D'ailleurs, Städtke (2006), qui présente les travaux les plus récents sur les écoulements diphasiques, utilise également $A = 1$ et $B = 1$ dans ces équations de conservation moyennées.

3.3 Modèle multiphasique unidimensionnel

Dans le cadre de cette thèse, un modèle multiphasique unidimensionnel en régime permanent est utilisé pour étudier l'effet de différents déséquilibres sur l'écoulement. Dans un premier temps, les équations de conservation décrivant l'évolution de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie seront énoncées à partir de l'équation suivante, moyennée en surface et selon le temps :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (A_k \rho_k \psi_k w_k + A_k \bar{n}_z \cdot J_k) &= A_k \rho_k \phi_k \\ - \int_c (\dot{m}_k \psi_k + \bar{n}_k \cdot J_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot \rho_k \psi_k w_k + \bar{n}_k \cdot J_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dans cette équation, le premier terme du membre de droite représente les termes de source de volume. Le second représente les termes de source interphasiques tandis que le dernier représente les termes de source à la paroi. La définition détaillée de ces termes pour chacune des équations de conservation est présentée à l'Annexe A.

3.3.1 Équations de conservation

À partir des équations moyennées en surface pour un régime permanent unidimensionnel, les équations de conservation suivantes sont obtenues et s'appliquent à chaque phase (voir l'Annexe A pour plus de détails) :

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial z} (A_k \rho_k w_k) = \sigma_k^{MV} + \sigma_k^M + \sigma_k^{MW} \quad (3.16)$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial z} (A_k \rho_k w_k^2) + \frac{\partial}{\partial z} (A_k p_k) = \sigma_k^{JV} + \sigma_k^J + \sigma_k^{JW} \quad (3.17)$$

Conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(A_k \rho_k w_k \left(h_k + \frac{w_k^2}{2} \right) \right) = \sigma_k^{EV} + \sigma_k^E + \sigma_k^{EW} \quad (3.18)$$

Dans ces équations, les termes de source de chaque phase k sont représentés par σ_k . L'exposant indique si ce terme de source est lié à la conservation de la masse (M), à la conservation de la quantité de mouvement (J) ou à la conservation de l'énergie (E). σ_k^{MV} , σ_k^{JV} et σ_k^{EV} représente les termes de source de volume, σ_k^{MW} , σ_k^{JW} et σ_k^{EW} les termes de source à la frontière de l'écoulement et σ_k^M , σ_k^J et σ_k^E représente les termes de source interphasiques. Ces termes de source ainsi que les hypothèses les concernant seront définis aux sections 3.4 à 3.6.

Une fois les termes de source connus dans le système formé des équations (3.16) à (3.18), cinq variables pour chacune des phases doivent être déterminées (A_k , ρ_k , w_k , p_k et h_k). Il faut donc deux équations supplémentaires pour chaque phase de manière à fermer le système d'équations.

Premièrement, une équation d'état pour chaque phase est introduite :

$$\rho_k = \rho_k(p_k, T_k) \quad (3.19)$$

où T_k est la température de la phase k définie comme une fonction de l'enthalpie h_k en assumant une chaleur massique C_{pk} constante :

$$h_k = h_k^0 + C_{pk}(T_k - T_k^0) \quad (3.20)$$

où h_k^0 et T_k^0 sont des constantes. Cette forme simple permet également de tenir compte du changement de phase. Dans cette étude, la température de référence est posée comme étant $T_k^0 = 0$.

De plus, une relation liant la section occupée par chacune des phases peut être introduite. Pour un écoulement multiphasique à n phases, cette relation pour un écoulement à section prescrite A est donnée par la relation suivante :

$$\alpha_1 = 1 - \sum_{k=2}^n \alpha_k \quad (3.21)$$

où les fractions volumiques des phases sont liées entre elles par des relations connues ou imposées. Ici, un écoulement à gouttes est supposé dans lequel la phase continue est compressible. Les autres phases sont considérées comme étant condensées. Puisque la masse volumique est constante, la fraction volumique de chaque phase condensée est obtenue à partir de son équation de conservation de la masse :

$$\alpha_k = \frac{M_k}{w_k \rho_k A} \quad (3.22)$$

Le système est maintenant bien défini et les $5n$ variables dépendantes peuvent être solutionnées à partir des $5n$ équations du système :

- $3n$ équations de conservation : (3.16), (3.17) et (3.18)
- n équations d'état : (3.19)
- $n-1$ équations de fraction volumique pour les phases condensées : (3.22)

- 1 équation restreignant la section d'écoulement : (3.21)

3.3.2 Équations de mélange

Le système d'équations de mélange est obtenu en sommant, par type, les équations de conservation de chaque phase. Ces équations permettent donc de considérer l'écoulement dans son ensemble et d'inclure les termes de couplage interphasique sans avoir à les expliciter. En effet, ces interactions s'annulent mutuellement en se basant sur l'équation de saut présentée à l'équation (3.5) pour un système global conservatif. Voici donc les équations de mélange retenues :

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sum_k (A_k \rho_k w_k) = \sum_k (\sigma_k^{MW} + \sigma_k^{MV}) = \frac{\partial M}{\partial z} \quad (3.23)$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sum_k (A_k \rho_k w_k^2 + A_k p_k) = \sum_k (\sigma_k^{JW} + \sigma_k^{JV}) = \frac{\partial J}{\partial z} \quad (3.24)$$

Conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial z} \sum_k \left(A_k \rho_k w_k \left(h_k^0 + C_{pk} T_k + \frac{w_k^2}{2} \right) \right) = \sum_k (\sigma_k^{EW} + \sigma_k^{EV}) = \frac{\partial E}{\partial z} \quad (3.25)$$

Ces équations de mélange introduisent les flux de mélange suivants : le flux de masse M , le flux d'impulsion J et le flux d'énergie E . Ces équations de mélange seront utilisées à partir du Chapitre 4 pour représenter la phase continue de l'écoulement tandis que les phases condensées seront représentées par les équations de conservation de phase. Les Chapitres 4 et 5 présenteront les avantages liés à cette formulation du système d'équations du système multiphasique global.

3.4 Termes de source aux parois

Dans les équations de conservation (3.16) à (3.18) et (3.23) à (3.25), il faut définir les termes de source. Premièrement, les termes de source aux parois seront explicités. Ces termes représentent les transferts à la frontière de l'écoulement. Dans le présent cas, la frontière de l'écoulement est constituée de parois imperméables et adiabatiques.

3.4.1 Terme de source de masse

Ce terme de source représente le débit massique total qui traverse la frontière de l'écoulement perpendiculairement à l'axe de l'écoulement principal. Puisque la frontière de l'écoulement est imperméable, aucun transfert massique n'a lieu (section A.1) :

$$\sigma_k^{MW} = 0 \quad (3.26)$$

3.4.2 Terme de source de quantité de mouvement

Les transferts de quantité de mouvement aux parois causés par des effets de frontières peuvent être décomposés en trois termes pour chacune des phases comme le montre la section A.2 en annexe :

$$\sigma_k^{JW} = \sigma_k^{JmW} + \sigma_k^{JAW} + \sigma_k^{J\mu W} \quad (3.27)$$

Ces trois termes représentent, respectivement pour chaque phase, une force associée au phénomène de transport à travers la paroi (σ_k^{JmW}), à la contrainte normale liée à la variation de la section d'écoulement (σ_k^{JAW}) et à l'effet visqueux à la paroi ($\sigma_k^{J\mu W}$).

En ce qui concerne le terme lié au phénomène de transport, puisque la paroi est imperméable, ce terme est nul :

$$\sigma_k^{JmW} = \sigma_k^{MW} \cdot u_{kW} = 0 \quad (3.28)$$

où u_{kW} est la composante de la vitesse de la phase k parallèle à la paroi.

De son côté, le terme de contrainte normale exprimant l'effet de la variation de section peut s'exprimer comme :

$$\sigma_k^{JAW} = p_k \frac{\partial A_k}{\partial z} \quad (3.29)$$

Finalement, le terme concernant l'effet global de la viscosité aux parois peut être évalué à l'aide de corrélation de perte de charge à la paroi comme celle de Lockhart et Martinelli (1949). Cependant, il est beaucoup plus difficile d'évaluer les contributions des interactions particules-frontières reliées à chaque phase condensée. Selon l'étude de Martin et al. (1984) portant sur des corrélations de perte de charge fréquemment utilisées pour des écoulements, les pertes prédites ont un écart-type de l'erreur très élevé pouvant atteindre 50 % dans certains cas. De ce fait et puisque le convergent-divergent est généralement de courte longueur pour les éjecteurs utilisés dans les applications visées, les pertes de charge seront nulles pour toutes phases condensées :

$$\sigma_k^{J\mu W} = 0 \quad (3.30)$$

Cependant, pour la phase continue, la relation de perte de charge utilisée par Lemonnier et Selmer-Olsen (1992) a été choisie pour sa simplicité et son efficacité à bien représenter le phénomène :

$$\sigma_1^{J\mu W} = \rho_1 w_{1W}^2 \frac{f_\mu}{2} \quad (3.31)$$

où f_μ représente le coefficient de friction donné par la corrélation de Blasius :

$$f_\mu = 0.0791 \text{Re}_1^{-0.25} \quad (3.32)$$

où Re_1 représente le nombre de Reynolds de la phase continue.

3.4.3 Terme de source d'énergie

Le terme de source d'énergie à la paroi peut être décomposé de la façon suivante comme le montre la section A.3 de l'Annexe A :

$$\sigma_k^{EW} = \sigma_k^{EqW} + \sigma_k^{E\mu W} + \sigma_k^{EhW} + \sigma_k^{EuW} \quad (3.33)$$

Ces termes représentent respectivement un terme de transfert de chaleur vers la phase k incluant tous les modes de transferts thermiques (σ_k^{EqW}), un terme relié à la dissipation visqueuse ($\sigma_k^{E\mu W}$), un terme de transport d'enthalpie (σ_k^{EhW}) et un terme de transport d'énergie cinétique (σ_k^{EuW}).

Ces deux derniers termes de transport sont associés au transport de masse de la phase k à la paroi et sont donc nuls dans cette étude :

$$\begin{aligned}\sigma_k^{EhW} &= \sigma_k^{MW} h_k = 0 \\ \sigma_k^{EuW} &= \sigma_k^{MW} \frac{(u_{kW})^2}{2} = 0\end{aligned}\quad (3.34)$$

Puisque les pertes de charge à la paroi ont été posées comme étant nulles pour les phases condensées, les effets dissipatifs y étant associés sont également nuls :

$$\sigma_k^{E\mu W} = \sigma_k^{J\mu W} \cdot u_{kW} = 0 \quad (3.35)$$

Cependant, pour la phase continue, les effets dissipatifs sont :

$$\sigma_1^{E\mu W} = \sigma_1^{J\mu W} \cdot u_{kW} = 0 \quad (3.36)$$

Finalement, pour le terme de source associé au transfert de chaleur, il existe des corrélations globales permettant de déterminer le transfert de chaleur à la frontière lorsqu'il s'agit d'une paroi solide, mais pas pour le transfert associé à chaque phase. Dans cette étude, l'hypothèse d'un écoulement adiabatique sera faite comme première estimation :

$$\sigma_k^{EqW} = 0 \quad (3.37)$$

3.5 Termes de source interphasiques

En plus des termes de source aux parois, des termes de source interphasiques étant associés au transfert entre les phases doivent être définis. Ils permettent de tenir compte des changements de phases et des déséquilibres thermique et mécanique.

3.5.1 Terme de source de masse

Dans un écoulement multiphasique, un transfert massique entre les phases peut avoir lieu dépendamment des conditions thermodynamiques. Par exemple, lorsqu'un écoulement liquide passe dans un convergent-divergent, une partie du liquide peut devenir gazeuse avec la diminution de pression et un changement de phase a lieu.

Le terme de source de masse entre les phases correspond au transfert de masse à l'interface (section A.1) :

$$\sigma_k^W = - \int_{A_D} \dot{m}_k dA \quad (3.38)$$

Le transfert de masse pour une phase donnée peut être déterminé à l'aide de corrélations. Au niveau de la topologie de l'écoulement, l'hypothèse d'écoulement à gouttes est utilisée. Le rayon moyen r_p des particules sphériques d'une phase permet d'obtenir la surface d'échange A_{pk} entre les phases. Une relation souvent employée dans les écoulements particuliers est utilisée :

$$\sigma_k^W = \frac{N_k A_{pk} h_{Mk} (\rho_{yk} - \rho_{sk})}{w_k} \quad (3.39)$$

où N_k est le débit de particules, h_{Mk} est le coefficient de transfert massique, ρ_{yk} est la masse volumique partielle de la phase k à l'état gazeux et ρ_{sk} est la masse volumique gazeuse de la phase k à l'état saturé correspondant à la température de la phase k . Cette relation permet de déterminer le taux d'évaporation puisque les conditions de saturation de sont pas toujours respectées.

Dans le cas de particules sphériques, le débit de particules N_k est donné par :

$$N_k = \frac{3 A_k \rho_k w_k}{4 \rho_k \pi r_p^3} \quad (3.40)$$

Pour fermer le système, il est alors nécessaire d'introduire une relation, le critère de fractionnement, pour lier la vitesse de la phase k aux rayons des particules. Cette relation sera explicitée à la section 3.7 et concernera uniquement l'aspect de fractionnement.

La masse volumique de vapeur saturée se définit selon la relation suivante :

$$\rho_{sk} = \frac{P_{sat}}{z_{ck} R_k T_k} \quad (3.41)$$

où z_{ck} est le facteur de compressibilité, R_k la constante spécifique des gaz parfait pour la vapeur et P_{sat} la pression de vapeur saturée à une température T_k .

La pression de vapeur saturée P_{sat} pour la vapeur est donnée par la relation empirique suivante (Formule de Clapeyron modifiée) :

$$\ln\left(\frac{P_{sat}}{P_o}\right) = \frac{L_v}{R_k} \left(\frac{1}{T_o} - \frac{1}{T_k} \right) \quad (3.42)$$

où L_v est la chaleur latente de vaporisation et T_o la température d'ébullition de la substance à une pression P_o donnée.

De son côté, le coefficient de transfert de masse h_{Mk} peut être estimé à l'aide de la corrélation de Whitaker (1972) déterminant le nombre de Sherwood Sh :

$$Sh = 2 + \left(0.6Re^{0.5} + 0.06Re^{0.67} \right) Sc^{0.4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu} \right)^{0.25} \quad (3.43)$$

où Re est le nombre de Reynolds associé aux particules, Sc le nombre de Schmidt du gaz, μ_∞ la viscosité dynamique du gaz loin de la particule et μ la viscosité dynamique du gaz à la paroi de la particule. Cette relation est valide pour $0 < Re < 2.5 \times 10^4$, $0 < Sc < 250$ et $1 < \mu_\infty / \mu_s < 3.2$.

Le nombre de Reynolds de la particule se définit comme :

$$Re = \frac{\rho_1 (w_k - w_1) 2r_p}{\mu_\infty} \quad (3.44)$$

Ce nombre dépend donc du glissement entre la phase k et la phase de référence nommée ici phase 1.

Quant à lui, le nombre de Schmidt représente le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité massique. Il relie physiquement l'épaisseur de la couche hydrodynamique à la couche limite de transfert de masse. Il est défini par la relation suivante :

$$Sc = \frac{\mu_\infty}{\rho_1 D} \quad (3.45)$$

Le coefficient de diffusion D peut être déterminé en posant un nombre de Lewis unitaire, valide en présence d'une couche limite turbulente, et en connaissant les propriétés thermodynamiques du fluide. D'ailleurs, Cabrit (2009) démontre numériquement que, dans le cas d'une couche limite turbulente, le nombre de Lewis peut effectivement être approximé comme unitaire. Un nombre de Lewis unitaire signifie que la diffusivité massique est comparable à la diffusivité thermique. Il se définit comme suit :

$$\text{Le} = \frac{\alpha}{D} = \frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} = \frac{k}{\rho_1 C_{p1} D} \quad (3.46)$$

où k est le coefficient de conductivité thermique, $\rho_1 C_{p1}$ est la capacité volumétrique de chaleur, Pr est le nombre de Prandtl, Le est le nombre de Lewis et α est la diffusivité thermique. Donc, le coefficient de diffusion est donné par la relation suivante :

$$D = \frac{k}{\rho_1 C_{p1} \text{Le}} \quad (3.47)$$

Pour sa part, le nombre de Sherwood se définit comme :

$$\text{Sh} = \frac{h_{Mk} 2r_p}{D} \quad (3.48)$$

De ce fait, le coefficient de transfert de masse peut être obtenu à l'aide de la relation suivante :

$$h_{Mk} = 2D \frac{\text{Sh}}{r_p} \quad (3.49)$$

Cependant, l'utilisation de la corrélation de Whitaker (1972) suppose que les différentes particules interagissent peu. Cette hypothèse est valable pour des rapports de débits massiques faibles. Cette approche demeure néanmoins la seule actuellement disponible pour évaluer ce terme de transfert même lorsque le rapport de débit augmente.

3.5.2 Terme de source de quantité de mouvement

Le terme de source de quantité de mouvement agissant à l'interface est donné par la relation suivante, détaillée à la section A.2 de l'Annexe A :

$$\sigma_k^J = \sigma_k^{J\mu} + \sigma_k^{Jm} + \sigma_k^{Jvm} \quad (3.50)$$

Ces termes représentent les effets visqueux ($\sigma_k^{J\mu}$), les effets reliés au phénomène de transport (σ_k^{Jm}) et un terme de masse virtuelle (σ_k^{Jvm}) pour tenir compte des forces non visqueuses entre les phases.

Les effets visqueux sont représentés par le terme de force de traînée F_k^D :

$$\sigma_k^{J\mu} = F_k^D \quad (3.51)$$

Les corrélations pour déterminer cette force en fonction de la vitesse de l'écoulement et du fluide sont sous la forme suivante pour des écoulements particuliers :

$$F_k^D = \frac{V_k}{V_p} \frac{A_k^D}{\Delta z} \frac{C_D}{2} \rho_1 (w_k - w_l) |w_k - w_l| \quad (3.52)$$

où w_k est la vitesse de la phase k , w_l est la vitesse de la phase continue, C_D est le coefficient de traînée, V_p est le volume d'une particule et A_k^D est l'aire projetée d'une particule. Ce coefficient C_D peut être estimé à partir des travaux d'Ishii et al. (1979). Leur approche consiste à définir une viscosité de mélange qui permet de prendre en compte les interactions particules-particules dans le cadre d'un modèle avec une phase continue et une phase dispersée :

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}_m} (1 + 0.1 \text{Re}_m^{0.75}) \quad (3.53)$$

où Re_m est le nombre de Reynolds basé sur la viscosité de mélange μ_m :

$$\text{Re}_m = \frac{2\rho_1 |w_k - w_l| r_p}{\mu_m} \quad (3.54)$$

Le terme de mélange est utilisé puisque lorsqu'une particule se déplace à travers un mélange diphasique, il induit un déplacement de la phase continue. Également, lorsque le fluide se déplace, il occasionne un mouvement de translation et de rotation aux particules avoisinantes. Puisque la particule est plus rigide à se déformer que le fluide, elle impose donc une force de réaction au fluide causant une contrainte additionnelle aux particules. La particule originale perçoit donc une augmentation de la résistance au mouvement [Zuber, 1964].

Cette viscosité de mélange est alors définie pour un système multiphasique particulière :

$$\mu_m = \mu_1 \left(1 - \frac{1 - \alpha_1}{0.62} \right)^{-1.55 \mu^*} \quad (3.55)$$

où $\mu^* = \frac{\mu_k + 0.4\mu_1}{\mu_k + \mu_1}$ représente une fonction de la viscosité de la phase dispersée k et de la phase compressible continue.

L'apport en quantité de mouvement associé au changement de phase est pris en compte par le terme de transport σ_k^{Jm} . Une approximation de ce terme est obtenue à partir de l'hypothèse d'absence de coalescence :

$$\sigma_k^{Jm} = \sigma_k^M w_k^{mean} \quad (3.56)$$

où w_k^{mean} est la vitesse moyenne de la phase transformée à l'interface qui correspond à la vitesse moyenne du mélange. Cette vitesse est approximée comme étant la moyenne des vitesses des phases :

$$w_k^{mean} \approx \frac{\sum_k \alpha_k \rho_k w_k}{\sum_k \alpha_k \rho_k} \quad (3.57)$$

Finalement, σ_k^{Jvm} est un terme de masse virtuelle pour tenir compte de la différence entre les accélérations des phases. Cette force, pour l'ensemble des particules, peut être écrite sous la forme montrée par Drew et al. (1979) pour un système diphasique unidimensionnel :

$$\sigma_k^{Jvm} = -\frac{V_k}{V_p} A_k^D C^{VM} \alpha_1 \alpha_k (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_k \rho_k) \left(w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} - w_k \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) \quad (3.58)$$

où, selon Zuber (1964), le coefficient de masse virtuel est défini comme :

$$C^{VM} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + 2\alpha_1}{\alpha_k} \right) \quad (3.59)$$

D'ailleurs, Städtke (2006) l'utilise pour améliorer la stabilité numérique de son schéma transitoire. L'apport de la masse virtuelle est cependant négligeable pour un écoulement à gouttes puisque les effets visqueux sont prédominants et ne sera donc pas pris en compte comme première estimation :

$$\sigma_k^{Jvm} = 0 \quad (3.60)$$

Son effet sur les conditions critiques sera par contre discuté à la section 6.4.5.

3.5.3 Terme de source d'énergie

Le terme de source d'énergie entre les phases peut être représenté par les quatre termes suivants (section A.3) :

$$\sigma_k^E = \sigma_k^{Eq} + \sigma_k^{E\mu} + \sigma_k^{Eh} + \sigma_k^{Eu} \quad (3.61)$$

Cette relation inclut respectivement un terme de transfert de chaleur (σ_k^{Eq}), un terme relié à la dissipation visqueuse ($\sigma_k^{E\mu}$), un terme de transport d'enthalpie (σ_k^{Eh}) et un terme d'énergie cinétique (σ_k^{Eu}).

Vue le temps de résidence d'un écoulement au sein de l'éjecteur, seul le transfert convectif sera pris en considération entre les phases :

$$\sigma_k^{Eq} = \frac{N_k A_{pk} h_{ck} (T_1 - T_k)}{w_k} \quad (3.62)$$

où le coefficient de transfert de chaleur h_{ck} est évalué à l'aide du nombre de Nusselt donné par la relation de Whitaker (1972) :

$$Nu = 2 + (0.6 Re^{0.5} + 0.03 Re^{0.67}) Pr^{0.4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s} \right)^{0.25} \quad (3.63)$$

où Pr est le nombre de Prandtl, μ_∞ la viscosité du fluide et μ_s la viscosité du fluide à la température de l'interface entre les phases. Cette relation est valide pour $3.5 < Re < 7.6 \times 10^4$, $0.7 < Pr < 380$ et $1 < \mu_\infty / \mu_s < 3.2$.

En fait, le nombre de Nusselt représente le rapport entre le transfert thermique total et le transfert conductif. Ce nombre est défini par la relation suivante :

$$Nu = \frac{h_{ck} d}{k} \quad (3.64)$$

où d est le diamètre de la conduite et k est le coefficient de conductivité thermique. Le coefficient de transfert de chaleur peut donc être obtenu à partir des équations (3.64) et (3.63) pour calculer le transfert convectif. Cette relation sera utile pour déterminer le déséquilibre thermique entre les phases.

De plus, comme aux parois, l'hypothèse de forces de cisaillement négligeable est utilisée :

$$\sigma_k^{E\mu} = 0 \quad (3.65)$$

Enfin, selon l'hypothèse d'absence de coalescence entre les particules, le transfert d'énergie associé à l'enthalpie est donc uniquement fonction du changement de phase et de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}\sigma_k^{Eh} &= \sigma_k^M h_{yk} \\ \sigma_k^{Eu} &= \frac{w_k^2}{2}\end{aligned}\tag{3.66}$$

où h_{yk} représente l'enthalpie de changement de phase de la phase k .

3.6 Termes de source reliés aux forces de volume

Au niveau d'un éjecteur utilisé dans les applications visées, les longueurs sont normalement suffisamment petites pour que l'effet de la gravité puisse être négligé. De ce fait, les termes de source reliés aux forces de volume sont nuls :

$$\sigma_k^{MV} = \sigma_k^{JV} = \sigma_k^{EV} = 0\tag{3.67}$$

3.7 Fractionnement

Dans cette étude, la nucléation, la croissance des gouttes et la coalescence sont négligées et un écoulement comportant déjà des gouttes à l'entrée de la tuyère est considéré. Dans un tel cas, il existe un diamètre maximal de goutte. Donc, une goutte d'un diamètre supérieur se fractionnera. Les mécanismes contrôlant ce fractionnement sont de nature dynamique et thermique. Bien qu'il existe plusieurs critères, celui défini par le nombre de We a été utilisé pour déterminer le fractionnement des gouttelettes. Le nombre de Weber définit une relation entre les forces de surface ϕ_k et la quantité de mouvement du gaz :

$$We = \frac{\rho_l \Delta w_k^2 r_p}{\phi_k}\tag{3.68}$$

où Δw_k représente la différence de vitesse entre deux phases. Le critère maximal utilise généralement $We = 6$. En faisant l'hypothèse d'une distribution uniforme, $We = 3$ a été utilisé pour caractériser le rayon moyen. D'ailleurs, Elliott (1985) présente des résultats utilisant une

approche similaire avec une valeur de 2 pour caractériser le rayon moyen. Donc, le rayon maximal des gouttes est donné par la relation suivante :

$$r_{p_{\max}} = \frac{We\phi_k}{\rho_1\Delta w_k^2} \quad (3.69)$$

3.8 Sommaire de la modélisation d'un écoulement multiphasique particulaire

Ce chapitre a présenté les relations nécessaires à la modélisation d'un écoulement multiphasique pour lequel les phases condensées sont sous forme dispersée. Le terme phase condensée désigne toutes phases liquides ou solides et le terme particulaire désigne toutes sphères compressibles ou non. Ces équations de conservation couvrent les domaines monophasique et multiphasique. Le modèle ne tient cependant pas compte de la nucléation et assume que des gouttes ou bulles sont initialement présentes dans l'écoulement. Il permet des déséquilibres thermiques et mécaniques entre les phases ainsi que du fractionnement. Il permet également des changements de phase entre deux phases d'un même fluide. Finalement, il assume des parois adiabatiques. Dans le cas d'un écoulement diphasique, ce modèle correspond à un modèle à deux fluides (6 équations). Ces restrictions sont compatibles avec le type d'écoulement se produisant au sein des éjecteurs utilisés pour améliorer les cycles de réfrigération.

Le système d'équations global comprend trois équations de conservation pour chacune des phases présentes. La phase continue sera représentée par les équations de conservation de mélange et les phases dispersées par leurs équations de conservations respectives. Les équations de mélange pour la phase continue sont utilisées puisque les développements théoriques de Dostie et al. (2009) sur les écoulements critiques multiphasiques ont démontré l'utilité de cette approche pour lier les propriétés de l'écoulement aux conditions critiques. Ces conditions critiques seront d'ailleurs l'objet du Chapitre 4.

CHAPITRE 4

ÉCOULEMENTS CRITIQUES MULTIPHASIQUES

Ce chapitre présente les définitions de base et les relations décrivant un écoulement critique. En fait, une des familles de points singuliers et les relations menant aux conditions critiques présentées par Dostie et al. (2009) seront examinées. De plus, les développements permettant la localisation du point critique seront également présentés. Pour tous les détails, l'article complet peut être consulté à l'Annexe B.

4.1 Système d'équations 1D en régime permanent

En reprenant le système d'équations unidimensionnel global présenté à l'équation (2.1), le système d'équations en régime permanent suivant est obtenu :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = \mathbf{S} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{J}_F \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial z} = \mathbf{S} \quad (4.2)$$

Après avoir introduit un paramètre arbitraire τ , le système autonome suivant a été présenté aux équations (2.9) et (2.10) :

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \Delta(\mathbf{J}_F) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial Y_j}{\partial \tau} = \Delta_j(\mathbf{J}_F) \quad j = 1, n \quad (4.4)$$

Donc, les conditions critiques sont liées aux points singuliers du système autonome lorsque tous les membres de droite sont nuls. Ce système démontre également que la relation entre les flux et les variables primitives exprimée par la matrice Jacobienne \mathbf{J}_F est primordiale dans la détermination des points singuliers. Bien que ces équations donnent une définition formelle, elles n'expliquent pas la nature du phénomène critique. En fait, pour des conditions d'entrée et de

sortie imposées lors de tests expérimentaux, les conditions critiques sont liées à des valeurs optimales du flux massique (débit critique). Selon Dostie et al. (2009), si la matrice Jacobienne \mathbf{J}_F est diagonale, les points singuliers, obtenus lorsque le déterminant et les co-déterminants de la matrice \mathbf{J}_F sont nuls, sont directement liés à l'optimum d'un des flux \mathbf{F} donnant ainsi une définition directe et formelle des conditions critiques. Cette diagonalisation sera développée dans la prochaine section.

4.2 Diagonalisation de la matrice Jacobienne \mathbf{J}_F

Pour obtenir une matrice des coefficients diagonale, Dostie et al. (2009) définissent un espace mixte utilisant une variable primitive et $n-1$ flux pour un système à n variables. Le sommaire de ce développement est donné en détail à l'Annexe B.

Cette transformation est définie par la relation suivante :

$$F_i = F_i^{(j)}(Y_j, F_{k,k \neq i}) \quad (4.5)$$

où le flux F_i est redéfini par le flux $F_i^{(j)}$. Ce flux est fonction d'une variable primitive Y_j et de $n-1$ flux $F_{k,k \neq i}$. Il y a donc n flux $F_i^{(j)}$, chacun fonction d'une seule variable primitive distincte. Cette relation est très importante dans la diagonalisation de la matrice \mathbf{J}_F .

En prenant cette définition des flux, l'équation (4.1) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial F_i}{\partial z} = \frac{\partial F_i^{(j)}}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial z} + \sum_{k \neq i} \frac{\partial F_i^{(j)}}{\partial F_k} \frac{\partial F_k}{\partial z} = S_i \quad (4.6)$$

En transférant les termes liés aux autres flux du côté des termes de source, la relation suivante est obtenue :

$$\frac{\partial F_i^{(j)}}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial z} = S_i - \sum_{k \neq i} \frac{\partial F_i^{(j)}}{\partial F_k} S_k \quad (4.7)$$

Le terme de source est alors regroupé dans le terme $S_j^{(\Lambda)}$:

$$\frac{\partial F_i^{(j)}}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial z} = S_j^{(\Lambda)} \quad (4.8)$$

Sous la forme vectorielle, cette équation est alors :

$$\mathbf{J}_F^{\{\Lambda\}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial z} = \mathbf{S}^{\{\Lambda\}} \quad (4.9)$$

où $\mathbf{J}_F^{\{\Lambda\}}$ est maintenant une matrice diagonale. Cette approche est donc issue d'une méthode très générale pour étudier les singularités et est essentiellement basée sur le besoin d'avoir n paramètres formant un espace vectoriel à n dimensions pour décrire un système à n degrés de liberté.

4.3 Condition critique

Avec les développements présentés à la section 4.2, la dérivée spatiale de chaque variable primitive est donnée par :

$$\frac{\partial Y_j}{\partial z} = \frac{S_j^{\{\Lambda\}}}{\frac{\partial F_i^{\{j\}}}{\partial Y_j}} \quad (4.10)$$

Et le système autonome suivant peut être défini :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \tau} &= \frac{\partial F_i^{\{j\}}}{\partial Y_j} \quad i=1,n \quad i \neq j \\ \frac{\partial Y_j}{\partial \tau} &= S_j^{\{\Lambda\}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ce système identifie le point singulier suivant comme condition critique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i^{\{j\}}}{\partial Y_j} &= 0 \quad i=1,n \quad i \neq j \\ S_j^{\{\Lambda\}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Il y a maintenant une signification directe entre les conditions critiques et les flux puisqu'à un point critique, la variation d'un flux donné sera optimale par rapport à la variation d'une variable primitive, les autres flux demeurant constants. La variable primitive choisie pour définir la transformation présentée à l'équation (4.5) étant aléatoire, ce flux sera donc optimal par rapport à la variation de n'importe laquelle des variables primitives, tous les autres flux étant constants. De plus, il en résulte que le terme $S_j^{\{\Lambda\}}$ est nul aux points critiques. Cette dernière propriété sera d'ailleurs exploitée pour déterminer la position du point critique à la section 4.5.

En remplaçant les équations de conservation de la phase de référence par les équations de conservation de mélange, les flux de mélange sont alors mis de l'avant. Ces flux de mélange peuvent également être exprimés en fonction d'une variable primitive de la phase 1 et des autres flux de mélange. En utilisant ces flux, Dostie et al. (2009) ont démontré qu'un point singulier du sous-système de mélange est également un point singulier du système global. Une famille de points critiques utilisant les équations de mélange pour une section prescrite sera maintenant présentée à la prochaine section.

4.4 Famille de points singuliers

En utilisant le système d'équations unidimensionnel, composé des équations (3.16) à (3.18), présenté à la section 3.3.1, une famille de points singuliers est définie. Premièrement, pour fermer le système d'équations, une équation d'état pour les phases compressibles et pour les phases incompressibles est ajoutée :

$$p_k = z_{ck} \rho_k R_k T_k \quad (4.13)$$

$$\rho_k = \rho_k(p_k, T_k) \quad (4.14)$$

où z_{ck} est le facteur de compressibilité de la phase k et R_k est la constante des gaz parfait pour la phase k . Maintenant, en assumant une chaleur spécifique constante C_{pk} , l'enthalpie est donnée par :

$$h_k = h_k^0 + C_{pk}(T_k - T_k^0) \quad (4.15)$$

où h_k^0 et T_k^0 sont des constantes. Dans cette étude, la température de référence T_k^0 est nulle. Avec cette définition de l'enthalpie l'équation de conservation de l'énergie (3.18) devient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(A_k \rho_k w_k \left(h_k^0 + C_{pk} T_k + \frac{w_k^2}{2} \right) \right) = \sigma_k^{EV} + \sigma_k^E + \sigma_k^{EW} \quad (4.16)$$

Les équations de mélange (3.23) à (3.25) présentées à la section 3.3.2 sont également obtenues en sommant la contribution de chacune des phases :

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \sum_k (A_k \rho_k w_k) = \sum_k \sigma_k^{MV} + \sum_k \sigma_k^{MW} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial J}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \sum_k (A_k \rho_k w_k^2 + A_k p_k) = \sum_k \sigma_k^{MV} + \sum_k \sigma_k^{MW} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \sum_k \left(A_k \rho_k w_k \left(h_k^0 + C_{pk} T_k + \frac{w_k^2}{2} \right) \right) = \sum_k \sigma_k^{EV} + \sum_k \sigma_k^{EW} \quad (4.19)$$

Dostie et al. (2009) présentent une méthode permettant de déterminer trois familles de points singuliers en mettant à l'échelle l'évolution des autres phases par rapport à une phase de référence dans les équations de mélange. En assumant connaître la valeur de chacun de ces ratios, la solution des équations de conservation de mélange donnera l'information du système entier. Ici, une seule famille de points singuliers sera présentée, soit celle où l'écoulement doit remplir une section prescrite A . Donc, la somme des sections occupées par chacune des phases doit être celle de la section prescrite :

$$\sum_k A_k = A \quad (4.20)$$

Deux autres familles sont respectivement liées aux systèmes monophasiques et aux systèmes ouverts et sont présentées à l'Annexe B.

4.4.1 Définition des ratios

Pour représenter les équations de mélange de telle manière que l'évolution de l'écoulement soit paramétrée en fonction d'une seule phase, l'état des autres phases est mis à l'échelle en utilisant les ratios adimensionnels suivants :

$$f_{Mk} = \frac{A_k \rho_k w_k}{A_1 \rho_1 w_1} \quad (4.21)$$

$$r_k = \frac{p_k}{p_1} \quad (4.22)$$

$$f_{hk} = \frac{h_k^0}{h_1^0} \quad (4.23)$$

$$f_{Tk} = \frac{C_{pk} T_k}{C_{p1} T_1} \quad (4.24)$$

$$s_k = \frac{w_k}{w_1} \quad (4.25)$$

$$\alpha_k = \frac{A_k}{A} \quad (4.26)$$

où f_{Mk} est le rapport des débits massiques, r_k le rapport des pressions, f_{hk} le rapport des enthalpies de référence, f_{Tk} le rapport des chaleurs massiques et des températures, s_k le rapport des vitesses, appelé rapport de glissement, et α_k la fraction volumique de chacune des phases.

Les flux de mélange peuvent donc être réécrits en fonction de la phase de référence :

$$M = \sum_k (f_{Mk}) A \alpha_1 \rho_1 w_1 \quad (4.27)$$

$$J = \sum_k (f_{Mk} s_k) A \alpha_1 \rho_1 w_1^2 + \sum_k (\alpha_k r_k) A p_1 \quad (4.28)$$

$$E = A \alpha_1 \rho_1 w_1 \left(\sum_k (f_{Mk} f_{hk}) w_1^0 + \sum_k (f_{Mk} f_{Tk}) C_{p1} T_1 + \sum_k (f_{Mk} s_k^2) \frac{w_1^2}{2} \right) \quad (4.29)$$

À partir de ces flux de mélange, la famille de points singuliers sera maintenant présentée.

4.4.2 Points singuliers

Utilisant la contrainte globale présentée à l'équation (4.20), le taux de vide de la phase de référence peut être défini en fonction de ceux des autres phases :

$$\alpha_1 = 1 - \sum_{k=2}^n \alpha_k \quad (4.30)$$

À partir de la définition de F_{Mk} , la fraction volumique des phases condensées est obtenue :

$$\alpha_k = \frac{f_{Mk} \rho_1 \alpha_1 w_1}{\rho_k w_k} = \frac{f_{Mk} \rho_1 \alpha_1}{\rho_k s_k} \quad (4.31)$$

La masse volumique de la phase de référence peut alors être isolée de l'équation de conservation de la masse :

$$\rho_1 = \frac{M}{\sum_k (f_{Mk}) A w_1 - M \sum_{k=2}^n \left(\frac{f_{Mk}}{\rho_k s_k} \right)} \quad (4.32)$$

De plus, à partir du flux de conservation de la quantité de mouvement du mélange, il est possible d'isoler la pression de la phase de référence en remplaçant sa masse volumique par l'expression (4.32) :

$$p_1 = \left(J - \frac{\sum_k (f_{Mk} s_k)}{\sum_k (f_{Mk})} M \left(1 - \sum_{k=2}^n \left(\frac{f_{Mk}}{\rho_k s_k} \right) \right) \right) \left(\frac{M}{\sum_k (f_{Mk}) A w_1 - M \sum_{k=2}^n \left(\frac{f_{Mk}}{\rho_k s_k} \right)} w_1 \right) \frac{1}{A \sum_k (\alpha_k r_k)} \quad (4.33)$$

En injectant ces équations de fraction volumique (4.31), de masse volumique (4.32) et de pression (4.33) dans la relation du flux d'énergie de mélange (4.29), il est possible d'obtenir une relation quadratique uniquement fonction des flux de mélange, de la vitesse de la phase de référence et des autres termes adimensionnels :

$$\left(\frac{\sum_k (f_{Mk} s_k)}{\sum_k (\alpha_k r_k)} - \frac{\sum_k (f_{Mk} s_k^2)}{\sum_k (f_{Mk} f_{Tk})} \frac{z_{cl} R_1}{2C_{p1}} \right) A w_1^2 - \left(\frac{\sum_k (f_{Mk})}{\sum_k (\alpha_k r_k)} \frac{J}{M} A + M \frac{\sum_k (f_{Mk} s_k)}{\sum_k (f_{Mk}) \sum_k (\alpha_k r_k)} \sum_{k=2}^n \frac{f_{Mk}}{\rho_k s_k} \right) w_1 + \left(A \frac{E}{M} \frac{z_{cl} R_1}{C_{p1}} \frac{\sum_k f_{Mk}}{\sum_k (f_{Mk} f_{Tk})} - A h_1^0 \frac{z_{cl} R_1}{C_{p1}} \frac{\sum_k (f_{Mk} f_{hk})}{\sum_k (f_{Mk} f_{Tk})} + J \frac{\sum_{k=2}^n \frac{f_{Mk}}{\rho_k s_k}}{\sum_k (\alpha_k r_k)} \right) = 0 \quad (4.34)$$

À partir de l'équation quadratique (4.34), le flux d'impulsion du mélange est isolé :

$$J(w_1, M, E) = \frac{1}{\left(\frac{\sum_k (f_{Mk})}{\sum_k (\alpha_k r_k)} \frac{w_1}{M} A - \frac{\sum_{k=2}^n \frac{f_{Mk}}{\rho_k s_k}}{\sum_k (\alpha_k r_k)} \right)} \left(\left(\frac{\sum_k (f_{Mk} s_k)}{\sum_k (\alpha_k r_k)} - \frac{\sum_k (f_{Mk} s_k^2)}{\sum_k (f_{Mk} f_{Tk})} \frac{z_{cl} R_1}{2C_{p1}} \right) A w_1^2 - M \frac{\sum_k (f_{Mk} s_k)}{\sum_k (f_{Mk}) \sum_k (\alpha_k r_k)} \sum_{k=2}^n \frac{f_{Mk}}{\rho_k s_k} w_1 - A h_1^0 \frac{z_{cl} R_1}{C_{p1}} \frac{\sum_k (f_{Mk} f_{hk})}{\sum_k (f_{Mk} f_{Tk})} + A \frac{E}{M} \frac{z_{cl} R_1}{C_{p1}} \frac{\sum_k f_{Mk}}{\sum_k (f_{Mk} f_{Tk})} \right) \quad (4.35)$$

Comme mentionné à la section 4.3, la dérivée nulle du flux de mélange par rapport à la variable primitive est une condition suffisante pour déterminer un point singulier du système global :

$$\frac{\partial}{\partial w_1} J(w_1, M, E) = 0 \quad (4.36)$$

Les conditions critiques sont donc définies par la relation suivante :

$$\frac{\rho_1 w_{1c}^2}{p_1} = \frac{1}{\alpha_1 \left(\frac{\sum_k (f_{Mk} s_k)}{\sum_k (\alpha_k r_k)} - \frac{z_{c1} R_1 \sum_k (f_{Mk} s_k^2)}{C_{p1} \sum_k (f_{Mk} f_{Tk})} \right)} \quad (4.37)$$

Au point critique, puisque toutes les variations de flux par rapport à une variable primitive distincte représentent un optimum, le débit massique du mélange M ne peut être modifié par des variations des variables primitives de la phase compressible pour des flux J et E donnés :

$$\frac{\partial M}{\partial w_1} = \frac{\partial M}{\partial \rho_1} = \frac{\partial M}{\partial p_1} = 0 \quad (4.38)$$

4.5 Position du point critique

Bilicki et al. (1987) ont effectué une analyse pour déterminer la position du point critique en tenant compte de l'influence de la géométrie, de la friction à la paroi et des forces de volume pour un écoulement diphasique homogène. Avec les conditions critiques présentées par Dostie et al. (2009), la position de la section critique peut être mise de l'avant en posant les termes de source du sous-système des équations de mélange comme étant nuls. Le sous-système des équations de mélange dépend d'une variable primitive de la phase de référence, de $n-1$ flux de mélange et de variables primitives des autres phases :

$$\frac{\partial F_b^\Sigma}{\partial z} = \frac{\partial F_b^{\Sigma\{i\}}}{\partial Y_{j_1}} \frac{\partial Y_{j_1}}{\partial z} + \sum_{\substack{k=1,m \\ k \neq b}} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{i\}}}{\partial F_k^\Sigma} \frac{\partial F_k^\Sigma}{\partial z} + \sum_{p=2,n} \sum_{y=1,m} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{i\}}}{\partial Y_{l(y,p)}} \frac{\partial Y_{l(y,p)}}{\partial z} = S_b^\Sigma \quad (4.39)$$

où F_b^Σ et S_b^Σ représentent respectivement les flux et les termes de source de mélange. $F_b^{\Sigma\{i\}}$ représente le flux de mélange b exprimé en fonction de la variable primitive Y_{j_1} de la phase 1 tandis que F_k^Σ représente les autres flux de mélange. Finalement, $Y_{l(y,p)}$ représente les autres variables primitives associées à l'indice l représentant la variable y de la phase p .

En isolant le terme exprimé en fonction des variables primitives de la phase 1, ce système d'équations peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial F_b^{\Sigma\{i\}}}{\partial Y_{j_1}} \frac{\partial Y_{j_1}}{\partial z} = S_b^{\Sigma} - \sum_{\substack{k=1,m \\ k \neq b}} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{i\}}}{\partial F_k^{\Sigma}} \frac{\partial F_k^{\Sigma}}{\partial z} - \sum_{p=2,n} \sum_{y=1,m} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{i\}}}{\partial Y_{l(y,p)}} \frac{\partial Y_{l(y,p)}}{\partial z} \quad (4.40)$$

Le point singulier étant défini par :

$$\frac{\partial F_b^{\Sigma\{i\}}}{\partial z} = 0 \quad (4.41)$$

$$S_b^{\Sigma} - \sum_{\substack{k=1,m \\ k \neq b}} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{i\}}}{\partial F_k^{\Sigma}} \frac{\partial F_k^{\Sigma}}{\partial z} - \sum_{p=2,n} \sum_{y=1,m} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{i\}}}{\partial Y_{l(y,p)}} \frac{\partial Y_{l(y,p)}}{\partial z} = 0 \quad (4.42)$$

La section critique est obtenue en solutionnant l'équation (4.42). Dans cette équation, les termes de source sont définis de la manière suivante :

$$S_b^{\Sigma} - \sum_{\substack{k=1,m \\ k \neq b}} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{i\}}}{\partial F_k^{\Sigma}} \frac{\partial F_k^{\Sigma}}{\partial z} = \left\{ \begin{array}{l} S_M - \frac{\partial M^{\{w_1\}}}{\partial J} S_J - \frac{\partial M^{\{w_1\}}}{\partial E} S_E \\ S_J - \frac{\partial J^{\{\rho_1\}}}{\partial M} S_M - \frac{\partial J^{\{\rho_1\}}}{\partial E} S_E \\ S_E - \frac{\partial E^{\{\rho_1\}}}{\partial M} S_M - \frac{\partial E^{\{\rho_1\}}}{\partial J} S_J \end{array} \right\} \quad (4.43)$$

$$\sum_{p=2,n} \sum_{y=1,m} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{i\}}}{\partial Y_{l(y,p)}} \frac{\partial Y_{l(y,p)}}{\partial z} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M^{\{w_1\}}}{\partial s_k} \frac{\partial s_k}{\partial z} + \frac{\partial M^{\{w_1\}}}{\partial f_{Tk}} \frac{\partial f_{Tk}}{\partial z} + \frac{\partial M^{\{w_1\}}}{\partial f_{Mk}} \frac{\partial f_{Mk}}{\partial z} \\ \frac{\partial J^{\{\rho_1\}}}{\partial s_k} \frac{\partial s_k}{\partial z} + \frac{\partial J^{\{\rho_1\}}}{\partial f_{Tk}} \frac{\partial f_{Tk}}{\partial z} + \frac{\partial J^{\{\rho_1\}}}{\partial f_{Mk}} \frac{\partial f_{Mk}}{\partial z} \\ \frac{\partial E^{\{\rho_1\}}}{\partial s_k} \frac{\partial s_k}{\partial z} + \frac{\partial E^{\{\rho_1\}}}{\partial f_{Tk}} \frac{\partial f_{Tk}}{\partial z} + \frac{\partial E^{\{\rho_1\}}}{\partial f_{Mk}} \frac{\partial f_{Mk}}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (4.44)$$

où s_k , f_{Tk} et f_{Mk} correspondent respectivement aux rapports de vitesse, de température et de chaleur massique, et de débit.

4.5.1 Cas d'un écoulement diphasique en déséquilibre mécanique

Voici maintenant le cas spécifique d'un écoulement diphasique où f_{Tk} et f_{Mk} sont constants alors que s_k est variable. Dans ce cas, seul le terme de source de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est non nul :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial M^{(w_1)}}{\partial J} S_J \\ S_J \\ -\frac{\partial E^{(p_1)}}{\partial J} S_J \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M^{(w_1)}}{\partial s_k} \frac{\partial s_k}{\partial z} \\ \frac{\partial J^{(w_1)}}{\partial s_k} \frac{\partial s_k}{\partial z} \\ \frac{\partial E^{(p_1)}}{\partial s_k} \frac{\partial s_k}{\partial z} \end{array} \right\} = 0 \quad (4.45)$$

où

$$S_J = p_1 \frac{\partial A}{\partial z} \quad (4.46)$$

En solutionnant le système d'équations (4.45), la variation de section au point critique peut être obtenue. Pour un système diphasique en équilibre thermique à une pression, la position du point critique est obtenue lorsque la condition suivante est atteinte :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial s_k}{\partial z} \frac{M^2 f_{M2} (1 + f_{M2} f_{T2}) (\rho_1 s_k - \rho_2 s_k^3) - R_1 \rho_1 \left(s_k + f_{M2} \frac{\rho_1}{\rho_2} - f_{M2} s_k^3 - s_k^4 \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}{A (1 + f_{M2})^2 \rho_2 s_k^3 (1 + f_{E=2}) \rho_1 p_1} \quad (4.47)$$

Puisque cette variation dépend de la variation du rapport de glissement, pour un écoulement en équilibres mécanique et thermique sans changement de phase, le point critique se trouve à un optimum de la variation de section, le col géométrique dans le cas d'une tuyère :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (4.48)$$

4.5.2 Cas d'un écoulement diphasique en déséquilibre thermique

Voici maintenant le cas spécifique d'un écoulement diphasique où s_k et f_{Mk} sont constants alors que f_{Tk} est variable. Dans ce cas également, seul le terme de source de l'équation de conservation de la quantité de mouvement demeure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M^{(w_1)}}{\partial J} S_J \\ S_J \\ -\frac{\partial E^{(p_1)}}{\partial J} S_J \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M^{(w_1)}}{\partial f_{Tk}} \frac{\partial f_{Tk}}{\partial z} \\ \frac{\partial J^{(p_1)}}{\partial f_{Tk}} \frac{\partial f_{Tk}}{\partial z} \\ \frac{\partial E^{(p_1)}}{\partial f_{Tk}} \frac{\partial f_{Tk}}{\partial z} \end{array} \right\} = 0 \quad (4.49)$$

En solutionnant le système d'équations (4.49), la variation de section au point critique peut être obtenue. Pour un système diphasique en équilibre mécanique à une pression et sans changement de phase, la position du point critique est donnée par la condition suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = A \frac{\partial f_{Tk}}{\partial z} \frac{f_{M2}}{1 + f_{M2} f_{Tk}} \quad (4.50)$$

Puisque cette variation dépend de la variation du rapport des températures et des chaleurs massiques, pour un écoulement en équilibres mécanique et thermique sans changement de phase, le point critique se trouve, ici encore, à un optimum de la variation de section :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (4.51)$$

4.5.3 Cas d'un écoulement diphasique avec changement de phase

Voici maintenant le cas spécifique d'un écoulement diphasique où s_k et f_{Tk} sont constants alors que f_{Mk} est variable. Dans ce cas également, seul le terme de source de l'équation de conservation de la quantité de mouvement demeure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M^{(w_1)}}{\partial J} S_J \\ S_J \\ -\frac{\partial E^{(p_1)}}{\partial J} S_J \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M^{(w_1)}}{\partial f_{Mk}} \frac{\partial f_{Mk}}{\partial z} \\ \frac{\partial J^{(p_1)}}{\partial f_{Mk}} \frac{\partial f_{Mk}}{\partial z} \\ \frac{\partial E^{(p_1)}}{\partial f_{Mk}} \frac{\partial f_{Mk}}{\partial z} \end{array} \right\} = 0 \quad (4.52)$$

En solutionnant le système d'équations (4.52), la variation de section au point critique peut-être obtenue. Pour un système diphasique en équilibres mécanique et thermique avec changement de phase, la position du point critique est obtenue lorsque la condition suivante est respectée :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial f_{M2}}{\partial z} \frac{R_1(K_1 + K_2)}{(1 + f_{M2})^2 (-Aw_1\rho_2s_2(1 + f_{M2}s_2) + Mf_{M2})(1 + f_{M2}f_{T2})(2E(1 + f_{M2}) - Mw_1^2(1 + f_{M2}s_2^2))C_{\rho 1}\rho_2s_2} \quad (4.53)$$

où K_1 et K_2 sont définis de la manière suivante :

$$K_1 = w_1M(s_2 - 1)(1 + f_{M2}f_{T2})^2 \left(\begin{array}{l} 2s_2^2(1 + f_{M2})^2 w_1^2 \rho_2 A^2 + \\ 4s_2 f_{M2}(1 + f_{M2}) M \rho_2 w_1 A - 2(f_{M2})^2 M^2 \end{array} \right) \quad (4.54)$$

$$K_2 = \frac{R_1}{C_{\rho 1}} \left(\begin{array}{l} w_1^2 A \rho_2 s_2 (1 + f_{M2})^2 M^2 - A \rho_2 s_2 (1 + f_{M2})^2 (2E + A \rho_2 s_2 w_1^3 (s_2 + 1)) M + \\ f_{T2} \left(\begin{array}{l} M^2 A w_1^2 \rho_2 f_{M2} s_2 (2 + f_{M2} s_2^2) (1 + f_{M2})^2 + \\ M \left(-A^2 \rho_2^3 w_1^3 (1 + f_{M2})^2 s_2^2 (s_2^2 (f_{M2})^2 + 2f_{M2} + 1) - \right. \\ \left. 2f_{M2} s_2 A \rho_2 E ((1 + f_{M2})^2 + 2 + f_{M2}) \right) \\ \left. + 2A^2 E w_1 \rho_2^2 s_2^2 (1 + f_{M2})^4 \right) \end{array} \right) \quad (4.55)$$

Puisque cette variation dépend de la variation du rapport de débit, pour un écoulement en équilibres mécanique et thermique sans changement de phase, le point critique se trouve, comme dans le cas d'un écoulement monophasique, à un optimum de la variation de section :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (4.56)$$

CHAPITRE 5

MÉTHODES NUMÉRIQUES DE SOLUTION D'UN ÉCOULEMENT CRITIQUE DIPHASIQUE EN RÉGIME PERMANENT

Ce chapitre présente deux méthodes de solution en régime permanent pour les équations décrivant un écoulement diphasique. Jusqu'à maintenant, les définitions et les équations étaient présentées pour un écoulement multiphasique. Cependant, pour les applications visées, des éjecteurs diphasiques sont habituellement utilisés. De ce fait, les méthodes numériques seront maintenant détaillées pour un écoulement diphasique. La première méthode basée sur l'algorithme SIMPLE compressible de Patankar (1980) fut utilisée pour obtenir des résultats avec un schéma robuste et grandement utilisé en écoulements monophasiques incompressibles. D'ailleurs, Marynowski (2007) l'utilise également pour résoudre le couplage pression/vitesse de son modèle en régime transitoire pour des écoulements faiblement diphasiques. Ici, l'algorithme SIMPLE fut adapté pour un système diphasique compressible. La seconde est plutôt basée sur l'utilisation des flux de mélange et satisfait les équations de conservation de la phase continue en tout point. Cette méthode utilise un schéma décentré avant pour résoudre le volume de contrôle suivant jusqu'à la sortie de la tuyère. Les prochaines parties décriront plus en détail ces deux méthodes.

5.1 Schéma SIMPLE compressible diphasique

Ce schéma résout les équations de conservation en régime permanent en imposant des conditions d'entrée et de sortie. En fait, une solution, dont les pressions d'entrée et de sortie sont imposées, est recherchée puisque que c'est le type de condition habituellement rencontré dans les éjecteurs diphasiques. L'objectif est d'obtenir une méthode robuste de solution tenant compte des déséquilibres entre les phases pour effectuer une étude numérique sur les écoulements critiques

diphases en tuyère. Les sections suivantes résument la séquence d'opération liée au schéma SIMPLE compressible.

5.1.1 Valeurs initiales

Au départ, une solution initiale de la pression doit être imposée. Dans cette étude, la pression initiale dans la tuyère est habituellement posée comme étant un profil linéaire entre la pression d'entrée p_{1in} et la pression de sortie p_{1out} :

$$p_{1i} = p_{1in} - (p_{1in} - p_{1out}) \frac{z_i}{L} \quad (5.1)$$

où z_i correspond à la position du centre géométrique du volume de contrôle par rapport à l'entrée de la tuyère et L la longueur totale de la tuyère.

La température, la masse volumique, la vitesse et le taux de vide de chaque phase doivent également être imposés. Les relations initiales suivantes sont appliquées :

$$\begin{aligned} T_{1i} &= T_{10} \\ T_{2i} &= T_{1i} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \rho_{1i} &= \frac{p_{1i}}{T_{1i} R_1 z_{c1}} \\ \rho_{2i} &= \rho_{20} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$w_{1i} = \frac{w_{10} \rho_{10} A_0 \alpha_{10}}{\rho_{1i} A_i \alpha_{1i}} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} w_{2i} &= w_{1i} \\ \alpha_{1i} &= \alpha_{10} \\ \alpha_{2i} &= 1 - \alpha_{1i} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Une solution initiale différente, plus ou moins complexe, aurait pu également être utilisée. Cependant, l'utilisation d'autres types de relations a permis de constater que la solution initiale n'affecte pas la solution convergée. Certaines conditions initiales peuvent toutefois jouer un rôle sur la rapidité et la stabilité de la convergence. Les relations présentées ici, bien que simples, ont été relativement efficaces.

Les conditions initiales peuvent également provenir de solutions partiellement convergées, et ce, autant pour la pression, la vitesse, la masse volumique, la température ou pour le taux de vide.

5.1.2 Résolution de l'équation de quantité de mouvement

Pour obtenir une première estimation du profil de vitesse dans l'écoulement, il faut résoudre l'équation de quantité de mouvement diphasique suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_k (f_{Mk} s_k) A \alpha_k \rho_1 w_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_k (\alpha_k r_k) A p_1 \right) = \sum_k (\sigma_k^{JV} + \sigma_k^{JW}) \quad (5.6)$$

En substituant les termes de source de volume σ_k^{JV} et à la paroi σ_k^{JW} explicités dans le Chapitre 3, l'équation de conservation de la quantité de mouvement prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_k (f_{Mk} s_k) A \alpha_k \rho_1 w_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_k (\alpha_k r_k) A p_1 \right) = \sum_k \left(r_k p_1 \frac{\partial A \alpha_k}{\partial z} \right) \quad (5.7)$$

Le terme de différentiel de pression peut être simplifié en partie avec le terme de source et l'équation de conservation de quantité de mouvement devient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_k (f_{Mk} s_k) A \alpha_k \rho_1 w_i^2 \right) = - \sum_k \left(A \alpha_k \frac{\partial r_k p_1}{\partial z} \right) \quad (5.8)$$

La Figure 5.1 présente le volume de contrôle pour l'équation de quantité de mouvement. La vitesse est donc calculée aux points b alors que toutes les autres variables sont solutionnées aux points i . Ce type de maillage décalé a été utilisé pour la première fois par Harlow et Welch (1965). Il permet d'éviter d'obtenir des profils de pression et de vitesse ondulés [Patankar, 1980].

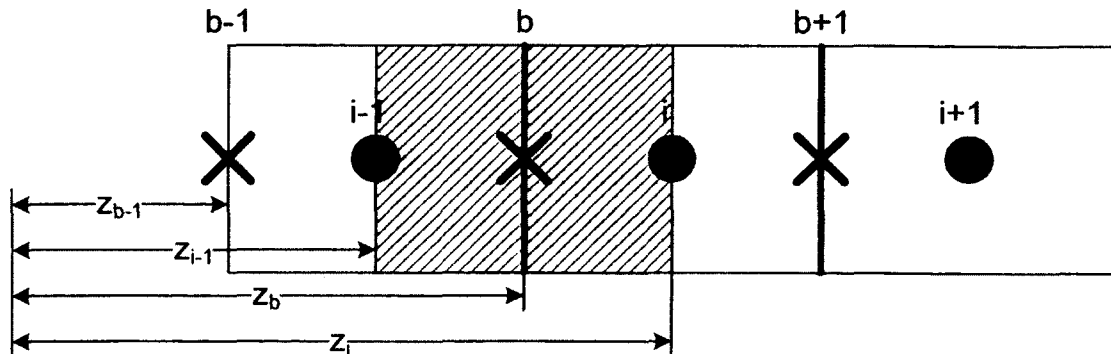


Figure 5.1 : Volume de contrôle pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

En intégrant l'équation (5.8) sur le volume de contrôle de la Figure 5.1, le bilan de quantité de mouvement suivant est obtenu :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_k (f_{Mk} s_k) A \alpha_1 \rho_1 w_1^2 \right)_i - \left(\sum_k (f_{Mk} s_k) A \alpha_1 \rho_1 w_1^2 \right)_{i-1} = \\ & - \sum_k \left(\frac{(A_i \alpha_{k_i} + A_{i-1} \alpha_{k_{i-1}})}{2} ((r_k p_1)_i - (r_k p_1)_{i-1}) \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pour un schéma décentré avant, les valeurs des variables inconnues aux frontières du volume de contrôle correspondent aux points en amont de l'écoulement. Donc, pour un écoulement dans le sens de l'axe z , le point i correspond à la valeur de la frontière b et le point $i-1$ à la valeur de la frontière $b-1$:

$$\begin{aligned} & \sum_k (f_{Mk} s_k)_i A_i \alpha_{1i} \rho_{1i} w_{1b}^2 - \sum_k (f_{Mk} s_k)_{i-1} A_{i-1} \alpha_{1i-1} \rho_{1i-1} w_{1b-1}^2 = \\ & - \sum_k \left(\frac{(A_i \alpha_{k_i} + A_{i-1} \alpha_{k_{i-1}})}{2} ((r_k p_1)_i - (r_k p_1)_{i-1}) \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Il faut cependant définir la condition aux frontières à l'entrée puisque lorsque $b = 1$, $b-1$ est en dehors du domaine de calcul. Pour tenir compte de cette condition aux frontières, la valeur à la frontière $b-1$ est égale à celle de l'entrée :

$$\begin{aligned} & \sum_k (f_{Mk} s_k)_i A_i \alpha_{1i} \rho_{1i} w_{1b}^2 = \sum_k (f_{Mk} s_k)_0 A_0 \alpha_{10} \rho_{10} w_{10}^2 \\ & - \sum_k \left(\frac{(A_i \alpha_{k_i} + A_0 \alpha_{k_0})}{2} ((r_k p_1)_i - (r_k p_1)_0) \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

La résolution de cette équation est faite à partir de l'algorithme de matrice tri-diagonale (TDMA). Cet algorithme est une simplification de la méthode de Gauss-Jordan pour résoudre les systèmes d'équations linéaires. En fait, pour un schéma décentré avant, le système d'équation forme une matrice tri-diagonale. Dans ce cas, l'équation discrétisée peut être écrite sous la forme suivante :

$$A_b w_b = B_b w_{1b+1} + C_b w_{1b-1} + D_b \quad (5.12)$$

où C_1 et B_N sont nuls puisque les valeurs aux points 0 et $N+1$ sont en dehors du domaine de calcul. Avec ces conditions, un processus de substitution ayant la forme suivante est possible :

$$\begin{aligned} w_{1b} &= G_b w_{1b+1} + Q_b \\ w_{1b-1} &= G_{b-1} w_{1b} + Q_{b-1} \end{aligned} \quad (5.13)$$

En substituant l'équation (5.13) dans l'équation discrétisée (5.12), les coefficients suivants sont obtenus :

$$\begin{aligned}
G_b &= \frac{B_b}{A_b - C_b P_{b-1}} \\
Q_b &= \frac{D_b + C_b Q_{b-1}}{A_b - A_b P_{b-1}}
\end{aligned}
\tag{5.14}$$

Après le calcul des coefficients, la substitution inverse à partir de l'équation (5.13) est effectuée pour obtenir les valeurs de vitesse à chaque volume de contrôle.

5.1.3 Résolution de l'équation de correction de pression

Cette étape a pour but de calculer une nouvelle valeur du profil de pression de sorte que le profil de vitesse précédemment obtenu se rapproche des valeurs respectant les équations de conservation. Les équations de correction suivantes sont alors utilisées :

$$\begin{aligned}
p_{1i} &= p_{1i}^* + p_{1i}' \\
w_{1i} &= w_{1i}^* + w_{1i}' \\
a_i &= \sum_k (f_{Mk} s_k)_i A_i \alpha_{1i} \rho_{1i} w_{1b}
\end{aligned}
\tag{5.15}$$

où p_{1i}^* et w_{1i}^* sont les valeurs estimées de la pression et de la vitesse alors que p_{1i}' et w_{1i}' sont les corrections de la pression et de la vitesse estimées. a_i est simplement utilisé pour simplifier la visualisation des équations (5.16) et (5.17).

Une équation de conservation de la quantité de mouvement peut alors être obtenue pour la nouvelle vitesse w_{1i} et pour la vitesse estimée w_{1i}^* :

$$\begin{aligned}
a_i w_{1b} &= a_{i-1} w_{1b-1} - \sum_k \left(\frac{(A_i \alpha_{ki} + A_{i-1} \alpha_{ki-1})}{2} ((r_k p_1)_i - (r_k p_1)_{i-1}) \right) \\
a_i w_{1b}^* &= a_{i-1} w_{1b-1}^* - \sum_k \left(\frac{(A_i \alpha_{ki} + A_{i-1} \alpha_{ki-1})}{2} ((r_k p_1^*)_i - (r_k p_1^*)_{i-1}) \right)
\end{aligned}
\tag{5.16}$$

En soustrayant ces deux équations, l'équation de correction de vitesse suivante est obtenue :

$$a_i (w_{1b} - w_{1b}^*) = a_{i-1} (w_{1b-1} - w_{1b-1}^*) - \sum_k \left(\frac{(A_i \alpha_{ki} + A_{i-1} \alpha_{ki-1})}{2} (r_{ki} (p_1 - p_1^*)_i - r_{ki-1} (p_1 - p_1^*)_{i-1}) \right)
\tag{5.17}$$

Ici, la variation de la force de masse virtuelle, la friction, la variation de la vitesse estimée et de la vitesse corrigée au volume de contrôle précédent sont négligées. La correction de vitesse est également mise de côté. Cette mesure n'entraîne aucune perte d'information puisque lorsque la

convergence est atteinte, la différence entre les vitesses tend vers zéro. L'équation de correction de vitesse suivante est alors obtenue :

$$w_{1b} = w_{1b}^* - \frac{1}{\alpha_i} \sum_k \left(\frac{(A_i \alpha_{k_i} + A_{i-1} \alpha_{k_{i-1}})}{2} (r_{k_i} (p_1 - p_1^*)_i - r_{k_{i-1}} (p_1 - p_1^*)_{i-1}) \right) = w_{1b}^* + w_{1b}^i \quad (5.18)$$

En analysant l'équation de conservation de la masse sur le volume de contrôle de la Figure 5.2, il est possible de l'utiliser pour obtenir l'équation de correction de pression.

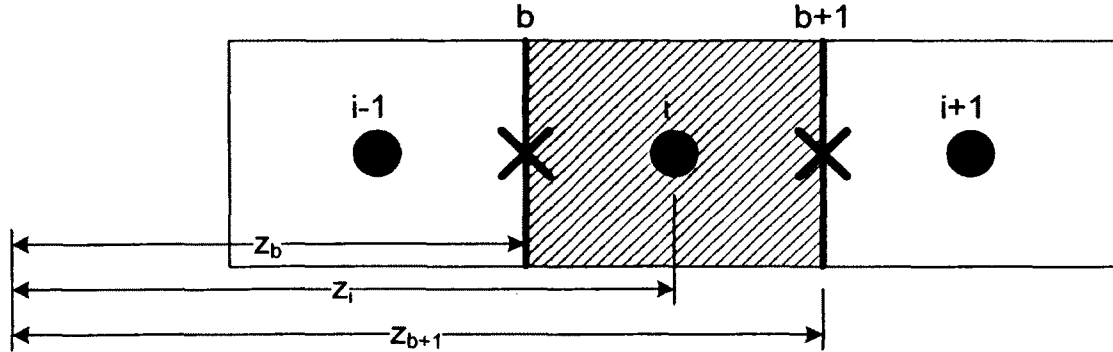


Figure 5.2 : Volume de contrôle pour l'équation de continuité.

Avec des parois imperméables et en négligeant les forces de volume agissant sur le volume de contrôle, l'équation de conservation de la masse peut être écrite comme :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_k (f_{Mk}) A (\alpha_1 \rho_1 w_1) \right) = 0 \quad (5.19)$$

En intégrant sur le volume de contrôle i , le bilan de masse suivant est obtenu :

$$\left(\sum_k (f_{Mk}) A (\alpha_1 \rho_1 w_1) \right)_{b+1} - \left(\sum_k (f_{Mk}) A (\alpha_1 \rho_1 w_1) \right)_b = 0 \quad (5.20)$$

Habituellement, pour des écoulements à faibles vitesses, la masse volumique est assumée comme n'étant pas fonction de la pression. Cependant, cette hypothèse n'est valide que pour des écoulements faiblement compressibles. Pour des écoulements compressibles, il faut obtenir une équation de correction de pression appropriée. Cette méthode porte le nom de « SIMPLE compressible » [Han et al., 2001]. La masse volumique de la phase compressible peut être obtenue à l'aide de l'équation d'état :

$$\rho_{1i} = \frac{p_{1i}}{z_{c1i} R_{1i} T_{1i}} = \frac{p_{1i}^* + p_{1i}}{z_{c1i} R_{1i} T_{1i}} = \rho_{1i}^* + \frac{1}{z_{c1i} R_{1i} T_{1i}} p_{1i} = \rho_{1i}^* + \rho_{1i} \quad (5.21)$$

où ρ_{1i} correspond à la correction de la masse volumique associée à la correction de pression et ρ_{1i}^* est la masse volumique estimée.

L'équation de conservation de la masse peut donc être exprimée de la manière suivante :

$$\left(\sum_k (f_{Mk}) A \alpha_1 (\rho_1^* + \rho_1) (w_1^* + w_1) \right)_{b+1} - \left(\sum_k (f_{Mk}) A \alpha_1 (\rho_1^* + \rho_1) (w_1^* + w_1) \right)_b = 0 \quad (5.22)$$

En négligeant le produit des corrections $\rho_1^* w_1$ comparativement aux autres produits, l'équation de conservation de la masse devient :

$$\left(\sum_k (f_{Mk}) A \alpha_1 (\rho_1^* w_1^* + \rho_1 w_1^* + \rho_1^* w_1) \right)_{b+1} - \left(\sum_k (f_{Mk}) A \alpha_1 (\rho_1^* w_1^* + \rho_1 w_1^* + \rho_1^* w_1) \right)_b = 0 \quad (5.23)$$

En remplaçant les vitesses et les masses volumiques dans l'équation (5.23), l'équation de conservation de la masse devient :

$$\begin{aligned} & \sum_k (f_{Mk})_{b+1} A_{b+1} \alpha_{1b+1} \left(\rho_{1b+1}^* w_{1b+1}^* + \frac{w_{1b+1}^* (p_{1i+1}^* + p_{1i}^*)}{(z_{c1} R_1 T_1)_{b+1} 2} - \right. \\ & \left. \rho_{1b+1}^* \frac{1}{a_{i+1}} \sum_k \left(\frac{(A_i \alpha_{ki} + A_{i+1} \alpha_{ki+1})}{2} (r_{ki+1} p_{1i+1}^* - r_{ki} p_{1i}^*) \right) \right) \\ & - \sum_k (f_{Mk})_b A_b \alpha_{1b} \left(\rho_{1b}^* w_{1b}^* + \frac{w_{1b}^* (p_{1i-1}^* + p_{1i}^*)}{(z_{c1} R_1 T_1)_b 2} - \right. \\ & \left. \rho_{1b}^* \frac{1}{a_i} \sum_k \left(\frac{(A_i \alpha_{ki} + A_{i-1} \alpha_{ki-1})}{2} (r_{ki} p_{1i}^* - r_{ki-1} p_{1i-1}^*) \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

En remodelant l'équation (5.24) et en posant :

$$A_{kmi} = \frac{(A_i \alpha_{ki} + A_{i-1} \alpha_{ki-1})}{2} \quad (5.25)$$

La forme suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sum_k (f_{Mk})_{b+1} A_{b+1} \alpha_{1b+1} w_{1b+1}^*}{2(z_{c1} R_1 T_1)_{b+1}} - \frac{\sum_k (f_{Mk})_b A_b \alpha_{1b} w_{1b}^*}{2(z_{c1} R_1 T_1)_b} + \right. \\
& \left. \sum_k (f_{Mk})_b A_b \alpha_{1b} \rho_{1b}^* \frac{1}{a_i} \sum_k (A_{km} r_k)_i + \sum_k (f_{Mk})_{b+1} A_{b+1} \alpha_{1b+1} \rho_{1b+1}^* \frac{1}{a_{i+1}} \sum_k (A_{km} r_k)_i \right) p_{1i} \\
& = \\
& \left(- \frac{\sum_k (f_{Mk})_{b+1} A_{b+1} \alpha_{1b+1} w_{1b+1}^*}{2(z_{c1} R_1 T_1)_{b+1}} + \sum_k (f_{Mk})_{b+1} A_{b+1} \alpha_{1b+1} \rho_{1b+1}^* \frac{1}{a_{i+1}} \sum_k (A_{km} r_k)_{i+1} \right) p_{1i+1} + \quad (5.26) \\
& \left(\frac{\sum_k (f_{Mk})_b A_b \alpha_{1b} w_{1b}^*}{2(z_{c1} R_1 T_1)_b} + \sum_k (f_{Mk})_b A_b \alpha_{1b} \rho_{1b}^* \frac{1}{a_i} \sum_k (A_{km} r_k)_{i-1} \right) p_{1i-1} + \\
& \left(\sum_k (f_{Mk})_b A_b \alpha_{1b} \rho_{1b}^* w_{1b}^* - \sum_k (f_{Mk})_{b+1} A_{b+1} \alpha_{1b+1} \rho_{1b+1}^* w_{1b+1}^* \right)
\end{aligned}$$

où les valeurs de masses volumiques et de pression au point b sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
\rho_{1b} &= \frac{\rho_{1b} + \rho_{1b-1}}{2} \\
T_{1b} &= \frac{T_{1b} + T_{1b-1}}{2}
\end{aligned} \quad (5.27)$$

Cette formulation a la forme suivante :

$$A_i p_{1i} = B_i p_{1i+1} + C_i p_{1i-1} + D_i \quad (5.28)$$

Cette équation peut également être résolue à partir de l'algorithme TDMA présentée à la section 5.1.2. Les valeurs aux frontières étant spécifiées, p_{10} et p_{1N} sont nuls.

5.1.4 Correction des pressions et des vitesses

Les corrections de pression calculées précédemment entraînent des corrections sur la vitesse ainsi que sur la masse volumique. Un facteur de relaxation constant pour la pression, représenté par f_p , est introduit pour assurer la convergence relaxant du fait même la masse volumique :

$$\begin{aligned}
p_{1i} &= p_{1i}^* + f_p p_{1i} \\
\rho_{1i} &= \rho_{1i}^* + \frac{f_p}{(z_{c1} R_1 T_1)_i} p_{1i}
\end{aligned} \quad (5.29)$$

Un facteur de relaxation constant pour la vitesse est également introduit. Cependant pour s'assurer que l'équation de conservation de la masse soit respectée après correction, il est introduit directement dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement sous la forme suivante :

$$\frac{a_i}{f_u} w_{1b} = a_{i-1} w_{1b-1} - \sum_k \left(\frac{(A_i \alpha_{ki} + A_{i-1} \alpha_{ki-1})}{2} ((r_k p_1)_i - (r_k p_1)_{i-1}) \right) + (1 - f_u) \frac{a_i}{f_u} w_{1b}^* \quad (5.30)$$

où f_u est le facteur de relaxation de la vitesse.

5.1.5 Résolution de l'équation de conservation de l'énergie

Dans le but d'obtenir la température aux différents volumes de contrôle, l'équation de la conservation de l'énergie de mélange est résolue. Cette température est ensuite utilisée pour mettre à jour les variables qui en dépendent comme la masse volumique par exemple.

Avec le rapport de glissement, la définition de l'enthalpie et les rapports adimensionnels introduits au chapitre 4, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[A \alpha_1 \rho_1 w_1 \left(\sum_k (f_{Mk} s_k^2) \frac{w_1^2}{2} + \sum_k (f_{Mk} f_{hk}) \gamma_1^0 + \sum_k (f_{Mk} f_{Tk}) C_{p1} T_1 \right) \right] = \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (5.31)$$

Le flux d'énergie de mélange E est conservé et il est donc possible d'isoler la température T_1 de cette équation pour la mettre à jour en fonction du flux d'énergie de mélange à l'entrée :

$$T_{1i} = \frac{\frac{E_{i-1}}{(A \alpha_1 \rho_1 w_1)_i} - \left(\sum_k (f_{Mk} s_k^2) \frac{w_1^2}{2} \right)_i - \left(\sum_k (f_{Mk} f_{hk}) \gamma_1^0 \right)_i}{\left(\sum_k (f_{Mk} f_{Tk}) C_{p1} \right)_i} \quad (5.32)$$

5.1.6 Changement de phase

Pour un système sans changement de phase, aucun échange de masse entre les phases n'a lieu et les flux massiques de chaque phase sont conservés :

$$\frac{\partial}{\partial z} (A_k \rho_k w_k) = 0 \quad (5.33)$$

Par contre, pour un écoulement avec changement de phase, le terme de source interphasique dans l'équation de conservation de la phase dispersée est présent :

$$\frac{\partial}{\partial z}(A_k \rho_k w_k) = \sigma_k^M \quad (5.34)$$

En définissant l'équation de conservation de la masse en fonction du flux massique de la phase k , l'équation (5.34) devient :

$$\frac{\partial}{\partial z}(M_k) = \sigma_k^M \quad (5.35)$$

Pour un schéma décentré avant et en intégrant sur le volume de contrôle, le flux massique de la phase k est fonction des variables du volume de contrôle précédent et du changement de phase à l'intérieur de ce volume de contrôle :

$$M_{ki} = M_{k_{i-1}} + \Delta z_i \sigma_k^M \quad (5.36)$$

Le flux massique de la phase continue est alors donné par la relation suivante :

$$M_{li} = M_{l_{i-1}} - \Delta z_i \sigma_l^M \quad (5.37)$$

5.1.7 Déséquilibre mécanique

En équilibre mécanique, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est remplacée par la relation de vitesses équivalentes :

$$w_k = w_l \quad (5.38)$$

Par contre, pour modéliser un déséquilibre mécanique, l'équation de conservation phasique de la quantité de mouvement doit être solutionnée :

$$\frac{\partial}{\partial z}(M_k w_k) + \frac{\partial}{\partial z}(A \alpha_k p_k) = \sigma_k^J + \sigma_k^{JV} + \sigma_k^{JW} \quad (5.39)$$

où M_k est le flux massique de la phase k . Ce débit est obtenu de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial z}(M_k) = \sigma_k^M + \sigma_k^{MV} + \sigma_k^{MW} \quad (5.40)$$

L'intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est réalisée en évaluant chacun des termes de source et en sommant leur contribution à la variation de la vitesse de la deuxième phase :

$$M_k \frac{\partial}{\partial z}(w_k) = -w_k \frac{\partial}{\partial z}(M_k) - \frac{\partial}{\partial z}(A \alpha_k p_k) + \sigma_k^J + \sigma_k^{JV} + \sigma_k^{JW} \quad (5.41)$$

Donc, pour un schéma décentré avant, la vitesse de la seconde phase est obtenue en fonction des termes de source et de la vitesse provenant du volume de contrôle précédent :

$$w_{k,i} = w_{k,i-1} - \frac{w_{km,i} \Delta z_i (\sigma_k^M + \sigma_k^{MV} + \sigma_k^{MW})_i}{M_{km,i}} - \frac{(A\alpha_k p_k)_i - (A\alpha_k p_k)_{i-1}}{M_{km,i}} + \frac{\Delta z_i (\sigma_k^J + \sigma_k^{JV} + \sigma_k^{JW})_i}{M_{km,i}} \quad (5.42)$$

où $w_{km,i}$ est la vitesse moyenne dans le volume de contrôle de la phase k , $M_{km,i}$ est le débit massique moyen de la phase k dans le volume de contrôle et Δz_i est la largeur du volume de contrôle i . De plus, les termes de source ont déjà été définis aux sections 3.4 à 3.6.

5.1.8 Déséquilibre thermique

Lorsque les phases sont en équilibre thermique, l'équation de conservation de l'énergie est remplacée par la relation suivante liant les températures des phases :

$$T_k = T_1 \quad (5.43)$$

Par contre, afin de tenir compte du déséquilibre thermique, la température de la phase condensée doit être obtenue. Pour ce faire, l'équation de conservation de l'énergie doit être solutionnée :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(M_k \left(h_k + \frac{w_k^2}{2} \right) \right) = \sigma_k^{EW} + \sigma_k^E + \sigma_k^{EV} \quad (5.44)$$

Les termes de source de l'équation de conservation de l'énergie peuvent être explicités de la manière suivante comme le présente les sections 3.4.3, 3.5.3 et 3.6 :

$$\sigma_k^{EW} = \sigma_k^{EhW} + \sigma_k^{EuW} + \sigma_k^{E\mu W} + \sigma_k^{EqW} \quad (5.45)$$

$$\sigma_k^E = \sigma_k^{Eh} + \sigma_k^{Eu} + \sigma_k^{E\mu} + \sigma_k^{Eq} \quad (5.46)$$

$$\sigma_k^{EV} = 0 \quad (5.47)$$

où σ_k^{EhW} , σ_k^{EuW} , $\sigma_k^{E\mu W}$ et σ_k^{EqW} représentent respectivement l'échange à la paroi de l'énergie thermique, de l'énergie cinétique, de l'énergie due aux contraintes visqueuses et le terme de source de chaleur. De leur côté, les termes σ_k^{Eh} , σ_k^{Eu} , $\sigma_k^{E\mu}$ et σ_k^{Eq} représentent respectivement le terme d'échange à l'interface de l'énergie thermique, de l'énergie cinétique, de l'énergie due aux contraintes visqueuses et le terme de source de chaleur à l'interface. Finalement, le terme

σ_k^{EV} représente les sources volumiques d'énergie dans le volume de contrôle. Ce dernier terme est nul puisqu'aucune source d'énergie n'est présente.

Pour la phase condensée, il est raisonnable de supposer que les énergies mécanique et thermique sont découplées, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(M_k \frac{w_k^2}{2} \right) = \sigma_k^{EV} + \sigma_k^{Eu} + \sigma_k^{E\mu} + \sigma_k^{EuW} + \sigma_k^{E\mu W} \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (M_k h_k) = \sigma_k^{Eh} + \sigma_k^{Eq} + \sigma_k^{EhW} + \sigma_k^{EqW} \quad (5.49)$$

L'équation (5.49) fait ressortir la variation d'enthalpie en fonction des termes de source. L'équation de conservation de la masse peut alors y être introduite :

$$\frac{\partial}{\partial z} (M_k h_k) = M_k \frac{\partial}{\partial z} (h_k) + h_k \frac{\partial}{\partial z} (M_k) = \sigma_k^{Eh} + \sigma_k^{Eq} + \sigma_k^{EhW} + \sigma_k^{EqW} \quad (5.50)$$

En isolant l'enthalpie, l'équation de conservation de l'énergie devient :

$$M_k \frac{\partial}{\partial z} (h_k) = \sigma_k^{Eh} + \sigma_k^{Eq} + \sigma_k^{EhW} + \sigma_k^{EqW} - h_k (\sigma_k^M + \sigma_k^{MV} + \sigma_k^{MW}) \quad (5.51)$$

En intégrant l'équation (5.51), la variation d'enthalpie en fonction des termes de source est obtenue :

$$h_{k_i} - h_{k_{i-1}} = -\frac{h_{km_i}}{M_{km_i}} \Delta z_i (\sigma_k^M + \sigma_k^{MV} + \sigma_k^{MW})_i + \frac{1}{M_{km_i}} \Delta z_i (\sigma_k^{Eh} + \sigma_k^{Eq} + \sigma_k^{EhW} + \sigma_k^{EqW})_i \quad (5.52)$$

où M_{km_i} est le débit massique moyen de la phase k dans le volume de contrôle et Δz_i est la largeur du volume de contrôle i . Les termes de source apparaissant dans cette équation ont déjà été définis aux sections 3.4 à 3.6.

La température est calculée à partir de l'enthalpie en faisant l'hypothèse d'une chaleur massique constante :

$$T_k = \frac{h_k - h_k^0}{C_{pk}} + T_k^0 \quad (5.53)$$

5.1.9 Critère de convergence

En régime permanent, la démarche itérative s'arrête lorsque la variation en tout point entre chaque itération j est plus petite qu'une valeur cible donnée par l'utilisateur :

$$\frac{x_{1,i}^{j+1} - x_{1,i}^j}{x_{1,i}^j} < C \quad (5.54)$$

où $x_{1,i}^j$ représente une variable de la phase compressible au volume i pour l'itération j et C la variation maximale permise avant convergence. Ce critère doit être satisfait simultanément pour la vitesse, la densité, la pression, la température et la fraction volumique. Par exemple, toutes les simulations numériques présentées dans cette thèse ont une valeur cible de 10^{-6} .

5.2 Schéma de résolution des flux de mélange

Afin d'obtenir un schéma qui tire profits des développements théoriques sur les points singuliers présentés par Dostie et al. (2009), une approche basée sur l'utilisation des équations de conservation de mélange sous forme conservative est également étudiée. Cette approche utilise directement les équations formulées dans le chapitre 4 entourant les points critiques. Ce schéma basé sur l'utilisation des flux de mélange sera désormais nommé FLUX-M. Il utilise la transformation des flux de mélange vers les variables primitives de la phase compressible pour converger vers une solution conservative des équations de mélange.

5.2.1 Système décentré avant utilisant les équations de mélange

Pour un écoulement avec parois imperméables et sans source volumique de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, les équations de conservation de mélange (3.23) à (3.25) deviennent :

$$\frac{\partial M}{\partial z} = 0 \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial J}{\partial z} = \sum_k \left(p_k \frac{\partial (A \alpha_k)}{\partial z} \right) \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (5.57)$$

où les flux de masse, d'impulsion et d'énergie de mélange sont respectivement définis par les équations (4.27) à (4.29).

En posant la pression, la température et le taux de vide à l'entrée ainsi que la pression de sortie, il est possible de résoudre le système par un schéma décentré avant en imposant une vitesse d'entrée $w_{10} = w_{1in}$. En effet, à l'entrée, les valeurs de M , J et E peuvent être calculées à partir des variables primitives imposées :

$$\begin{aligned} M_0 &= \left(\sum_k (f_{Mk}) A \alpha_1 \rho_1 w_1 \right)_0 \\ J_0 &= \left(\sum_k (f_{Mk} s_k) A \alpha_1 \rho_1 w_1^2 + \sum_k (\alpha_k r_k) A p_1 \right)_0 \\ E_0 &= \left(A \alpha_1 \rho_1 w_1 \left(\sum_k (f_{Mk} f_{hk}) \gamma_1^0 + \sum_k (f_{Mk} f_{Tk}) C_{p1} T_1 + \sum_k (f_{Mk} s_k^2) \frac{w_1^2}{2} \right) \right)_0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

Dans ce cas, la masse volumique à l'entrée est déterminée par la relation des gaz parfaits pour les fluides compressibles et par l'utilisateur pour un fluide incompressible.

Par la suite, en intégrant les équations de conservation (5.55) à (5.57) sur le volume de contrôle, une forme explicite est obtenue pour déterminer la valeur du flux massique de mélange en fonction de la valeur au volume de contrôle précédent :

$$M_i = M_{i-1} \quad (5.59)$$

$$J_i = J_{i-1} + \sum_k \left(\frac{(r_{ki} p_{1i} + r_{ki-1} p_{1i-1})}{2} (A_i \alpha_{ki} - A_{i-1} \alpha_{ki-1}) \right) \quad (5.60)$$

$$E_i = E_{i-1} \quad (5.61)$$

5.2.2 Mise à jour des variables primitives

Pour un schéma décentré avant, les variables conservatives sont connues en fonction des conditions du volume de contrôle précédent et des variables primitives de l'itération précédente. Pour obtenir les valeurs convergées des variables conservatives, il faut mettre à jour les variables primitives. Pour ce faire, la vitesse de la phase de référence est mise à jour à partir de la solution de l'équation quadratique (4.34) présentée à la section 4.4.2 :

$$w_i = \frac{\left(\frac{\sum_k (f_{Mk})}{\sum_k (\alpha_k r_k)} \frac{J}{M} A + M \frac{\sum_k (f_{Mk} s_k)}{\sum_k (f_{Mk}) \sum_k (\alpha_k r_k)} \sum_{k=2}^n \frac{f_{Mk}}{\rho_k s_k} \right) \pm \sqrt{\Delta}}{2A \left(\frac{\sum_k (f_{Mk} s_k)}{\sum_k (\alpha_k r_k)} - \frac{\sum_k (f_{Mk} s_k^2)}{\sum_k (f_{Mk} f_{Tk})} \frac{z_{c1} R_1}{2C_{p1}} \right)} \quad (5.62)$$

où le discriminant est obtenu à partir de l'équation suivante :

$$\Delta = \left(\frac{\sum_k (f_{Mk})}{\sum_k (\alpha_k r_k)} \frac{J}{M} A + M \frac{\sum_k (f_{Mk} s_k)}{\sum_k (f_{Mk}) \sum_k (\alpha_k r_k)} \sum_{k=2}^n \frac{f_{Mk}}{\rho_k s_k} \right)^2 - 4A \left(\frac{\sum_k (f_{Mk} s_k)}{\sum_k (\alpha_k r_k)} - \frac{\sum_k (f_{Mk} s_k^2)}{\sum_k (f_{Mk} f_{Tk})} \frac{z_{c1} R_1}{2C_{p1}} \right) \left(A \frac{E}{M} \frac{z_{c1} R_1}{C_{p1}} \frac{\sum_k f_{Mk}}{\sum_k (f_{Mk} f_{Tk})} - Ah_1^0 \frac{z_{c1} R_1}{C_{p1}} \frac{\sum_k (f_{Mk} f_{hk})}{\sum_k (f_{Mk} f_{Tk})} + J \frac{\sum_{k=2}^n \frac{f_{Mk}}{\rho_k s_k}}{\sum_k (\alpha_k r_k)} \right) \quad (5.63)$$

Deux valeurs pour la vitesse de la phase compressible peuvent être obtenues et elles représentent les deux branches de l'écoulement : sous-critique et sur-critique.

Pour déterminer quelle branche utiliser, la vitesse critique doit être calculée. La vitesse critique, présentée à l'équation (4.37), est obtenue lorsque la dérivée du flux d'impulsion de mélange par rapport à la vitesse est nulle :

$$\frac{\rho_{1i} w_{1ci}^2}{p_{1i}} = \frac{1}{\alpha_{1i} \left(\alpha_{1i} \frac{\sum_k (f_{Mk} s_k)_i}{\sum_k (\alpha_k r_k)_i} - \frac{z_{c1i} R_1}{C_{p1}} \frac{\sum_k (f_{Mk} s_k^2)_i}{\sum_k (f_{Mk} f_{Tk})_i} \right)} \quad (5.64)$$

Il est intéressant de noter que le même résultat peut être obtenu en posant le discriminant de l'équation (5.62) comme étant nul. En fait, un discriminant nul indique que les courbes de vitesses sous-critique et sur-critique sont confondues et cette jonction se produit au point critique. Finalement, le nombre critique *DIS* est calculé localement :

$$DIS_i = \frac{w_{1i}}{w_{1ci}} \quad (5.65)$$

Tant que le point critique n'a pas été rencontré ($DIS = 1$), l'écoulement demeure dans le même régime. D'ailleurs, dans cette étude, l'écoulement à l'entrée de la tuyère est toujours considéré comme étant sous-critique. Au point critique, un choix entre les deux branches doit être fait. Si la pression de sortie est plus faible que la pression occasionnant un écoulement sous-critique avec un seul point critique, la branche sur-critique sera alors choisie après le point critique.

Une fois cette vitesse établie, les nouvelles valeurs des variables primitives sont calculées à partir de la définition du flux de masse (4.27), du flux d'impulsion (4.28) et de l'équation d'état (4.13) :

$$\rho_{1i} = \frac{M_i}{A_i \alpha_{1i} w_{1i} \sum_k (f_{Mk})_i}$$

$$P_{1i} = \frac{\left(J_i - M_i w_{1i} \frac{\sum_k (f_{Mk} s_k)_i}{\sum_k (f_{Mk})_i} \right)}{A \sum_k (\alpha_k r_k)_i} \quad (5.66)$$

$$T_{1i} = \frac{P_{1i}}{z_{c1i} \rho_{1i} R_1}$$

5.2.3 Gestion du débit d'entrée en fonction des conditions de sortie

Tant que l'écoulement n'est pas critique, une nouvelle vitesse d'entrée est calculée à partir des informations de sortie. En effet, cette méthode fait en sorte de propager les informations de l'entrée vers la sortie du conduit. À la sortie, puisque la pression est donnée, il est possible de comparer la pression obtenue avec la pression désirée. Si la pression obtenue est plus faible que la pression désirée, le débit est trop grand et il est réduit. Par contre, si la pression obtenue est plus grande, le débit d'entrée est trop faible et il est augmenté. Ces modifications sur le débit sont faites en utilisant la méthode de la fausse position explicitée par Chapra et al. (2008).

Une gestion doit être effectuée lorsque le débit d'entrée est plus grand que le débit maximal. Dans ce cas, au cours de la démarche itérative, le discriminant de l'équation quadratique devient négatif et une vitesse ayant une partie imaginaire est obtenue. Le débit doit donc être diminué

afin d'obtenir un écoulement critique localement. Le nouveau débit M_{corr} est alors obtenu en fractionnant le débit initial par un facteur δ :

$$M_{corr} = \delta \cdot M \quad (5.67)$$

où $1 > \delta > 0$ est une propriété constante permettant d'itérer sur le débit pour obtenir un débit de valeur égale ou plus petit que le débit critique.

Cette opération est effectuée jusqu'à ce que le discriminant soit supérieur ou égal à 0 partout dans la tuyère. À ce moment, le débit critique est obtenu et les conditions en amont du point critique sont alors connues. Si la pression de sortie obtenue pour une détente complète est plus faible que la pression désirée, il y aura un choc dans le divergent pour un écoulement monophasique. En fait, une position initiale du choc est posée et la pression obtenue est comparée à la pression désirée. Si la pression obtenue est plus grande, le choc doit être plus loin dans le divergent. Dans le cas contraire, le choc se rapproche du point critique. Pour déterminer la position de ce choc dans le divergent, la méthode de la fausse position est également utilisée.

Pour un écoulement diphasique en déséquilibre thermodynamique par contre, le mécanisme permettant une augmentation de la pression n'est pas bien documenté. Pour le moment, ce schéma est capable de résoudre les écoulements diphasiques critiques avec détente complète, mais il ne permet pas de capturer les discontinuités liées à l'augmentation abrupte de pression lorsqu'elles sont présentes. Pour un écoulement monophasique, les propriétés à travers un choc normal sont bien documentées puisque le régime d'écoulement passe de supersonique à subsonique. Ce n'est pas aussi simple pour un écoulement diphasique puisque, lorsque le régime passe de supersonique à subsonique, l'écoulement peut demeurer critique. Il y a donc une nécessité d'améliorer la compréhension entourant la gestion des régimes d'écoulements. Dans le cadre de cette thèse, ce développement théorique ne sera pas étudié davantage, mais plutôt proposé comme développement futur pour améliorer le schéma.

5.2.4 Déséquilibres entre les phases

Les déséquilibres entre les phases, que se soit le changement de phase, le déséquilibre mécanique ou le déséquilibre thermique, sont traités de la même manière que dans le schéma SIMPLE compressible. Ils sont présentés aux sections 5.1.6, 5.1.7, et 5.1.8.

5.2.5 Convergence des résultats

La convergence se termine lorsque la pression de sortie est respectée et que la variation des variables primitives en tous points est plus petite qu'une valeur cible donnée par l'utilisateur. L'équation (5.54) est donc utilisée également pour ce schéma.

5.2.6 Algorithme du schéma numérique

L'algorithme du schéma numérique FLUX-M est présenté à la Figure 5.3.

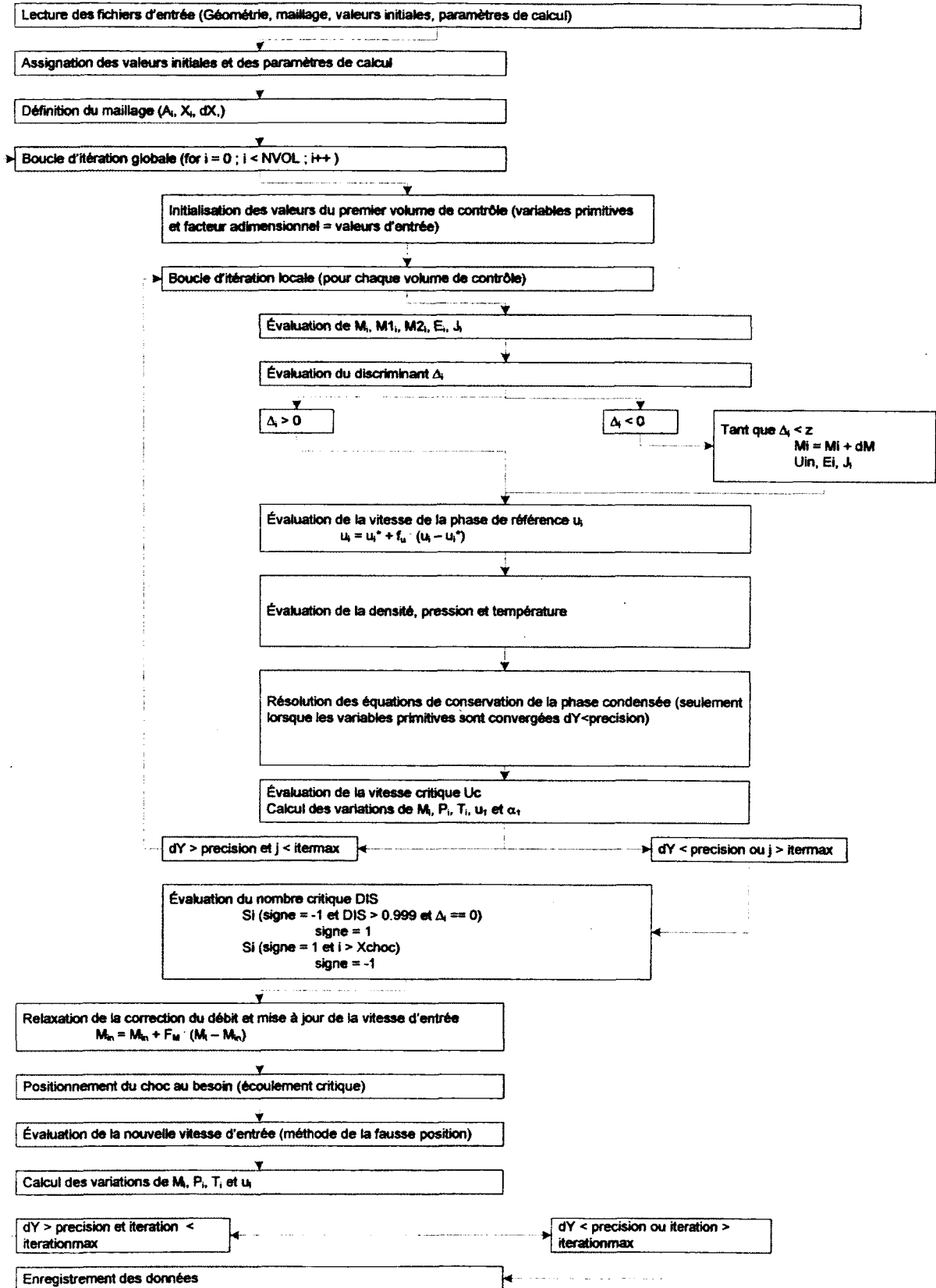


Figure 5.3 : Algorithme du schéma FLUX-M.

5.3 Conditions aux limites

Pour ces deux schémas, les conditions d'entrée et de sortie sont imposées. La définition des termes de source pour un écoulement dont les phases condensées sont particulières permettent de bien représenter la physique de l'écoulement sur une plage de taux de vide de 1 à 0.7 environ. Cette plage ne peut être clairement définie puisqu'aucune donnée n'est disponible concernant le changement de topologie de l'écoulement. Cependant, bien que ces relations ne soient pas réalistes lorsque le taux de vide diminue, elles permettent tout de même de calculer les évolutions des propriétés dans un écoulement diphasique critique en tuyère. En fait, dans cette étude, le modèle ne cherche pas à représenter parfaitement la physique de l'écoulement, mais à développer un outil pour calculer les propriétés le long de l'écoulement. Les termes de source pourront donc être ajustés en fonction de la topologie de l'écoulement dans des travaux futurs.

D'ailleurs, le prochain chapitre permettra de démontrer que le modèle permet de bien simuler des écoulements diphasiques critiques en tuyère.

CHAPITRE 6

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Ce chapitre présente la validation des schémas numériques utilisés ainsi qu'une analyse des écoulements critiques présenté par Dostie et al. (2009). Une étude numérique des effets des déséquilibres sur l'écoulement et sur les conditions critiques sera également présentée. Finalement, une comparaison entre les deux schémas numériques sera présentée.

6.1 Validation du schéma SIMPLE compressible

Une étude de la convergence liée au maillage, au critère de convergence C et aux facteurs de relaxation f_u et f_p permettra de déterminer les valeurs à utiliser pour les simulations. De plus, afin de valider le schéma SIMPLE compressible, des solutions numériques sont comparées à des solutions théoriques d'écoulements monophasiques isentropiques, à des données expérimentales et à des solutions numériques d'écoulements diphasiques provenant de la littérature.

6.1.1 Étude de la convergence du schéma SIMPLE compressible

Afin de justifier la taille du maillage, la valeur du critère de convergence et les facteurs de relaxation, une étude sur l'effet de ces paramètres sur le résultat de la convergence a été réalisée à l'aide de la tuyère ASTAR [Städtke et al., 2005]. En fait, les solutions numériques sont comparées à une valeur théorique ou une valeur maximale, obtenue à l'aide d'un maillage très fin.

Premièrement, l'effet de la taille du maillage permet de lier la précision des résultats en fonction du nombre de volume de contrôle. Le Tableau 6.1 présente l'effet du maillage pour un écoulement monophasique isentropique. Plus le maillage est fin, plus le nombre d'itérations et le temps nécessaire pour atteindre la convergence augmentent. D'après ces résultats, pour un

écoulement monophasique, un maillage de 4000 volumes de contrôle a été choisi puisqu'il permet d'obtenir une bonne précision et un temps de calcul acceptable. Un maillage non uniforme est utilisé où la maille la plus fine se situe au col géométrique de la tuyère :

$$\Delta z_i = \Delta z_{col} \frac{A_i}{A_{col}} \quad (6.1)$$

Tableau 6.1 : Valeur du débit en fonction du nombre de maille (air, $p_{in} = 1$ MPa, $T_{in} = 400$ K, $p_{out} = 0.5$ MPa, $M_{th} = 3.9715$ kg/s, $f_u = 0.3$, $f_p = 0.8$, $C = 10^{-6}$)

Δz_{col}	Nombre de volume de contrôle	Nombre d'itération	Durée du calcul (s)	M (kg/s)
0.001	400	6631	41	3.9350
0.0001	4000	62020	4077	3.9690
0.00004	10000	151301	101050	3.9695
0.00001	40000	600130	401240	3.9707

Le Tableau 6.2 et le Tableau 6.3 présentent l'effet du maillage sur un écoulement diphasique pour deux rapports de débits distincts ($f_{M2} = 20$ et $f_{M2} = 40$). Dans ces cas également, le maillage composé de 4000 volumes de contrôle permet d'obtenir des résultats très près de ceux obtenus avec un maillage très fin. Pour ces raisons, les simulations numériques présentées dans cette thèse utiliseront, la plupart du temps, un maillage de 4000 volumes de contrôle peu importe la géométrie de tuyère utilisée.

Tableau 6.2 : Valeur du débit en fonction du nombre de mailles (air-eau, $f_{M2} = 20$, $p_{in} = 1$ MPa, $T_{in} = 400$ K, $p_{out} = 0.5$ MPa, $f_u = 0.3$, $f_p = 0.8$, $C = 10^{-6}$)

Δz_{col}	Nombre de volume de contrôle	Nombre d'itération	Durée du calcul (s)	M (kg/s)
0.001	400	5803	32	17.7813
0.0001	4000	43027	3017	17.8955
0.00004	10000	98234	35045	17.8960
0.00001	40000	298189	243589	17.8962

Tableau 6.3 : Valeur du débit en fonction du nombre de mailles (air-eau, $f_{M2} = 40$, $p_{in} = 1$ MPa, $T_{in} = 400$ K, $p_{out} = 0.5$ MPa, $f_u = 0.3$, $f_p = 0.8$, $C = 10^{-6}$)

Δz_{col}	Nombre de volume de contrôle	Nombre d'itération	Durée du calcul (s)	M (kg/s)
0.001	400	6050	35	23.5324
0.0001	4000	50435	3522	23.7132
0.00004	10000	103643	41870	23.7138
0.00001	40000	360286	283241	23.7141

Deuxièmement, l'effet de la valeur du critère de convergence C , montré au Tableau 6.4 pour un écoulement monophasique, est quantifié. Plus C est faible, plus la précision est grande. Cependant, cette augmentation de précision a un coût en termes d'itérations supplémentaires et de temps de calcul. Les simulations numériques utiliseront donc un critère de convergence de $C = 10^{-6}$ pour l'ensemble des résultats présentés dans cette thèse. Contrairement à d'autres types de calcul numérique nécessitant une précision moindre, cette précision est nécessaire pour traiter les écoulements critiques étudiés dans ces travaux.

Tableau 6.4 : Erreur numérique sur le débit en fonction du critère de convergence pour 4000 volumes de contrôle (air, $p_{in} = 1$ MPa, $T_{in} = 400$ K, $p_{out} = 0.5$ MPa, $M_{th} = 3.9715$ kg/s, $f_u = 0.3$, $f_p = 0.8$.)

C	Nombre d'itération	M (kg/s)
10^{-1}	9	0.2797
10^{-2}	39	0.3560
10^{-3}	139	0.9236
10^{-4}	1171	2.4254
10^{-5}	49300	3.9660
10^{-6}	55722	3.9670
10^{-7}	65013	3.9671

Finalement, l'erreur engendrée par les facteurs de relaxation est quantifiée. En fait, le Tableau 6.5 montre que les différents facteurs de relaxation n'ont pas d'effet sur la solution convergée. Cependant, ces facteurs font en sorte de moduler la vitesse de convergence et le nombre d'itérations nécessaires pour l'atteindre. Pour les simulations numériques, des facteurs de relaxation de 0.3 pour la vitesse et de 0.8 pour la pression seront utilisés puisqu'ils procurent une bonne stabilité numérique ainsi qu'un nombre d'itérations minimal.

Tableau 6.5 : Valeur du débit en fonction des facteurs de relaxation pour 4000 volumes de contrôle (air, $p_{in} = 1$ MPa, $T_{in} = 400$ K, $p_{out} = 0.5$ MPa, $M_{th} = 3.9715$ kg/s, $C = 10^{-6}$)

f_u	f_p	Nombre d'itération	M (kg/s)
0.7	0.8	76	-
0.7	0.5	134	-
0.7	0.1	526	-
0.5	0.8	4639	-
0.5	0.5	4939	-
0.5	0.1	1979	-
0.3	0.8	55722	3.9670
0.3	0.5	57044	3.9670
0.3	0.1	60120	3.9670
0.1	0.8	192034	3.9670
0.1	0.5	205204	3.9670
0.1	0.1	220452	3.9670

6.1.2 Écoulements monophasiques

Les solutions théoriques d'écoulements monophasiques sont obtenues à partir des relations isentropiques :

$$\begin{aligned} \frac{T_o}{T} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \\ \frac{p_o}{p} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \frac{\rho_o}{\rho} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \end{aligned} \quad (6.2)$$

où T_o , p_o et ρ_o sont, respectivement, la pression, la température et la masse volumique de stagnation et M est le nombre de mach local.

Pour la géométrie de la tuyère ASTAR [Städtke et al., 2005], six pressions de sortie différentes ont été simulées pour un écoulement d'air sec. Une pression et une température d'entrée de 1 MPa et de 400 K ont été utilisées. Les pressions de sortie utilisées sont : 0.9990 MPa, 0.9940 MPa, 0.9900 MPa, 0.8000 MPa, 0.6000 MPa et 0.0250 MPa (détente complète). Le Tableau 6.6 montre la comparaison des solutions théoriques et numériques où les données représentant une évolution critique sont marquées d'un *. L'écart entre les valeurs théoriques et numériques est inférieur ou égal à 0.1 % autant pour le débit que pour la valeur de la pression au col P_{col} . De

plus, le schéma numérique, bien qu'étant dissipatif, capture bien les chocs et leurs positions dans le cas d'un écoulement supersonique. Dans ce cas, puisque le choc s'opère sur quelques volumes de contrôle, la position du choc est posée comme étant au volume de contrôle moyen :

$$z_{choc} = z_{début} + \frac{(z_{début} - z_{fin})}{2} \quad (6.3)$$

où $z_{début}$ et z_{fin} représente respectivement la position du volume de contrôle où le choc débute et où il finit.

Tableau 6.6 : Comparaison avec les données théoriques pour une pression d'entrée de 1 MPa et une température de 400 K avec la géométrie ASTAR [Städtke et al. 2005].

P_{out} (MPa)	Résultats théoriques			Résultats numériques				
	Débits (kg/s)	P_{col} (MPa)	Position choc (m)	Débits (kg/s)	P_{col} (MPa)	Position choc (m)	Erreur sur débit (%)	Erreur sur P_{col} (%)
0.9990	1.2315	0.9769	-	1.2315	0.9767	-	0.00	0.01
0.9940	3.0784	0.8269	-	3.0790	0.8269	-	0.02	0.01
0.9900*	3.9715	0.5279	-	3.9670	0.5274	-	0.10	0.10
0.8000*	3.9715	0.5279	0.5107	3.9670	0.5274	0.5100	0.10	0.10
0.6000*	3.9715	0.5279	0.5960	3.9670	0.5274	0.5950	0.10	0.10
0.0250*	3.9715	0.5279	-	3.9670	0.5274	-	0.10	0.10

6.1.3 Écoulements diphasiques sans changement de phase

Dans le but de comparer les solutions obtenues avec schéma SIMPLE compressible, quelques données expérimentales concernant le phénomène de débit critique en tuyère peuvent être retrouvées dans la littérature.

D'ailleurs, Elliott et Weinberg (1968) ont présenté des mesures expérimentales en écoulements azote-eau dans une tuyère de grande dimension. Des données sur les pressions et les débits critiques y sont présentées ainsi que la poussée produite par la tuyère. De plus, une grande plage de rapport de débit massique a été testée. Ces données sont donc une bonne source de comparaison pour le schéma numérique.

Ces données expérimentales ont été obtenues en utilisant une tuyère de 1.3053 mètres de long présentée à la Figure 6.1. Les auteurs présentent un profil de pression ainsi qu'un tableau

résumant les résultats obtenus avec différents rapport de débit pour des écoulements à gouttes. Les conditions à l'entrée pour tous ces tests sont : une pression de 10.342 MPa, une température de 293 K et une pression de sortie de 0.101 MPa, c'est-à-dire la pression atmosphérique ambiante. Pour toutes les simulations effectuées, un critère de Weber de 3 a été utilisé pour déterminer le rayon moyen des gouttes par fractionnement. Les solutions numériques sont obtenues en déséquilibres thermiques et mécaniques et sans changement de phase.

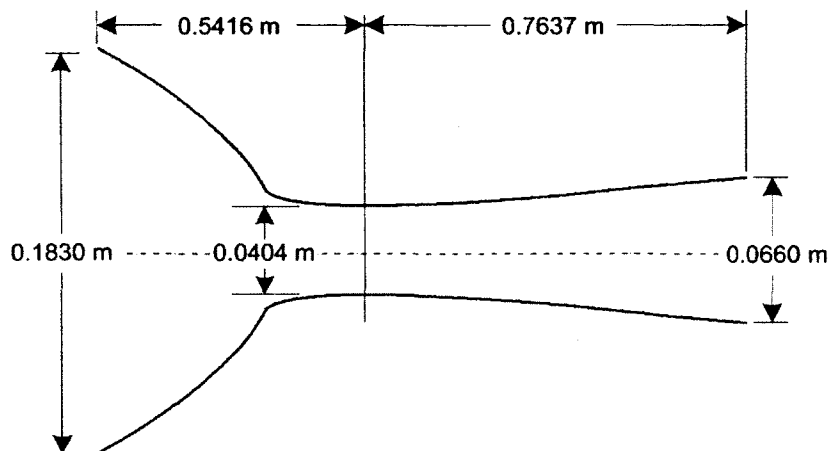


Figure 6.1 : Géométrie de la tuyère utilisée par Elliott et Weinberg (1968).

La Figure 6.2 compare les profils de pression numérique et expérimental dans la tuyère. Les solutions numériques reflètent bien les données expérimentales. Pour ce test, un rapport de débit de 39.1 a été utilisé et un débit mesuré expérimentalement de 67.33 kg/s a été obtenu. Le débit obtenu numériquement est, pour sa part, de 67.64 kg/s pour un écart de 0.45%.

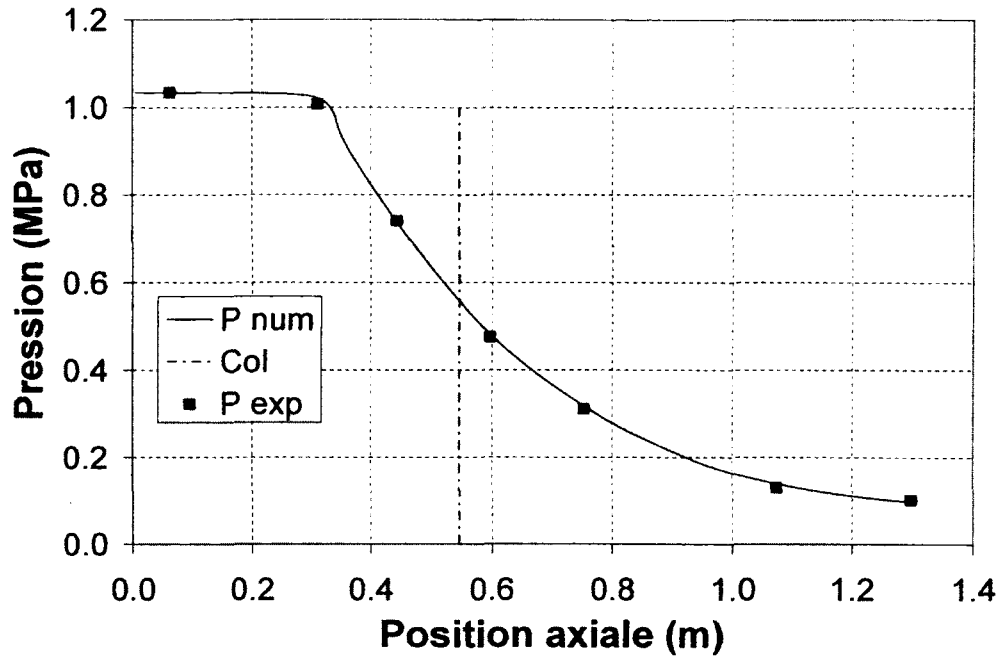


Figure 6.2 : Comparaison avec le profil de pression d'Elliott et Weinberg (1968).

Le Tableau 6.7 montre la comparaison des solutions numériques et des données expérimentales pour une plage de rapport de débit allant de 15.3 à 64.9. Pour tous ces tests, les résultats sont en bon accord en ce qui concerne le débit massique puisque l'écart se situe entre 0.11 et 2.77 %. Cependant, en comparant la poussée obtenue numériquement avec celle obtenue expérimentalement, une surestimation de l'ordre de 5 à 8 % est observée. Cet écart s'explique par le fait que la friction aux parois a été négligée dans le modèle numérique. D'ailleurs, les auteurs présentent une étude analytique démontrant que la vitesse dans la tuyère est d'environ 5.6 % plus grande lorsque l'hypothèse de parois sans friction est utilisée sans modifier significativement le débit massique (variation inférieure à 1.5 %).

Tableau 6.7 : Comparaison avec les données d'Elliott et Weinberg (1968).

f_{M2}	Résultats expérimentaux			Résultats numériques					
	Débit (kg/s)	Vitesse de sortie (m/s)	Poussée (N)	Débit (kg/s)	Erreur sur débits (%)	Vitesse de sortie (m/s)	Erreur sur la vitesse (%)	Poussée (N)	Erreur sur la poussée (%)
15.3	44.5	143	6334	45.8	2.77	147	3.35	6748	6.54
17.2	47.7	131	6236	48.1	0.83	140	7.07	6753	8.28
21.1	51.8	125	6441	52.5	1.27	129	3.34	6760	4.96
22.3	53.6	118	6308	53.7	0.14	126	6.73	6762	7.21
28.3	57.7	109	6308	59.3	2.76	114	4.34	6773	7.38
30.1	60.9	104	6334	60.8	0.11	111	6.83	6776	6.97
39.1	67.7	94	6334	67.3	0.59	100	7.30	6760	6.72
51.6	74.5	85	6334	75.4	1.13	90	6.27	6813	7.55
64.9	81.4	78	6334	82.2	1.00	83	6.73	6844	8.04

De leur côté, Carofano et McManus (1969) ont également publié des données expérimentales d'écoulements critiques diphasiques. Leur géométrie pour les écoulements eau-air dans la tuyère est présentée à la Figure 6.3.

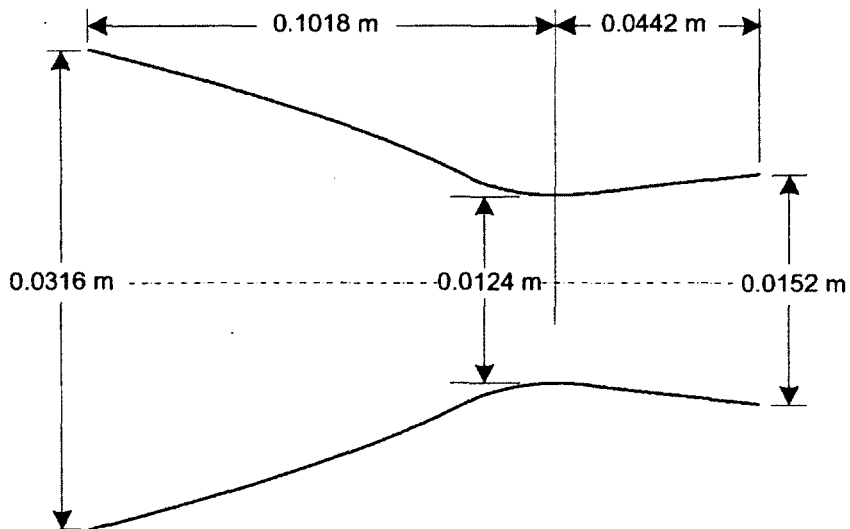


Figure 6.3 : Géométrie de la tuyère utilisée par Carofano et McManus (1969).

Ils présentent un profil de pression dans la tuyère pour un écoulement à haut taux de vide (rapport de débit de 0.1013). Les conditions d'entrée correspondent à une pression de 0.3440 MPa et à une température de 289 K. La pression de sortie est de 0.1455 MPa. Les solutions numériques sont obtenues en tenant compte du fractionnement et des déséquilibres thermique et mécanique.

Le débit massique expérimental est de 0.4141 kg/s comparativement à 0.4103 kg/s pour le débit obtenu numériquement. Cela correspond à un écart de 0.9 %. Lorsque les profils de pression sont comparés, un bon accord est obtenu dans la partie convergente de la tuyère. Cependant, dans la partie divergente, la distribution de pression diffère beaucoup de celle correspondant aux données expérimentales. En fait, numériquement, un choc à la sortie de la tuyère est obtenu pour respecter la condition de sortie tandis qu'aucun choc n'est présent expérimentalement malgré l'augmentation de pression. La Figure 6.4 présente donc la comparaison des profils de pression expérimentale et numérique pour la portion des résultats correspondant à une détente complète. Ici encore, le modèle numérique prédit très bien le profil de pression avant le col géométrique.

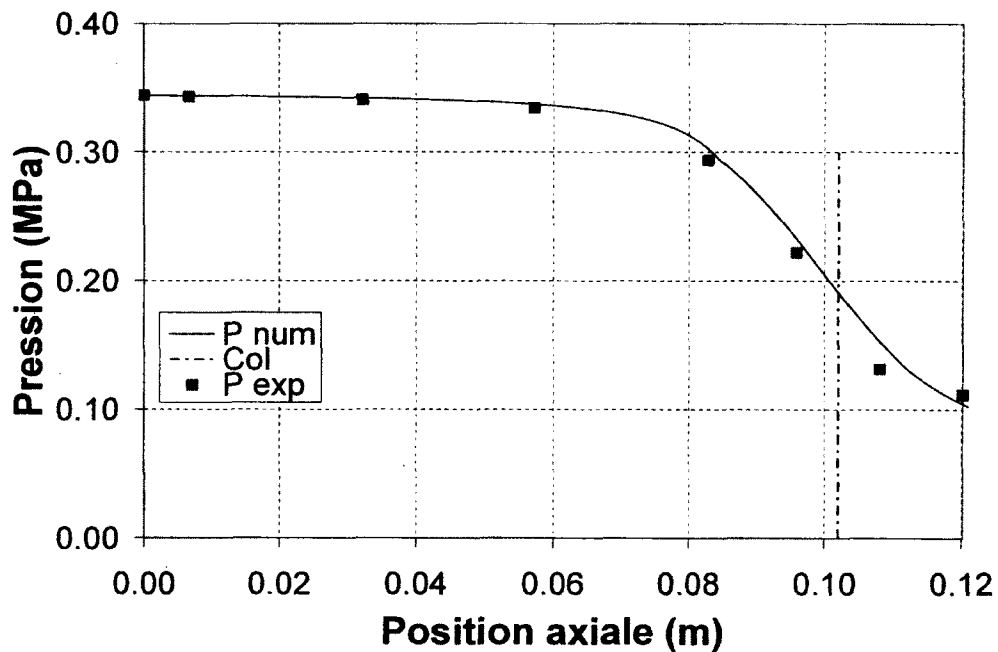


Figure 6.4 : Comparaison avec le profil de pression de Carofano et McManus (1969).

Plus récemment, Lemonnier et Selmer-Olsen (1992) ont présenté des données expérimentales d'écoulement critiques eau-air dans une tuyère avec section droite au col. Ces résultats ont servi pour valider leur propre modèle numérique. La tuyère utilisée pour leurs tests expérimentaux est présentée à la Figure 6.5.

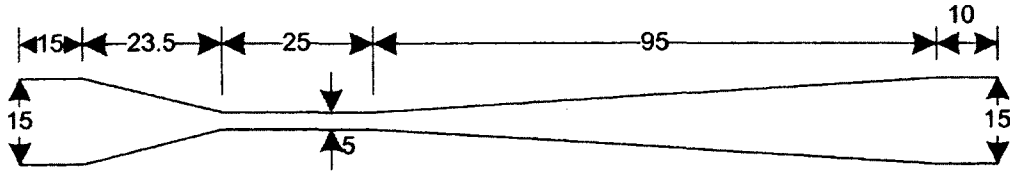


Figure 6.5 : Géométrie de la tuyère utilisée par Lemonnier et Selmer-Olsen (1992) (dimensions en mm).

Ces résultats sont intéressants puisqu'ils présentent des profils de pression pour différentes pressions de sortie, allant d'un écoulement sous-critique à sur-critique, pour deux débits d'eau distincts. Pour tous les tests, la pression d'entrée était de 0.6 MPa et la température de 292 K. Dans ce cas, les pertes de charges présentées à l'équation (3.31) sont incluses dans les simulations numériques.

Le Tableau 6.8 et le Tableau 6.9 présentent une comparaison entre les débits obtenus numériquement et expérimentalement. Les données représentant une évolution critique sont marquées par un *. Numériquement, seul le déséquilibre mécanique est présent et aucun fractionnement n'a lieu puisque les gouttes, d'un rayon moyen $r_p = 2.5 \mu\text{m}$, sont déjà plus petites que le diamètre maximal obtenu pour un fractionnement utilisant $We = 3$. Le modèle numérique prédit très bien les débits autant pour un écoulement sous-critique que pour un écoulement sur-critique puisque l'erreur moyenne est de 2.2 %.

Tableau 6.8 : Comparaison des débits pour les faibles rapports de débit.

Nom du test expérimental	P/P_0	f_{M2}	$M \text{ exp. (kg/s)}$	$M \text{ num. (kg/s)}$	Erreur (%)
P1	0.897	2.5	0.0362	0.0356	-2.47
P2	0.773	1.7	0.0409	0.0415	2.01
P3*	0.717	1.6	0.0421	0.0435	3.43
P4*	0.633	1.5	0.0428	0.0441	3.07
P5*	0.517	1.5	0.0431	0.0441	2.27
P6*	0.333	1.5	0.0431	0.0441	2.41
P7*	0.213	1.5	0.0432	0.0441	2.21
P8*	0.135	1.5	0.0431	0.0441	2.34

Tableau 6.9 : Comparaison des débits pour les hauts rapports de débit.

Nom du test expérimental	P/P_0	f_{M2}	M exp. (kg/s)	M num. (kg/s)	Erreur (%)
P11	0.923	156.3	0.1398	-	-
P12	0.748	50.0	0.1417	0.1405	-0.80
P13	0.604	32.5	0.1432	0.1435	0.23
P14*	0.407	27.5	0.1439	0.1460	1.43
P15*	0.321	27.0	0.1442	0.1465	1.60
P16*	0.231	27.0	0.1440	0.1470	2.06
P17*	0.157	27.0	0.1440	0.1470	2.06

La Figure 6.6 présente huit courbes de pression pour des rapports de débit allant de 1.5 à 2.5. De manière générale, les solutions numériques recourent bien les courbes expérimentales sauf dans la région de sortie du col droit.

En fait, les résultats prédits dans la région de sortie du col droit donnent des pressions trop faibles. Les solutions numériques obtenues par Lemonnier et Selmer-Olsen (1992) montrent également le même type de problème, mais de manière plus prononcée. De plus, les données expérimentales ne comportent aucune augmentation brusque de pression dans le divergent comparativement aux solutions numériques. Cette différence peut s'expliquer par le fait que le modèle numérique inclut seulement les forces de traînée et néglige la force de Basset, la poussée d'Archimède et la force de masse virtuelle. Cependant, au travers d'un choc, Comfort et Crowe (1980) ont démontré que la force de Basset, résultant du développement de la couche visqueuse instable sur la gouttelette, pouvait représenter 60% de la force totale sur la gouttelette lorsque leur diamètre est de l'ordre de 1 à 2 μm . Ces forces engendrent un effet de couplage plus grand entre les phases ayant pour effet de rendre le choc plus diffus.

Pour un rapport de débit plus élevé, allant de 27 à 156, la Figure 6.7 présente la comparaison avec les données expérimentales. Dans ces conditions, le schéma SIMPLE compressible ne prédit aucun choc et un meilleur accord avec les données expérimentales est obtenu pour toutes les courbes et sur toute la longueur de la tuyère. L'absence d'une courbe numérique pour le plus grand rapport de débit s'explique par le fait que le présent schéma numérique est limité à un rapport de débit maximal de 75. Cette limitation est probablement liée au schéma numérique et aux conditions exprimant les interactions entre les phases. En effet, un rapport de débit plus grand

occasionne une divergence dans le calcul des termes d'échange visqueux entre les phases. Un effort supplémentaire est alors nécessaire pour élargir la plage de rapport de débit.

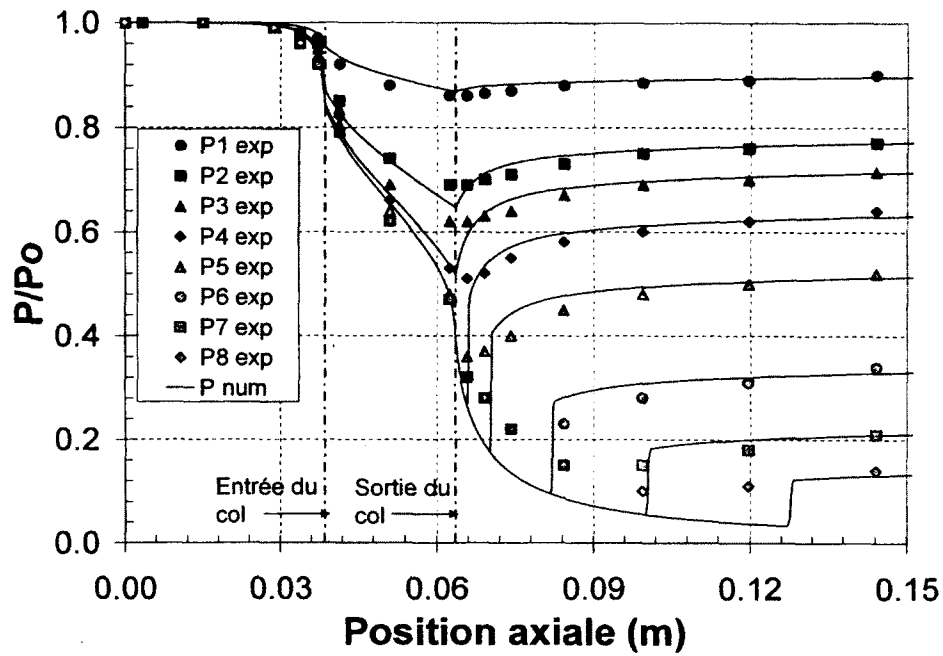


Figure 6.6 : Comparaison avec les profils de pression de Lemonnier et Selmer-Olsen (1992) obtenus avec un faible rapport de débit (1.5 à 2.5).

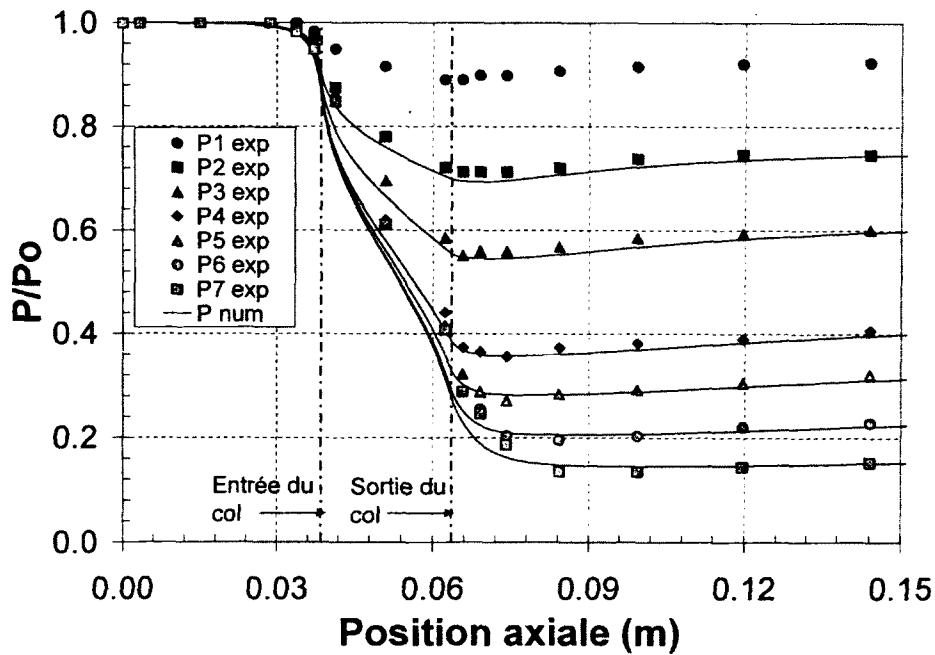


Figure 6.7 : Comparaison avec les profils de pression de Lemonnier et Selmer-Olsen (1992) obtenus avec un haut rapport de débit (27 à 50).

La géométrie de la tuyère ASTAR utilisée par Städtke et al. (2005) est présentée à la Figure 6.8. Les auteurs présentent des solutions numériques sans friction aux parois pour des conditions d'entrée fixes : pression de 1 MPa, température de 400 K, vitesse des phases identique, un rapport de débit de 1 et une pression de sortie de 0.6 MPa. Ce test tient compte du fractionnement et des déséquilibres thermique et mécanique.

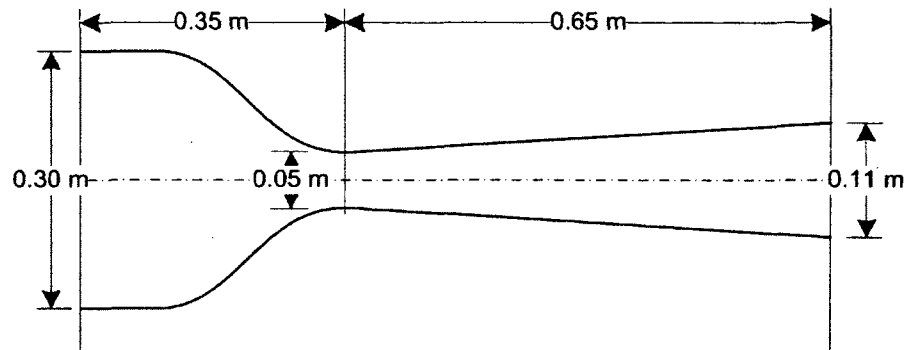


Figure 6.8 : Géométrie de la tuyère utilisée par Städtke et al. (2005).

Les solutions numériques obtenues par le schéma SIMPLE compressible sont en bon accord avec ceux obtenus par Städtke (2006). Cette comparaison est présentée à la Figure 6.9. Le débit massique obtenu numériquement par l'auteur est de 5.68 kg/s tandis que celui obtenu numériquement est de 5.70 kg/s pour un écart de 0.35 %. La différence observée sur les profils de vitesse s'explique par le fait que le diamètre des gouttes utilisé par les auteurs ainsi que le critère de fractionnement ne sont pas mentionnés influençant directement le calcul de la trainée entre les phases et le glissement. Cela entraîne une différence sur le déséquilibre mais n'a cependant pas d'effet significatif sur le débit obtenu.

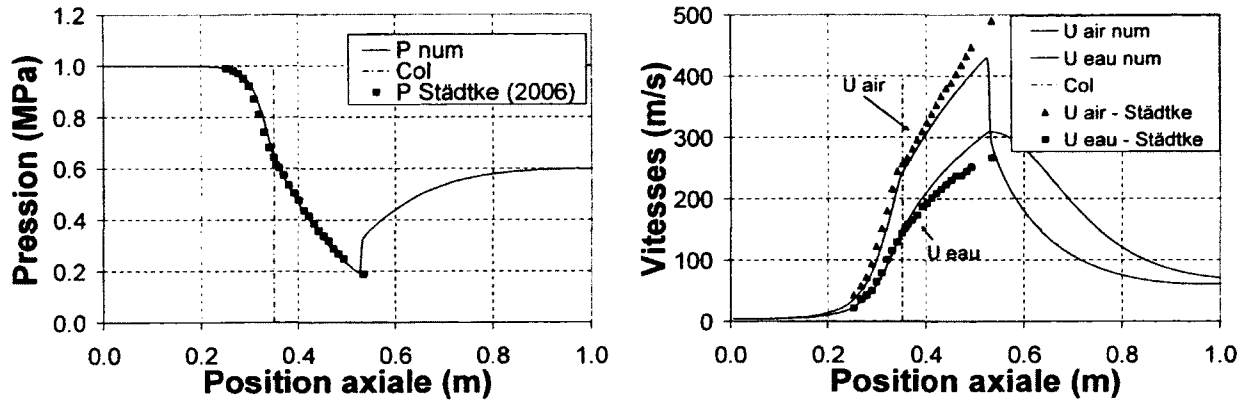


Figure 6.9 : Comparaison avec les profils de pression et de vitesse de Städtke (2006).

6.1.4 Écoulements diphasiques avec changement de phase

Dans le but de valider le modèle numérique avec changement de phase, les données présentées par Starkman et al. (1964) sont utilisées. Ces données concernent des essais réalisés à l'aide d'un convergent-divergent très prononcé. La Figure 6.10 montre la géométrie de la tuyère utilisée par les auteurs.

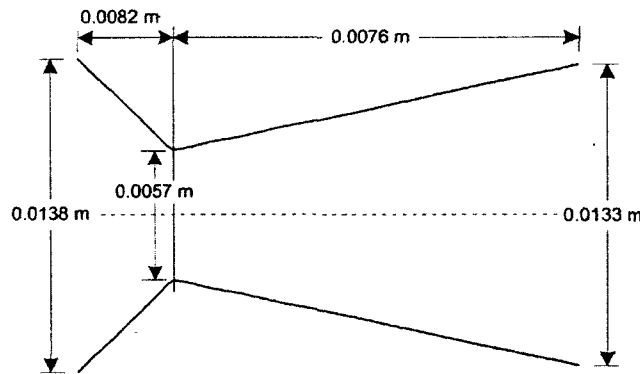


Figure 6.10 : Géométrie de la tuyère utilisée par Starkman et al. (1964).

Les conditions de réservoir ont été déterminées à partir des informations contenues dans leur publication : une pression d'entrée de 1.5601 MPa, une température d'entrée de 474 K, une pression de sortie de 0.1013 MPa, un rapport de débit de 3.39 et un rapport de glissement initial de 0.7. Le diamètre initial des gouttes utilisé est de 50 μm . Dans ce cas, le critère de rayon maximal $We = 3$ a été utilisé pour calculer le fractionnement des gouttelettes dans la tuyère.

La Figure 6.11 présente la comparaison entre le profil de pression obtenue expérimentalement et celui obtenu numériquement avec changement de phase, déséquilibres thermique et mécanique et sans friction aux parois. Un très bon accord avec le profil de pression est observé. De plus, un écart de 0.8 % est obtenu entre le débit mesuré (0.4965 kg/s) et le débit obtenu numériquement (0.5005 kg/s).

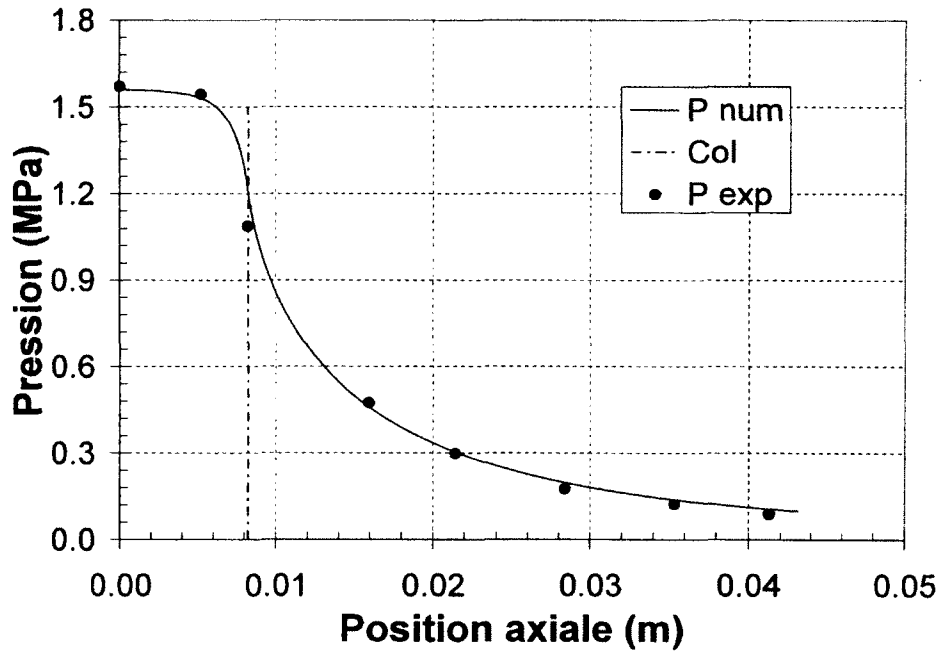


Figure 6.11 : Comparaison avec le profil de pression de Starkman et al. (1964).

6.2 Validation du schéma FLUX-M

Pour valider les paramètres de convergence utilisés, une étude de la convergence du schéma basé sur l'utilisation des flux de mélange sera présentée. De plus, afin de valider le schéma FLUX-M, une comparaison avec le schéma SIMPLE compressible sera faite.

6.2.1 Étude de la convergence du schéma

Afin de justifier la taille du maillage, la valeur du critère de convergence et les facteurs de relaxation, une étude portant sur l'effet de ces paramètres sur la solution convergée a été réalisée à l'aide de la géométrie ASTAR [Städtke et al., 2005].

L'analyse sur l'effet du maillage permet de lier la précision des résultats en fonction du nombre de volumes de contrôle. Le Tableau 6.10 présente l'effet du maillage pour un écoulement monophasique isentropique. Plus le maillage est fin, plus le nombre d'itération et le temps nécessaire pour atteindre la convergence augmentent. Après analyse des résultats pour un écoulement monophasique isentropique, un maillage de 4000 volumes de contrôle a été choisi puisqu'il procure une faible erreur sur les résultats et un temps de calcul acceptable.

Tableau 6.10 : Valeur du débit en fonction du nombre de volume de contrôle (air, $p_{in} = 1$ MPa, $T_{in} = 400$ K, $p_{out} = 0.5$ MPa, $M_{th} = 3.9715$ kg/s, $f_u = 0.3$, $f_p = 0.8$, $C = 10^{-6}$)

Δz_{col}	Nombre de volume de contrôle	Nombre d'itération	Temps (s)	M (kg/s)
0.001	400	25	5	3.9729
0.0001	4000	35	56	3.9713
0.00004	10000	46	150	3.9712
0.00001	40000	48	612	3.9711

Le Tableau 6.11 et le Tableau 6.12 présentent l'effet du maillage sur un écoulement diphasique pour deux différents rapports de débit ($f_{M2} = 20$ et $f_{M2} = 40$). Dans ces cas également, un maillage composé de 4000 volumes de contrôle permet d'obtenir des résultats avec une erreur très faible comparativement aux résultats obtenus avec un maillage très fin. Pour ces raisons, les simulations numériques présentées dans cette thèse utiliseront un maillage de 4000 volumes de contrôle pour le schéma FLUX-M également.

Tableau 6.11 : Valeur du débit en fonction du nombre de maille pour un rapport de débit de 20 (air-eau, $p_{in} = 1$ MPa, $T_{in} = 400$ K, $p_{out} = 0.5$ MPa, $f_u = 0.3$, $f_p = 0.8$, $C = 10^{-6}$)

Δz_{col}	Nombre de volume de contrôle	Nombre d'itération	Temps (s)	M (kg/s)
0.001	400	32	232	17.9110
0.0001	4000	32	2307	17.9078
0.00004	10000	32	5023	17.9077
0.00001	40000	32	21245	17.9076

Tableau 6.12 : Valeur du débit en fonction du nombre de maille pour un rapport de débit de 40 (air-eau, $p_{in} = 1$ MPa, $T_{in} = 400$ K, $p_{out} = 0.5$ MPa, $f_u = 0.3$, $f_p = 0.8$, $C = 10^{-6}$)

Δz_{col}	Nombre de volume de contrôle	Nombre d'itération	Durée (s)	M (kg/s)
0.001	400	32	210	23.8014
0.0001	4000	32	2167	23.7310
0.00004	10000	32	5456	23.7309
0.00001	40000	32	21734	23.7309

Le Tableau 6.13 montre l'effet de la valeur du critère de convergence C sur la précision des résultats pour un écoulement monophasique. Contrairement au schéma SIMPLE compressible, une valeur $C = 10^{-4}$ est suffisante pour minimiser l'erreur due au critère de convergence. De plus, un critère plus faible n'entraîne pas une augmentation importante du nombre d'itération nécessaire pour atteindre la convergence. De ce fait et dans un but de comparer les solutions numériques des deux schémas, le schéma FLUX-M utilisera également un critère de convergence de $C = 10^{-6}$.

Tableau 6.13 : Erreur numérique sur le débit en fonction du critère de convergence pour 4000 volumes de contrôle (air, $p_{in} = 1$ MPa, $T_{in} = 400$ K, $p_{out} = 0.5$ MPa, $M_{th} = 3.9715$ kg/s, $f_u = 0.3$, $f_p = 0.8$.)

C	Nombre d'itération	M (kg/s)
10^{-1}	9	3.9635
10^{-2}	30	3.9701
10^{-3}	31	3.9710
10^{-4}	35	3.9713
10^{-5}	38	3.9713
10^{-6}	44	3.9713
10^{-7}	52	3.9713

Le Tableau 6.14 montre que les différents facteurs de relaxation n'ont aucun effet sur la solution convergée. Cependant, ces facteurs font en sorte de moduler la vitesse de convergence. Pour les simulations, des facteurs de relaxation de 0.3 pour la vitesse et de 0.8 pour la pression seront utilisés puisqu'ils procurent une bonne stabilité numérique ainsi que peu d'effet sur le temps de calcul.

Tableau 6.14 Valeur du débit en fonction des facteurs de relaxation pour 4000 volumes de contrôle (air, $p_{in} = 1$ MPa, $T_{in} = 400$ K, $p_{out} = 0.5$ MPa, $M_{th} = 3.9715$ kg/s, $C = 10^{-6}$)

f_u	f_p	Nombre d'itération	Durée (s)	M (kg/s)
0.7	0.8	35	45	3.9713
0.7	0.5	35	75	3.9713
0.7	0.1	35	123	3.9713
0.5	0.8	35	48	3.9713
0.5	0.5	35	78	3.9713
0.5	0.1	35	126	3.9713
0.3	0.8	35	56	3.9713
0.3	0.5	35	81	3.9713
0.3	0.1	35	132	3.9713
0.1	0.8	35	58	3.9713
0.1	0.5	35	84	3.9713
0.1	0.1	35	138	3.9713

6.2.2 Comparaison avec le schéma SIMPLE compressible

Pour fin de validation, le schéma FLUX-M, qui est directement basé sur les conditions critiques, sera comparé au schéma SIMPLE compressible. Cette comparaison sera faite pour un écoulement monophasique isentropique et pour un écoulement diphasique en déséquilibre mécanique.

Le Tableau 6.15 présente une comparaison entre les deux schémas numériques pour un écoulement monophasique isentropique. Une même valeur du critère de convergence a été utilisée pour les deux schémas numériques soit $C = 10^{-6}$. Les débits obtenus sont en bon accord avec la solution théorique et avec le schéma SIMPLE compressible. Dans ce cas, un temps de convergence ayant deux ordres de grandeur plus rapide est obtenu.

Tableau 6.15 : Écoulement monophasique isentropique : air, $T_{in} = 400$ K, $p_{in} = 1$ MPa

p_{in} (MPa)	p_{out} (MPa)	M_{th} (kg/s)	DIS_{col}	Durée (s)		Erreur sur le débit (%)	
				FLUX-M	SIMPLE	$\frac{M - M_{th}}{M_{th}} \times 100$ FLUX-M	SIMPLE
1	0.999	1.2656	0.1	5	1007	0.30	0.36
1	0.995	2.8158	0.5	10	2087	0.20	0.35
1	0.990	3.9715	0.99	30	3836	0.01	0.16
1	0.800	3.9715	1.0	43	3920	0.16	0.03
1	0.600	3.9715	1.0	56	4077	0.16	0.03
1	0.300	3.9715	1.0	37	4187	0.16	0.03
1	0.026	3.9715	1.0	30	4357	0.16	0.03

Le Tableau 6.16 présente la comparaison des solutions numériques obtenues à partir des deux différents schémas pour un écoulement diphasique en déséquilibre mécanique sans changement de phase et sans fractionnement dans la tuyère ASTAR ($f_{M2} = 10$, $p_{in} = 1$ MPa, $p_{out} = P_c = 0.7296$ MPa, $T_{in} = 400$ K, $r_p = 40$ μ m). Au point critique, les variables primitives caractérisant l'écoulement sont toutes pratiquement identiques. La comparaison des débits critiques et de la position de ce point critique X_c permettent de conclure que les deux schémas donnent les mêmes résultats.

Tableau 6.16 : Comparaison des solutions numériques au point critique

Variables primitives	SIMPLE	FLUX-M	Écart (%)
M (kg/s)	12.8606	12.8697	0.07
w_1 (m/s)	118.43	118.44	0.01
s_2	0.8182	0.8181	0.01
α_1	0.9453	0.9453	0.00
ρ_1 (kg/m ³)	4.7339	4.7384	0.10
P_{col} (MPa)	0.5417	0.5423	0.11
T (K)	398.74	398.74	0.00
X_c (m)	0.4361	0.4360	0.02
P_c (MPa)	0.7296	0.7296	0.00

6.2.3 Précision

L'avantage du schéma FLUX-M, autre que sa rapidité d'exécution, est également au niveau de l'absence d'imperfection aux points critiques et aux chocs dans la tuyère. En fait, le schéma basé sur l'utilisation des flux de mélange est strictement conservatif pour les équations de mélange. Il

satisfait donc en tout point les équations de conservation de mélange contrairement au schéma SIMPLE compressible qui tolère un écart qui dépend du critère de convergence et du maillage, entre autres. Les Figure 6.12 et Figure 6.13 présentent les différences entre les deux profils de pression obtenus numériquement pour un écoulement monophasique critique dans la tuyère ASTAR (air, $p_{in} = 1$ MPa, $p_{out} = 0.990$ MPa, $T_{in} = 400$ K). Théoriquement, la position du point critique se situe au col et le schéma FLUX-M le positionne parfaitement. Cependant, le schéma SIMPLE compressible produit des imprécisions dans cette partie et dans la partie où un choc est présent (écoulements monophasique ou diphasique à l'équilibre). En fait, tandis que le schéma FLUX-M obtient un choc droit s'opérant sur un seul volume de contrôle, celui obtenu par le schéma SIMPLE compressible s'opère sur quelques volumes de contrôle.

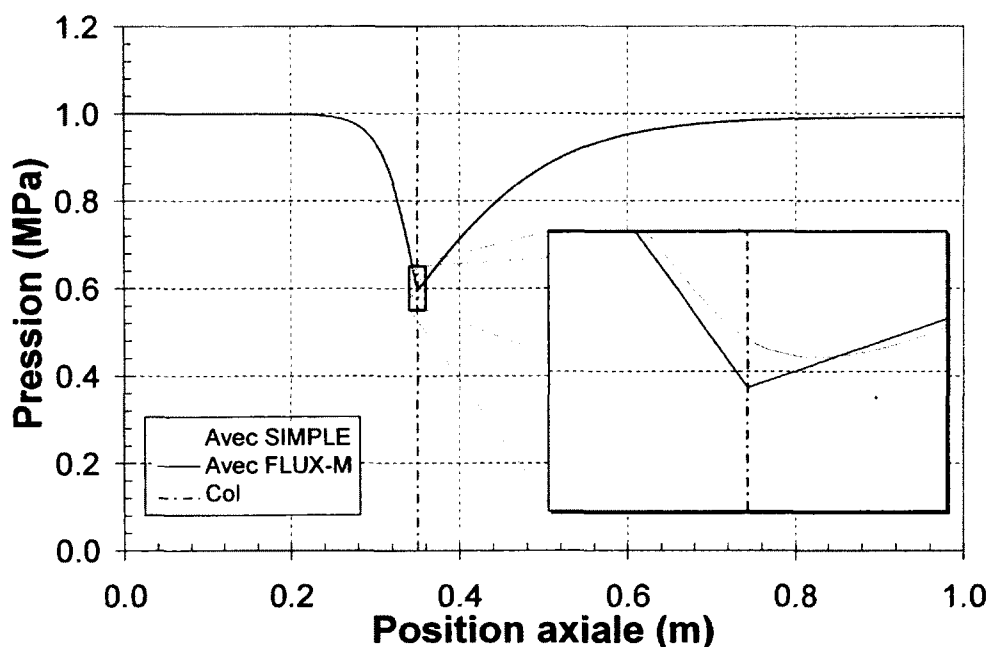


Figure 6.12 : Imperfection au point critique obtenue avec le schéma SIMPLE compressible.

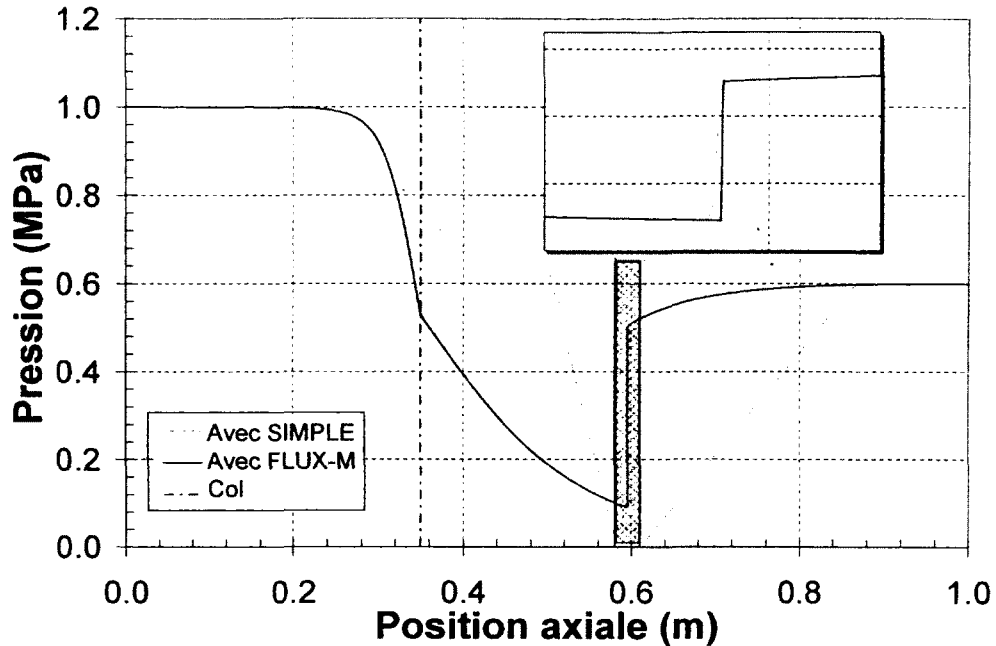


Figure 6.13 : Imperfection dans la région du choc droit obtenue avec le schéma SIMPLE compressible.

6.3 Validation des conditions critiques

Après la validation du schéma SIMPLE compressible et la comparaison du schéma basé sur l'utilisation des flux de mélange, il est maintenant possible d'examiner les conditions critiques présentées à la section 4.4.2. Il est intéressant de rappeler que le schéma SIMPLE compressible n'a aucun lien explicite avec ces conditions critiques.

6.3.1 Point singulier

Le critère de blocage présenté à la section 4.4.2 stipule qu'au point critique, les variations des flux de mélange $F_b^{\Sigma\{i\}}$ par rapport à une variable primitive Y_{j_i} sont nulles :

$$\frac{\partial F_b^{\Sigma\{i\}}}{\partial Y_{j_i}} = 0 \quad (6.4)$$

Pour un système à trois équations de conservation, il y a donc trois flux de mélange qui peuvent être exprimés en fonction de chacune des trois variables primitives (masse volumique, vitesse, pression) pour un total de neuf flux $F_b^{\Sigma\{i\}}$. Ces termes sont présentés à l'Annexe C. La Figure

6.14 présente quelques profils de variations de ces flux dans la tuyère ASTAR pour un écoulement en déséquilibre mécanique sans changement de phase obtenu avec le schéma SIMPLE compressible n'ayant aucun lien explicite avec les conditions critiques ($f_{M2} = 5$, $p_{in} = 1$ MPa, $p_{out} = 0.5$ MPa, $T_{in} = 400$ K). Ces cinq courbes, calculées à partir des solutions numériques, passent effectivement par 0 au point critique. Les quatre autres variations de flux n'ont pas été représentées sur ce graphique pour faciliter sa visualisation. Cependant, après vérification, ils passent également par 0 au point critique. En fait, Dostie et al. (2009) ont démontré qu'au point critique, toutes les variations de flux de mélange, exprimés en fonction d'une variable primitive distincte et des autres flux de mélange, sont nulles.

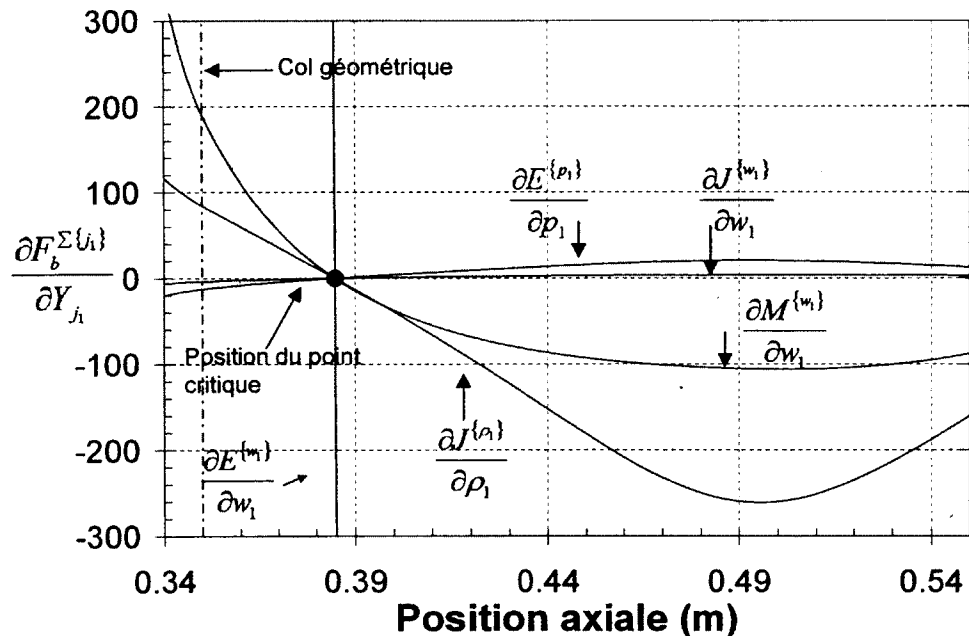


Figure 6.14 : Variation des flux de mélange, exprimés en fonction d'une seule variable primitive.

La Figure 6.15 et la Figure 6.16 montrent les évolutions des variables primitives pour le cas étudié. Bien que l'écoulement possède un point critique, l'évolution des variables primitives ne permet pas de visualiser sa position.

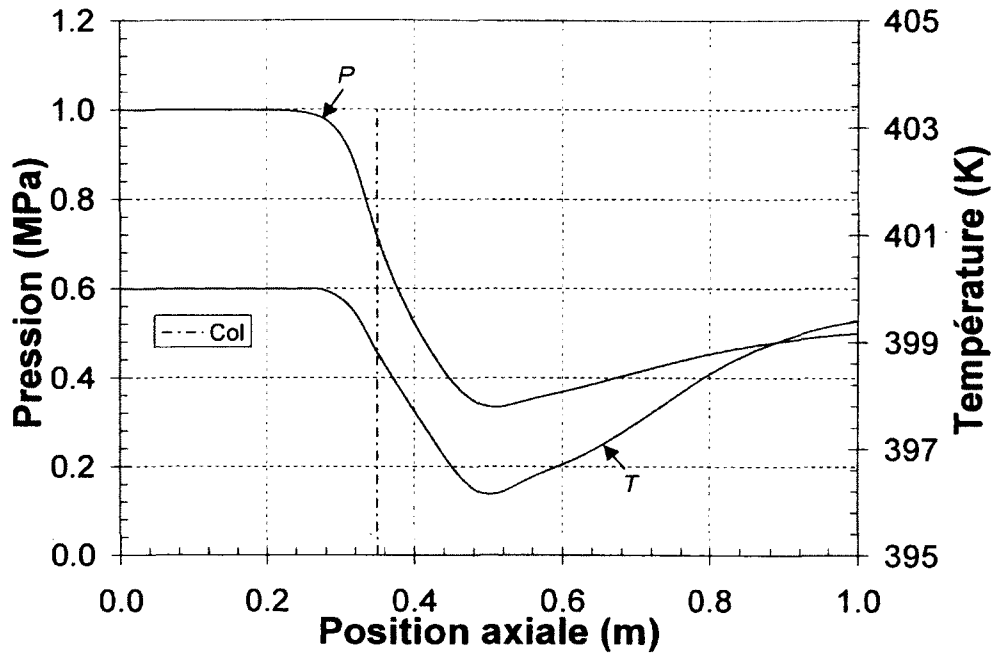


Figure 6.15 : Profils de pression et de température.

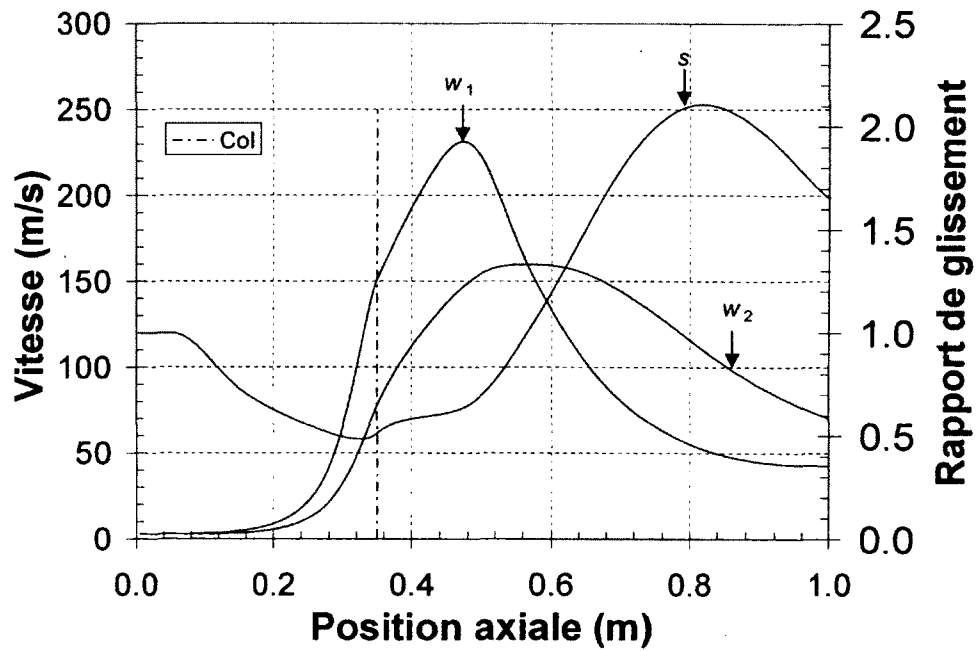


Figure 6.16 : Profils des vitesses et du rapport de glissement.

6.3.2 Discussion sur la position du point critique

L'équation de conservation de quantité de mouvement pour un cas sans friction aux parois, sans changement de phase et en équilibre thermique peut être écrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z}(A_k \rho_k w_k^2) + \frac{\partial}{\partial z}(A_k p_k) = \frac{\partial J_1}{\partial z} = p_k \frac{\partial A_k}{\partial z} - F_k^D \quad (6.5)$$

où F_k^D représente la force de trainée entre les phases

Pour un écoulement monophasique isentropique dans une tuyère, la position du point critique se situe au col géométrique. Cependant, ce n'est pas nécessairement le cas pour un écoulement multiphasique puisque les interactions entre les phases peuvent occasionner un comportement différent comme présenté à la section 4.5.

Dans le présent cas, un écoulement en équilibre thermique et déséquilibre mécanique sans fractionnement et sans changement de phase est simulé dans la tuyère ASTAR ($f_{M2} = 5$, $p_{in} = 1$ MPa, $p_{out} = 0.5$ MPa, $T_{in} = 400$ K). L'évolution des variables primitives est présentée à la Figure 6.15 et à la Figure 6.16. Même si l'écoulement devient sur-critique au point critique situé dans le divergent et que la section augmente, l'évolution de la phase compressible s'apparente à une évolution subsonique. En fait, la force de trainée F_k^D exercée sur la phase compressible par la phase incompressible permet au flux d'impulsion de la phase compressible, présenté à l'équation (6.5), de continuer à diminuer même si la section augmente.

Les trois portions ombragées présentées à la Figure 6.17 montrent l'évolution des différents termes de l'équation de conservation de quantité de mouvement de la phase compressible de l'équation (6.5) (flux d'impulsion, trainée et variation de section). Dans la première portion, l'évolution du mélange est sous-critique et celle de la phase compressible subsonique. Par contre, la pression diminue et la vitesse augmente même lorsque la section augmente. Le flux d'impulsion de la phase compressible diminue également lorsque la section augmente, comme une évolution subsonique. Ce comportement est possible puisque le rapport de glissement augmente résultant d'un échange de quantité de mouvement de la phase compressible vers la phase incompressible.

La seconde portion s'étend du point critique jusqu'au point où $\partial J_1 / \partial z = 0$. Au point critique, pour maintenir une évolution continue du flux d'impulsion de la phase compressible, l'évolution de mélange doit suivre la branche sur-critique de sorte à maintenir une diminution de pression avec l'augmentation de section. Le comportement de la phase compressible est toujours équivalent à un profil de section en diminution ($\partial J_1 / \partial z < 0$).

La dernière portion présente le comportement lorsque $\partial J_1 / \partial z$ devient positif. Dans un tel cas en écoulement monophasique subsonique, la pression devrait commencer à augmenter. Cependant, l'évolution s'apparente à un état supersonique puisque la pression continue de diminuer lorsque la section augmente. En fait, lorsque l'évolution du mélange passe de sous-critique à sur-critique, l'évolution de la phase compressible se compare toujours à une évolution subsonique démontrant ainsi la complexité du phénomène et de l'effet des interactions entre les phases sur son comportement.

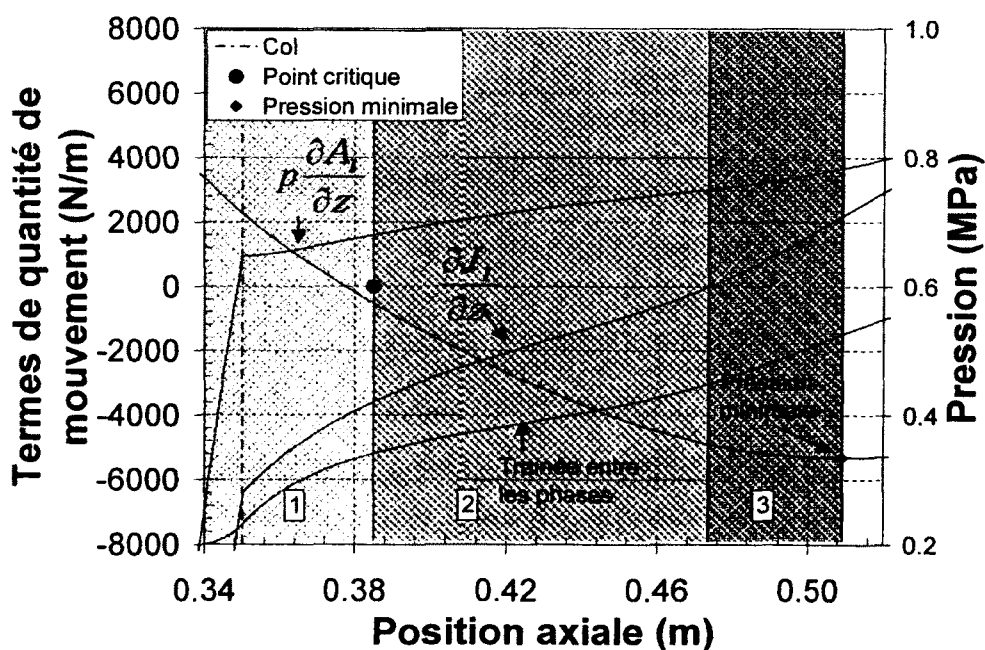


Figure 6.17 : Termes de quantité de mouvement pour la phase compressible.

La Figure 6.18 présente la variation relative des variables primitives dans la tuyère ASTAR. Au point critique, aucune particularité n'est observée. Le point critique semble donc être un point

anonyme lorsque l'évolution de l'écoulement de la phase compressible est analysée. Cependant, ce point correspond au changement d'évolution du comportement du mélange passant d'un écoulement sous-critique à sur-critique. Il correspond à un extrémum des variations des flux de mélange exprimés en fonction d'une seule variable primitive et des autres flux de mélange. En référence à la Figure 6.14, la phase compressible ne peut modifier son état pour accommoder un débit plus grand puisque $\partial M/\partial w_1 = \partial M/\partial \rho_1 = \partial M/\partial p_1 = 0$.

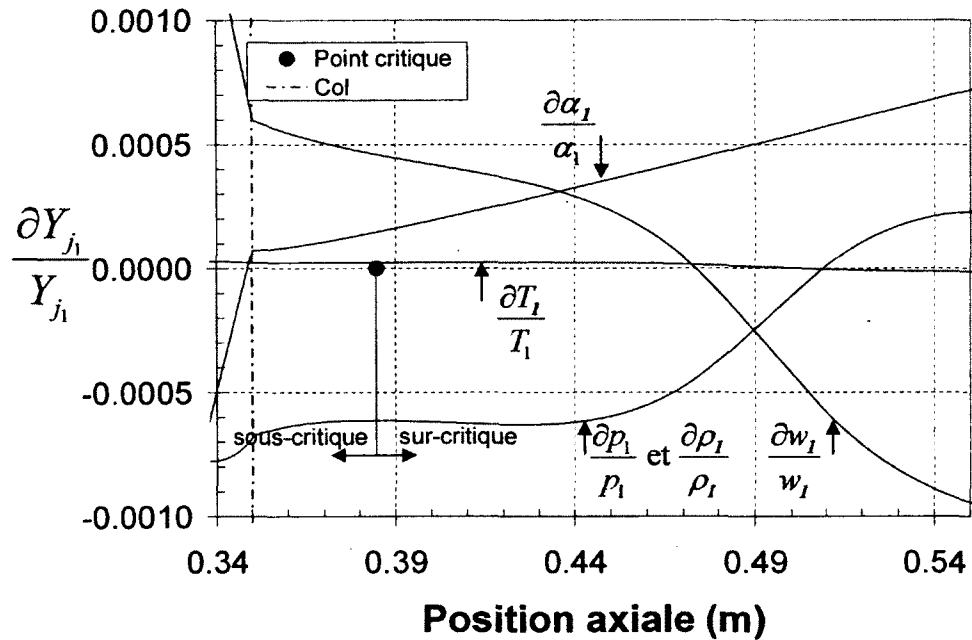


Figure 6.18 : Variations relatives des variables primitives.

6.3.3 Validation de la position du point critique

Analytiquement, la position du point critique pour le cas d'un système diphasique en déséquilibre mécanique a été présentée à la section 4.5.1. Cependant, en analysant les solutions numériques, il a été démontré que cette expression ne représente pas parfaitement les données obtenues. En fait, comme le montre le Tableau 6.17, il faut multiplier cette expression par le taux de vide de la phase de référence α_1 pour obtenir la condition prédisant parfaitement la localisation du point critique :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \alpha_1 \frac{\partial s_2}{\partial z} \frac{M^2 f_{M2} (1 + f_{M2} f_{T2}) (\rho_1 s_2 - \rho_2 s_2^3) - R_1 \rho_1 \left(s_2 + f_{M2} \frac{\rho_1}{\rho_2} - f_{M2} s_2^3 - s_2^4 \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}{A (1 + f_{M2})^2 \rho_2 s_2^3 (1 + f_{E=2}) \rho_1 p_1}$$

(6.6)

Tableau 6.17 : Comparaison de la section critique avant et après correction (air-eau, $p_{in} = 1$ MPa, $T_{in} = 400$ K, $p_{out} = 0.5$ MPa).

Numérique			Analytique					
f_{M2}	X_c (m)	A_c (m ²)	X_c (m)	A_c (m ²)	Erreur A_c (%)	X_c (m) modifié	A_c (m ²) modifié	Erreur A_c (%) modifié
10	0.3819	0.001996	0.3836	0.002000	0.18	0.3820	0.001997	0.01
15	0.3809	0.001994	0.3830	0.001999	0.22	0.3809	0.001994	0.00
20	0.3795	0.001992	0.3822	0.001997	0.26	0.3796	0.001992	0.01
25	0.3783	0.001989	0.3814	0.001995	0.30	0.3784	0.001990	0.01
30	0.3771	0.001987	0.3804	0.001993	0.30	0.3772	0.001987	0.01
40	0.3750	0.001984	0.3785	0.001990	0.31	0.3750	0.001984	0.00

Le même constat a été observé à partir de solutions numériques obtenues pour un écoulement diphasique avec déséquilibre thermique et pour un écoulement avec changement de phases, les autres phénomènes interphasiques étant à l'équilibre. L'équation corrigée (6.7) correspond à un écoulement diphasique avec déséquilibre thermique uniquement :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \alpha_1 A \frac{\partial f_{Tk}}{\partial z} \frac{f_{M2}}{1 + f_{M2} f_{Tk}} \quad (6.7)$$

L'équation (6.8), tant qu'à elle, correspond à un écoulement diphasique en équilibres thermique et mécanique avec changement de phase :

$$\frac{\partial A_c}{\partial z} = - \frac{\partial f_{M2}}{\partial z} \frac{\alpha_1 R_1 (K_1 + K_2)}{(1 + f_{M2})^2 (-A w_1 \rho_2 s_2 (1 + f_{M2} s_2) + M f_{M2}) (1 + f_{M2} f_{Tk}) (2E(1 + f_{M2}) - M w_1^2 (1 + f_{M2} s_2^2)) C_{p1} \rho_2 s_2} \quad (6.8)$$

où K_1 et K_2 sont présentés aux équations (4.54) et (4.55).

Pour le moment, et malgré plusieurs efforts pour obtenir ce facteur α_1 , cet écart n'a pu être expliqué théoriquement. Cette erreur n'est aucunement liée au schéma numérique utilisé puisque ces corrections sont identiques pour les deux schémas. Comme piste de solution, Dostie et al. (2009) ont rencontré des difficultés similaires pour faire apparaître une dernière famille de points singuliers avec section prescrite. Il reste donc des développements théoriques à faire pour obtenir le bon positionnement du point critique.

Cependant, les simulations numériques ont permis de constater que le déséquilibre mécanique a le plus d'incidence sur la position du point critique. Les effets du déséquilibre thermique et du changement de phase sur la position du point critique ne sont pas très marqués et sont du même ordre de grandeur.

6.3.4 Valeurs propres

Lorsqu'il y a une source de chaleur, une réaction chimique ou encore une pression exercée sur le fluide engendrant une compression ou une dilatation de celui-ci, la masse volumique est modifiée. Un tel écoulement est dit compressible. En fait, ce qui différencie physiquement un écoulement compressible d'un écoulement incompressible, ce sont les petites variations de masse volumique, de pression et de vitesse qui se propagent au sein du fluide.

En effet, dans un écoulement incompressible, une force appliquée au fluide est transmise automatiquement. Cependant, si une force est appliquée à un fluide compressible, les molécules près du point d'application se compressent et causent une variation locale de la masse volumique et de la pression. En réponse à cette variation de pression locale, les molécules adjacentes se compressent à leur tour. Donc, l'effet de la force est transmis de façon progressive dans l'écoulement à une vitesse finie, la vitesse du son. Cette vitesse du son est fonction des propriétés thermodynamiques locales du fluide. Plus le fluide est compressible, moins vite voyagera la perturbation.

Dans le cas des écoulements compressibles multiphasiques, les vitesses de propagation dans les différentes phases peuvent différer. De ce fait, bien que le principe demeure le même, les équations de propagation des perturbations dans un mélange sont plus complexes et dépendent des hypothèses faites sur l'écoulement et les phases. Il n'y a d'ailleurs toujours de lien de démontré entre les vitesses de propagation et les conditions critiques dans un tel écoulement.

Les équations générales des valeurs propres ont été obtenues à l'aide de MAPLE 13 pour le système d'équations de mélange diphasique suivant :

$$\mathbf{J}_U^{\Sigma\{\Lambda\}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}} \frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial z} = \mathbf{S}^{\Sigma\{\Lambda\}} \quad (6.9)$$

où les matrices Jacobiennes sont définies de la manière suivante :

$$\mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}} = \begin{bmatrix} J_{F11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{F22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{F33} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$\mathbf{J}_U^{\Sigma\{\Lambda\}} = \begin{bmatrix} 0 & J_{U12} & 0 \\ J_{U21} & J_{U22} & 0 \\ J_{U31} & J_{U32} & J_{U33} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Voici la forme des valeurs propres des équations de mélange pour le système étudié :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_{F33}}{J_{U33}} \\ -\frac{1}{2} \frac{J_{U22}J_{F11} - \sqrt{J_{F11}(J_{U22}^2J_{F11} + 4J_{U12}J_{F22})}}{J_{U12}J_{U21}} \\ -\frac{1}{2} \frac{J_{U22}J_{F11} + \sqrt{J_{F11}(J_{U22}^2J_{F11} + 4J_{U12}J_{F22})}}{J_{U12}J_{U21}} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Aux points singuliers, puisque les Jacobiens des flux de mélange sont nuls, les trois valeurs propres sont également nulles.

L'analyse des valeurs propres du système d'équations de mélange multiphasique permet également de retrouver la vitesse critique lorsqu'au moins une des valeurs propres est nulle. La Figure 6.19 montre la valeur numérique de chacune des valeurs propres d'un écoulement dans la tuyère ASTAR en fonction de la vitesse de la phase de référence (air-eau, $f_{M2} = 5$, $p_{in} = 1$ MPa, $p_{out} = 0.5$ MPa, $T_{in} = 400$ K). L'endroit où la valeur propre est nulle correspond effectivement à la vitesse critique de la phase 1. Cette vitesse ne correspond cependant pas toujours à la vitesse du son de la phase compressible lorsque le rapport de débit augmente.

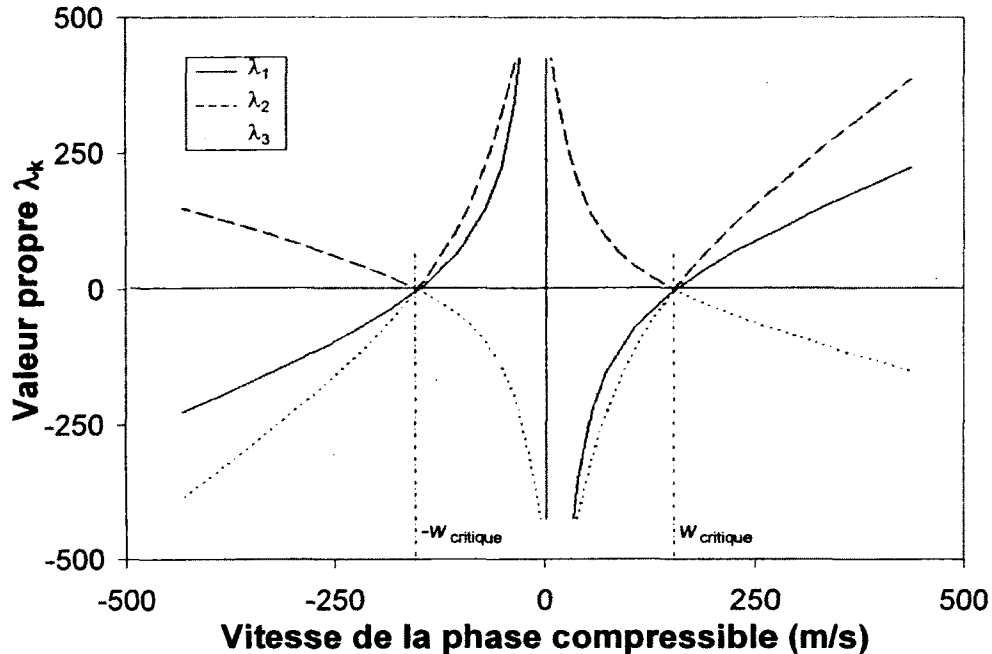


Figure 6.19 : Les trois valeurs propres d'un système diphasique en fonction de la vitesse de la phase de référence.

Il pourrait donc y avoir un lien entre les valeurs propres des équations de mélange et une vitesse de propagation d'une perturbation d'une certaine propriété. Toutefois, pour le moment, aucun lien n'a été trouvé entre une perturbation de température, de pression, de vitesse ou de taux de vide et les conditions critiques. D'autres informations pourraient être obtenues à partir du système d'équations diphasique global comprenant les équations de mélange et les équations de conservation de la seconde phase. Cependant, cette analyse ne sera pas portée plus loin dans le cadre de cette thèse.

6.4 Laboratoire numérique

Après avoir démontré la robustesse et la validité des résultats obtenus avec le schéma SIMPLE compressible, celui-ci est utilisé pour étudier l'effet des déséquilibres sur l'écoulement ainsi que sur les conditions critiques. Pour analyser ces effets sur le comportement de l'écoulement, la géométrie de la tuyère ASTAR, présentée par Städtke et al. (2005), fut utilisée.

6.4.1 Effet du rapport de débit sur le profil de pression

Avec l'augmentation du rapport de débit, la phase condensée est de plus en plus présente. Cependant, l'effet de l'augmentation de cette phase sur l'écoulement n'est pas bien documenté. Cette section présente donc l'effet du rapport de débit sur le profil de pression pour des écoulements en équilibre thermique sans changement de phase pour les conditions d'entrée et de sortie suivantes : $p_{in} = 1$ MPa, $p_{out} = 0.5$ MPa, $f_{M2} = \{1.0, 2.5, 10.0, 20.0, 40.0\}$. Seul le déséquilibre mécanique est présent et le rayon moyen des gouttes de $40 \mu\text{m}$ est constant.

La Figure 6.20 présente les profils de pression pour les cinq rapports de débit étudiés. Une augmentation abrupte de pression s'apparentant à un choc droit est visible pour un rapport de débit de 1.0. Cependant, avec l'augmentation du rapport de débit, la phase incompressible est de plus en plus présente et les chocs s'aplatissent ($f_{M2} = 2.5$) pour complètement disparaître bien que les profils sont tous associés à un écoulement sur-critique.

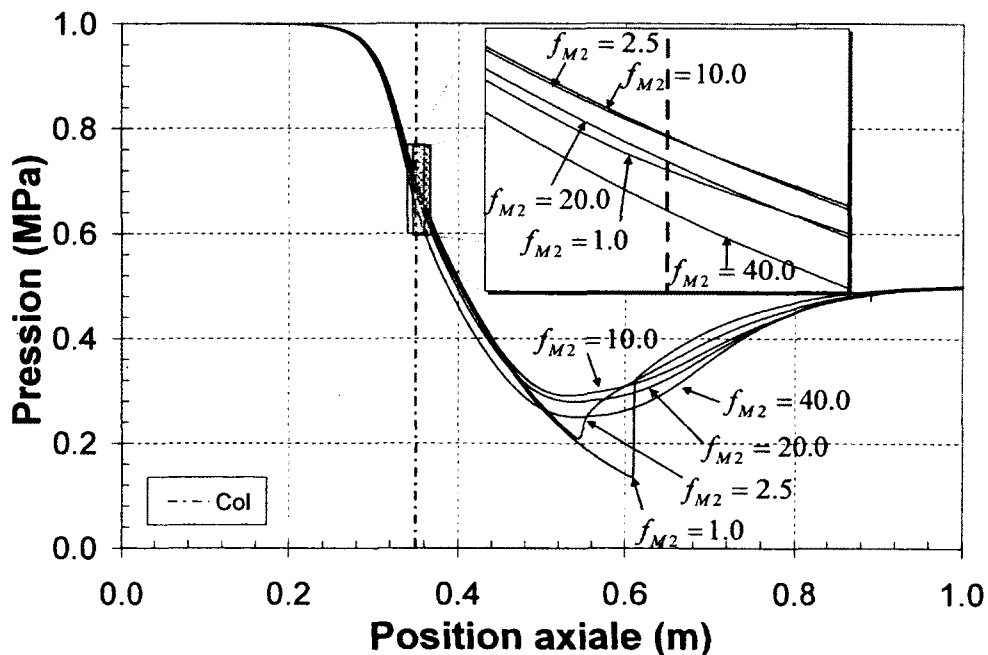


Figure 6.20 : Profils de pression pour différents rapports de débit.

Cet effet vient de l'interaction entre les phases. En fait, avec l'augmentation du rapport de débit, l'espace occupé par la phase incompressible augmente. Donc, le nombre de gouttes et la force de trainée entre les phases augmentent. Cela a pour effet d'accroître le couplage entre les phases

diminuant ainsi la variation du rapport de glissement entre les phases comme le montre la Figure 6.21.

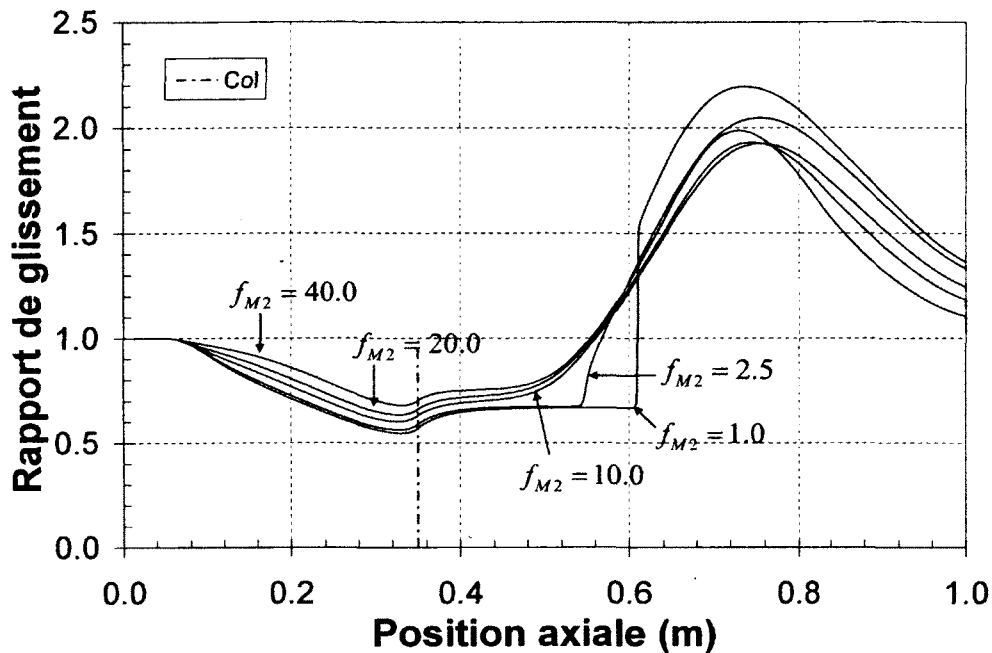


Figure 6.21 : Profils de glissement pour différents rapports de débit.

6.4.2 Effet du rapport de débit sur le débit critique

La Figure 6.22 présente le débit massique de mélange en fonction de la pression de sortie de la tuyère pour différents rapports de débit. Une pression de 1 MPa et une température de 400 K à l'entrée ont été utilisées pour démontrer l'effet de l'augmentation du rapport de débit sur le débit massique. La courbe « M seuil » correspond aux évolutions passant par un point critique sans excursion dans la zone sur-critique. Un débit seuil et une pression de sortie seuil sont alors associés à cette évolution. Celle-ci est nommée « évolution seuil » et ce terme sera repris dans les prochaines sections.

Pour un écoulement monophasique, la diminution de la pression de sortie conduit directement aux conditions critiques où un débit maximal est obtenu. Cependant, pour un écoulement diphasique, les interactions entre les phases font en sorte que le débit peut continuer à augmenter, jusqu'à un certain point, après l'obtention du débit seuil. Le débit maximal ainsi obtenu est nommé « débit limite ».

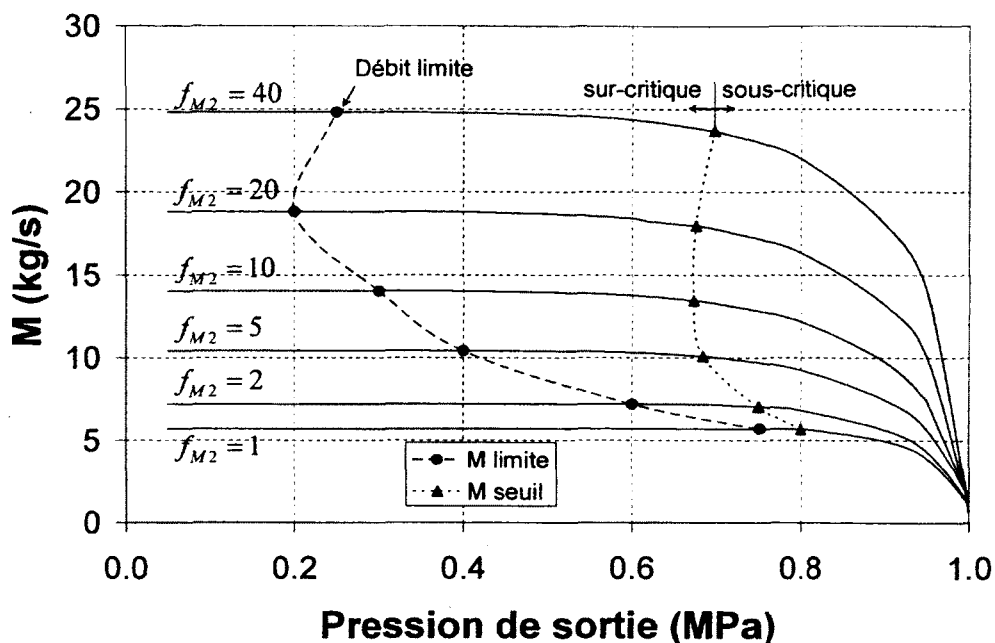


Figure 6.22 : Débit massique de mélange en fonction de la pression de sortie pour différents rapports de débit.

Pour un écoulement monophasique ou un écoulement diphasique homogène, le débit limite est identique au débit seuil. De manière générale, le Tableau 6.18 montre que l'écart entre le débit seuil et le débit limite augmente avec l'augmentation du rapport de débit avec déséquilibre mécanique. Donc, l'effet des interactions entre les phases se fait de plus en plus important.

Tableau 6.18 : Écart entre le débit seuil et le débit limite.

f_{M2}	M_{seuil} (kg/s)	M_L (kg/s)	% écart
1	5.6431	5.7071	1.14
2	7.0504	7.2003	2.13
5	10.1020	10.4268	3.22
10	13.4522	14.0408	4.38
20	17.9672	18.8276	4.79
40	23.6772	24.8216	4.83

La Figure 6.23 présente le débit massique de mélange en fonction de la pression de sortie de la tuyère utilisée par Lemonnier et Selmer-Olsen (1992). Les résultats expérimentaux présentés aux Tableaux 6.8 et 6.9. Pour ces tests, la pression et la température d'entrée utilisées sont respectivement de 0.6 MPa et de 292 K. Le déséquilibre mécanique est le seul déséquilibre

présent et les gouttes de 2.5 μm de rayon ne subissent aucun fractionnement. Une fois encore, l'effet de l'augmentation du rapport de débit est visible sur le débit seuil et le débit limite. Il est également intéressant de constater que les données numériques sont également en bon accord avec les débits, critiques ou non, mesurés expérimentalement pour les différents rapports de débit.

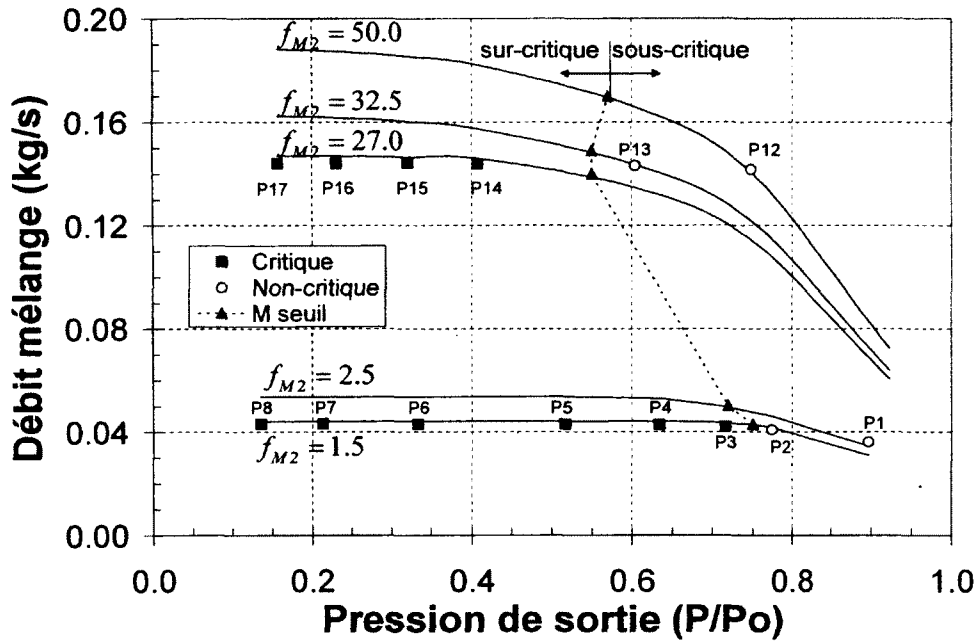


Figure 6.23 : Débit de mélange en fonction de la pression de sortie pour la tuyère de Lemonnier et Selmer-Olsen (1992).

6.4.3 Effet du rapport de débit sur la position du point critique

La position du point critique dépend des déséquilibres entre les phases. À leur tour, l'amplitude de ceux-ci est fonction du rapport de débit entre les deux phases. La Figure 6.24 présente la position du point critique en fonction de la pression de sortie pour différents rapports de débit. Pour obtenir ces solutions numériques, une pression et une température d'entrée de 1 MPa et de 400 K furent utilisées. Ici encore, seul le déséquilibre mécanique est présent et aucun fractionnement n'a lieu.

Pour ces conditions d'opération, le point critique est toujours situé dans le divergent, 0.35 m étant la position du col géométrique de la tuyère. La courbe présentant la position « X_c seuil » correspond à la position du point critique des évolutions seuils, c'est-à-dire passant par un point

critique sans excursion dans la zone sur-critique. Pour chacun des rapports de débit, ce point est le plus éloigné du col géométrique. En diminuant la pression de sortie, la position du point critique se rapproche du col géométrique jusqu'à ce qu'elle devienne indépendante de la pression de sortie. Ce point associé à une pression limite P_L correspond à la position critique limite.

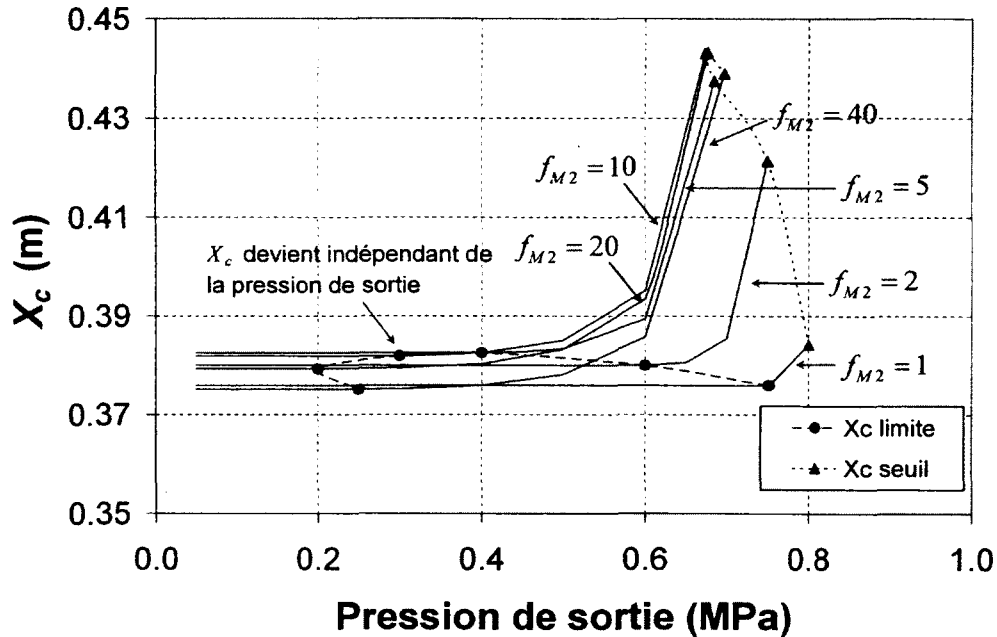


Figure 6.24 : Position du point critique en fonction de la pression de sortie pour différents rapports de débit.

6.4.4 Effet du déséquilibre mécanique

La variation du rapport de glissement entre les phases représente le déséquilibre mécanique. Ce rapport de glissement a un effet sur le comportement de l'écoulement. Un rapport constant occasionne un changement brusque de pression dans le divergent pour une pression de sortie plus faible que la pression critique seuil P_c et plus grande que la pression produisant une détente complète. Cette variation de pression s'apparente au choc droit rencontré dans le divergent d'une tuyère pour un écoulement monophasique. Par contre, pour un écoulement en déséquilibre mécanique, cette variation abrupte de pression s'atténue avec l'augmentation du rapport de débit. La Figure 6.25 montre la différence entre les profils de pression en équilibre et en déséquilibre mécanique ($f_{M2} = 10$, $p_{in} = 1$ MPa, $p_{out} = \{0.995, 0.9, P_c, 0.6, 0.4, 0.2, 0.05\}$ MPa, $T_{in} = 400$ K).

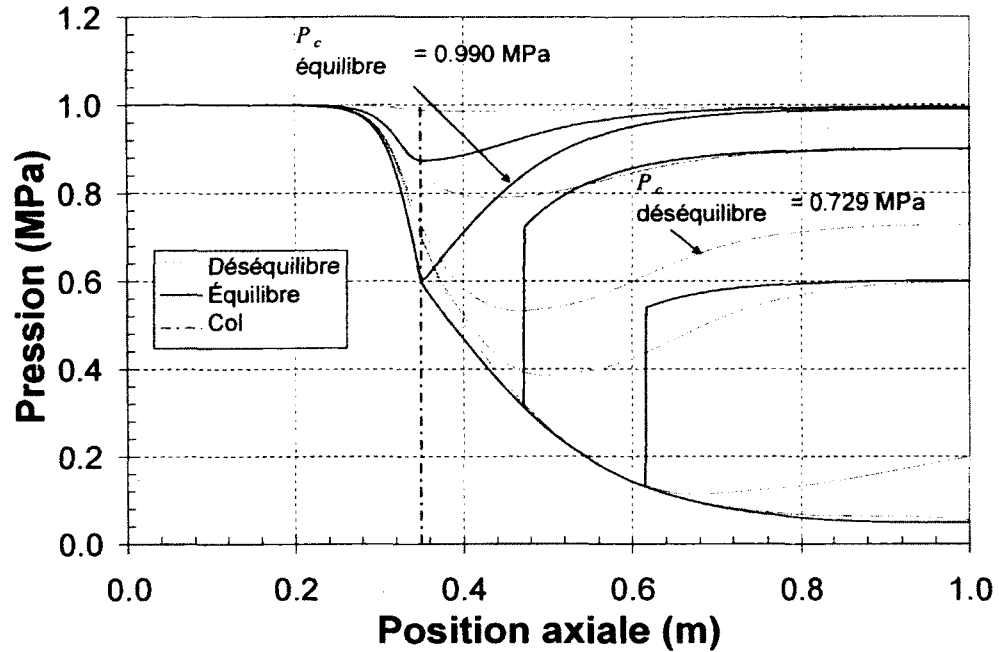


Figure 6.25 : Comparaison des profils de pression en équilibre et en déséquilibre mécanique.

En équilibre mécanique, la position du point critique demeure au col géométrique comme dans le cas d'un écoulement monophasique. Par contre, pour un écoulement diphasique en déséquilibre mécanique, le comportement est plus complexe et le point critique migre dans le divergent comme le présente la Figure 6.26.

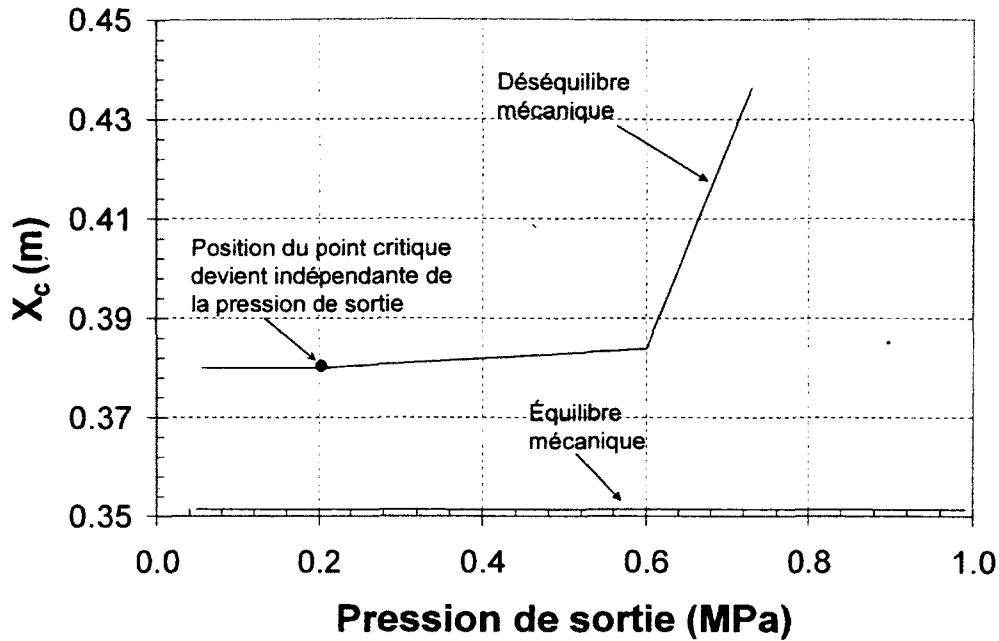


Figure 6.26 : Comparaison des positions du point critique en fonction de la pression de sortie pour un cas en équilibre et un cas en déséquilibre mécanique.

La Figure 6.27 présente les profils de débit avec et sans équilibre mécanique. Pour un écoulement diphasique à l'équilibre, le débit seuil est obtenu pour une pression critique seuil en sortie de $P_c = 0.990$ MPa. Une diminution supplémentaire de la pression n'affecte aucunement les conditions en amont du point critique situé au col géométrique. Cependant, pour un écoulement diphasique avec déséquilibre mécanique, la pression critique seuil P_c est alors de 0.729 MPa. Dans ce cas, une diminution supplémentaire de la pression entraîne une variation du débit critique et un nouveau point critique. Cela est possible grâce à la variation du glissement entre les phases. Pour une pression suffisamment faible, la pression limite P_L , le débit critique est fixé tout comme la position du point critique. À partir de cette pression, une diminution supplémentaire n'affecte plus les conditions en amont du point critique.

En fait, pour un écoulement diphasique homogène, le comportement est le même que pour un écoulement monophasique. Par contre, en déséquilibre, le comportement devient plus complexe à cause des interactions entre les phases.

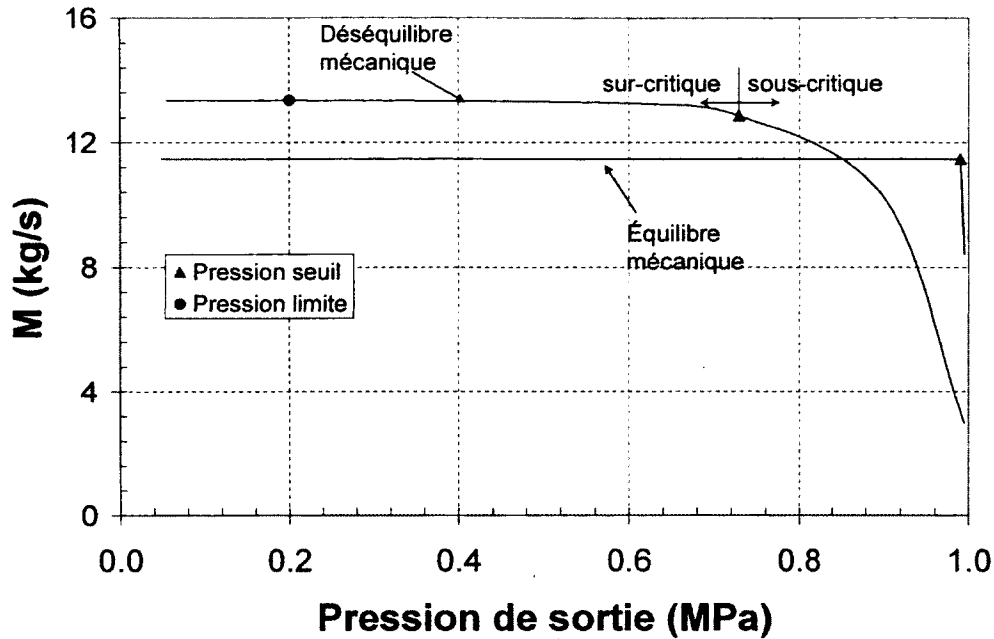


Figure 6.27 : Comparaison des profils de débit massique du mélange en fonction de la pression de sortie pour un cas en équilibre et un cas en déséquilibre mécanique.

6.4.5 Effet de la masse virtuelle

La masse virtuelle est un terme de source interphasique de l'équation de quantité de mouvement. Ce terme permet de tenir compte de l'ajout d'inertie à un système pour tenir compte de l'accélération relative entre deux phases. En fait, lorsqu'une phase accélère, celle-ci doit déplacer une certaine quantité des autres phases l'entourant puisqu'elles ne peuvent occuper le même espace au même moment. Cette force d'inertie a tendance à combattre l'accélération ou la décélération de la phase continue et s'ajoute à la force de trainée entre les phases.

La Figure 6.28 montre les profils du rapport de glissement avec et sans masse virtuelle pour un rapport de débit de 20. Dans les deux cas, la pression et la température d'entrée sont respectivement de 1.0 MPa et de 400 K tandis que la pression de sortie est de 0.6 MPa. L'écoulement ne comporte ni changement de phase, ni fractionnement et est en équilibre thermique. L'ajout de masse virtuelle vient donc modifier le profil de glissement en augmentant le couplage mécanique entre les deux phases.

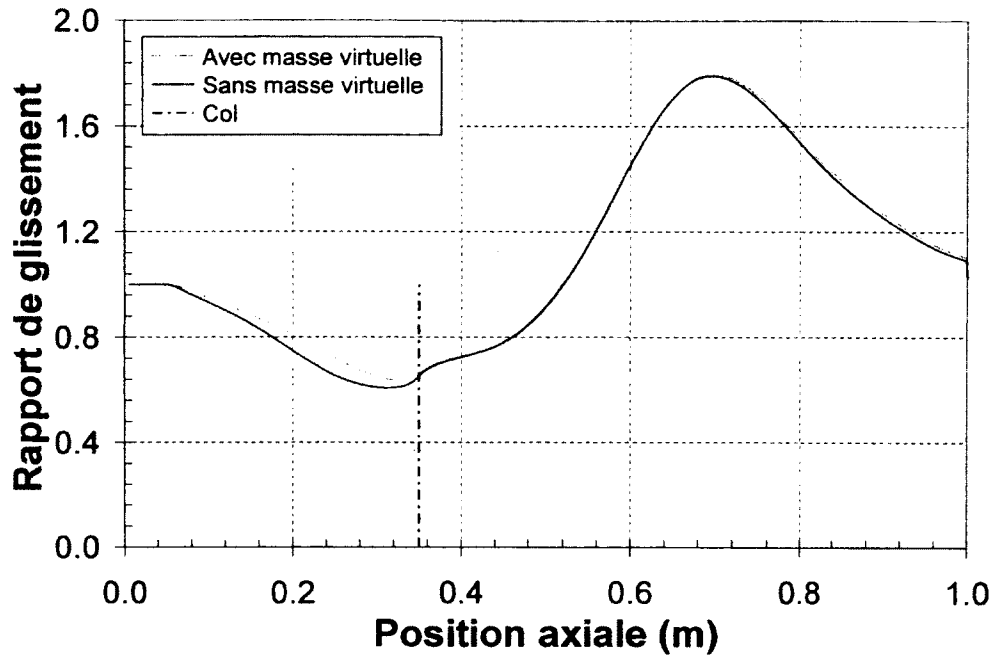


Figure 6.28 : Profils du rapport de glissement avec et sans l'effet de masse virtuelle.

La Figure 6.29 montre les profils du nombre critique pour un cas avec masse virtuelle et un autre cas sans cette force d'inertie. L'agrandissement montre que la masse virtuelle déplace la position du point critique plus loin dans le divergent. Avec cette force supplémentaire comme terme de source, les conditions critiques ainsi que l'équation (6.6) de la position du point critique présentée à la section 6.3.3 ont été vérifiés et s'appliquent également à ce cas.

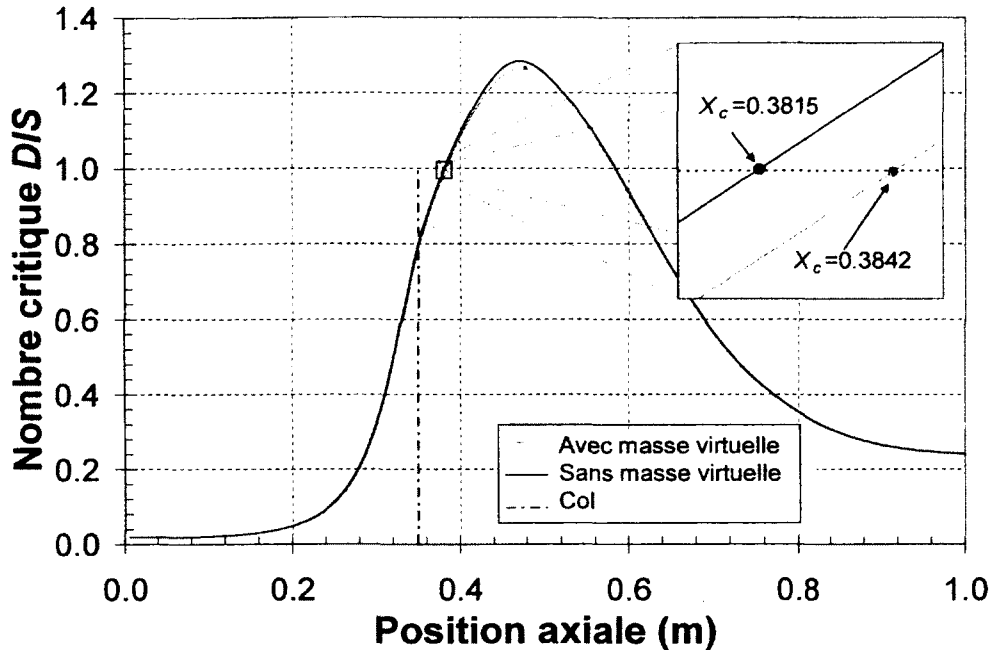


Figure 6.29 : Profils du nombre critique avec et sans l'effet de la masse virtuelle.

Le Tableau 6.19 montre l'effet de la masse virtuelle sur le débit et sur la position du point critique. La masse virtuelle, étant une force d'inertie, vient ralentir l'écoulement et diminuer le débit massique du mélange dans les cas étudiés. La position du point critique s'éloigne du col géométrique puisque le débit diminue comme l'a démontré la section 6.4.4.

Tableau 6.19 : Effet de la masse virtuelle sur le débit et sur la position du point critique.

Tests	M (kg/s)	X_c (m)
Sans masse virtuelle	17.8014	0.3815
Avec masse virtuelle	17.6889	0.3842

6.4.6 Effet du déséquilibre thermique

En équilibre thermique, les températures des phases sont la même. Par contre, le déséquilibre thermique permet une température différente pour chacune des phases. La Figure 6.30 présente la différence d'évolution des profils de pression dans la tuyère pour un écoulement diphasique sans changement de phase, sans fractionnement et à l'équilibre mécanique ($f_{M2} = 10$, $p_{in} = 1$ MPa, $p_{out} = \{0.995, P_c, 0.8, 0.6, 0.4, 0.06\}$ MPa, $T_{in} = 400$ K).

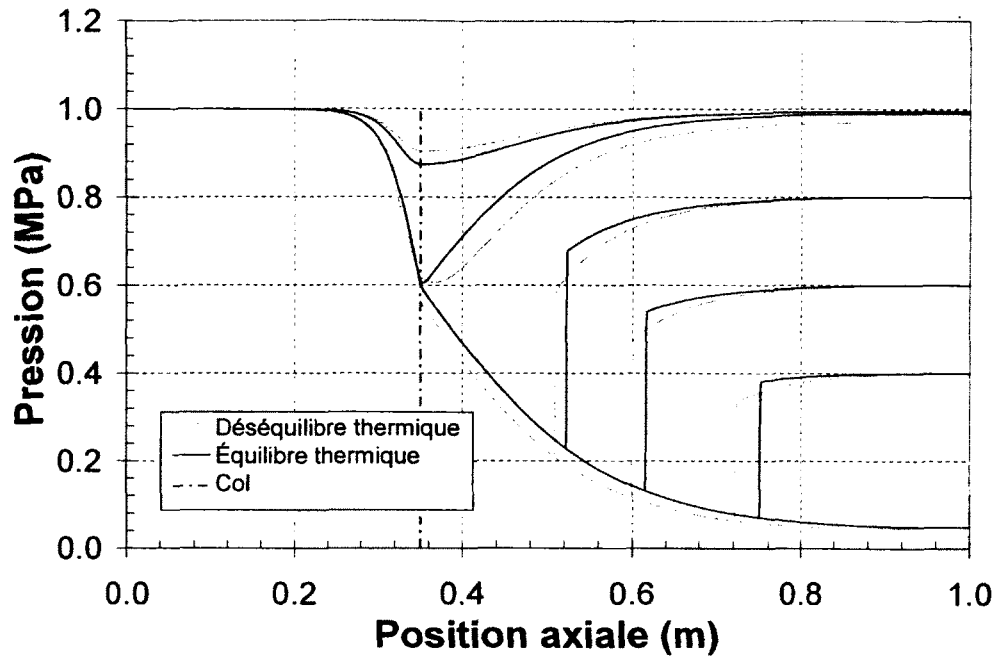


Figure 6.30 : Profils de pression avec et sans équilibre thermique.

Contrairement au déséquilibre mécanique, le déséquilibre thermique n'a pas d'influence sur les augmentations brusques de pression. Il a pour effet de diminuer la pression critique seuil ($P_c = 0.970$ MPa) et d'augmenter le débit comme le montre le Tableau 6.20. Il occasionne également un déplacement du point critique dans le convergent ($X_c = 0.3440$ m) pour ces conditions d'opération. D'autres simulations numériques ont cependant montré que le point critique pouvait également se déplacer dans le divergent. La position du point critique dépend effectivement de l'amplitude des variations du déséquilibre thermique entre les phases.

Tableau 6.20 : Comparaison des débits et de la position du point critique avec et sans déséquilibre thermique (* indique le débit seuil).

Pression de sortie (MPa)	M équilibre (kg/s)	M déséquilibre (kg/s)	X_c équilibre (m)	X_c déséquilibre (m)
0.995	7.6303	8.4172	-	-
0.990	11.4641*	9.2667	0.3514	-
0.970	11.4641	12.4448*	0.3514	0.3655
0.800	11.4641	12.6801	0.3514	0.3440
0.600	11.4641	12.6801	0.3514	0.3440
0.400	11.4641	12.6801	0.3514	0.3440
0.060	11.4641	12.6801	0.3514	0.3440

6.4.7 Effet du changement de phase

Pour bien représenter le changement de phase, les conditions suivantes ont été simulées : $p_{in} = 1$ MPa, $p_{out} = 0.6$ MPa, $T_{in} = 454$ K, $r_p = 40$ μm , $f_{M2} = 10$). La pression et la température d'entrée sont celles correspondantes à la saturation de la phase vapeur. L'écoulement est en déséquilibre thermique et mécanique sans fractionnement. La Figure 6.31 montre la variation du rapport de débit avec et sans changement de phase. Sans changement de phase, le rapport de débit est constant. Avec changement de phase et les conditions d'opération, une évaporation se produit de la phase liquide vers la phase gazeuse et le rapport de débit diminue.

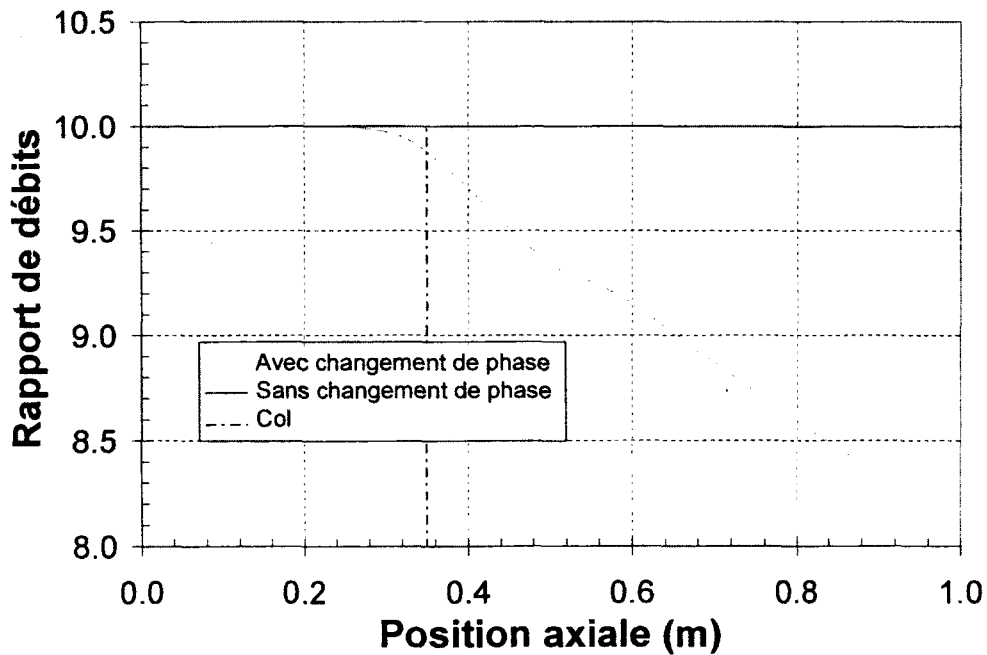


Figure 6.31 : Profils des rapports de débits dans la tuyère avec et sans changement de phase.

Ce changement de rapport de débit et d'évaporation modifie le profil de taux de vide comme le présente la Figure 6.32. Ce changement de phase vient diminuer l'importance de la phase liquide dans l'écoulement et modifie légèrement le profil de pression dans la tuyère (Figure 6.33).

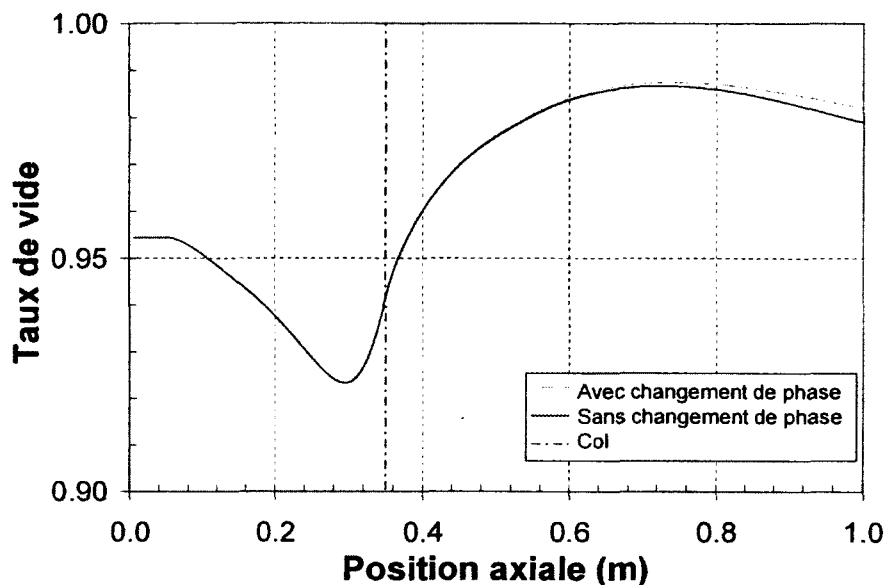


Figure 6.32 : Profils des taux de vide dans la tuyère avec et sans changement de phase.

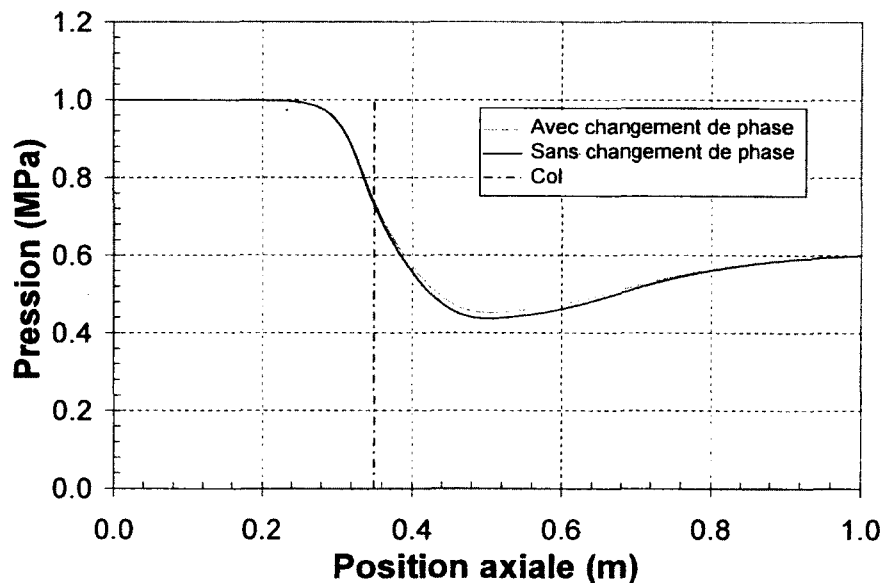


Figure 6.33 : Profils de pression dans la tuyère avec et sans changement de phase.

Le Tableau 6.21 présente les variations causées par le changement de phase sur le débit critique et la position du point critique. Dans ce cas, le changement de phase occasionne une augmentation de la phase compressible et un débit plus grand est obtenu. Cette augmentation du

débit fait en sorte de diminuer les variations du rapport de glissement ce qui entraîne un point critique plus près du col géométrique.

Tableau 6.21 : Effet du changement de phase sur le débit et sur la position du point critique.

Tests	M (kg/s)	X_c (m)
Sans changement de phase	10.0864	0.4040
Avec changement de phase	10.2784	0.3958

6.4.8 Effet du fractionnement des gouttes

La taille des gouttes influence directement les interactions entre les phases puisque celles-ci sont définies à partir du rayon moyen d'une goutte. Pour une fraction volumique donnée, une taille de goutte plus faible signifie une plus grande quantité de gouttes et une plus grande surface d'échange entre les phases. Le critère de fractionnement utilisé dans cette étude est celui du nombre de Weber présenté à la section 3.7. L'effet du fractionnement sur un écoulement en déséquilibre thermique et mécanique est présenté dans cette section ($p_{in} = 1$ MPa, $p_{out} = 0.6$ MPa, $T_{in} = 400$ K, $r_p = 40$ μm , $f_{M2} = 10$).

Tout d'abord, le Tableau 6.22 présente l'effet du fractionnement sur le débit et sur la position du point critique. Le fractionnement modifie la position du point critique légèrement en le rapprochant du col géométrique et diminue la valeur du débit critique.

Tableau 6.22 : Effet du fractionnement sur le débit et sur la position du point critique.

Tests	M (kg/s)	X_c (m)
Sans fractionnement	13.2136	0.3795
Avec fractionnement	12.7716	0.3781

La Figure 6.34 présente l'effet du fractionnement sur le déséquilibre mécanique. Avec le fractionnement, l'augmentation du nombre de particules fait en sorte d'augmenter la surface de friction entre les phases et le rapport de glissement se situe plus près de l'équilibre ($s_2 = 1.0$).

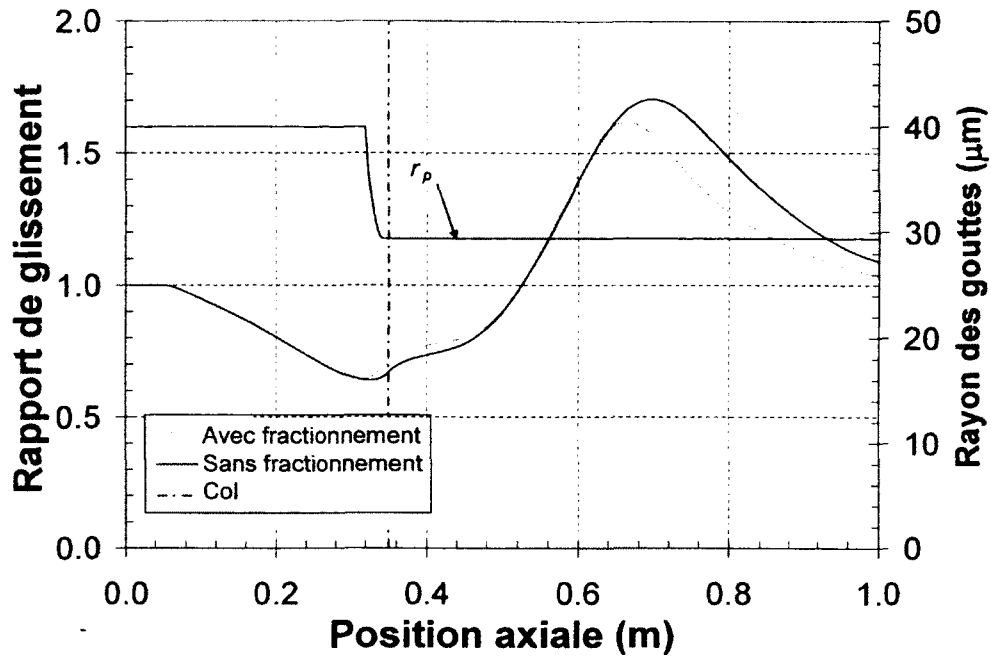


Figure 6.34 : Profils des rapports de glissement dans la tuyère avec et sans fractionnement.

Ce changement sur le rapport de glissement modifie également le profil de vitesse (Figure 6.35) et le profil de pression (Figure 6.36). La vitesse maximale est plus grande et la pression minimale plus petite avec fractionnement. Cela s'explique par le fait que la vitesse du liquide est plus grande donc son inertie fait en sorte que l'écoulement décélère moins rapidement.

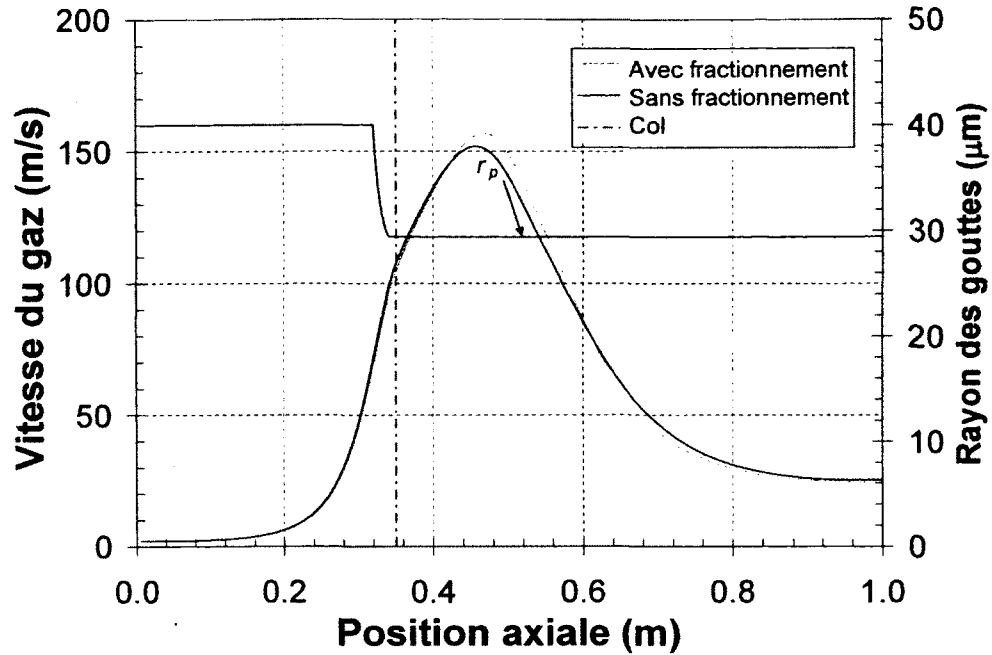


Figure 6.35 : Profils de vitesse dans la tuyère avec et sans fractionnement.

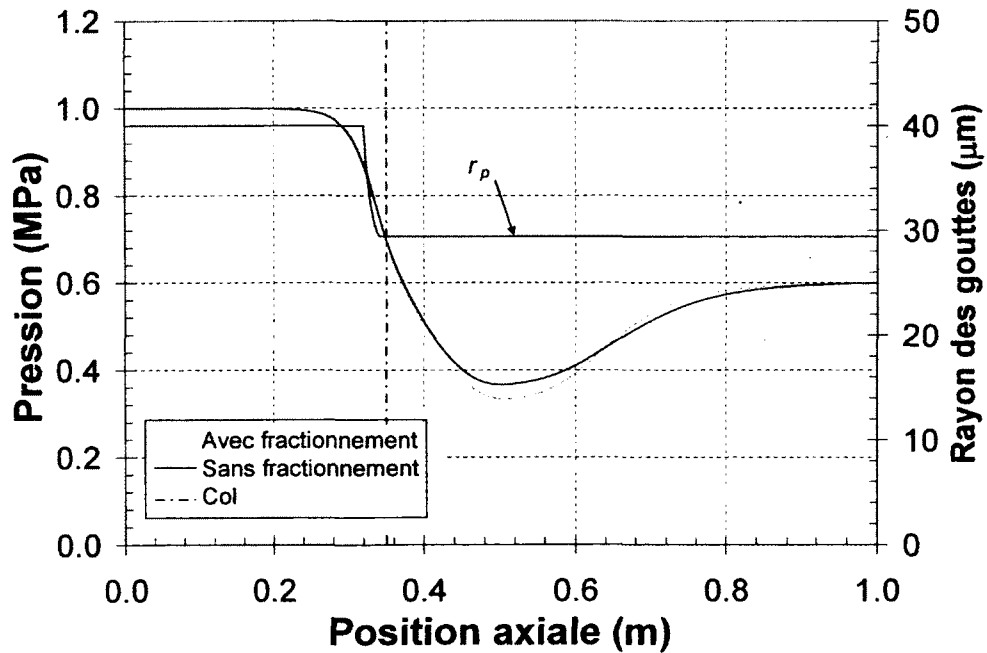


Figure 6.36 : Profils de pression dans la tuyère avec et sans fractionnement.

La Figure 6.37 montre la variation du profil de rapport de température dans la tuyère avec et sans fractionnement. Le fractionnement entraîne une augmentation de la surface d'échange entre les

phases occasionnant ainsi une diminution du rapport de température. En fait, le fractionnement a le même effet qu'une augmentation du coefficient de transfert de chaleur et tend à augmenter le couplage thermique.

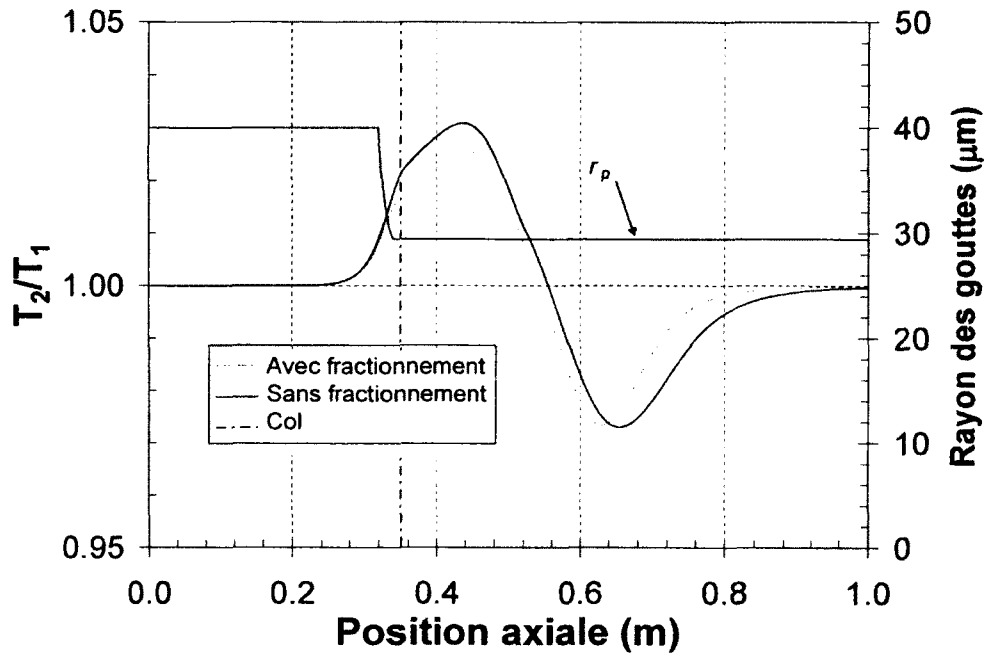


Figure 6.37 : Rapport de température dans la tuyère avec et sans fractionnement.

6.4.9 Évolutions d'un cas à l'équilibre et d'un cas en déséquilibre sans changement de phase

Dans le but de visualiser l'effet des déséquilibres sur l'écoulement, un cas complètement à l'équilibre d'écoulement eau-air est comparé à un cas en déséquilibre sans changement de phase ($p_{in} = 1 \text{ MPa}$, $p_{out} = 0.8 \text{ MPa}$, $T_{in} = 400 \text{ K}$, $r_p = 40 \text{ }\mu\text{m}$, $f_{M2} = 10$). Le Tableau 6.23 montre que le débit critique et la position du point critique change. De plus, les Figures 6.38 à 6.42 montrent la comparaison de l'évolution des variables primitives dans la tuyère. À ce stage, il est seulement intéressant de voir l'important changement dans les profils. Ceux-ci donnent également une visualisation de l'allure pour le cas d'un écoulement homogène et pour un cas en déséquilibre mécanique et thermique avec fractionnement.

Tableau 6.23 : Effet des déséquilibres sur le débit et sur la position du point critique.

Tests	M (kg/s)	X_c (m)
Équilibre complet	11.4735	0.3514
Déséquilibre	12.2309	0.4235

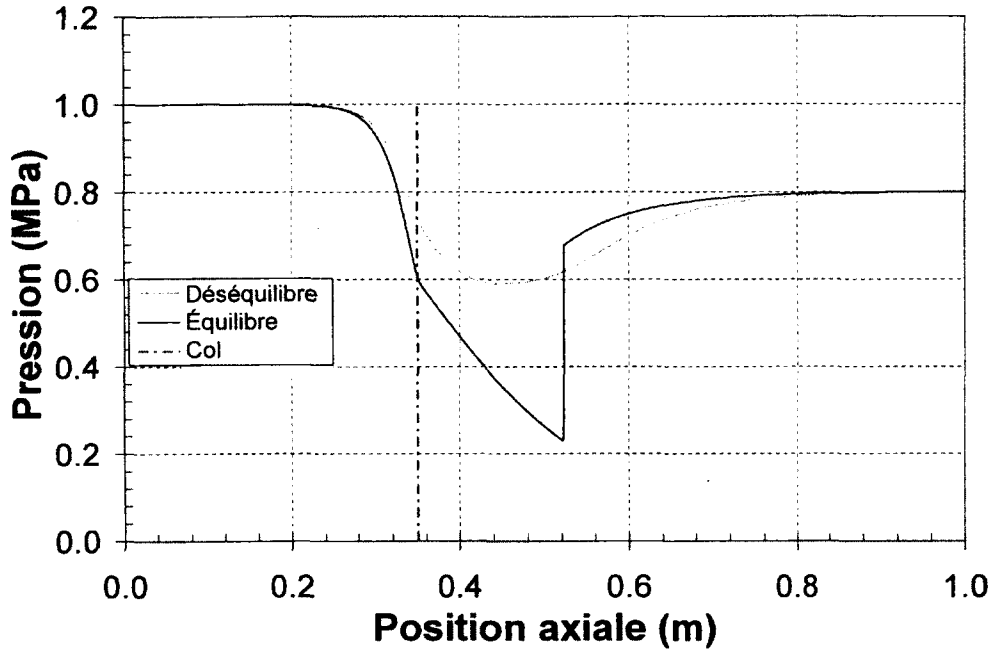


Figure 6.38 : Profils de pression dans la tuyère à l'équilibre et en déséquilibre.

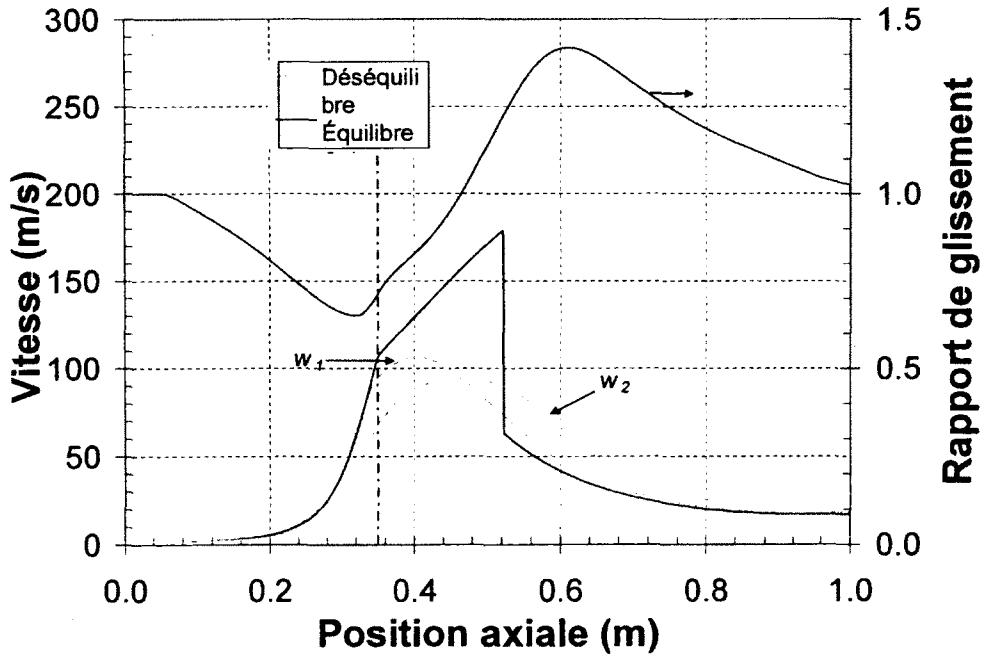


Figure 6.39 : Profils des vitesses dans la tuyère à l'équilibre et en déséquilibre

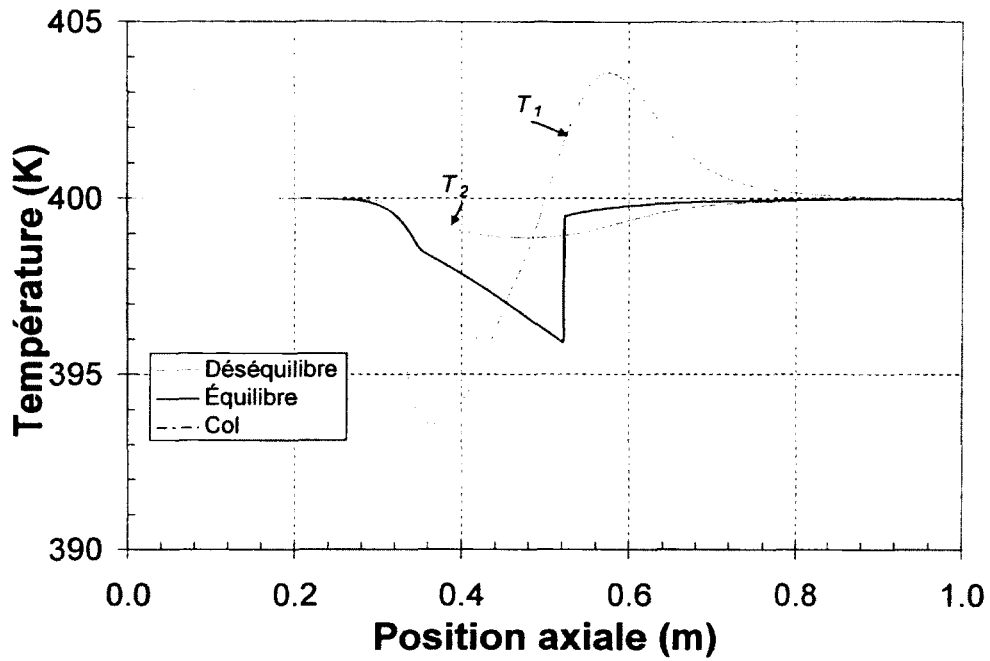


Figure 6.40 : Profils des températures dans la tuyère à l'équilibre et en déséquilibre

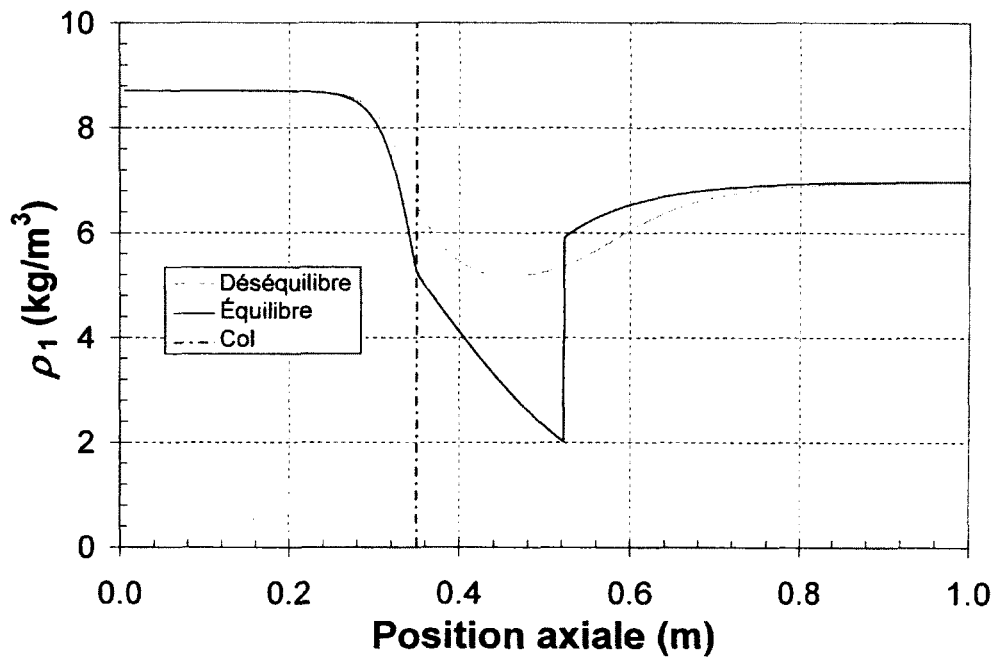


Figure 6.41 : Profils de masse volumique dans la tuyère à l'équilibre et en déséquilibre

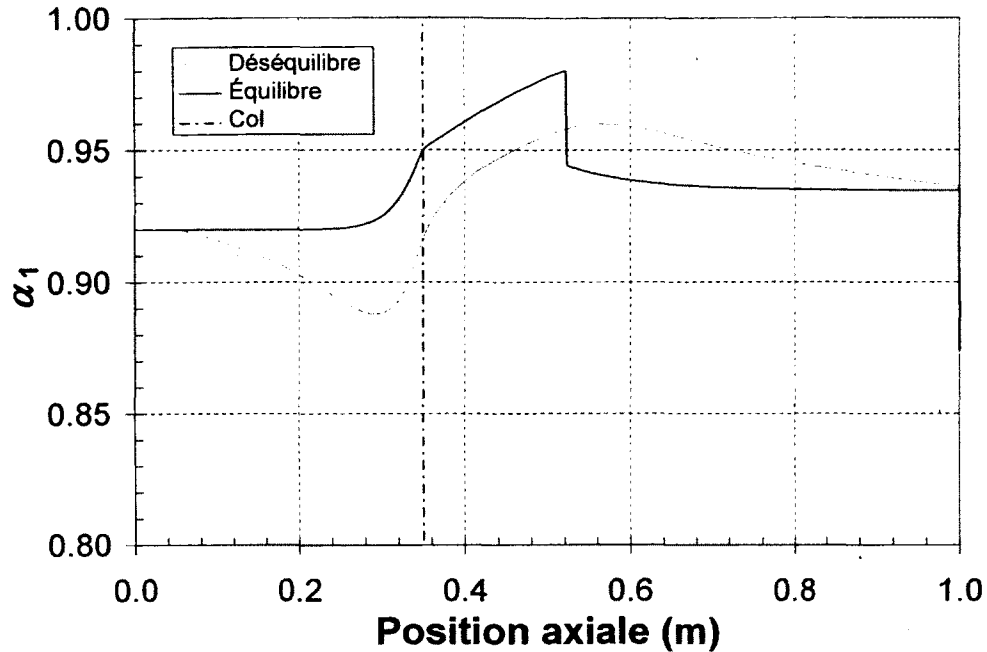


Figure 6.42 : Profils du taux de vide dans la tuyère à l'équilibre et en déséquilibre

6.4.10 Distinction entre le régime du mélange et le régime de la phase compressible

La Figure 6.43 montre les profils de pression obtenus numériquement avec le schéma SIMPLE compressible en utilisant la tuyère ASTAR pour un écoulement diphasique air-eau en déséquilibre mécanique. Trois rapports de débit ont été utilisés : 1.0, 2.5 et 5.0. Pour chacun de ces trois cas, une pression et une température d'entrée de 1 MPa et de 400 K ont été appliquées avec une pression de sortie de 0.3 MPa. L'augmentation du rapport de débit a pour effet d'augmenter le couplage entre les phases et de rendre le choc plus diffus.

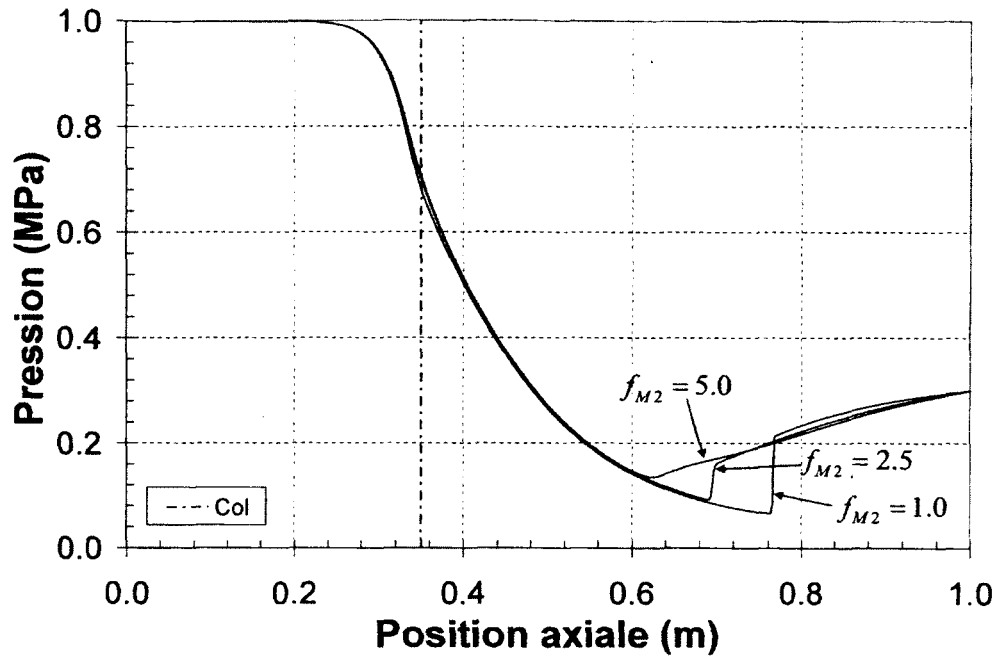


Figure 6.43 : Profils de pression dans la tuyère pour trois rapports de débit différents avec déséquilibre mécanique.

Dans un écoulement monophasique, un choc droit dans l'écoulement occasionne un changement de régime passant d'un écoulement supersonique à un écoulement subsonique. Pour un écoulement diphasique, la présence d'un choc, ou d'une augmentation brusque de pression, joue également le même rôle pour la phase compressible. Cependant, le régime d'écoulement du mélange peut demeurer sur-critique après un choc comme le montre les lignes pointillées sur la Figure 6.44. Ces lignes représentent le passage au travers un choc.

Lorsque le rapport de débit augmente, la phase compressible demeure en tout point subsonique bien que l'écoulement devienne sur-critique. Dans un tel cas, un choc n'est pas nécessaire pour repasser en régime sous-critique. Le fait que l'écoulement demeure sur-critique après le choc pourrait être dû aux interactions entre les phases qui permettent à l'écoulement de revenir en sous-critique sans l'aide de choc. En fait, la présence d'un choc semble associée au caractère transsonique de la phase compressible et non au changement de régime du mélange lorsque celui-ci passe d'un régime sur-critique à un régime sous-critique. Cependant, cette hypothèse devra être étudiée plus en détail pour vérifier si elle s'applique pour toutes les conditions d'opération.

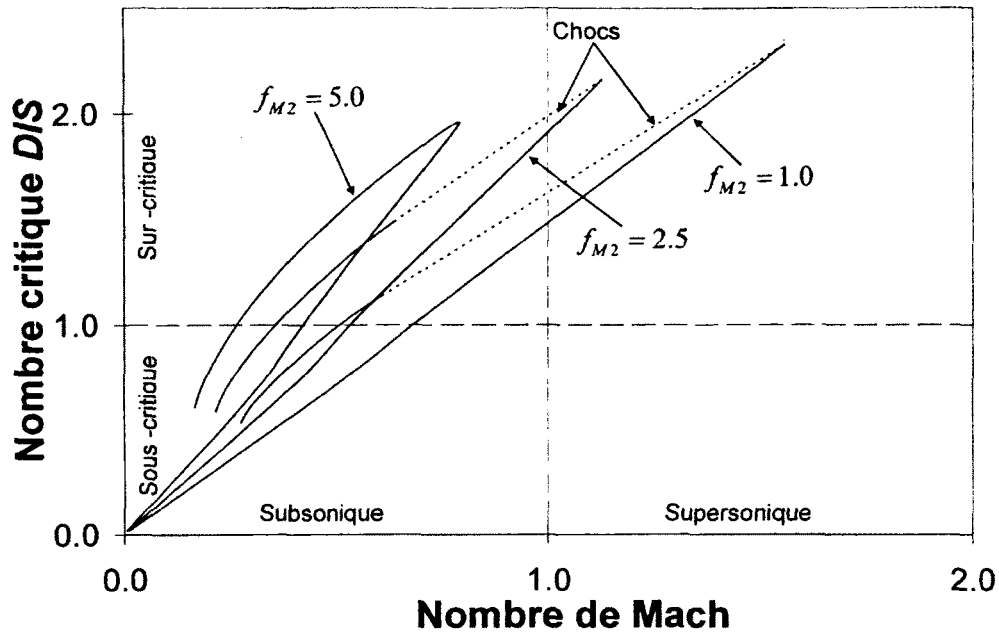


Figure 6.44 : Régime d'écoulement du mélange en fonction du régime d'écoulement de la phase compressible.

6.5 Discussion sur l'étude et les schémas numériques

Le schéma SIMPLE compressible a été utilisé pour obtenir les solutions de la section 6.4 portant sur une étude numérique pour démontrer le comportement de l'écoulement diphasique compressible. Cette étude numérique a permis de constater, pour une première fois, que les interactions entre les phases engendraient des comportements complexes qui peuvent différer du comportement habituellement admis pour un écoulement monophasique. Cette étude permet de constater que tous les déséquilibres sont importants et doivent être pris en compte dans la solution d'un écoulement diphasique.

Cependant, certaines limitations ont été atteintes comme un rapport de débit maximal de 50 avec la tuyère ASTAR et un temps de calcul élevé. Donc, le schéma SIMPLE compressible ne permet pas une plage complète de taux de vide à l'entrée pour des raisons d'instabilités numériques. De plus, le temps de convergence fait en sorte que sa transposition en 2D n'est pas pratique.

Pour tenter d'améliorer la plage de taux de vide à l'entrée et tirer profit des développements théoriques sur les points singuliers présentés par Dostie et al. (2009), le schéma FLUX-M a été élaboré. Bien que ce schéma permette des rapports de débit 1.5 fois plus grand que le schéma SIMPLE compressible, celui-ci ne peut obtenir de solution pour les pressions de sortie plus faible que la pression critique seuil. En fait, dans un écoulement monophasique, pour ajuster la pression de l'écoulement dans le divergent en régime supersonique pour satisfaire la pression de sortie, un choc droit peut apparaître. Pour un écoulement diphasique par contre, le mécanisme d'ajustement de la pression dans le divergent pour des écoulements en déséquilibres n'est pas encore bien compris et rend difficile le calcul de ces évolutions. De plus, certaines instabilités liées à la rigidité du schéma strictement conservatif ont dû être résolues dans la région des points critiques et d'autres problèmes pourraient possiblement apparaître lors de la transposition vers le 2D.

Une dernière approche, non présentée dans cette thèse, a été partiellement étudiée au cours de ces travaux. Cette approche est basée sur les techniques AUSM « Advection Upstream Splitting Method » [Liou et Steffen, 1993 ; Liou, 2006]. Cependant, au lieu d'utiliser le nombre de Mach, le nombre critique défini à l'équation (5.65) est utilisé. Cette technique pourrait possiblement éliminer la problématique entourant les augmentations brusques de pression dans le divergent rencontrées par le schéma FLUX-M et permettre une plage de rapport de débit plus grande. Elle pourrait également être plus facilement transposable en 2D et 3D. Cette technique ne sera cependant pas étudiée plus en détail dans le cadre de cette thèse.

CHAPITRE 7

CONCLUSION

La possibilité d'améliorer les cycles de réfrigération par l'utilisation d'un éjecteur nécessite l'amélioration des connaissances entourant les écoulements critiques diphasiques. Afin de circonscrire le problème, ces écoulements ont d'abord été étudiés dans une tuyère.

En premier lieu, une description d'un écoulement multiphasique ainsi que les termes de source y étant associés ont été définis. Les développements entourant les conditions critiques ainsi que les points singuliers ont également été présentés. Un modèle d'écoulement diphasique particulière a été explicité et deux schémas numériques unidimensionnels ont été utilisés pour l'étude des points singuliers et de l'évolution d'un écoulement diphasique particulière en tuyère. Les comparaisons des flux massiques critiques ainsi que des profils de pression obtenus numériquement et expérimentalement montrent que le modèle représente bien l'évolution de l'écoulement diphasique critique. En plus des déséquilibres thermiques et mécaniques, il permet également de tenir compte du changement de phase, du fractionnement des gouttes ainsi que du terme de masse virtuelle pour un écoulement à gouttes.

Plus particulièrement, l'utilisation des schémas numériques a permis de valider une analyse des écoulements critiques et les conditions critiques associées à une des familles de points singuliers présentées par Dostie et al. (2009). Le critère ainsi obtenu est d'ailleurs valide pour tous types de modèles basés sur les équations de conservation, indépendamment de la formulation des termes de source. Le lien entre les valeurs propres du mélange et les points singuliers a également été démontré. Cependant, le lien entre les points singuliers et les valeurs propres du système global n'a pas été étudié dans le cadre de cette thèse et n'a pu être rattaché à un sens physique.

La position du point critique a également été étudiée et l'existence d'un point critique situé à un endroit différent du col géométrique a été vérifiée. Des travaux supplémentaires sont cependant requis pour bien définir analytiquement la position du point critique en fonction des déséquilibres

présents. De plus, la limitation des schémas unidimensionnels entourant la plage de rapport de débit ou de taux de vide nécessite toujours du développement. Par contre, la comparaison des deux schémas numériques utilisés a permis de constater que le schéma FLUX-M est nettement plus performant que le schéma SIMPLE compressible, autant pour un écoulement monophasique que pour un écoulement diphasique. Par exemple, pour un écoulement eau-air avec la géométrie ASTAR, le schéma SIMPLE compressible permet d'obtenir une solution pour une plage de rapport de débit allant de 0 à 50 alors que le schéma FLUX-M permet d'obtenir une solution sur une plage de rapport de débit allant de 0 à 125. De plus, le schéma FLUX-M montre une amélioration de deux ordres de grandeur sur le temps de calcul en comparaison au schéma SIMPLE compressible.

Finalement, l'étude numérique a permis de montrer les effets des différents déséquilibres sur les conditions critiques et sur l'évolution de l'écoulement diphasique. La position du point critique est fonction de ces déséquilibres et il peut même se retrouver dans le convergent dans certains cas. De plus, l'augmentation abrupte de pression dans le convergent s'amenuise avec l'augmentation du rapport de débit et le déséquilibre mécanique. Finalement, un régime sur-critique et un débit massique indépendant des conditions de sortie sont obtenus bien que l'écoulement demeure toujours subsonique. Donc, les déséquilibres engendrent une évolution de l'écoulement diphasique qualitativement différente de l'évolution monophasique.

En fait, cette thèse se veut une contribution originale à l'étude des écoulements diphasiques critiques. Les principales contributions sont regroupées au niveau des points suivants :

- Validation des conditions critiques par comparaison des solutions numériques avec des données expérimentales.
- Étude du positionnement du point critique.
- Étude de l'influence des interactions entre les phases dans la région du point critique.
- Solution d'écoulements diphasiques critiques sur une plage de rapport de débit allant de 0 à 125 (taux de vide de 1 à 0.65) avec déséquilibres et changement de phase.
- Schéma numérique en régime stationnaire basé sur l'utilisation des flux de mélange.

Le modèle et les schémas numériques utilisés ont permis d'améliorer la compréhension des écoulements diphasiques critiques. Cependant, la limitation de la plage de taux de vide couverte ne permet pas de faire l'étude complète d'un éjecteur diphasique. Pour ce faire, un travail au niveau de la topologie de l'écoulement ainsi que sur les termes de source doit être fait pour permettre une plage complète de taux de vide allant d'un écoulement à goutte à un écoulement à bulle.

Les résultats obtenus permettent d'identifier un certain nombre d'études futures s'inscrivant dans le prolongement des présents travaux de recherche :

- Une étude unidimensionnelle d'un écoulement critique à bulle permettrait de valider le modèle d'écoulement diphasique pour ces conditions également.
- Une définition précise de la topologie de l'écoulement en fonction du taux de vide devra également être faite pour pouvoir couvrir une plage complète de taux de vide.
- Une étude théorique sur le positionnement du point critique doit être poursuivie pour obtenir l'équation globale prédisant la position de la section critique en fonction des déséquilibres.
- Le schéma FLUX-M ne permet d'obtenir des solutions pour des détente partielles à faible rapport de débit. La gestion des régimes d'écoulement critique et sonique doit donc être approfondie pour permettre de résoudre ce type d'écoulement.
- Il serait également intéressant d'étendre le schéma AUSM pour des écoulements unidimensionnels monophasique et diphasique en exploitant les informations sur les points singuliers. Cette approche pourrait également être développée en 2D afin de bien capter les interactions entre les écoulements primaire et secondaire dans la chambre de mélange d'un éjecteur.
- Le lien entre les points singuliers et les valeurs propres du système global pourrait également être approfondi analytiquement pour valider s'il existe ou non un pont entre les conditions critiques et les valeurs propres du système.

ANNEXE A : ÉQUATIONS DE CONSERVATION UNIDIMENSIONNELLE

Pour obtenir les équations de conservation unidimensionnelles en régime permanent, l'équation suivante, moyennée en surface et selon le temps, est utilisée :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} (A_k \rho_k \psi_k w_k + A_k \bar{n}_z \cdot \mathbf{J}_k) - A_k \rho_k \phi_k = \\ & - \int_c (\dot{m}_k \psi_k + \bar{n}_k \cdot \mathbf{J}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot \rho_k \psi_k \bar{u}_k + \bar{n}_k \cdot \mathbf{J}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

où $\dot{m}_k = \rho_k (w_k - w_D)$ et w_D est la vitesse de l'interface entre les phases.

Dans cette équation, les termes sont moyennés sur le temps et sur la surface et les coefficients de corrélation des moyennes sont posés comme étant unitaire. En fait, les symboles des opérateurs ont été enlevés pour simplifier la visualisation.

A.1 Conservation de la masse

Pour la conservation de la masse, les différentes variables prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \psi_k &= 1 \\ \mathbf{J}_k &= 0 \\ \varphi_k &= 0 \\ \varphi_D &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

L'équation de conservation moyennée devient donc :

$$\frac{\partial}{\partial z} (A_k \rho_k w_k) = - \int_c (\dot{m}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \int_{c_k} (\rho_k w_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \quad (\text{A.3})$$

où le premier terme de droite correspond au terme de source de masse à l'interface et le second au terme de source de masse à la paroi dans le cas d'une frontière poreuse. Le terme de source à l'interface est alors défini comme :

$$\sigma_k^M = - \int_c (\dot{m}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \quad (\text{A.4})$$

Une relation souvent employée dans les écoulements particuliers est :

$$\sigma_k^M = \frac{N_k A_{pk} h_{Mk} (\rho_{yk} - \rho_{sk})}{w_k} \quad (\text{A.5})$$

où N_k est le débit de particules, A_{pk} est la surface externe d'une particule, h_{Mk} est le coefficient de transfert massique, ρ_{yk} est la masse volumique partielle de la phase k à l'état gazeux, ρ_{sk} est la masse volumique gazeuse de la phase k à l'état saturé à la température de la phase et U_k est la norme de la vitesse de la phase k .

Et le terme de source à la paroi comme :

$$\sigma_k^{MW} = - \int_{c_k} (\rho_k w_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \quad (\text{A.6})$$

Pour la conservation de la masse, aucune force de volume n'y est associée :

$$\sigma_k^{MV} = 0 \quad (\text{A.7})$$

La conservation de la masse devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial z} (A_k \rho_k w_k) = \sigma_k^{MV} + \sigma_k^M + \sigma_k^{MW} \quad (\text{A.8})$$

La fraction volumique de chaque phase est introduite à l'aide de la relation suivante :

$$\alpha_k = \frac{A_k}{A} \quad (\text{A.9})$$

Pour la conservation de la masse, l'équation de saut primaire est :

$$\sum_k \dot{m}_k = 0 \quad (\text{A.10})$$

A.2 Conservation de la quantité de mouvement

Pour la conservation de la quantité de mouvement, les différentes variables prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \psi_k &= \bar{u}_k \\ \mathbf{J}_k &= -\boldsymbol{\tau}_k \\ \varphi_k &= \bar{F}_{ext} \\ \varphi_D &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

L'équation moyennée en surface et en temps devient alors :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z} (A_k \rho_k w_k \bar{u}_k + A_k \bar{n}_z \cdot -\boldsymbol{\tau}_k) - A_k \rho_k \bar{F}_{ext} = \\ &- \int_c (\dot{m}_k \bar{u}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} + \int_c (\bar{n}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} + \int_{c_k} (-\rho_k w_k \bar{u}_k + \bar{n}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Si le tenseur des contraintes est scindé en un terme de pression et un terme de contraintes visqueuses ($\boldsymbol{\tau}_k = -p_k \delta_{ij} + \bar{\pi}_k$), la relation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} (A_k \rho_k w_k \bar{u}_k) + \frac{\partial}{\partial z} (A_k p_k) = A_k \rho_k \bar{F}_{ext} + \frac{\partial}{\partial z} (A_k \bar{n}_z \cdot \bar{\pi}_k) - \int_c (\dot{m}_k \bar{u}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \\
& - \int_{c_k} (\rho_k w_k \bar{u}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot p_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \int_c (\bar{n}_k \cdot p_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} + \int_c (\bar{n}_k \cdot \bar{\pi}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \quad (A.13) \\
& + \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot \bar{\pi}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}}
\end{aligned}$$

En projetant les vecteurs précédents le long de l'axe z, l'équation de conservation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} (A_k \rho_k w_k \bar{u}_k) \cdot \bar{n}_z + \frac{\partial}{\partial z} (A_k p_k \cdot \bar{n}_z) \cdot \bar{n}_z = A_k \rho_k \bar{F}_{ext} \cdot \bar{n}_z + \frac{\partial}{\partial z} (A_k \bar{n}_z \cdot \bar{\pi}_k) \cdot \bar{n}_z - \bar{n}_z \cdot \int_c (\dot{m}_k \bar{u}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \\
& - \bar{n}_z \cdot \int_{c_k} (\rho_k w_k \bar{u}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \bar{n}_z \cdot \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot p_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \bar{n}_z \cdot \int_c (\bar{n}_k \cdot p_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} + \bar{n}_z \cdot \int_c (\bar{n}_k \cdot \bar{\pi}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \\
& + \bar{n}_z \cdot \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot \bar{\pi}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \quad (A.14)
\end{aligned}$$

Le premier terme de droite correspond à la moyenne des forces extérieures par unité de volume s'exerçant sur la surface de la phase k :

$$\sigma_k^{JV} = \bar{n}_z \cdot A_k \rho_k \bar{F}_{ext} = A_k \rho_k F_{extz} \quad (A.15)$$

Le second terme correspond aux variations de contraintes visqueuses selon l'axe de l'écoulement. Il est négligeable lorsqu'on le compare aux effets visqueux à l'interface puisqu'il représente les effets visqueux à l'intérieur d'une phase dans le sens de l'écoulement.

Le troisième correspond à la quantité de mouvement échangée à l'interface due au terme de source de masse à une vitesse moyenne d'échange :

$$\sigma_k^M w_k^{mean} = -\bar{n}_z \cdot \int_c (\dot{m}_k \bar{u}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} = \int_c (\dot{m}_k w_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} = \sigma_k^{Jm} \quad (A.16)$$

Le quatrième terme correspond à la quantité de mouvement échangée à la paroi par le terme de source de masse à une vitesse moyenne d'échange :

$$\sigma_k^{MW} w_k^W = -\bar{n}_z \cdot \int_{c_k} (\rho_k w_k \bar{u}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} = - \int_{c_k} (\rho_k w_k^2) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} = \sigma_k^{JmW} \quad (A.17)$$

Les deux termes suivants correspondent aux termes de contrainte normale s'exerçant sur l'interface et sur la paroi respectivement :

$$\begin{aligned}
& -\bar{n}_z \cdot \int_c (\bar{n}_k \cdot p_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \bar{n}_z \cdot \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot p_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} = \\
& - \int_{c+c_k} p_k (\bar{n}_k \cdot \bar{n}_z) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} = \int_{c+c_k} p_k \tan(\theta) dc = p_k \frac{\partial A_k}{\partial z} = \sigma_k^{JAW}
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Ce résultat d'intégral peut être démontré à l'aide d'un cas simple d'écoulement monophasique dans une tuyère à section circulaire variable comme présenté à la figure suivante :

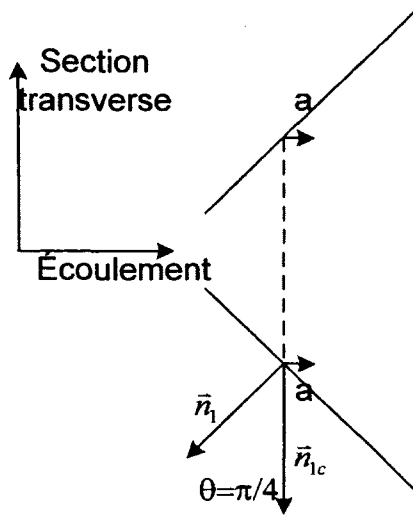


Figure 7.1 : Tube à section variable.

$$\begin{aligned}
\bar{n}_k \cdot \bar{n}_z &= -\sin \theta \\
\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc} &= \cos \theta \\
C &= 2\pi r \\
r &= z \\
A &= \pi r^2 = \pi z^2 \\
\frac{dA}{dz} &= 2\pi z = 2\pi r
\end{aligned} \tag{A.19}$$

De plus, la pente d'une droite est donnée par le rapport des variations selon l'axe des ordonnées et des abscisses. Ce rapport est également égale à :

$$pente = \frac{dy}{dz} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) = \frac{dA}{dz} \tag{A.20}$$

Donc, la relation devient :

$$\int_{c+c_k} p_k \tan(\theta) dc = p_k \tan(\theta) C = p_k \tan(\theta) 2\pi r = p_k \frac{\partial A_k}{\partial z} = \sigma_k^{JAW} \tag{A.21}$$

Dans cette étude, cette intégrale est incluse dans le terme de source à la paroi de même que le terme visqueux à la paroi :

$$F_k^W = \bar{n}_z \cdot \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot \bar{\pi}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} = \sigma_k^{J\mu W} \quad (\text{A.22})$$

Le terme de source à la paroi suivant est alors obtenu :

$$\sigma_k^{JW} = \sigma_k^{JmW} + \sigma_k^{JAW} + \sigma_k^{J\mu W} \quad (\text{A.23})$$

Finalement, le dernier terme est en fait un terme de force s'exerçant aux interfaces due aux contraintes visqueuses. Il peut être vue comme la somme des forces visqueuses agissant sur l'interface :

$$F_k^D = \bar{n}_z \cdot \int_c (\bar{n}_k \cdot \bar{\pi}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} = \sigma_k^{J\mu} \quad (\text{A.24})$$

Les termes de source à l'interface pour la quantité de mouvement peuvent ainsi être regroupés :

$$\sigma_k^J = \sigma_k^{J\mu} + \sigma_k^{Jm} + \sigma_k^{J\mu m} \quad (\text{A.25})$$

où $\sigma_k^{J\mu m}$ représente un terme de masse virtuelle pour tenir compte de l'effet du déplacement local de la masse d'une phase (Städtke, 2006).

L'équation de conservation devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial z} (A_k \rho_k w_k^2) + \frac{\partial}{\partial z} (A_k p_k) = \sigma_k^{JV} + \sigma_k^J + \sigma_k^{JW} \quad (\text{A.26})$$

Pour introduire la fraction volumique de chaque phase, il suffit de multiplier et diviser les termes par la surface totale et l'équation de conservation suivante est obtenue :

$$\frac{\partial}{\partial z} (A \alpha_k \rho_k w_k^2) + \frac{\partial}{\partial z} (A \alpha_k p_k) = \sigma_k^{JV} + \sigma_k^J + \sigma_k^{JW} \quad (\text{A.27})$$

Pour la conservation de la quantité de mouvement, la somme des termes de source à l'interface doit s'annuler et l'équation de saut donne :

$$\sum_k (\dot{m}_k \bar{u}_k - \bar{n}_k \cdot \bar{\tau}_k) = 0 \quad (\text{A.28})$$

Puisque la somme des échanges de quantité de mouvement liée à la masse est nulle, la somme des échanges visqueux à l'interface est également nulle :

$$\sum_k F_k^D = 0 \quad (\text{A.29})$$

A.3 Conservation de l'énergie

Pour la conservation de l'énergie, en négligeant la variation d'énergie potentielle, les différentes variables prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\psi_k &= e_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2} \\
\mathbf{J}_k &= \bar{q}_k - \boldsymbol{\tau}_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_k \\
\varphi_k &= \bar{F}_{ext} \cdot \bar{\mathbf{u}}_k \\
\varphi_D &= 0
\end{aligned} \tag{A.30}$$

L'équation moyennée en surface et en temps devient alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} \left(A_k \rho_k w_k \left(e_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) + A_k \bar{n}_z \cdot (\bar{q}_k - \boldsymbol{\tau}_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_k) \right) - A_k \rho_k \bar{F}_{ext} \cdot \bar{\mathbf{u}}_k = \\
& - \int_c \left(\dot{m}_k \left(e_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) \right) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kc}} - \int_c (\bar{n}_k \cdot (\bar{q}_k - \boldsymbol{\tau}_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_k)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kc}} \\
& - \int_{c_k} \left(\bar{n}_k \cdot \rho_k w_k \left(e_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) \right) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kc}} - \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot (\bar{q}_k - \boldsymbol{\tau}_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_k)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kc}}
\end{aligned} \tag{A.31}$$

En séparant le tenseur des contraintes en termes de pression et de contraintes visqueuses ($\boldsymbol{\tau}_k = -p_k \boldsymbol{\delta}_{ij} + \bar{\boldsymbol{\pi}}_k$) et en introduisant l'enthalpie de chaque phase ($e_k = h_k - \frac{p_k}{\rho_k}$), l'équation de conservation de l'énergie devient :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} \left(A_k \rho_k w_k \left(h_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) \right) = A_k \rho_k \bar{F}_{ext} \cdot \bar{\mathbf{u}}_k - \frac{\partial}{\partial z} A_k \bar{n}_z \cdot (\bar{q}_k - \bar{\boldsymbol{\pi}}_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_k) \\
& - \int_c \left(\dot{m}_k \left(h_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) \right) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kc}} - \int_{c_k} \left(\bar{n}_k \cdot \rho_k w_k \left(h_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) \right) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kc}} \\
& + \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot (\bar{\boldsymbol{\pi}}_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_k)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kc}} + \int_c (\bar{n}_k \cdot (\bar{\boldsymbol{\pi}}_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_k)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kc}} \\
& - \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot \bar{q}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kc}} - \int_c (\bar{n}_k \cdot \bar{q}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kc}} \\
& - \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot (p_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_k)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kc}} - \int_c (\bar{n}_k \cdot (p_k \cdot \bar{\mathbf{u}}_k)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kc}} + \int_c \left(\dot{m}_k \frac{p_k}{\rho_k} \right) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{\mathbf{n}}_{kc}}
\end{aligned} \tag{A.32}$$

En projetant les vecteurs précédents le long de l'axe z, l'équation de conservation de l'énergie devient :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} \left(A_k \rho_k w_k \left(h_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) \right) \cdot \bar{n}_z = A_k \rho_k \bar{F}_{ext} \cdot \bar{u}_k \cdot \bar{n} + \frac{\partial}{\partial z} A_k \bar{n}_z \cdot (\bar{\pi}_k \cdot \bar{u}_k) \cdot \bar{n}_z \\
& - \bar{n}_z \cdot \int_c \left(\dot{m}_k \left(h_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) \right) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \bar{n}_z \cdot \int_{c_k} \left(\bar{n}_k \cdot \rho_k w_k \left(h_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) \right) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \\
& + \bar{n}_z \cdot \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot (\bar{\pi}_k \cdot \bar{u}_k)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} + \bar{n}_z \cdot \int_c (\bar{n}_k \cdot (\bar{\pi}_k \cdot \bar{u}_k)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \\
& - \frac{\partial}{\partial z} A_k \bar{n}_z \cdot (\bar{q}_k) \cdot \bar{n}_z - \bar{n}_z \cdot \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot \bar{q}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \bar{n}_z \cdot \int_c (\bar{n}_k \cdot \bar{q}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \\
& - \bar{n}_z \cdot \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot (p_k \cdot \bar{u}_k)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \bar{n}_z \cdot \int_c (\bar{n}_k \cdot (p_k \cdot \bar{u}_k)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} + \bar{n}_z \cdot \int_c \left(\dot{m}_k \frac{p_k}{\rho_k} \right) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}}
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Le premier terme de droite correspond au travail moyen des forces extérieures par unité de volume s'exerçant sur la surface de la phase k selon l'axe de l'écoulement :

$$\sigma_k^{EV} = A_k \rho_k \bar{F}_{ext} \cdot \bar{u}_k \tag{A.34}$$

Le second terme représente les effets visqueux et le flux de chaleur dans le sens de l'écoulement à l'intérieur d'une phase. De plus, ce terme est négligeable comparativement aux effets provenant de l'interface.

Le troisième terme correspond à l'énergie thermique et cinétique associé au transfert de masse à l'interface :

$$\begin{aligned}
\sigma_k^{Eh} + \sigma_k^{Eu} &= - \int_c \left(\dot{m}_k \left(h_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) \right) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \\
\sigma_k^{Eh} &= - \int_c (\dot{m}_k h_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \\
\sigma_k^{Eu} &= - \int_c \left(\dot{m}_k \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}}
\end{aligned} \tag{A.35}$$

Le quatrième terme correspond à l'énergie thermique et cinétique associé au transfert de masse aux parois :

$$\begin{aligned}
\sigma_k^{EhW} + \sigma_k^{EuW} &= - \int_{c_k} \left(\bar{n}_k \cdot \rho_k w_k \left(h_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) \right) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \\
\sigma_k^{EhW} &= - \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot \rho_k w_k h_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \\
\sigma_k^{EuW} &= - \int_{c_k} \left(\bar{n}_k \cdot \rho_k w_k \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}}
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Les termes cinq et six sont en fait les termes d'échange d'énergie aux interfaces et aux parois due aux contraintes visqueuses multipliés par la vitesse de la phase :

$$\begin{aligned}\sigma_k^{E\mu} &= \int_c (\bar{n}_k \cdot \bar{\pi}_k \cdot \bar{u}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \\ \sigma_k^{E\mu W} &= \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot \bar{\pi}_k \cdot \bar{u}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}}\end{aligned}\quad (\text{A.37})$$

Les deux termes suivants correspondent aux termes de source de chaleur s'exerçant sur l'interface et sur la paroi respectivement :

$$\begin{aligned}\sigma_k^{Eq} &= - \int_c (\bar{n}_k \cdot \bar{q}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} \\ \sigma_k^{EqW} &= - \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot \bar{q}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}}\end{aligned}\quad (\text{A.38})$$

Le terme suivant correspond au terme de pression s'exerçant sur la paroi (la vitesse est la vitesse de la phase à travers la paroi) :

$$\sigma_k^{EpW} = \int_{c_k} (\bar{n}_k \cdot p_k \cdot \bar{u}_k) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} = 0 \quad (\text{A.39})$$

De plus, les deux derniers termes peuvent être simplifiés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}& - \int_c (\bar{n}_k \cdot (p_k \cdot \bar{u}_k)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} + \int_c \left(\dot{m}_k \frac{p_k}{\rho_k} \right) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} = \\ & - \int_c (\bar{n}_k \cdot (p_k \cdot \bar{u}_k)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} + \int_c (\bar{n}_k \cdot (p_k \cdot \bar{u}_k)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} - \int_c (\bar{n}_k \cdot (p_k \cdot \bar{u}_D)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} = \\ & - \int_c (\bar{n}_k \cdot (p_k \cdot \bar{u}_D)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}}\end{aligned}\quad (\text{A.40})$$

En introduisant la dérivation temporelle de la fraction volumique, ce terme de pression restant peut être écrit de la façon suivante (Städtke, 2006) :

$$\int_c (\bar{n}_k \cdot (p_k \cdot \bar{u}_D)) \frac{dc}{\bar{n}_k \cdot \bar{n}_{kc}} = A p_k^D \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} \quad (\text{A.41})$$

où p_k^D est la pression moyenne à l'interface. Il est alors intéressant de remarquer que ce terme disparaît pour un régime permanent.

Les termes de source à l'interface pour l'énergie peuvent ainsi être regroupés :

$$\sigma_k^{EW} = \sigma_k^{Eq} + \sigma_k^{E\mu} + \sigma_k^{Eh} + \sigma_k^{Eu} \quad (\text{A.42})$$

De la même manière, les termes de source aux parois peuvent être regroupés :

$$\sigma_k^{EW} = \sigma_k^{EqW} + \sigma_k^{E\mu W} + \sigma_k^{EhW} + \sigma_k^{EuW} \quad (\text{A.43})$$

L'équation de conservation devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(A_k \rho_k w_k \left(h_k + \frac{w_k^2}{2} \right) \right) = \sigma_k^{EV} + \sigma_k^E + \sigma_k^{EW} \quad (\text{A.44})$$

Pour introduire la fraction volumique de chaque phase, il suffit de multiplier et de diviser les termes A_k par la surface totale et l'équation de conservation suivante est obtenue :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(A \alpha_k \rho_k w_k \left(h_k + \frac{w_k^2}{2} \right) \right) = \sigma_k^{EV} + \sigma_k^E + \sigma_k^{EW} \quad (\text{A.45})$$

Pour la conservation de l'énergie, la somme des termes de source à l'interface doit s'annuler et l'équation de saut donne :

$$\sum_k \left(\dot{m}_k \left(e_k + \frac{\bar{u}_k^2}{2} \right) + \bar{n}_k \cdot (\bar{q}_k - \tau_k \cdot \bar{u}_k) \right) = 0 \quad (\text{A.46})$$

Puisque la somme des échanges de quantité de mouvement reliée à la masse est nulle, la somme des échanges visqueux à l'interface est également nulle :

$$\sum_k \sigma_k^E = 0 \quad (\text{A.47})$$

ANNEXE B : ARTICLE DOSTIE ET AL. (2009)

Cette annexe présente une analyse des écoulements critiques multiphasiques et des familles de points singuliers. D'ailleurs, une famille mène directement aux conditions critiques pour les écoulements avec section prescrite. Ce document permet donc d'établir les fondements pour l'étude des écoulements diphasiques critiques en tuyère.

Critical Fluxes in Conservative Systems

with Application to Multiphase Flows

Michel Dostie

Laboratoire des technologies de l'énergie
Hydro-Québec Research Institute
600, rue de la Montagne, CP 990
Shawinigan, QC, Canada
dostie.michel@ireq.ca

Sylvain Martel
Yves Mercadier

Département de génie mécanique
University of Sherbrooke
2 500 boul. de l'Université
Sherbrooke, QC, Canada
yves.mercadier@USherbrooke.ca

Abstract

A general scheme defining the critical conditions in one-dimensional conservative systems is developed using the framework of differential dynamical systems. These critical conditions are shown to be directly related to local optimum values of the conservative variables, or fluxes, with respect to the variation of primitive variables. When applied to multiphase flow, these conditions provide a direct interpretation of the choked flow phenomenon. It is shown that these critical conditions are not necessarily related to propagation phenomenon if the source terms are a function of the spatial derivatives of the primitive variables. Some critical conditions also emerge as a new property of the mixture of phases. The predicted critical mass flow rates are in good agreement with experimental and numerical data.

Contents

Introduction

1. Critical Flux Condition with Source Terms not as a Function of the Space Derivative of the Primitive Variables
 - 1.1 Balance Equation System
 - 1.2 Steady-State Regime and Critical Flux Condition
 - 1.3 System State Description and Change of Variables
 - 1.4 Singular Point and Critical Flux Condition
 - 1.5 Hyperbolicity, Propagation and Critical Flux Condition
 - 1.6 Single-Phase One-Dimensional Flows

2. Critical Flux Conditions with Source Terms as a Function of the Space Derivative of the Primitive Variables
 - 2.1 Mixture Balance Equations
 - 2.2 Hyperbolicity, Propagation and Critical Flux Conditions Revisited
 - 2.3 Multiphase Flow Models

- 2.3.1 Global Scaling
- 2.3.2 Scaling of Terms in Flux Variables
- 2.3.3 Constraining the Flow Section
- 2.4 Choking or Critical Location

Conclusions

Bibliography

List of Symbols

Introduction

Multiphase flow physics is particularly complex and challenging. Several phenomena occurred in such flows that are difficult to measure locally and comprehend globally. Yet, this type of fluid flow is ubiquitous in modern industry and is very often encountered in the electricity generation and the oil and gas industries, as well as in day-to-day technologies like air conditioning.

Important efforts are devoted to the modelling of such multiphase flow, most of them taking into account two phases only. Over the last years, flux splitting numerical techniques and special solvers have been developed and adapted using time varying balance equations, into which propagation velocities and associated eigenvalues play a central role. The European project ASTAR [1] provides a perfect illustration of these developments and of the complexity of the related scientific challenges.

One phenomenon that is still of interest after more than 40 years of development is the so-called choking phenomenon or critical flow. From an experimental point of view, it can be defined as having the flow rate remaining unchanged by a change in the downstream or exit pressure. It is the maximum flow rate that can be achieved for given upstream conditions.

This phenomenon is still not completely understood and direct measurements of the relevant variables at the choking location are difficult to obtain, if at all possible. Even sophisticated numerical models do not provide a complete picture of the choking phenomenon. One example is the prechoking phenomenon reported by Staedtke [2] for numerical solutions of two-phase flow in a nozzle, as the flow rate is maximal even though the fluid velocity downstream the throat is lower than the local speed of sound. This unexplained phenomenon illustrates an incomplete understanding between propagation phenomena and critical flow conditions.

Several criteria have been defined to predict critical flow. A comprehensive review of ten critical two-phase flow models using several data sets was conducted by Elias and Lellouche [3] who concluded that none were actually satisfactory over a wide range of conditions. A phenomenon like critical flow has to be strongly related to some fundamental properties of the equation system used to model the flow. A better understanding of the dynamics of multiphase flow phenomena would contribute to improving our ability to address complex multiphase flow problems.

This paper presents the development of new choking criteria that are directly related to optimal flux conditions. It takes its roots in previous work by the present authors [4][5] that was never formally published and as well as in an analysis by Bilicki et al. [6] of two-phase flow models as differential dynamical systems. This new development was triggered by a renewed interest in the use of two-phase ejectors to improve refrigeration systems. In these ejectors, the primary fluid is a subcooled or saturated liquid, and the modelling and design of such devices present significant challenges.

Conservation principles usually yield balance equations written in terms of fluxes or conservative variables, which can then be rewritten in terms of primitive variables. It is the analysis of the relationship between these two equivalent representations of the flow within the framework of differential dynamical systems that will yield new information on critical multiphase flow. The following results were achieved for conservative systems:

- A general family of singular points for conservative systems is developed.
- Critical conditions are shown to correspond to optimal fluxes at the critical location.
- All relevant fluxes are optimal at the critical location, either minimum or maximum.
- These critical fluxes can be defined without reference to propagation phenomena (eigenvalues).
- Some critical conditions will also emerge as mixture properties.

And when applied to multiphase flows:

- Three sets of criteria are developed to determine if the flow is locally critical.
- The number of independent variables is greatly reduced at the critical location, being at most two for one-dimensional multiphase flow ($n-1$ for multiphase systems).

The analysis presented in this paper is not limited to fluid mechanics and shall be useful in the study of other conservative systems.

The development will be presented in three steps, the first two addressing one-dimensional systems. At first, a family of singular points linked to critical conditions will be identified for systems for which the source terms are not a function of the space derivative of the primitive variables. The approach will be illustrated using single-phase flow as a working example. Then we will examine the more general case where the source terms are a function of the space derivative of the primitive variables. This is often the case in multiphase flow. A comparison with experimental and numerical data will be provided. In the last part, this development will be extended to two- and three-dimensional systems. Although not a completely formal demonstration, this paper presents a comprehensive basis for the analysis of the critical flow phenomenon in multiphase flow, as well as for the more general case of critical fluxes in conservative systems.

1. Critical Flux Condition with Source Terms not as a Function of the Space Derivative of the Primitive Variables

1.1 Balance Equation System

Balance equations for physical systems are usually obtained in a conservative form through conservation principles. For one-dimensional systems, the resulting equation set is often in the following form.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (1)$$

where t is the time and x the space. The n elements of the \mathbf{S} vector are source terms and those of \mathbf{U} and \mathbf{F} are fluxes, all being a function of the primitive variables \mathbf{Y} . For now, let us assume that these source terms are not a function of the space derivatives of the primitive variables \mathbf{Y} . The set of equations can be rewritten in primitive form as

$$\mathbf{J}_U \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{J}_F \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (2)$$

where the Jacobians \mathbf{J}_U and \mathbf{J}_F relate the variation of the fluxes to the variation of the primitive variables

$$\mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial Y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial Y_n} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{J}_U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial U_1}{\partial Y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial U_n}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial U_n}{\partial Y_n} \end{pmatrix} \quad (4)$$

1.2 Steady-State Regime and Critical Flux Condition

For now, we will focus our attention on the stationary regime. Thus

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (5)$$

$$\mathbf{J}_F \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (6)$$

A solution to Eq. (6) can be obtained by using Cramer's rule.

$$\frac{\partial Y_j}{\partial x} = \frac{\Delta_j(\mathbf{J}_F)}{\Delta(\mathbf{J}_F)} \quad (7)$$

where Δ is the determinant, and Δ_j is the determinant of \mathbf{J}_F with the j th column of the matrix replaced by \mathbf{S} . The critical conditions are defined by $n+1$ conditions corresponding to a set of determinants all equal to zero.

$$\Delta(\mathbf{J}_F) = 0 \quad (8)$$

$$\Delta_j(\mathbf{J}_F) = 0 \quad j = 1, n \quad (9)$$

A good discussion on this approach for two-phase flow is provided by Giot in [7]. Based on Eqs. (8) and (9), the spatial derivatives of the primitive variables as given by Eq. (7) are undefined at the choking location. Let us define an autonomous system of $n+1$ equations by introducing the parameter τ :

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \Delta(\mathbf{J}_F) \quad (10)$$

$$\frac{\partial Y_j}{\partial \tau} = \Delta_j(\mathbf{J}_F) \quad j = 1, n \quad (11)$$

Thus, the critical conditions are linked to singular points of the autonomous system corresponding to the left-hand sides of Eqs. (10) and (11) all equal to zero. This was the starting point of the analysis presented by Bilicki et al. [6].

This autonomous system also pointed out that the relationship between the fluxes and primitive variables as expressed by the Jacobian J_F is key in the determination of the singular points.

Equations (10) and (11) provide a formal definition but are not that helpful in explaining the nature of the critical flow phenomenon. Most studies of multiphase critical flow more or less relate the choking phenomenon to some propagation velocity. This relationship is well established for compressible single-phase flow, but has not been completely satisfactory so far for multiphase flow. The body of experimental evidence strongly suggests that critical conditions must be related to some optimal value of the mass flux. Accordingly, Eqs. (10) and (11) should be somehow related to some optimum of the F fluxes.

One way to stress out this property would be to restate Eq. (6) in such a way that the coefficient matrix J_F would be a diagonal matrix. If this can be achieved, the singular points defined by Eqs. (10) and (11) would be directly connected to the optimum of some flux entities with respect to the primitive variables. This would provide a direct and formal definition of critical conditions. It is this kind of relationship that will be developed in the next Section for conservative systems as defined by Eq. (5).

1.3 System State Description and Change of Variables

Equation systems (5) and (6) are related to two different but complete descriptions of the same physical system, with its physical state expressed either in terms of fluxes or primitive variables. The Y and F spaces are two representations of the states of the system and non-linear transformations can be defined to map a point in one space to its images in the other. The relations that define this mapping are usually known for physical systems, as is the case of fluid flow. For most systems, the F fluxes (or conservative variables) can be readily expressed as a function of the primitive variables Y . In a physical system, this relation will usually consist in a one-to-one mapping using non-linear transformations. Let us assume that a point in the Y space has a single image in the F space.

$$F_i = F_i(\mathbf{Y}) \quad F_i = F_i(Y_k) \quad (12)$$

A set of relations can also map a point in the F space onto the Y space.

$$Y_i = Y_i(\mathbf{F}) \quad Y_i = Y_i(F_k) \quad (13)$$

A point in the F space can have multiple images in the Y space defining multiple subdomains. They can be used to define mixed spaces that will still give a complete representation of the n degrees of freedom of the system if a mix of n entities, primitive variables and fluxes, is used. Each of these mixed spaces provides a different vantage point of the system's state and its evolution.

Let us now denote the state of the system described by using a mix of y primitive variables and $n-y$ fluxes as

$$\tilde{S}_{y,n-y} = \tilde{S}(\{Y\}_y, \{F\}_{n-y}) \quad (14)$$

We can also define a transformation from one space using y primitive variables and $n-y$ fluxes to another space using v primitive variables and $n-v$ fluxes as

$$\tilde{T}_{\{y,n-y\},\{v,n-v\}} : \tilde{S}_{y,n-y} \rightarrow \tilde{S}_{v,n-v} \quad (15)$$

The previous transformations (12) and (13) are then noted respectively as

$$\tilde{T}_{\{n,0\},\{0,n\}} : \tilde{S}_{n,0} \rightarrow \tilde{S}_{0,n} \quad (16)$$

$$\tilde{T}_{\{0,n\},\{n,0\}} : \tilde{S}_{0,n} \rightarrow \tilde{S}_{n,0} \quad (17)$$

From now on, we will look at the set of transformations that link one primitive variable and the $n-1$ conservative variables to the whole set of fluxes

$$\tilde{T}_{\{1,n-1\},\{0,n\}} : \tilde{S}_{1,n-1} \rightarrow \tilde{S}_{0,n} \quad (18)$$

These transformations provide one relation that is of interest, namely the one relating the primitive variable to the missing flux in $S_{l,n-l}$, the other relations of the transformation being the identity relation. These particular relations are noted as

$$F_i = F_i^{(j)}(Y_j, F_{k,k \neq i}) \quad (19)$$

where $\{j\}$ identifies the selected primitive variable. So we have n flux $F_i^{(j)}$, each one as a function of a single primitive variable, that can be readily built based on Eq. (13). This feature is the key needed to restate the \mathbf{J}_F matrix in Eq. (6) as a diagonal matrix. All that needs to be done is to replace the set of relations defined by Eq. (12) by an equivalent set in the form of Eq. (19). From the set of n^2 relations defined by Eq. (19) we can associate a unique primitive variable to each conservative variable. It is then possible to form $n!$ different Λ_m subsets using these relations

$$\Lambda_m = \{F_i^{(j)}(Y_j, F_{k,k \neq i}), i = 1..n, j = 1..n\} \quad (20)$$

$$\tilde{T}_{\{n,n\},\{0,n\}} : \tilde{S}_{n,n} \rightarrow \tilde{S}_{0,n}$$

Each one of these subsets Λ_m is a different way to relate the n primitive variables to the n fluxes, but it is still a complete expression of the system's state. While the relations of the Eq. (12) set usually provide a direct link from \mathbf{Y} to \mathbf{F} , the relations of the Eq. (20) set form a fully coupled system with no direct solution. Taking back any of these $n!$ sets into Eq. (5), we have

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} = \frac{\partial F_i^{(j)}}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x} + \sum_{k \neq i} \frac{\partial F_i^{(j)}}{\partial F_k} \frac{\partial F_k}{\partial x} = S_i \quad (21)$$

which relates the space derivative of a given flux to the space derivative of one primitive variable and the space derivative of the other fluxes. So.

$$\frac{\partial F_i^{(j)}}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x} = S_i - \sum_{k \neq i} \frac{\partial F_i^{(j)}}{\partial F_k} \frac{\partial F_k}{\partial x} \quad (22)$$

$$\frac{\partial F_i^{(j)}}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x} = S_i - \sum_{k \neq i} \frac{\partial F_i^{(j)}}{\partial F_k} S_k \quad (23)$$

$$\frac{\partial F_i^{(j)}}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x} = S_j^{(\Lambda)} \quad (24)$$

which can also be rewritten in vector form as

$$\mathbf{J}_F^{\{\Lambda\}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \mathbf{S}^{\{\Lambda\}} \quad (25)$$

The main feature of interest in Eq. (25) when compared to Eq. (6) is that the Jacobian $\mathbf{J}_F^{\{\Lambda\}}$ is now a diagonal matrix. The approach outlined in this section is then a very general method to achieve this result and a useful tool to study the singularities of Eq. (6). It is essentially based on the need to have n parameters forming an n -dimensional vector space to describe a system with n degrees of freedom.

1.4 Singular Point and Critical Flux Condition

Based on Eq. (24), we now have the spatial derivative of each primitive variable given by

$$\frac{\partial Y_j}{\partial x} = \frac{S_j^{\{\Lambda\}}}{\frac{\partial F_i^{\{l\}}}{\partial Y_j}} \quad (26)$$

And the following autonomous system can be defined as

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \tau} &= \frac{\partial F_i^{\{l\}}}{\partial Y_j} & i = 1, n \quad i \neq j \\ \frac{\partial Y_j}{\partial \tau} &= S_j^{\{\Lambda\}} \end{aligned} \quad (27)$$

which identifies the following singular point as the critical condition

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i^{\{l\}}}{\partial Y_j} &= 0 & i = 1, n \quad i \neq j \\ S_j^{\{\Lambda\}} &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

It has a direct physical meaning.

a) At the singular point, a given flux will assume an optimal value with respect to the variation of a primitive variable, all the other fluxes being taken as constant.

b) Furthermore, as Eq. (28) defines a critical condition which holds for the $n!$ Λ_m sets that can be formed, this flux will be optimal with respect to the variation of each and every primitive variable, all the other fluxes being taken as constant.

c) And since for all Λ_m sets we have

$$\mathbf{J}_F^{\{\Lambda\}} = 0 \quad (29)$$

all fluxes are optimal with respect to the variation of each and every primitive variable, considering the other fluxes as constant.

We also have source terms equal to zero for all Λ_m

$$\mathbf{S}^{\{\Lambda\}} = 0 \quad (30)$$

This property will include the influence of external parameters and may be useful in determining the location where Eq. (29) is satisfied. For fluid flow, it will for instance express the influence of the channel geometry, wall friction or body forces. Such an analysis was conducted by Bilicki et al. [6] on a homogeneous two-phase flow model.

The critical condition as expressed by Eqs. (29) and (30) constitutes a very general result with a clear physical interpretation. No direct link with propagation velocities (eigenvalues) is required a priori for those relations to be true. The type of singularity represented by Eqs. (29) and (30), either in the form of a bifurcation, an attraction or a repulsion, cannot be defined at this point. In the case of fluid flow, we will see that it is in accordance with experimental observations of the maximum flow rate phenomenon.

1.5 Hyperbolicity, Propagation and Critical Flux Condition

With a formal and self-sustained definition of critical fluxes in a differential dynamical system, it is now possible to look at the relationship between propagation velocities and critical fluxes. For any given Λ_m set we have

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J}_F^{\{\Lambda\}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \mathbf{S}^{\{\Lambda\}} \quad (31)$$

$$\mathbf{J}_U \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{J}_F^{\{\Lambda\}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \mathbf{S}^{\{\Lambda\}} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{J}_U^{-1} \mathbf{J}_F^{\{\Lambda\}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \mathbf{J}_U^{-1} \mathbf{S}^{\{\Lambda\}} \quad (33)$$

The propagation velocities are given by the eigenvalues of

$$\Delta(\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{J}_U^{-1} \mathbf{J}_F^{\{\Lambda\}}) = 0 \quad (34)$$

This determinant is simplified at the singular point to the determinant of a diagonal matrix

$$\Delta(\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{J}_U^{-1} \bullet 0) = 0 \quad (35)$$

$$\Delta(\lambda_k \mathbf{I} - 0) = 0 \quad (36)$$

$$\prod \lambda_k = 0 \quad (37)$$

So there must be at least one null eigenvalue λ_k when the critical condition in Eq. (29) is satisfied, and therefore a direct link between propagation and the singularity defined by Eqs. (29)-(30). This link is dependent upon the source terms not being a function of the derivative of the primitive variables with respect to space x . Also, the critical flux condition in Eq. (29) does not require equation system (33) to be hyperbolic when the flow is critical. Complex eigenvalues are allowed by Eq. (37).

1.6 Single-Phase One-Dimensional Flows

The main features of the preceding development can be illustrated by studying the one-dimensional single-phase flow of a fluid. We have the following fluxes with reference to Eq. (5)

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} a\rho \\ a\rho u \\ a\rho(e + u^2/2) \end{Bmatrix} \quad (38) \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} a\rho u \\ a\rho u^2 + ap \\ a\rho u(h + u^2/2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ I \\ E \end{Bmatrix} \quad (39)$$

The source terms are not of interest at this point as long as we assume they are not a function of the space derivative of the primitive variables. For the sake of simplicity, the \mathbf{F} fluxes will be expressed as the mass flux M , the impulse flux I and the energy flux E associated with the advection of the fluid. The primitive variables retained will be the velocity u , the density ρ and the pressure p . Viscous terms and body forces are included in the source terms.

If we assume a calorically perfect fluid with a compressibility factor z_c , we have for the enthalpy

$$h = C_p (T - T_0) \quad (40)$$

and the following equation of state

$$z_c = \frac{p}{\rho RT} \quad (41)$$

We can rewrite the flux vector as (T_0 arbitrarily taken to 0)

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} M \\ I \\ E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a\rho u \\ a\rho u^2 + ap \\ a\rho u \left(\frac{C_p p}{z_c R \rho} + \frac{u^2}{2} \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a\rho u \\ a\rho u^2 + ap \\ a\rho u \left(\frac{1}{\Xi} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (42) \quad \text{with } \Xi = \frac{z_c R}{C_p} \quad (43)$$

By performing some algebra on Eq. (42), it is relatively easy to retrieve the following quadratic polynomials, which are our building blocks for the $F_i^{(j)}$ relations we need

$$\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) u^2 - \frac{I}{M} u + \Xi \frac{E}{M} = 0 \quad (44)$$

$$\Xi \frac{E}{M} (a\rho)^2 - I a \rho + \left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) M^2 = 0 \quad (45)$$

$$\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) \frac{1}{M^2} (a\rho)^2 - (1 - \Xi) \frac{I}{M^2} a \rho + \Xi \left(\frac{E}{M} - \frac{1}{2} \frac{I^2}{M^2} \right) = 0 \quad (46)$$

We will refer to these polynomials as the flux characteristic polynomials. And, for instance, the following fluxes can then be defined based on Eq. (44)

$$M^{(u)} = \frac{Iu - \Xi E}{\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) u^2} \quad (47)$$

$$I^{(u)} = M \left[\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) u + \frac{1}{u} \frac{\Xi E}{M} \right] \quad (48)$$

Table 1 shows 8 of the 9 flux relations that can be derived from the flux characteristic polynomials (44)-(46), following the development presented in Section 1.3. It also shows that the derivatives of all fluxes according to each primitive variable, assuming the other fluxes are constant. It can be verified that these first derivatives are zero when the following condition is satisfied:

$$\frac{\rho u^2}{p} = \left(\frac{1}{1 - \Xi} \right) \quad (49)$$

For a perfect gas, Eq. (49) resumes to the usual speed of sound. For a liquid, in which case R is almost zero, the right-hand side is equal to one. So we have a critical flow criterion that applies to compressible as well as to incompressible fluid. It is a local criterion that is valid over all the flow domain.

It can be observed in Table 1 that the mass flux and the energy flux are maximal while we have the impulse flux at a minimum. As stated by Eq. (29), the critical flow phenomenon is then not only directly linked to a optimal value of the mass flux M but also to the optimal values of the impulse flux I and the energy flux E .

We can also look at Eqs. (44)-(46) as quadratic polynomials of a primitive variable with their coefficients as a function of the fluxes. Sharma and Crowe [8] developed a numerical method essentially based on Eq. (44). It was the starting point of this work back in the 80s and it was used by the authors to develop a numerical scheme, at first, for two-phase critical flows, and then for multiphase flows [5]. Using Eqs. (44)-(46) all primitive variables are related to the fluxes by expressions involving a square root similar to the following:

$$u = \frac{\frac{I}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{I}{M}\right)^2 - 4\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right)\left(\Xi \frac{E}{M}\right)}}{2\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right)} \quad (50)$$

And they will all yield the same relationship between the primitive variables as the conditions that define the critical conditions or singular points. Eq. (50) is part of the set defined by Eq. (13). It can be shown with some algebra that, when the critical criterion (49) is satisfied, the radical of Eq. (50) as well as those derived from Eqs. (45) and (46) are equal to zero. So at the singularity, the one-on-two transformations defined by Eqs. (44)-(46) become one-on-one

transformations. The singularity defined by Eq. (49) is a bifurcation, a crossing of subcritical and supercritical paths. This is somehow a built-in feature of the quadratic form (44).

We can use critical criterion (49) to define a non-dimensional number similar to the Mach number as

$$Dis = \frac{u}{u_c} = \frac{u}{\sqrt{1 - \Xi \frac{p}{\rho}}} \quad (51)$$

Dis stands for the discriminant in Eq. (50). So when the flow is locally singular, the discriminant is equal to zero and $Dis = 1$.

This new number applies to incompressible as well as to compressible flow. It is the same as the Mach number for compressible gas and provides no real added value for compressible single-phase flows. But, as we will see in Section 2.5, it will become more meaningful in multiphase flows as it will formally define subcritical and supercritical conditions.

The location of the critical condition can also be linked to the channel geometry. One possible expression for the source terms in Eq. (25) is:

$$\mathbf{S}^{\{\lambda\}} = \begin{Bmatrix} S_\rho^{\{\lambda\}} \\ S_u^{\{\lambda\}} \\ S_p^{\{\lambda\}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_M - \frac{\partial M^{\{\rho\}}}{\partial I} S_I - \frac{\partial M^{\{\rho\}}}{\partial E} S_E \\ S_I - \frac{\partial I^{\{u\}}}{\partial M} S_M - \frac{\partial I^{\{u\}}}{\partial E} S_E \\ S_E - \frac{\partial E^{\{p\}}}{\partial M} S_M - \frac{\partial E^{\{p\}}}{\partial I} S_I \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Since the source vector for the fluxes defined by Eq. (42) in the case of an adiabatic flow without parietal mass source and friction is simply

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \frac{\partial a}{\partial x} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (53)$$

we then have

$$\mathbf{S}^{\{\lambda\}} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial M^{\{\rho\}}}{\partial I} p \frac{\partial a}{\partial x} \\ p \frac{\partial a}{\partial x} \\ -\frac{\partial E^{\{p\}}}{\partial I} p \frac{\partial a}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (54)$$

The critical location has to be located at a maximum or a minimum of the flow section to satisfy Eq. (30) since

$$\frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{\rho}^{\{\Lambda\}} = S_u^{\{\Lambda\}} = S_p^{\{\Lambda\}} = 0 \quad (55)$$

The application of the development presented in Section 1 to one-dimensional single-phase flows provides a good illustration of the interest of this new development, allowing to retrieve old results with a new perspective. We will now examine a more complex problem.

Table 1 Critical Fluxes and Primitive Variables Relationship.

	ρ	u	p
	$\Xi \frac{E}{M} (a\rho)^2 - Ia\rho + \left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) M^2 = 0$	$\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) u^2 - \frac{I}{M} u + \Xi \frac{E}{M} = 0$	$\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) \frac{1}{M^2} (ap)^2 - (1 - \Xi) \frac{I}{M^2} ap + \Xi \left(\frac{E}{M} - \frac{1}{2} \frac{I^2}{M^2}\right) = 0$
M	In this case, the expression for $M^{(\rho)}$ is a cubic polynomial too large to be presented in this table.	$M^{(u)} = \frac{(Iu - \Xi E)}{\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) u^2}$ $\partial_u M = -\frac{(Iu - \Xi E)}{\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) u^3}$ $\partial_u^2 M = \frac{2(Iu - 3\Xi E)}{\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) u^4}$	$M^{(p)} = -\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) \frac{(ap)^2}{\Xi E} + \left(\frac{1}{\Xi} - 1\right) \frac{I}{E} ap + \frac{1}{2} \frac{I^2}{E}$ $\partial_p M^{(p)} = -\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) \frac{a^2 p}{\Xi E} + \left(\frac{1}{\Xi} - 1\right) \frac{I}{E} a$ $\partial_p^2 M^{(p)} = -\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) \frac{a^2}{\Xi E}$
I	$I^{(\rho)} = \Xi \frac{E}{M} a\rho + \frac{M}{a\rho} \left(1 - \frac{\Xi}{2}\right)$ $\partial_\rho I^{(\rho)} = \Xi \frac{E}{M} a - \frac{M}{a\rho^2} \left(1 - \frac{\Xi}{2}\right)$ $\partial_\rho^2 I^{(\rho)} = 2 \frac{M}{a\rho^3} \left(1 - \frac{\Xi}{2}\right)$	$I^{(u)} = M \left[\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) u + \frac{1}{u} \Xi \frac{E}{M} \right]$ $\partial_u I^{(u)} = M \left[\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) - \frac{1}{u^2} \Xi \frac{E}{M} \right]$	$I^{(p)} = \frac{ap(\Xi - 1) \pm \sqrt{(ap)^2 + 2\Xi^2 EM}}{\Xi}$ $\partial_p I^{(p)} = \frac{(\Xi - 1)}{\Xi} a \pm \frac{a^2 p}{\Xi} \frac{1}{\sqrt{(ap)^2 + 2\Xi^2 EM}}$ $\partial_p^2 I^{(p)} = \pm \frac{a^2}{\Xi} \frac{1}{\sqrt{(ap)^2 + 2\Xi^2 EM}} \mp \frac{a^4 p^2}{\Xi} \frac{1}{\left((ap)^2 + 2\Xi^2 EM\right)^{3/2}}$

		$\partial_u^2 I^{(u)} = \frac{2}{u^3} \Xi E$	
E	$E^{(p)} = \frac{M}{\Xi} \frac{I}{a\rho} - \frac{M^3}{\Xi} \frac{\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right)}{(a\rho)^2}$ $\partial_\rho E^{(p)} = -\frac{M}{\Xi} \frac{I}{a\rho^2} + 2 \frac{M^3}{\Xi} \frac{\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right)}{a^2 \rho^3}$ $\partial_\rho^2 E^{(p)} = 2 \frac{M}{\Xi} \frac{I}{a\rho^3} - 6 \frac{M^3}{\Xi} \frac{\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right)}{a^2 \rho^4}$	$E^{(u)} = -\frac{M}{\Xi} \left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) u^2 + \frac{I}{\Xi} u$ $\partial_u E^{(u)} = -2 \frac{M}{\Xi} \left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) u + \frac{I}{\Xi}$ $\partial_u^2 E^{(u)} = -2 \frac{M}{\Xi} \left(1 - \frac{\Xi}{2}\right)$	$E^{(p)} = -\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) \frac{(ap)^2}{\Xi M} + \left(\frac{1}{\Xi} - 1\right) \frac{I}{M} ap$ $\partial_\rho E^{(p)} = -\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) \frac{a^2 p}{\Xi M} + \left(\frac{1}{\Xi} - 1\right) \frac{I}{M} a$ $\partial_\rho^2 E^{(p)} = -\left(1 - \frac{\Xi}{2}\right) \frac{a^2}{\Xi M}$

2. Critical Flux Conditions with Source Terms as a Function of the Space Derivative of the Primitive Variables

The development presented in Section 1 is already valid for an unlimited number of balance equations. So it is already applicable to multiphase flows as long as the source terms are not a function of the spatial derivatives of the primitive variables.

Unfortunately, this is not the case in most multiphase flow models. Several models include some form of the so-called virtual mass which appears in the source terms and involves spatial derivatives of the primitive variables. Other types of source terms can also include such derivatives. If we now add these derivatives to the source terms, we have

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} = S_i + \sum_j S'_{i,j} \quad (56)$$

where

$$S'_{i,j} = B_{i,j} \frac{\partial Y_j}{\partial x} \quad (57)$$

and the $B_{i,j}$ coefficients are a function of the primitive variables. These new terms are also fluxes. For physical systems, the flux exiting a given phase must be equal to the flux entering another phase and we then have

$$S'_{i,j} = -S'_{j,i} \quad (58) \qquad B_{i,j} \frac{\partial Y_j}{\partial x} = -B_{j,i} \frac{\partial Y_i}{\partial x} \quad (59)$$

So the \mathbf{B} matrix is not symmetrical and opposite coefficients have opposite signs. Furthermore, the diagonal coefficients of \mathbf{B} are zero. Just like in Section 1.3, we are still looking to link the flux i to the primitive variable j as :

$$F_i = F_i^{(i)}(Y_j, F_{k,k \neq i}) \quad (60)$$

and we can now make the same development as in Section 1.3

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} = \frac{\partial F_i^{(i)}}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x} + \sum_{k \neq i} \frac{\partial F_i^{(i)}}{\partial F_k} \frac{\partial F_k}{\partial x} \quad (61)$$

and Eq. (56) becomes

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} = \frac{\partial F_i^{(i)}}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x} + \sum_{k \neq i} \frac{\partial F_i^{(i)}}{\partial F_k} \frac{\partial F_k}{\partial x} = S_i + \sum_{k, k \neq i} B_{i,k} \frac{\partial Y_k}{\partial x} \quad (62)$$

$$\frac{\partial F_i^{(i)}}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x} = S_i - \sum_{k \neq i} \frac{\partial F_i^{(i)}}{\partial F_k} \frac{\partial F_k}{\partial x} + \sum_{k, k \neq i} B_{i,k} \frac{\partial Y_k}{\partial x} \quad (63)$$

$$\frac{\partial F_i^{\{j\}}}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x} - \sum_{k, k \neq i} B_{i,k} \frac{\partial Y_k}{\partial x} = S_i - \sum_{k \neq i} \frac{\partial F_i^{\{j\}}}{\partial F_k} \left(S_k + \sum_{l, l \neq k} B_{k,l} \frac{\partial Y_l}{\partial x} \right) \quad (64)$$

$$\frac{\partial F_i^{\{j\}}}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x} - \sum_{k, k \neq i} B_{i,k} \frac{\partial Y_k}{\partial x} + \sum_{k \neq i} \frac{\partial F_i^{\{j\}}}{\partial F_k} \left(\sum_{l, l \neq k} B_{k,l} \frac{\partial Y_l}{\partial x} \right) = S_i - \sum_{k \neq i} \frac{\partial F_i^{\{j\}}}{\partial F_k} S_k \quad (xx)$$

Or in matrix-vector notation

$$\left(\mathbf{J}_F^{\{\Lambda\}} - \mathbf{C} \right) \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \mathbf{S}^{\{\Lambda\}} \quad (65)$$

where \mathbf{C} is a matrix collecting the B coefficients. The autonomous system then becomes

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \Delta \left(\mathbf{J}_F^{\{\Lambda\}} - \mathbf{C} \right) \quad (66)$$

$$\frac{\partial Y_k}{\partial \tau} = \Delta_k \left(\mathbf{J}_F^{\{\Lambda\}} - \mathbf{C} \right) \quad (67)$$

In this case the optimum fluxes defined in Section 1.4 by the Jacobian $\mathbf{J}_F = 0$ are no longer singular points of the dynamical system (66)-(67). So new critical conditions must be found.

2.1 Mixture Balance Equations

We can retrieve such singular points by taking into account the structure of the equation system. If we assume that we have n phases each one with its evolution described by a similar set of m balance equations, we have for the steady-state regime for any given flux b of any given phase p

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{b,p} = S_{b,p} + \sum_j B_{i(b,p),j(y,k)} \frac{\partial Y_{j(y,k)}}{\partial x} \quad 1 \leq k \leq n \quad 1 \leq y \leq m \quad (68)$$

Subscript i , which gives the appropriate line of the \mathbf{B} matrix of coefficients, is a function of the phase p and balance equation type b being considered. Subscript j provides a complete enumeration of the system variables with k as the phase index and y as the variable index. The mixture balance equations are therefore:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{p=1,n} F_{b,p} = \sum_{p=1,n} S_{b,p} \quad 1 \leq b \leq m \quad (69)$$

And we can introduce the mixture fluxes based on Eq. (69)

$$\frac{\partial}{\partial x} F_b^\Sigma = S_b^\Sigma \quad 1 \leq b \leq m \quad (70)$$

Based on Eq. (59), these mixture balance equations do not contain any right-hand side terms as a function of the spatial derivatives of the primitive variables. They all cancel out in pairs in the summation. The mixture balance equations can be used to replace any subset of balance equations of any given phase in the equation system defined by (68).

Now what is needed is a set of relations linking these mixture fluxes to the primitive variables of any given phase. Let us link those mixture fluxes to the primitive variables of phase 1 as

$$F_b^{\Sigma\{j_1\}} = F_b^{\Sigma\{j_1\}}(Y_{j_1}, F_{k,k \neq b}^{\Sigma}) \quad \text{with} \quad j_1 = j(y, 1) \quad (71)$$

where the subscript $\{j_1\}$ indicates the variable y of phase 1. This relation is analog to Eq. (19) but uses a subset of the primitive variables along with the mixture fluxes.

The subsystem defined by Eq. (70) is important as it will determine the critical condition for the whole system. First let us examine the critical condition of the mixture subsystem. We still have, as in Section 1.3, $n!$ sets of relations linking the mixture fluxes to the primitive variables of phase 1:

$$\Lambda_m^{\Sigma} = \{F_b^{\Sigma\{j_1\}}(Y_{j_1}, F_{k,k \neq b}^{\Sigma}) \mid b = 1..m, j = 1..m\} \quad (72)$$

Based on Section 1.3, the subsystem of mixture equation (66) can be rewritten as:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_b^{\Sigma} = \frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_1\}}}{\partial Y_{j_1}} \frac{\partial Y_{j_1}}{\partial x} + \sum_{\substack{k=1..m \\ k \neq b}} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_1\}}}{\partial F_k^{\Sigma}} \frac{\partial F_k^{\Sigma}}{\partial x} = S_b^{\Sigma} \quad (73)$$

$$\frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_1\}}}{\partial Y_{j_1}} \frac{\partial Y_{j_1}}{\partial x} = S_b^{\Sigma} - \sum_{k \neq b} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_1\}}}{\partial F_k^{\Sigma}} \frac{\partial F_k^{\Sigma}}{\partial x} \quad (74)$$

$$\frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_1\}}}{\partial Y_{j_1}} \frac{\partial Y_{j_1}}{\partial x} = S_b^{\Sigma} - \sum_{\substack{k=1..m \\ k \neq b}} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_1\}}}{\partial F_k^{\Sigma}} S_k^{\Sigma} \quad (75)$$

$$\frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_1\}}}{\partial Y_{j_1}} \frac{\partial Y_{j_1}}{\partial x} = S_b^{\Sigma\{\Lambda\}} \quad (76)$$

So we now have, as far as the mixture balance subsystem is concerned, the same result as shown at the end of section 1.4. The autonomous system associated with Eq. (76) is

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_1\}}}{\partial Y_{j_1}} \quad (77)$$

$$\frac{\partial Y_{j_1}}{\partial \tau} = S_b^{\Sigma\{\Lambda\}} \quad (78)$$

with singular points defined as

$$\frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_i\}}}{\partial Y_{j_i}} = 0 \quad \text{and} \quad S_b^{\Sigma\{\Lambda\}} = 0 \quad \text{for any set} \quad \Lambda_m^{\Sigma} \quad (79)$$

The singular points of the mixture subsystem are directly related to an optimum of mixture fluxes with respect to each and every primitive variable in phase 1, assuming the other mixture fluxes are constant.

This singular point of the mixture equation subsystem is also a singular point of the whole system. Based on Eq. (77), the Jacobian of the mixture fluxes is a diagonal matrix

$$\mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}} = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_i\}}}{\partial Y_{j_i}} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad 1 \leq j \leq m \quad (80)$$

$$\mathbf{S}^{\Sigma\{\Lambda\}} = \begin{pmatrix} \vdots \\ S_b^{\Sigma\{\Lambda\}} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \quad (81)$$

and in vector notation

$$\mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}} \frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial x} = \mathbf{S}^{\Sigma\{\Lambda\}} \quad (82)$$

where \mathbf{Y}_1 is the vector of the primitive variables of phase 1. Taking the whole system into account, Eq. (73) is now developed as:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_b^{\Sigma} = \frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_i\}}}{\partial Y_{j_i}} \frac{\partial Y_{j_i}}{\partial x} + \sum_{\substack{k=1,m \\ k \neq b}} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_i\}}}{\partial F_k^{\Sigma}} \frac{\partial F_k^{\Sigma}}{\partial x} + \sum_{p=2,n} \sum_{y=1,m} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_i\}}}{\partial Y_{l(y,p)}} \frac{\partial Y_{l(y,p)}}{\partial x} = S_b^{\Sigma} \quad (83)$$

where the index l provides the enumeration of all variables of phase 2 to n .

$$\frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_i\}}}{\partial Y_{j_i}} \frac{\partial Y_{j_i}}{\partial x} + \sum_{p=2,n} \sum_{y=1,m} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_i\}}}{\partial Y_{l(y,p)}} \frac{\partial Y_{l(y,p)}}{\partial x} = S_b^{\Sigma} - \sum_{\substack{k=1,m \\ k \neq b}} \frac{\partial F_b^{\Sigma\{j_i\}}}{\partial F_k^{\Sigma}} \frac{\partial F_k^{\Sigma}}{\partial x} \quad (84)$$

In vector form

$$\mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}} \frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial x} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{Y}_O}{\partial x} = \mathbf{S}^{\Sigma\{\Lambda\}} \quad (85)$$

where \mathbf{Y}_1 is the vector of the primitive variables of phase 1 and \mathbf{Y}_O the vector formed with the variables of the other phases (the subscript O refers to the other phases, i.e. all phases except phase 1). Based on Eq. (56) we have for the whole system the following expression in vector notation

$$(\mathbf{J}_F - \mathbf{B}) \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (86)$$

Substituting back these mixture balance equations (85) for the balance equations of phase 1 in the whole system (86) will result in the following block matrix of coefficients

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}} & | & \mathbf{A}_1 \\ \text{---} & | & \text{---} \\ \mathbf{A}_2 & | & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial x} \\ \text{---} \\ \frac{\partial \mathbf{Y}_o}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^{\Sigma\{\Lambda\}} \\ \text{---} \\ \mathbf{S}_o \end{pmatrix} \quad (87)$$

where \mathbf{A}_2 and \mathbf{A}_3 constitute the lower part of the coefficient matrix in Eq. (86). We then rewrite Eq. (87) as

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \mathbf{S}^* \quad (88)$$

The determinant of block matrix \mathbf{A} can be computed as

$$\Delta \begin{pmatrix} \mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} = \Delta(\mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}}) \Delta(\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_2 \mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}-1} \mathbf{A}_1) \quad (89)$$

From this block structure and the fact that $\mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}}$ is diagonal, the conditions defined by Eq. (79) are

$$\Delta(\mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(\mathbf{A}) = 0 \quad (90)$$

It is also now too difficult to see that, since the upper left block of \mathbf{A} is a null block matrix at the singular point, all co-determinants of \mathbf{A} are also zero

$$\Delta(\mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_j(\mathbf{A}) = 0 \quad (91)$$

This shows that the singular points of the mixture subsystem are singular points of the whole system. This is a very important result as it represents an emerging property of the mixture of phases directly related to the structure of the equation system defined by Eqs. (69) and (59) and the fact that the evolution of every phase is described by a similar set of equations. It is also the case for the system studied in Section 1.4, this one being a particular case where $\mathbf{B} = 0$.

The critical condition is defined as an optimum of a mixture flux with respect to the variation of each and every primitive variable in a reference phase, the other mixture fluxes being assumed as constant. Again, we have a simple direct interpretation of critical conditions.

As for the singular point of the equation system (87) is concerned, the rank of the \mathbf{A} matrix is no greater than $m-1$ since $\mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}}$ defines a zero determinant of dimension m . The null-space of \mathbf{A} can be no greater than dimension $m-1$ so there is no more than $m-1$ independent variables at a singular point. This result is independent of the number of phases n in the system. So, in the case of one-dimensional multiphase flow, we have, at the most, two independent variables at the critical location.

The mixture source terms $\mathbf{S}^{\Sigma\{\Lambda\}}$ are also equal to zero at the singularity defined by Eq. (81). This property could be used to study the location of the critical position.

We can extend the preceding results to a more general situation. All differential equations in the system are not required to be in the form of Eq. (68). All that is required is that there be a subset of differential equations in that form and that they can be regrouped in such a way that the interphasic transfer terms cancel one another. In that case, a mixture subsystem can be defined and a system in the form given by Eq. (87) with an upper left diagonal block matrix can still be obtained.

2.2 Hyperbolicity, Propagation and Critical Flux Conditions Revisited

With a new mixture property that is a formal and self-sustained definition of critical fluxes in a differential dynamical system, it is of interest to take another look at the relationship between the propagation velocities and critical fluxes discussed in Section 1.5. We can replace the balance equations in phase 1 by the mixture balance equations to obtain the following equation system

$$\frac{\partial \mathbf{U}_1^\Sigma}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1^\Sigma}{\partial x} = \mathbf{S}_1^\Sigma \quad (92)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}_o}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_o}{\partial x} = \mathbf{S}_o + \mathbf{B}_o \frac{\partial \mathbf{Y}_o}{\partial x} \quad (93)$$

or as a function of the primitive variables

$$\mathbf{J}_U^\Sigma \frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial t} + \mathbf{J}_F^\Sigma \frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial x} = \mathbf{S}_1^\Sigma \quad (94)$$

$$\mathbf{J}_{U_o} \frac{\partial \mathbf{Y}_o}{\partial t} + \mathbf{J}_{F_o} \frac{\partial \mathbf{Y}_o}{\partial x} = \mathbf{S}_o + \mathbf{B}_o \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \quad (95)$$

where \mathbf{Y}_1 is the vector of primitive variables of phase 1 and \mathbf{Y}_o is the vector of primitive variables of phase p . Eqs. (94)-(95) are therefore combined as

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \begin{pmatrix} \mathbf{J}_U^\Sigma \\ \text{---} \\ \mathbf{J}_{U_o} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_F^\Sigma \\ \text{---} \\ \mathbf{J}_{F_o} - \mathbf{B}_o \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_U^\Sigma \\ \text{---} \\ \mathbf{J}_{U_o} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1^\Sigma \\ \text{---} \\ \mathbf{S}_o \end{pmatrix} \quad (96)$$

where the matrix of coefficients \mathbf{A} presents the same the block structure presented in Eq. (87)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_F^\Sigma \\ \text{---} \\ \mathbf{J}_{F_o} - \mathbf{B}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}} & | & \mathbf{A}_1 \\ \text{---} & | & \text{---} \\ \mathbf{A}_2 & | & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} \quad (97)$$

The eigenvalues are given by

$$\Delta \left(\lambda \mathbf{I} - \begin{pmatrix} \mathbf{J}_U^\Sigma \\ \text{---} \\ \mathbf{J}_{U_o} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}} & | & \mathbf{A}_1 \\ \text{---} & | & \text{---} \\ \mathbf{A}_2 & | & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (98)$$

So Eq. (97) indicates that when we are at a singular point

$$\mathbf{J}_F^{\Sigma\{\Lambda\}} \doteq 0 \quad (99)$$

in general, we have

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_U^\Sigma \\ \text{---} \\ \mathbf{J}_{U_o} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & | & \mathbf{A}_1 \\ \text{---} & | & \text{---} \\ \mathbf{A}_2 & | & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (100)$$

Since \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 and \mathbf{A}_3 are general non-null block matrices, the critical condition given by Eq. (99) is no longer directly linked to a null eigenvalue as in Section 1.5. Such a link would require some specific relationship between the Jacobians of the \mathbf{U} and \mathbf{F} fluxes. This point will not be explored further in this paper.

This is a very interesting result since it shows that the critical conditions defined by the optimal values of the fluxes are not necessarily linked to the propagation of variations of the primitive variables as defined by the eigenvalues of Eq. (98).

2.3 Multiphase Flow Models

We can now study the critical multiphase flow by applying the former development to one-dimensional area-averaged flow equations. Assuming that the average of the product of two variables is equal to the product of the average of each variable, we have

$$\frac{d}{dx} a_k \rho_k u_k = \Gamma_{k,M} + \Gamma_{k,M}^c \quad (101)$$

$$\frac{d}{dx} (a_k \rho_k u_k^2 + a_k p_k) = \Gamma_{k,I} + \Gamma_{k,I}^c \quad (102)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\left(h_k + \frac{u_k^2}{2} \right) a_k \rho_k u_k \right) = \Gamma_{k,E} + \Gamma_{k,E}^c \quad (103)$$

where the k indice identifies the phase, a_k is the flow area occupied by phase k , ρ_k is the density of phase k , u_k is the velocity of phase k , p_k is the pressure and h_k is the enthalpy. The Γ terms are the source terms with the indice c indicating the flow boundary. By adding an equation of state for each phase

$$p_k = z_{ck} \rho_k R_k T_k \quad (104)$$

where, as usual, z_{ck} is the compressibility factor of phase k and R_k is the perfect gas constant for phase k . Let us assume a constant specific heat C_{pk} for phase k so the enthalpy will be given by

$$h_k = h_k^0 + C_{pk}(T_k - T_k^0) \quad (105)$$

where h_k^0 and T_k^0 are constants. We will then have the following three differential equations that will be part of our dynamical system

$$\frac{d}{dx} a_k \rho_k u_k = \Gamma_{k,M} + \Gamma_{k,M}^c \quad (106)$$

$$\frac{d}{dx} (a_k \rho_k u_k^2 + a_k p_k) = \Gamma_{k,I} + \Gamma_{k,I}^c \quad (107)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\left(h_k^0 + \frac{1}{\Xi_k} \frac{p_k}{\rho_k} + \frac{u_k^2}{2} \right) a_k \rho_k u_k \right) = \Gamma_{k,E} + \Gamma_{k,E}^c \quad (108)$$

where we introduce, for the sake of simplicity, the following ratio

$$\Xi_k = \frac{z_{ck} R_k}{C_{pk}} \quad (109)$$

We have four unknowns in each phase $\{a_k, \rho_k, p_k, u_k\}$ and only three differential equations. Closure to this system is usually provided by algebraic relations which do not change the nature of the differential system. For instance, it can be assumed that $p_k = p_1$. Or some phases can be taken as incompressible with $\rho_k = \text{constant}$. It is also possible, as briefly discussed at the end of Section 2.1, to add differential equations to close the system.

Based on the example in Section 1.6, we have the M , I , and E mixture flux variables

$$M = \sum_k a_k \rho_k u_k \quad (110) \quad \frac{dM}{dx} = \sum_k \Gamma_{k,M}^c \quad (111)$$

$$I = \sum_k a_k \rho_k u_k^2 + \sum_k a_k p_k \quad (112) \quad \frac{dI}{dx} = \sum_k \Gamma_{k,I}^c \quad (113)$$

$$E = \sum_k \left(h_k^0 + \frac{1}{\Xi_k} \frac{p_k}{\rho_k} + \frac{u_k^2}{2} \right) a_k \rho_k u_k \quad (114) \quad \frac{dE}{dx} = \sum_k \Gamma_{k,E}^c \quad (115)$$

Now we need to build the transformations that relate the mixture fluxes to the primitive variables of phase 1. It is difficult to identify the singular points of the system with such a large number of variables and, at this point, it is not clear what the best approach or method would be.

The singular points presented in the next subsections are obtained by scaling the evolution of other phases to a reference phase. This provides an easy way to develop the needed transformations $\tilde{T}_{\{1, n-1\}, \{0, n\}}$. Three families of singular points will be defined using this approach. So, assuming that we know how the state of all phases scale to the state of the reference phase, solving the balance equations to obtain the state of the reference phase will provide information about the whole system.

2.3.1 Global Scaling

Scaling the phase fluxes with respect to the fluxes of phase 1, we can define the following ratios

$$f_{Mk} = \frac{a_k \rho_k u_k}{a_1 \rho_1 u_1} \quad (116)$$

$$f_{Ik} = \frac{a_k \rho_k u_k^2 + a_k p_k}{a_1 \rho_1 u_1^2 + a_1 p_1} \quad (117)$$

$$f_{Ek} = \frac{h_k^0 + \frac{1}{\Xi_k} \frac{p_k}{\rho_k} + \frac{u_k^2}{2}}{h_1^0 + \frac{1}{\Xi_1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2}} \quad (118)$$

The mixture fluxes are now expressed by

$$M = a_1 \rho_1 u_1 \sum_k f_{Mk} \quad (119)$$

$$I = (a_1 \rho_1 u_1^2 + a_1 p_1) \sum_k f_{Ik} \quad (120)$$

$$E = \left(h_1^0 + \frac{1}{\Xi_1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} \right) a_1 \rho_1 u_1 \sum_k f_{Ek} f_{Mk} \quad (121)$$

It is then easy to obtain the following flux characteristic polynomials that will provide the transformation $T_{(1, n-1), (0, n)}$ we need

$$\frac{\sum_k f_{Ik}}{\sum_k f_{Mk}} \left(1 - \frac{\Xi_1}{2} \right) u_1^2 - \frac{I}{M} u_1 + \frac{\sum_k f_{Ik}}{\sum_k f_{Mk}} \left(\frac{E}{M} \frac{\sum_k f_{Mk}}{\sum_k f_{Ek} f_{Mk}} - h_1^0 \right) \Xi_1 = 0 \quad (122)$$

$$\left(\frac{\sum_k f_{Mk}}{M} \frac{E}{\sum_k f_{Ek} f_{Mk}} - h_1^0 \right) \Xi_1 (a_1 \rho_1)^2 - \frac{I}{\sum_k f_{Ik}} (a_1 \rho_1) + \frac{\left(\sum_k f_{Mk} \right)^2}{M^2} \left(1 - \frac{\Xi_1}{2} \right) \Xi_1 = 0 \quad (123)$$

$$\frac{\sum_k f_{Ik}}{M} \left(1 - \frac{\Xi_1}{2}\right) (a_1 p_1)^2 - (1 - \Xi_1) \frac{I}{M} (a_1 p_1) + \frac{\sum_k f_{Ik}}{\sum_k f_{Mk}} \left(\frac{E}{\sum_k f_{Ek} f_{Mk}} - \frac{1}{2} \frac{I^2}{\left(\sum_k f_{Ik}\right)^2} - \frac{1}{M} - \frac{M}{\sum_k f_{Mk}} h_1^0 \right) \Xi_1 = 0 \quad (124)$$

The variables in Eqs. (123) and (124) are the products $a_1 \rho_1$ and $a_1 p_1$, so any two of the three variables a_1 , ρ_1 and p_1 will yield the same critical conditions. Eqs. (122)-(124) will provide

$$\begin{aligned} M &= M(u_1, I, E) & I &= I(u_1, M, E) & E &= E(u_1, M, I) \\ M &= M((a_1 \rho_1), I, E) & I &= I((a_1 \rho_1), M, E) & E &= E((a_1 \rho_1), M, I) \\ M &= M((a_1 p_1), I, E) & I &= I((a_1 p_1), M, E) & E &= E((a_1 p_1), M, I) \end{aligned} \quad (125)$$

For instance, based on Eq. (122) we obtain

$$I^{(u_1)} = I(u_1, M, E) = \left(1 - \frac{\Xi_1}{2}\right) \frac{\sum_k f_{Ik}}{\sum_k f_{Mk}} M u_1 + \sum_k f_{Ik} \left(\frac{E}{\sum_k f_{Ek} f_{Mk}} - \frac{M}{\sum_k f_{Mk}} h_1^0 \right) \Xi_1 \frac{1}{u_1} \quad (126)$$

The critical conditions are provided by

$$\partial_{u_1} I(u_1, M, E) = 0 \quad (127)$$

which will yield

$$\frac{\rho_1 u_1^2}{p_1} = \frac{1}{1 - \Xi_1} \quad (128)$$

which is the single-phase critical condition presented in Section 1.6. The same criterion will be obtained with the other relations. So the single-phase critical criterion also defines a singular point of a multiphase system.

2.3.2 Scaling of Terms in Flux Variables

The next family of critical conditions is obtained by providing scaling functions for the two terms in the momentum equation and the three terms in the energy equation. There are two terms to be scaled in the impulse flux

$$f_{I_u, k} = \frac{a_k \rho_k u_k^2}{a_1 \rho_1 u_1^2} \quad (129)$$

$$f_{I_p, k} = \frac{a_k p_k}{a_1 p_1} \quad (130)$$

and three terms in the energy flux

$$f_{E_n,k} = \frac{a_k \rho_k u_k h_k^0}{a_1 \rho_1 u_1 h_1^0} \quad (131)$$

$$f_{E_{\pm},k} = \frac{a_k \rho_k u_k \frac{p_k}{\rho_k \Xi_k}}{a_1 \rho_1 u_1 \frac{p_1}{\rho_1 \Xi_1}} \quad (132)$$

$$f_{E_v,k} = \frac{a_k \rho_k u_k u_k^2}{a_1 \rho_1 u_1 u_1^2} \quad (133)$$

So the mixture impulse and the mixture energy are expressed by

$$I = a_1 \rho_1 u_1^2 \sum_k f_{I_v,k} + a_1 p_1 \sum_k f_{I_p,k} \quad (134)$$

$$E = \left(h_1^0 \sum_k f_{E_n,k} + \frac{p_1}{\rho_1 \Xi_1} \sum_k f_{E_{\pm},k} + \frac{u_1^2}{2} \sum_k f_{E_v,k} \right) \frac{M}{\sum_k f_{Mk}} \quad (135)$$

which combine with Eq. (119). Based on these, we get the flux characteristic polynomials related to the primitive variables of phase 1

$$\left(\frac{\sum_k f_{I_v,k}}{\sum_k f_{Mk}} - \frac{\sum_k f_{I_p,k}}{\sum_k f_{Mk}} \frac{\sum_k f_{E_v,k}}{\sum_k f_{E_{\pm},k}} \frac{\Xi_1}{2} \right) u_1^2 - \frac{I}{M} u_1 + \frac{\sum_k f_{I_p,k}}{\sum_k f_{Mk}} \left(\frac{E}{M} \frac{\sum_k f_{Mk}}{\sum_k f_{E_{\pm},k}} - h_1^0 \frac{\sum_k f_{E_n,k}}{\sum_k f_{E_{\pm},k}} \right) \Xi_1 = 0 \quad (136)$$

$$\left(\frac{\sum_k f_{Mk}}{\sum_k f_{E_{\pm},k}} \frac{E}{M} - \frac{\sum_k f_{E_n,k}}{\sum_k f_{E_{\pm},k}} h_1^0 \right) (a_1 \rho_1)^2 - \frac{I}{\sum_k f_{I_p,k}} \frac{1}{\Xi_1} (a_1 \rho_1) + \frac{M^2}{\left(\sum_k f_{Mk} \right)^2} \left(\frac{1}{\Xi_1} \frac{\sum_k f_{I_v,k}}{\sum_k f_{I_p,k}} - \frac{1}{2} \frac{\sum_k f_{E_v,k}}{\sum_k f_{E_{\pm},k}} \right) \Xi_1 = 0 \quad (137)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sum_k f_{I_p,k}}{\sum_k f_{I_v,k}} \frac{\sum_k f_{E_v,k}}{\sum_k f_{E_{\pm},k}} \Xi_1 \right) (a_1 \rho_1)^2 + \left(\frac{1}{\sum_k f_{I_v,k}} \frac{\sum_k f_{E_n,k}}{\sum_k f_{E_{\pm},k}} \Xi_1 - \frac{1}{\sum_k f_{I_p,k}} \right) I (a_1 \rho_1) + \frac{\sum_k f_{I_v,k}}{\sum_k f_{I_p,k}} \left(\frac{E}{\sum_k f_{E_{\pm},k}} \frac{M}{\sum_k f_{Mk}} - \frac{1}{2} \frac{\sum_k f_{E_v,k}}{\sum_k f_{E_{\pm},k}} \frac{I^2}{\left(\sum_k f_{I_v,k} \right)^2} - \frac{\sum_k f_{E_n,k}}{\sum_k f_{E_{\pm},k}} \frac{M^2}{\left(\sum_k f_{Mk} \right)^2} h_1^0 \right) \Xi_1 = 0$$

(138)

Based on Eq. (136) we obtain

$$I^{(u_1)} = I(u_1, M, E) = \left(\frac{\sum_k f_{I_u k}}{\sum_k f_{Mk}} - \frac{\sum_k f_{I_p k}}{\sum_k f_{Mk}} \frac{\sum_k f_{E_u k}}{\sum_k f_{E_{\pm} k}} \frac{\Xi_1}{2} \right) M u_1 + \frac{\sum_k f_{I_p k}}{\sum_k f_{Mk}} \left(E \frac{\sum_k f_{Mk}}{\sum_k f_{E_{\pm} k}} - M h_1^0 \frac{\sum_k f_{E_u k}}{\sum_k f_{E_{\pm} k}} \right) \frac{\Xi_1}{2} \frac{1}{u_1} \quad (138)$$

And looking for

$$\frac{\partial}{\partial u_1} I(u_1, M, E) = 0 \quad (139)$$

gives the critical conditions defined by the following equation

$$\frac{\rho_1 u_1^2}{P_1} = \frac{1}{\frac{\sum_k f_{I_u k}}{\sum_k f_{I_p k}} - \frac{\sum_k f_{E_u k}}{\sum_k f_{E_{\pm} k}} \frac{\Xi_1}{2}} \quad (140)$$

Equation (140) is a new family of singular points, which defines critical conditions by scaling the evolutions of the other phases to a reference phase. Compared with single-phase critical conditions, the new critical condition is essentially the single-phase condition modified by scaling functions. The coefficients of the right-hand side are ratios of the summation of the two scaling terms of the mixture impulse and ratios of summation of the thermal and kinetic energy scaling terms. This result was essentially obtained previously by [5] but was improperly coined as the “energy criterion”.

Eq. (140) is the general case. If we use scaling functions provided by Eqs. (116), (118), (129) and (130), we obtain the following subset of singular points

$$\frac{\rho_1 u_1^2}{P_1} = \frac{1}{\frac{\sum_k f_{I_u k}}{\sum_k f_{I_p k}} - \Xi_1} \quad (141)$$

We also obtain a subset if we scale the three terms of the energy equations (116), (117), (131), (132) and (133)

$$\frac{\rho_1 u_1^2}{P_1} = \frac{1}{1 - \frac{\sum_k f_{E_u k}}{\sum_k f_{E_{\pm} k}} \Xi_1} \quad (142)$$

2.3.3 Constraining the Flow Section

It should also be noted that the flow area has not been constrained so far. The third family of singular points will be obtained by introducing the condition that the flow must fill a prescribed area a_s . So the sum of the flow section of all phases is equal to the prescribed area

$$\sum_k a_k = a_s \quad (143)$$

This prescription is special in nature as it does not link two phases or apply to a particular phase but is a global constraint on the flow mixture. We should now derive flux characteristic polynomials involving the prescribed section in order to obtain a critical condition involving this constraint. This can only be done by reintroducing some primitive variables of the other phases as presented.

We can introduce the following scaling function for the second term of the momentum flux

$$f_{1,p,k}^* = \frac{a_k p_k}{a_s p_1} \quad (144)$$

And we can define the fraction area of phase k as

$$\alpha_k = \frac{a_k}{a_s} \quad (145)$$

It should be noted that

$$f_{1,p,k}^* = \alpha_1 f_{1,p,k} \quad (146)$$

We will also introduce the following velocity ratio

$$s_k = \frac{u_k}{u_1} \quad (147)$$

using the fact that

$$\alpha_1 = 1 - \sum_2^n \alpha_k \quad (148)$$

And with Eq. (147), we can express the density of phase 1 as

$$\rho_1 = \frac{M}{\alpha_s u_1 \sum_k f_{Mk} - M \sum_2^n \frac{f_{Mk}}{\rho_k s_k}} \quad (149)$$

where we now have an explicit reference to the density of phase k . Combining Eq. (149) with Eqs. (119), (134) and (135) will allow to obtain the following flux characteristic polynomials:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sum_k f_{I_u,k}}{\sum_k f_{I_p,k}^*} - \frac{\sum_k f_{E_u,k}}{\sum_k f_{E_z,k}} \frac{\Xi_1}{2} \right) a_s u_1^2 + \left(\frac{\sum_k f_{Mk}}{\sum_k f_{I_p,k}^*} \frac{I}{M} a_s + \frac{\sum_k f_{I_u,k}}{\sum_k f_{I_p,k}^*} \frac{M}{\sum_k f_{Mk}} \sum_k^n \frac{f_{Mk}}{\rho_k S_k} \right) u_1 \\
& + \left(a_s h_1^0 \Xi_1 \frac{\sum_k f_{E_u,k}}{\sum_k f_{E_z,k}} - a_s \Xi_1 \frac{E}{M} \frac{\sum_k f_{Mk}}{\sum_k f_{E_z,k}} - I \frac{\sum_k^n f_{Mk}}{2 \sum_k f_{I_p,k}^*} \right) = 0
\end{aligned}
\tag{150}$$

$$\begin{aligned}
& \left(a_s h_1^0 \Xi_1 \frac{\sum_k f_{E_u,k}}{\sum_k f_{E_z,k}} - a_s \Xi_1 \frac{\sum_k f_{Mk}}{\sum_k f_{E_z,k}} \frac{E}{M} - I \frac{\sum_k^n f_{Mk}}{2 \sum_k f_{I_p,k}^*} \right) (a_1 \rho_1)^2 \\
& + \left(a_s \frac{I}{\sum_k f_{I_p,k}^*} + \left(\frac{M}{\sum_k f_{Mk}} \right)^2 \frac{\sum_k f_{I_u,k}}{\sum_k f_{I_p,k}^*} \sum_k^n \frac{f_{Mk}}{\rho_k S_k} \right) (a_1 \rho_1) + a_s \left(\frac{M}{\sum_k f_{Mk}} \right)^2 \left(\frac{\Xi_1}{2} \frac{\sum_k f_{E_u,k}}{\sum_k f_{E_z,k}} - \frac{\sum_k f_{I_u,k}}{\sum_k f_{I_p,k}^*} \right) = 0
\end{aligned}
\tag{151}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_k f_{Mk}}{M} \left(\frac{1}{2} \frac{\sum_k f_{I_u,k}}{\sum_k f_{I_p,k}^*} \frac{\sum_k f_{E_u,k}}{\sum_k f_{E_z,k}} \Xi_1 - 1 \right) a_s^3 p_1^2 \\
& + \left(\frac{\sum_k f_{Mk}}{\sum_k f_{I_p,k}^*} \frac{I}{M} - \frac{\sum_k f_{Mk}}{\sum_k f_{I_u,k}} \frac{\sum_k f_{E_u,k}}{\sum_k f_{E_z,k}} \Xi_1 \frac{I}{M} - \frac{M}{a_s} \frac{\sum_k f_{I_u,k}}{\sum_k f_{I_p,k}^*} \frac{\sum_k^n f_{Mk}}{\sum_k \rho_k S_k} \right) a_s^2 p_1 \\
& + a_s \Xi_1 \left(h_1^0 \frac{M}{\sum_k f_{Mk}} \frac{\sum_k f_{I_u,k}}{\sum_k f_{I_p,k}^*} \frac{\sum_k f_{E_u,k}}{\sum_k f_{E_z,k}} + \frac{1}{2} \frac{I^2}{M} \frac{\sum_k f_{E_u,k}}{\sum_k f_{E_z,k}} \frac{\sum_k f_{Mk}}{\sum_k f_{I_u,k} \sum_k f_{I_p,k}^*} - \frac{\sum_k f_{I_u,k}}{\sum_k f_{I_p,k}^*} \frac{E}{\sum_k f_{E_z,k}} \right) = 0
\end{aligned}
\tag{152}$$

We can still chose between a_1 and ρ_1 as primitive variables but p_1 is now mandatory. These relations also show the flow section a_s explicitly. From the polynomial (150) we obtain:

$$I^{u_1} = I(u_1, M, E) = \frac{1}{\left(\frac{\sum_k \frac{f_{Mk}}{2 \rho_k S_k} - \sum_k \frac{f_{Mk}}{2} \frac{a_s}{M} u_1}{\sum_k \frac{f_{I_p, k}}{2} - \sum_k \frac{f_{I_p, k}}{2} \frac{a_s}{M} u_1} \right)} \left(\left(\frac{\sum_k \frac{f_{I_p, k}}{2} - \sum_k \frac{f_{E_p, k}}{2} \Xi_1}{\sum_k \frac{f_{I_p, k}}{2} - \sum_k \frac{f_{E_p, k}}{2} \Xi_1} \right) a_s u_1^2 + \frac{\sum_k \frac{f_{I_p, k}}{2} M}{\sum_k \frac{f_{I_p, k}}{2} \sum_k \frac{f_{Mk}}{2} \rho_k S_k} \sum_k \frac{f_{Mk}}{2} u_1 \right. \\ \left. + \left(a_s h_1^0 \Xi_1 \frac{\sum_k \frac{f_{E_p, k}}{2}}{\sum_k \frac{f_{E_p, k}}{2}} - a_s \Xi_1 \frac{E}{M} \frac{\sum_k \frac{f_{Mk}}{2}}{\sum_k \frac{f_{E_p, k}}{2}} \right) \right)$$

153

And again we are looking for

$$\frac{\partial}{\partial u_1} I(u_1, M, E) = 0 \quad (154)$$

Solving the null derivatives of the mixture fluxes with respect to the primitive variables is tedious, especially for the derivative of mass flux but it can be shown that the family of points defined by

$$\frac{\rho_1 u_1^2}{P_1} = \frac{1}{\alpha_1 \left(\alpha_1 \frac{\sum_k \frac{f_{I_p, k}}{2} - \sum_k \frac{f_{E_p, k}}{2} \Xi_1}{\sum_k \frac{f_{I_p, k}}{2} - \sum_k \frac{f_{E_p, k}}{2} \Xi_1} \right)} \quad (155)$$

or alternatively by

$$\frac{\rho_1 u_1^2}{P_1} = \frac{1}{\alpha_1 \left(\frac{\sum_k \frac{f_{I_p, k}}{2} - \sum_k \frac{f_{E_p, k}}{2} \Xi_1}{\sum_k \frac{f_{I_p, k}}{2} - \sum_k \frac{f_{E_p, k}}{2} \Xi_1} \right)} \quad (156)$$

is a new family of singular points of the dynamical system involving the prescribed flow section a , through parameter α_1 . Even though we reintroduce the density of the other phases, the critical condition is only a function of phase 1 and its scaling to the other phases. This result was previously obtained by [5] and improperly called the "impulse criterion". Equation (156) differs from Eq. (140) by only one parameter, namely α_1 .

At this point, no other general method than scaling the phase evolutions has been identified as tractable to obtain singular points. More development on this aspect is certainly needed.

Critical conditions as defined by Eqs. (140) and (156) can also be obtained by solving the flux characteristic polynomials for the primitive variables. The singular points are then defined by the null discriminant of the solution of these quadratic polynomials.

2.4 Choking or Critical Location

The location of the critical condition can also be linked to the channel geometry. One possible expression for Eq. (23) is:

$$\frac{\partial F_b^{\Sigma\{j\}}}{\partial Y_{j(y,1)}} \frac{\partial Y_{j(y,1)}}{\partial x} + \sum_{p \neq 1} \sum_y \frac{\partial F_b^{\Sigma\{j\}}}{\partial Y_{j(y,p)}} \frac{\partial Y_{j(y,p)}}{\partial x} = S_b^{\Sigma\{\Lambda\}} \quad (157)$$

with

$$\mathbf{S}^{\Sigma\{\Lambda\}} = \left\{ \begin{array}{l} S_M - \frac{\partial M^{\{p\}}}{\partial I} S_I - \frac{\partial M^{\{p\}}}{\partial E} S_E \\ S_I - \frac{\partial I^{\{u\}}}{\partial M} S_M - \frac{\partial I^{\{u\}}}{\partial E} S_E \\ S_E - \frac{\partial E^{\{p\}}}{\partial M} S_M - \frac{\partial E^{\{p\}}}{\partial I} S_I \end{array} \right\} \quad (158)$$

Since the source vector for an adiabatic flow without parietal mass sources and wall friction is simply

$$\mathbf{S}_b^{\Sigma} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \sum_k p_k \frac{\partial a_k}{\partial x} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (159)$$

we then have

$$\mathbf{S}^{\Sigma\{\Lambda\}} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial M^{\{p\}}}{\partial I} \sum_k p_k \frac{\partial a_k}{\partial x} \\ \sum_k p_k \frac{\partial a_k}{\partial x} \\ -\frac{\partial E^{\{p\}}}{\partial I} \sum_k p_k \frac{\partial a_k}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (160)$$

In the case of single pressure models, Eq. (160) will become

$$\mathbf{S}^{\Sigma\{\Lambda\}} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial M^{\{p\}}}{\partial I} p_1 \frac{\partial a_s}{\partial x} \\ p_1 \frac{\partial a_s}{\partial x} \\ -\frac{\partial E^{\{p\}}}{\partial I} p_1 \frac{\partial a_s}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (161)$$

The critical conditions have to be met at a maximum or a minimum of the flow section to satisfy Eq. (161) since if

$$\frac{\partial a_s}{\partial x} = 0 \quad \text{then} \quad S_M^{\Sigma\{\Lambda\}} = S_I^{\Sigma\{\Lambda\}} = S_E^{\Sigma\{\Lambda\}} = 0 \quad (162)$$

For flow models involving two pressures or more, Eq. (160) still applies but determining the exact choking location will be more difficult.

Conclusions

This paper presents the development of a general analysis of critical fluxes in conservative systems. Although this development was initially motivated by an interest in multiphase flows, it is indeed larger in scope. Several results have been achieved. Using the framework of a differential dynamical system, it is shown that, for conservative systems, the critical conditions or singular points are directly associated with optimal values of flux variables. Also, the method used to obtain a diagonal Jacobian matrix is very general.

One result of special interest is the emergence of some critical conditions or singular points as mixture properties. The significance of the mixture balance equations is well demonstrated by the structure of the coefficient matrix of the equation system.

The link with the propagation phenomena was also explored and was found, in some cases, not to be a required condition for the occurrence of critical conditions.

More specific developments are presented for multiphase flows. An explanation of the so-called choking phenomenon in multiphase flow is provided as a natural property of the equation set describing the fluid flow system. It is also shown that the critical location is associated with a null derivative of the flow area with respect to space. So, in a nozzle, the flow must be critical at the throat when using single pressure one-dimensional models.

Some comparisons with experimental and numerical data are provided. Agreement is as good as the completeness of available measurements at the critical location. The existing data already available at test facilities around the world could allow more thorough testing. Existing numerical models can also be used for such testing as shown in the discussion on the prechoking phenomenon.

Multiphase systems present significant scientific challenges and the choking phenomenon studied in this paper reveals itself as being rich and complex. Significant results have been achieved that should provide a sound foundation for the study of critical multiphase flows, and should contribute to improving our ability to model and simulate such complex flows.

This project was carried out as part of the R&D program of the NSERC Chair in Industrial Energy Efficiency (Chairholder: N. Galanis) established in 2006 at the University of Sherbrooke with the support of Hydro-Québec (Energy Technology Laboratory, LTE), Rio Tinto Alcan and the CANMET Energy Technology Center (CETC-Varenes, Natural Resources Canada).

Bibliography

- 1 H. Staedtke et al., Advanced Three-Dimensional Two-Phase Flow Simulation Tools for Application to Reactor Safety (ASTAR), Nuclear Engineering and Design 235 (2005) 379–400
- 2 H. Staedtke, Gasdynamic Aspects of Two-phase Flow: Hyperbolicity, Wave Propagation Phenomena, and Related Numerical Methods, Wiley-VCH, 2006, ISBN 3527609113, 273 pages.
- 3 E. Elias, and G.S. Lellouche, (1994). Two-Phase Critical Flow. International Journal of Multiphase Flow, vol. 20, p. 91-168.
- 4 M. Dostie, Y. Mercadier, Choking Criterion for One-Dimensional Critical Multiphase Flows in Ducts and Open Channels, CNS Conf. Procs. 13th Reactor Simulation Symposium, Chalk River, April 27-28, 1987, CRNL-4139, p.50-68.
- 5 M. Dostie, Contribution à l'étude des débits critiques multiphases et à la modélisation des éjecteurs, Thèse de doctorat en génie mécanique, Université de Sherbrooke, Août 1988
- 6 Z. Bilicki, C. Dafermos, J. Kestin, J. Majda & D. L. Zeng, (1987) Trajectories and Singular Points in Steady-State Models of Two-Phase Flows. Int. J. Multiphase Flow 13, 511-533.
- 7 J. M. Delhay, M. Giot, M. L. Riethmuller, Thermo hydraulics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering, Hemisphere Pub. Corp., 1981, ISBN 0070162689, 525 pages
- 8 M.P. Sharma, C.T. Crowe, A Novel Physico-Computational Method for Quasi-One-Dimensional Gas Particule Flows, Transactions of the ASME, Journal of Fluid Engineering, Sept. 1978, v.100, p. 343-349

List of Symbols

a	area
\mathbf{A}	coefficient matrix
\mathbf{B}	coefficient matrix of the source terms
C_p	specific heat at constant pressure
Dis	dimensionless number
e	internal energy or error
E	energy flux
f	scaling function
F	flux variable
\mathbf{F}	vector of flux variables F
G	mass flux
h	enthalpy
I	impulse flux
\mathbf{I}	identity matrix
\mathbf{J}	Jacobian matrix
M	mass flux

n	number of equations or number of phases
p	pressure
R	perfect gas constant
s	slip ratio
\tilde{S}	system state
S	source term
S'	source term function of the space derivative of the primitive variable
\mathbf{S}	vector of source terms
t	time
T	temperature
\tilde{T}	transform
u	velocity component
U	norm of the velocity vector or a flux variable
\mathbf{U}	vector of flux variables U
Y	primitive variable
\mathbf{Y}	vector of primitive variables
x	space coordinate
z_c	compressibility factor
α	void fraction or fraction area
Δ	determinant
Γ	source terms
$\mathbf{\Gamma}$	vector of source terms
λ	eigenvalue
Λ_m	set of variables providing a complete description of the system
v	volumetric or time fraction
ρ	density
σ	standard deviation
τ	parameter

Indices

b	balance equation type
c	perimeter
exp	experimental
E	refers to the energy flux
i, j, m, l	common indices
I	refers to the impulse flux
$\{j\}$	refers to a set of variables including only one primitive variable Y_j
k	phase number
M	refers to the mass flux
p	common indice or reference to the phase number
th	theoretical
U, F	refers to flux variables U or F
$\{\Lambda\}$	refers to a set of variables Λ_m
Σ	mixture flux or variable
0	reference

ANNEXE C : TERMES $\frac{\partial F_b^{\Sigma b_1}}{\partial Y_j}$

$$\frac{\partial E^{w_1}}{\partial w_1} = \left(\frac{(1+f_{M2}f_{T2}) C_{P1} J}{M R_1} + \frac{M (1+f_{M2}f_{T2}) C_{P1} (1+f_{M2}s_2) f_{M2}}{(1+f_{M2})^2 A R_1 \rho_2 s_2} \right. \\ \left. - \frac{2 (1+f_{M2}f_{T2}) C_{P1} (1+f_{M2}s_2) w_1}{(1+f_{M2}) R_1} + \frac{w_1}{1+f_{M2}} \right. \\ \left. + \frac{s_2^2 w_1 f_{M2}}{1+f_{M2}} \right) M$$

$$\frac{\partial J^{w_1}}{\partial w_1} = \left(\frac{M (1+f_{M2}f_{T2}) C_{P1} (1+f_{M2}s_2) f_{M2}}{(1+f_{M2})^2 A R_1 \rho_2 s_2} \right. \\ \left. - \frac{2 (1+f_{M2}f_{T2}) C_{P1} (1+f_{M2}s_2) w_1}{(1+f_{M2}) R_1} + \frac{w_1}{1+f_{M2}} \right. \\ \left. + \frac{s_2^2 w_1 f_{M2}}{1+f_{M2}} \right) / \left(\frac{(1+f_{M2}f_{T2}) C_{P1} f_{M2}}{(1+f_{M2}) A R_1 \rho_2 s_2} \right. \\ \left. - \frac{(1+f_{M2}f_{T2}) C_{P1} w_1}{M R_1} \right) + \left(\left(-\frac{E}{M} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{M (1+f_{M2}f_{T2}) C_{P1} (1+f_{M2}s_2) w_1 f_{M2}}{(1+f_{M2})^2 A R_1 \rho_2 s_2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(1+f_{M2}f_{T2}) C_{P1} (1+f_{M2}s_2) w_1^2}{(1+f_{M2}) R_1} + \frac{1}{2} \frac{w_1^2}{1+f_{M2}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{s_2^2 w_1^2 f_{M2}}{1+f_{M2}} \right) (1+f_{M2}f_{T2}) C_{P1} \right) / \\ \left(\left(\frac{(1+f_{M2}f_{T2}) C_{P1} f_{M2}}{(1+f_{M2}) A R_1 \rho_2 s_2} - \frac{(1+f_{M2}f_{T2}) C_{P1} w_1}{M R_1} \right)^2 M R_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \left(\left(2f_{M2} J C_{P1} (1 + f_{M2} f_{T2}) + 2w_1^2 A \rho_2 s_2 (1 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} (1 + f_{M2} s_2) - w_1^2 A \rho_2 s_2 R_1 - w_1^2 A \rho_2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. s_2^3 f_{M2} R_1 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(4f_{M2}^2 J^2 C_{P1}^2 (1 + f_{M2} f_{T2})^2 - 8f_{M2} J C_{P1}^2 (1 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + f_{M2} f_{T2})^2 w_1^2 A \rho_2 s_2 (1 + f_{M2} s_2) - 4f_{M2} J C_{P1} (1 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + f_{M2} f_{T2}) w_1^2 A \rho_2 s_2 R_1 - 4f_{M2}^2 J C_{P1} (1 + f_{M2} f_{T2}) w_1^2 A \rho_2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. s_2^3 R_1 + 4w_1^4 A^2 \rho_2^2 s_2^2 (1 + f_{M2} f_{T2})^2 C_{P1}^2 (1 + f_{M2} s_2)^2 - 4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. w_1^4 A^2 \rho_2^2 s_2^2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} (1 + f_{M2} s_2) R_1 - 4w_1^4 A^2 \rho_2^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. s_2^4 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} (1 + f_{M2} s_2) f_{M2} R_1 + w_1^4 A^2 \rho_2^2 s_2^2 R_1^2 + 2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. w_1^4 A^2 \rho_2^2 s_2^4 R_1^2 f_{M2} + w_1^4 A^2 \rho_2^2 s_2^6 f_{M2}^2 R_1^2 + 16 (1 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} w_1 (1 + f_{M2} s_2) f_{M2} E R_1 A \rho_2 s_2 \right)^{1/2} \right) (1 \\
& \quad \left. + f_{M2}) \right) / \left((1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} w_1^2 (1 + f_{M2} s_2) f_{M2} \right) \\
& \quad + \frac{1}{4} \left(\left(4w_1 A \rho_2 s_2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} (1 + f_{M2} s_2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2w_1 A \rho_2 s_2 R_1 - 2w_1 A \rho_2 s_2^3 f_{M2} R_1 - \frac{1}{2} (-16f_{M2} J \right. \right. \\
& \quad \left. \left. C_{P1}^2 (1 + f_{M2} f_{T2})^2 w_1 A \rho_2 s_2 (1 + f_{M2} s_2) - 8f_{M2} J C_{P1} (1 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + f_{M2} f_{T2}) w_1 A \rho_2 s_2 R_1 - 8f_{M2}^2 J C_{P1} (1 + f_{M2} f_{T2}) w_1 A \rho_2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. s_2^3 R_1 + 16w_1^3 A^2 \rho_2^2 s_2^2 (1 + f_{M2} f_{T2})^2 C_{P1}^2 (1 + f_{M2} s_2)^2 - 16 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. w_1^3 A^2 \rho_2^2 s_2^2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} (1 + f_{M2} s_2) R_1 - 16w_1^3 A^2 \rho_2^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. s_2^4 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} (1 + f_{M2} s_2) f_{M2} R_1 + 4w_1^3 A^2 \rho_2^2 s_2^2 R_1^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 8w_1^3 A^2 \rho_2^2 s_2^4 R_1^2 f_{M2} + 4w_1^3 A^2 \rho_2^2 s_2^6 f_{M2}^2 R_1^2 + 16 (1 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} (1 + f_{M2} s_2) f_{M2} E R_1 A \rho_2 s_2 \right)^{1/2} \right) / \\
& \quad \left(4f_{M2}^2 J^2 C_{P1}^2 (1 + f_{M2} f_{T2})^2 - 8f_{M2} J C_{P1}^2 (1 \right. \\
& \quad \left. + f_{M2} f_{T2})^2 w_1^2 A \rho_2 s_2 (1 + f_{M2} s_2) - 4f_{M2} J C_{P1} (1 \right. \\
& \quad \left. + f_{M2} f_{T2}) w_1^2 A \rho_2 s_2 R_1 - 4f_{M2}^2 J C_{P1} (1 + f_{M2} f_{T2}) w_1^2 A \rho_2 \right. \\
& \quad \left. s_2^3 R_1 + 4w_1^4 A^2 \rho_2^2 s_2^2 (1 + f_{M2} f_{T2})^2 C_{P1}^2 (1 + f_{M2} s_2)^2 - 4 \right. \\
& \quad \left. w_1^4 A^2 \rho_2^2 s_2^2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} (1 + f_{M2} s_2) R_1 - 4w_1^4 A^2 \rho_2^2 \right. \\
& \quad \left. s_2^4 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} (1 + f_{M2} s_2) f_{M2} R_1 + w_1^4 A^2 \rho_2^2 s_2^2 R_1^2 + 2 \right. \\
& \quad \left. w_1^4 A^2 \rho_2^2 s_2^4 R_1^2 f_{M2} + w_1^4 A^2 \rho_2^2 s_2^6 f_{M2}^2 R_1^2 + 16 (1 \right. \\
& \quad \left. + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} w_1 (1 + f_{M2} s_2) f_{M2} E R_1 A \rho_2 s_2 \right)^{1/2} \right) (1 \\
& \quad \left. + f_{M2}) \right) / \left((1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} w_1 (1 + f_{M2} s_2) f_{M2} \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial M^{w_1}}{\partial w_1} =$$

$$\frac{\partial E^{(a_1)}}{\partial \rho_1} =$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{A^3 (1+f_{M2})^2 R_1 \rho_1^2} \left(\left(-A^2 J + \frac{A M^2 (1+f_{M2} s_2) f_{M2}}{(1+f_{M2})^2 \rho_2 s_2} \right. \right. \\
& \quad - \frac{A M^2 R_1 f_{M2}}{(1+f_{M2})^2 \rho_2 s_2 (1+f_{M2} f_{T2}) C_{P1}} \\
& \quad - \frac{A M^2 R_1 f_{M2}^2 \rho_1}{(1+f_{M2})^2 \rho_2^2 s_2^2 (1+f_{M2} f_{T2}) C_{P1}} \\
& \quad - \frac{A s_2 M^2 R_1 f_{M2}^2}{(1+f_{M2})^2 \rho_2 (1+f_{M2} f_{T2}) C_{P1}} \\
& \quad \left. - \frac{A M^2 R_1 f_{M2}^3 \rho_1}{(1+f_{M2})^2 \rho_2^2 (1+f_{M2} f_{T2}) C_{P1}} \right) M (1+f_{M2} f_{T2}) C_{P1} \\
& + \frac{1}{A^3 (1+f_{M2}) R_1 \rho_1^3} \left(2 \left(-\rho_1 A^2 J \right. \right. \\
& \quad + \frac{A M^2 (1+f_{M2} s_2)}{(1+f_{M2})^2} + \frac{A M^2 (1+f_{M2} s_2) f_{M2} \rho_1}{(1+f_{M2})^2 \rho_2 s_2} \\
& \quad - \frac{1}{2} \frac{A M^2 R_1}{(1+f_{M2})^2 (1+f_{M2} f_{T2}) C_{P1}} \\
& \quad - \frac{A M^2 R_1 f_{M2} \rho_1}{(1+f_{M2})^2 \rho_2 s_2 (1+f_{M2} f_{T2}) C_{P1}} \\
& \quad - \frac{1}{2} \frac{A M^2 R_1 f_{M2}^2 \rho_1^2}{(1+f_{M2})^2 \rho_2^2 s_2^2 (1+f_{M2} f_{T2}) C_{P1}} \\
& \quad - \frac{1}{2} \frac{A s_2^2 M^2 R_1 f_{M2}}{(1+f_{M2})^2 (1+f_{M2} f_{T2}) C_{P1}} \\
& \quad - \frac{A s_2 M^2 R_1 f_{M2}^2 \rho_1}{(1+f_{M2})^2 \rho_2 (1+f_{M2} f_{T2}) C_{P1}} \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{A M^2 R_1 f_{M2}^3 \rho_1^2}{(1+f_{M2})^2 \rho_2^2 (1+f_{M2} f_{T2}) C_{P1}} \right) M (1 \\
& \quad + f_{M2} f_{T2}) C_{P1}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_{(a)}}{\partial p_1} =$$

Top volumineuse

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A^2} \left[\frac{A M^2 (1 + f_{M2} s_2) f_{M2}}{M (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} + \frac{2 A^3 (1 + f_{M2}) R_1 E p_1}{M (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \right] \\ & - \frac{A M^2 R_1 f_{M2}}{(1 + f_{M2})^2 p_2 s_2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & - \frac{A s_2 M^2 R_1 f_{M2}}{(1 + f_{M2})^2 p_2 s_2^2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & - \frac{(1 + f_{M2})^2 p_2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}}{A M^2 R_1 f_{M2}^2 p_1} \\ & - \frac{A M^2 R_1 f_{M2}^2 p_1}{(1 + f_{M2})^2 p_2 s_2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & - \frac{A M^2 R_1 f_{M2}^2 p_1}{(1 + f_{M2})^2 p_2 s_2^2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & - \frac{A s_2 M^2 R_1 f_{M2}}{(1 + f_{M2})^2 p_2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & - \frac{A M^2 R_1}{(1 + f_{M2})^2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & + \frac{A^3 (1 + f_{M2}) R_1 E p_1^2}{M (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & - \frac{1}{A M^2 (1 + f_{M2} s_2)} \left[\frac{A M^2 (1 + f_{M2} s_2)}{(1 + f_{M2})^2 p_2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \right. \\ & \left. + \frac{p_1 A^2 (1 + f_{M2})^2 p_2 s_2}{A M^2 (1 + f_{M2} s_2) f_{M2}} \right] \\ & - \frac{A M^2 R_1 f_{M2}^2 p_1}{(1 + f_{M2})^2 p_2 s_2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & - \frac{A s_2 M^2 R_1 f_{M2}}{(1 + f_{M2})^2 p_2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & - \frac{A M^2 R_1 f_{M2}^2 p_1}{(1 + f_{M2})^2 p_2 s_2^2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & - \frac{A M^2 R_1 f_{M2}^2 p_1}{(1 + f_{M2})^2 p_2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & - \frac{A M^2 R_1 f_{M2}^2 p_1}{(1 + f_{M2})^2 p_2 s_2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & - \frac{A M^2 R_1 f_{M2}^2 p_1}{(1 + f_{M2})^2 p_2 s_2^2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & - \frac{A s_2 M^2 R_1 f_{M2}}{(1 + f_{M2})^2 p_2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & - \frac{A M^2 R_1}{(1 + f_{M2})^2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \\ & + \frac{A^3 (1 + f_{M2}) R_1 E p_1^2}{M (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{p1}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_{(a)}}{\partial p_1} =$$

$$\frac{\partial E^{(p)}}{\partial p} = \text{Trop volumineuse}$$

$$\frac{\partial J^{(p)}}{\partial p} = \text{Trop volumineuse}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M^{(p)}}{\partial p} = & \frac{1}{4} \left((-12 (1 + f_{M2} f_{T2})^2 C_{P1}^2 p^2 f_{M2} (1 + f_{M2} s_2) A^2 \rho_2 s_2 + 2 (1 \right. \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} f_{M2} \rho_2 s_2 R_1 J^2 - 8 (1 \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p f_{M2} \rho_2 s_2 R_1 J A + 8 (1 + f_{M2} f_{T2})^2 \\
& C_{P1}^2 p f_{M2} (1 + f_{M2} s_2) J A \rho_2 s_2 + 2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} f_{M2}^2 \rho_2 \\
& s_2^3 R_1 J^2 - 8 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p f_{M2}^2 \rho_2 s_2^3 R_1 J A + 6 (1 \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p^2 f_{M2}^2 \rho_2 s_2^3 R_1 A^2 + 6 (1 \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p^2 f_{M2} \rho_2 s_2 R_1 A^2) (1 + f_{M2}) \Big) / \\
& \left((E^2 R_1^2 s_2^2 \rho_2^2 (1 + f_{M2} s_2)^2 - 4 (1 + f_{M2} f_{T2})^2 \right. \\
& C_{P1}^2 p^3 f_{M2} (1 + f_{M2} s_2) A^2 \rho_2 s_2 + 2 (1 \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p f_{M2} \rho_2 s_2 R_1 J^2 - 4 (1 \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p^2 f_{M2} \rho_2 s_2 R_1 J A + 4 (1 + f_{M2} f_{T2})^2 \\
& C_{P1}^2 p^2 f_{M2} (1 + f_{M2} s_2) J A \rho_2 s_2 + 2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p \\
& f_{M2}^2 \rho_2 s_2^3 R_1 J^2 - 4 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p^2 f_{M2}^2 \rho_2 s_2^3 R_1 J A + 2 (1 \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p^3 f_{M2}^2 \rho_2 s_2^3 R_1 A^2 + 2 (1 \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p^3 f_{M2} \rho_2 s_2 R_1 A^2)^{1/2} (1 \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p f_{M2} (1 + f_{M2} s_2) \Big) + \frac{1}{2} \left((E R_1 s_2 \rho_2 (1 \right. \\
& + f_{M2} s_2) \\
& - (E^2 R_1^2 s_2^2 \rho_2^2 (1 + f_{M2} s_2)^2 - 4 (1 + f_{M2} f_{T2})^2 \\
& C_{P1}^2 p^3 f_{M2} (1 + f_{M2} s_2) A^2 \rho_2 s_2 + 2 (1 \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p f_{M2} \rho_2 s_2 R_1 J^2 - 4 (1 \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p^2 f_{M2} \rho_2 s_2 R_1 J A + 4 (1 + f_{M2} f_{T2})^2 \\
& C_{P1}^2 p^2 f_{M2} (1 + f_{M2} s_2) J A \rho_2 s_2 + 2 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p \\
& f_{M2}^2 \rho_2 s_2^3 R_1 J^2 - 4 (1 + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p^2 f_{M2}^2 \rho_2 s_2^3 R_1 J A + 2 (1 \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p^3 f_{M2}^2 \rho_2 s_2^3 R_1 A^2 + 2 (1 \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p^3 f_{M2} \rho_2 s_2 R_1 A^2)^{1/2} \Big) / ((1 \\
& + f_{M2} f_{T2}) C_{P1} p^2 f_{M2} (1 + f_{M2} s_2))
\end{aligned}$$

LISTE DES RÉFÉRENCES

- Adamopoulos , J.G. and Petropakis, H.J. (1999). Simulation of distribution of discrete inert particules in two phase supersonic mixing. *Journal of Food Engineering*, vol. 42, n° 1, p. 59-66.
- Alhussan, K. and Garris, C. (2006). Characteristics of non-steady pressure exchange ejectors. *Proceeding of ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting 2006*, p. 279-283.
- Bergander, M.J. (2006). Refrigeration cycle with two-phase condensing ejector. *International Refrigeration and Air Conditioning Conference at Purdue*, R008.
- Bilicki, Z., Dafermos, C., Kestin, J., Majda, J. and Zeng, D.L. (1987). Trajectories and singular points in steady-state models of two-phase flows. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 13, p. 511-533.
- Biswas, A.B. and Das, S.K. (2008). Two-phase frictional pressure drop of gas-non-Newtonian liquid flow through helical coils in vertical orientation. *Chemical Engineering and Processing*, vol. 47, p. 816-826.
- Bonnington, S.T. and King, A.L. (1972). *Jet pumps and ejectors, a state of the art review and bibliography*, EHRA Fluid Engineering, Crandfield, Bedford, England.
- Bourre, J.A., Fritte, A.A., Gior, M.M. and Reocreux, M.L. (1976). Highlights of two-phase critical flow : on the links between maximum flow rates, sonic velocities, propagation and transfer phenomena in single and two-phase flows. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 3, p 1-22.
- Cabrit, O. (2009). Modélisation des flux parietaux sur les tuyères des moteurs a propergol solide, Thèse de doctorat en génie mécanique, Université Montpellier II, France.
- Carofano, G.C. and McManus, H.N. (1969). An analytical and experimental study of the flow of air-water and steam-water mixtures in a converging-diverging nozzle. *Progress in Heat and Mass Transfer*, Edited by Irvine et al., vol. 2, p. 395-417.
- Chapra, S.C., and Canale, R.P. (2008). *Numerical methods for Engineers*. McGraw-Hill Education, 5th edition, 960 p.
- Chung, M.S. (2007). Characteristic development of hyperbolic two-dimensional two-fluid model for gas-liquid flows with surface tension. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 31, p. 578-588.

- Chung, M.S., Chang, K.S. and Lee, S.J. (2002). Numerical solution of hyperbolic two-fluid two-phase flow model with non-reflecting boundary conditions. *International Journal of Engineering*, vol. 40, p. 789-803.
- Chung, M.S. and Lee, S.J. (2001). Effect of interfacial pressure jump and virtual mass terms on sound wave propagation in the two-phase flow. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 244, n° 4, p. 717-728.
- Chunnanond, K. and Aphornratana, S. (2004). Ejectors: applications in refrigeration technology. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 8, p. 129-155.
- Citu, Alina (2003). *A two-phase, two-component bubbly flow model*. Thèse de doctorat en génie mécanique, Université Catholique de Louvain, Belgique.
- Comfort III, W.J. and Crow, C.T. (1980). Dependence of shock characteristics on droplet size in supersonic two-phase mixtures. *Transactions of the ASME*, vol. 102, p. 54-58.
- Curie, I.G. (1974). *Fundamental mechanics of fluids*. McGraw-Hill, United State of America, 441 p.
- De Chant, L.J. and Seidel, J.A. (2001), Simplified turbulence modeling for forced vertical mixers using a kinematic wave analogy. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 25, n° 6, p. 427-447.
- Delhaye, J.M. , Giot, M. and Riethmullet (1980). Thermohydraulics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering. McGraw-Hill Book Company, New-York, 525 p.
- Dostie, M. (1988). *Contribution à l'étude des débits critiques multiphases et à la modélisation des éjecteurs*. Thèse de doctorat en génie mécanique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada.
- Dostie, M., Martel, S., Mercadier, Y. (2009). Critical fluxes in conservation systems with application to multiphase flows. Communication privée – présentée à l'annexe B, LTE, Shawinigan, Canada.
- Drew, D., Cheng, I. and Drew, R.T. (1979). The analysis of virtual mass effect in two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 5 p. 233-242.
- Elias, E. and Lellouche, G.S. (1994). Two-phase critical flow. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 20, p. 91-168.
- Elliott, D.G. (1985). Two-phase flow computation with prescribed shape. *ASME 20th Annual Cavitation and Multiphase Flow Forum*, Albuquerque.
- Elliott, D.G. and Weinberg, E. (1968). Acceleration of liquids in two-phase nozzles. *Jet Propulsion Laboratory*, Technical Report JPL 32-987, California, 43 p.

- Fabri, J. and Siestrunck, R. (1958). Supersonic air ejectors. *Advances in Applied Mechanics*, vol. 5, n° C, p 1-34.
- Han, P. and Chen, X. (2001). Modeling of the subsonic-supersonic flow and heat transfer in a DC arc plasma torch. *Plasma Chemistry and Plasma Processing*, vol. 21, n° 2, p. 249-264.
- Harlow, F.H. and Welch, J.E. (1965). Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, vol. 8, p. 2182.
- Hu, H., Koochesfahani, M.M. (2002). A novel method for instantaneous, quantitative measurement of molecular mixing in gaseous flow. *Experiments in fluids*, vol. 33, p. 202-209.
- Huang, B.J., Chang, J.M., Wang, C.P., Petrenko, V.A. (1999). A 1D analysis of ejector performance. *International Journal of Refrigeration*, vol. 22, p. 354-364.
- Ishii, M. and Zuber, N. (1979). Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, V. 25, n° 5, p. 843-855.
- Keenan, J.H., Newman, E.P. (1942). A simple air ejector. *Journal of Applied Mechanic*, Trans. ASME 64, A75-A81.
- Kornhauser, A.A. (1990). The use of an ejector in a geothermal flash system. *Proceeding of the 25th intersociety energy conservation engineering conference*, vol. 5, p. 79-84.
- Lemonnier, H. and Selmer-Olsen, S. (1992). Experimental investigation and physical modeling of two-phase two-component flow in a converging-diverging nozzle. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 18, n° 1, p. 1-20.
- Liou, M.S. (2006). A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds. *Journal of Computational Physics*, vol. 214, p. 137-170.
- Liou, M.S. and Steffen, C.J. (1993). A new flux splitting scheme. *Journal of Computational Physics*, vol. 107, n° 1, p. 23-39.
- Lockhart, R.W. and Martinelli, R.C. (1949). Proposed correlation of data for isothermal two-phase two-component flow in pipes. *Chemical Engineering Progress*, vol. 45, p 39-48.
- Martin, J. and Michaelides, E.E. (1984). *A critical review of frictional pressure-drop correlations for gas-solid flows. Multiphase Flow and Heat Transfer III Part B: Applications*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam.

- Marynowski, T. (2007). Étude expérimentale et numérique d'écoulements supersoniques en éjecteur avec et sans condensation. Thèse de doctorat en génie mécanique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada.
- Menegay, P. (1997). *A computational model for two-phase ejector flow*. Thèse de doctorat en génie mécanique, Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, Virginia.
- Motor Magazine, August 2009, p. 40-42.
- Patankar, V.P. (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation, United States of America, 197 p.
- Podvysotky, A.M. and Schraiber, A.A. (1984). Coalescence and break-up of drops in two-phase flows. *International Journal of Multiphase Flows*, vol. 10, n° 2, p. 195-209.
- Ressources naturelles Canada. (2009), Guide de données sur la consommation d'énergie, de 1990 à 2009.
- Saurel, R. and Abgrall, R. (1999). A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, vol. 150, p. 425-467.
- Schultz, R.R. and Ericson, L. (1981). The Marviken critical flow test program. *Nuclear Safety*, vol. 22, n° 6, p. 712-724.
- Städtke, H. (2006). *Gasdynamic aspects of two-phase flow: hyperbolicity, wave propagation phenomena, and related numerical methods*. Wiley-VCH, 273 p.
- Städtke, H., Franchello, G., Worth, B., Graf, U., Romstedt, P., Kumbaro, A., Garcia-Cascales, J.R., Paillère, H., Deconinck, H., Ricchiuto, M., Smith, B., De Cachard, F., Toro, E.F., Romenski, E. and Mimouni, S. (2005). Advanced three-dimensional two-phase flow simulation tools for application to reactor safety (ASTAR). *Nuclear Engineering and Design*, vol. 235, p. 379-400.
- Starkman, E.S., Schrock, V.E., Neusen K.F., and Maneely, D.J. (1964). Two-phase fluid through a convergent-divergent nozzle. Transaction of the ASME, *Journal of Basic Engineering*, p. 247-256.
- Sun D. and Eames I.W. (1995). Recent developments in the design theories and applications of ejectors – a review. *Journal of the Institute of Energy*, vol. 68, n° 475, p. 65-79.
- Whitaker, S. (1972). Forced convection heat transfer correlations for flow in pipes, past flat plates, single cylinders, single spheres and for flow in packed beds and tubes bundles. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, V. 18, p. 361.
- Yan, J., Cai, W. and Li, Y. (2012), Geometry parameters effect for air-cooled ejector cooling systems with R134a refrigerant. *Renewable Energy*, vol. 46, p. 155-163.

Zhu, Y., Li, Y. (2009). Novel ejector model for performance evaluation on both dry and wet vapors ejectors. *International Journal of refrigeration*, vol. 32, p. 21-31.

Zuber, N. (1964). Recent trends in boiling heat transfer research – 1. Nucleate pool boiling. *Applied Mechanics Reviews*, vol. 17, n° 9, p. 663-672.