

Planification et Conception Topologique des Réseaux de Télécommunication Cellulaires.

par

Mouhamed El Moctar DIOP

Thèse en cotutelle présentée au Département de mathématiques de
l'université de Sherbrooke en vue de l'obtention du grade de docteur ès
sciences (Ph.D.) et à l'université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand en
vue de l'obtention du grade de docteur en informatique.

FACULTÉ DES SCIENCES/UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
ISIMA/UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL

Sherbrooke, Québec, Canada, octobre 2005

111-1687



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*
ISBN: 978-0-494-28654-8
Our file *Notre référence*
ISBN: 978-0-494-28654-8

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

Le 18 octobre 2005

le jury a accepté la thèse de M. Mouhamed El Moctar Diop dans sa version finale.

Membres du jury

M. Abdelhamid Benchakroun
Directeur
Département d'informatique

M. Philippe Mahey
Codirecteur
Université Blaise Pascal

M. Abdel Lisser
Membre
LRI - Université de Paris-Sud

M. Alexandre Caminada
Membre externe
Laboratoire Systèmes et Transport - Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

M. Jacques Ferland
Membre externe
Département d'IRO - Université de Montréal

M. Jean-Pierre Dussault
Président-rapporteur
Département d'informatique

Au nom de Dieu, le tout Clément, le tout Miséricordieux

*À mon père,
à ma mère,
à ma soeur Alimatou,
et à mon défunt ami Adiyatou Kaba Diakhaté.*

*En les remerciant tous pour l'aide financière
et morale qu'ils m'ont apportée durant toute
la durée de mes études.*

SOMMAIRE

Ce travail traite du problème de la conception topologique des réseaux de télécommunication cellulaires. Deux types de modèles sont abordés. Un modèle classique intégrant dans un même problème la détermination des emplacements des équipements du réseau, leur connexion et la couverture des zones. Il consiste, à partir d'un ensemble de sites prédéfinis pour l'installation d'équipements, à déterminer lesquels activer et quelles paires connecter à coût minimal pour satisfaire la demande. Nous proposons une méthode de décomposition de Benders pour fournir une solution optimale. De ce modèle, on construit une autre formulation du problème. Cette dernière considère la quantité de trafic comme un flot devant être écoulé à travers le réseau depuis une source fictive. Ainsi, on obtient un modèle de flot qui consiste à déterminer les arcs à activer et la quantité de flot à y faire passer. Deux approches de relaxation sont utilisées pour résoudre ce modèle de flot. Une approche qui utilise une relaxation lagrangienne combinée avec un algorithme de sous-gradient et une autre qui utilise une technique de décomposition mixte.

Mots clés: décomposition de Benders, décomposition mixte, réseaux cellulaires, relaxation lagrangienne, conception.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mes Directeurs de thèse, Abdelhamid Benchakroun et Philippe Mahey, d'abord pour la confiance qu'ils ont toujours manifestée à mon égard et pour m'avoir accueilli dans leur groupe de recherche.

Je suis particulièrement honoré par Mr. Jean-Pierre Dussault qui a accepté de présider ce jury. Je remercie également Mr. Alexandre Caminada, Mr. Jacques Ferland et Mr. Abdel Lisser, pour avoir accepté d'être dans mon jury de thèse.

Mes remerciements s'adressent aussi à Youssou Gningue qui m'a donné le goût et la volonté de faire de la recherche et m'a encouragé à m'inscrire au Doctorat.

Mes remerciements à tout le personnel des départements de Mathématiques et Informatique de l'Université de Sherbrooke et aussi de l'ISIMA de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand m'ont aidé dans l'accomplissement de ce travail.

Mes remerciements à toute ma famille, mon amie Sandrine Semper, mon collègue Madiagne Diallo et tous mes amis pour leur patience, leurs encouragements et leurs prières. Je remercie particulièrement mon cousin Malick Cissé pour son aide qui, d'une certaine manière, m'a permis de poursuivre mes études au Canada.

Je ne saurais terminer sans remercier l'Université de Sherbrooke, le ministère de l'éducation du Québec et l'ISM pour leur soutien financier

Table des matières

SOMMAIRE	i
REMERCIEMENTS	ii
TABLE DES MATIÈRES	iii
LISTE DES TABLEAUX	vii
LISTE DES FIGURES	viii
INTRODUCTION	1
Chapitre 1 — Présentation d'un Réseau de Télécommunication Cellulaire	6
1.1 Présentation du réseau mobile	6
1.1.1 Architecture d'un réseau GSM	8
1.1.2 Systèmes radiomobiles et concepts cellulaires	9
1.1.3 Les services	11

1.1.4	Fonction des équipements	12
1.1.5	Acheminement des appels	15
1.1.6	Gestion de l'itinérance	16
1.1.7	Réutilisation des fréquences	17
1.2	État de l'art	18
1.2.1	Modèle classique de synthèse	18
1.2.2	Formulation par les flots	21

Chapitre 2 — Modèle classique de la synthèse du réseau et résolution exacte **23**

2.1	Formulation du modèle	24
2.1.1	Hypothèses et Notations	24
2.1.2	Définition de la fonction économique	27
2.1.3	Définition des contraintes	28
2.2	Modèle de conception	33
2.2.1	Simplification du modèle	35
2.2.2	Modèle simplifié	39
2.3	Approche de Résolution : décomposition de Benders	41
2.3.1	Méthode de Benders dans le cas linéaire	42
2.3.2	Application au modèle	46
2.3.3	Procédure de génération de Coupes de réalisabilité	51

2.4	Résultats numériques	55
2.5	Conclusion	60
Chapitre 3 — Modélisation par les flots		62
3.1	Présentation du problème	64
3.2	Formulation du problème par les flots	67
3.2.1	Définition des paramètres et des variables	67
3.2.2	Définition des contraintes	69
3.2.3	Modèle	71
3.3	La Relaxation lagrangienne	73
3.4	Application au modèle de flot	76
3.4.1	Fonction duale	77
3.4.2	Résolution des sous-problèmes	78
3.4.3	Algorithme du sous-gradient	81
3.4.4	Heuristique	83
3.5	Résultats numériques	86
3.6	Conclusion	89
Chapitre 4 — Décomposition Mixte		90
4.1	Description de la méthode	91
4.1.1	Dégénérescence des sous-problèmes et allocations mixtes	92

4.1.2	Application à la décomposition de problèmes de flots en sous-réseaux	95
4.2	Application au modèle	100
4.3	Définition et résolution des sous-problèmes relaxés	101
4.3.1	Sous-problème relaxé $RSP_{az}^1(\Pi_a)$	101
4.3.2	Sous-problème relaxé $RSP_{ba}^1(\Pi_b, u_a)$	103
4.3.3	Sous-problème relaxé $RSP_{mb}^1(\Pi_m, v_b)$	108
4.3.4	Sous-problème relaxé $RSP_{sm}(w_m)$	108
4.3.5	Procédure de résolution	110
4.4	Résultats numériques	118
4.5	Conclusion	120
4.6	Récapitulatif	121
	CONCLUSION	122
	BIBLIOGRAPHIE	126

Liste des tableaux

2.1	Instances de type I: comparaison Benders1-Cplex	57
2.2	Instances de type II: comparaison Benders1-Cplex	58
2.3	Instances de type III: comparaison Benders1-Cplex	59
2.4	Instances de type II: comparaison Benders1-Benders2	59
2.5	Instances de type III: comparaison Benders1-Benders2	60
3.1	Instances type I: comparaison Cplex-Relaxation	87
3.2	Instances de type II: comparaison Cplex-Relaxation	88
3.3	Instances de type III: comparaison Cplex-Relaxation	88
4.1	Intances de type I: comparaison Cplex-Decomposition mixte	119
4.2	Instances de type II: comparaison Cplex-Decomposition mixte	119
4.3	Instances de type I: comparaison générale	121
4.4	Instances de type II: comparaison générale	121

Table des figures

1.1	Réseau cellulaire	7
1.2	Architecture d'un réseau GSM	8
1.3	Configuration d'une BTS.	13
1.4	Configuration d'un BSC	14
2.1	Sous-ensembles.	52
3.1	Modélisation par les flots	66
4.1	Décomposition	96
4.2	Coupe	105
4.3	Solution de la phase I	116
4.4	Solution de la phase II	117
4.5	Solution optimale de Cplex	117

Introduction

La mise en oeuvre du concept cellulaire remonte aux années 40 dans les laboratoires BELL. Une solution devait être apportée au problème de congestionnement du spectre radioélectrique. À cette époque, les systèmes radiomobiles étaient considérés comme des cas particuliers de systèmes de radiodiffusion ou télévision. La couverture des zones (de rayons de plus de 30 km) était faite à l'aide d'émetteurs de forte puissance installés sur des sites élevés. C'est vers les années 70 que vont apparaître les premiers systèmes de téléphonie radiomobile, non cellulaires, qui ne pouvaient écouler que quelques appels simultanément. Les réseaux semi-cellulaires qui sont apparus ensuite couvraient une zone géographique étendue et utilisaient plusieurs émetteurs de moyenne ou faible puissance, chaque émetteur n'utilisant qu'une partie du spectre. L'idée de partager les zones en cellules avait pour avantage de permettre la réutilisation des fréquences et de ce fait couvrir de manière continue un territoire encore plus grand. Avec l'augmentation de la demande, les opérateurs vont densifier les réseaux existants, ce qui va entraîner une accélération de la mise en oeuvre du concept cellulaire. Ces systèmes reposent sur une technologie de transmission analogique sur la voie radio et les rayons des cellules sont rarement inférieurs au kilomètre. Ils sont appelés Systèmes Cellulaires de première génération.

Les avancées technologiques dans le domaine du traitement du signal et de l'intégration des composants électroniques vont justifier la décision de développer des systèmes repo-

sant sur des techniques de transmission numérique. Ces nouveaux systèmes sont appelés systèmes de seconde génération dont le représentant le plus répandu dans le monde est le **GSM** (Global System for Mobile communication). Les services offerts par ce système sont multiples. Les études actuelles portent sur des systèmes capables de fournir un service universel à toute personne, n'importe où dans le monde et n'importe quand. Ce sont les systèmes de troisième génération.

L'installation d'un nouveau réseau de télécommunication ou l'extension d'un réseau déjà existant nécessite une phase de conception. Elle consiste d'abord à faire une prospection sur toute la région à couvrir et ensuite à déterminer les sites potentiels les plus adéquats pour l'installation des équipements. C'est une opération qui n'est pas facile à cause des bâtiments inaccessibles et des sites trop éloignés des sources d'énergie. Une prévision de trafic sera alors évaluée et permettra de déterminer la capacité des équipements à installer, en terme de nombre de liaisons ou de trafic. Ce qui permet de gérer la demande. La particularité des réseaux de télécommunication cellulaires réside dans le fait que les usagers qui sont souvent en mouvement doivent avoir accès au service en tout temps et à n'importe quel endroit de la zone de couverture de l'opérateur. Une analyse minutieuse est donc nécessaire pour limiter les frais occasionnés par la mise en place d'un nouveau réseau ou l'extension d'un réseau existant.

Un réseau de télécommunication cellulaire se présente sous la forme d'une structure hiérarchisée multi-niveaux. Un niveau inférieur où la couverture des différentes zones par des ondes électromagnétiques représente les liaisons entre les émetteurs-récepteurs et les points à couvrir. Deux autres niveaux supérieurs admettent des liaisons en forme de faisceaux ou en fibre optique.

L'évolution sans cesse croissante du trafic dans les réseaux de télécommunication implique une évolution des technologies et une forte rupture. Cependant l'avènement de nouvelles technologies ne doit pas perturber les structures déjà existantes. Une solution

doit être trouvée pour intégrer ces nouvelles technologies dans le réseau existant.

La planification de la topologie d'un réseau est aujourd'hui faite sans outil adéquat. Les équipes chargées de l'évolution du réseau appliquent des règles d'ingénierie basées sur les contraintes techniques des équipements du réseau. Les solutions ainsi fournies répondent aux exigences des opérateurs en termes de capacités mais elles ne garantissent pas une optimisation de l'utilisation des ressources du réseau. D'autre part, il n'existe pas dans le marché un outil d'optimisation assez souple pour prendre en compte l'évolution du modèle de l'architecture, elle-même liée à l'évolution des technologies. Notre objectif est donc de résoudre des problèmes de conception et de planification de réseaux qui se placent dans cette conjoncture de migration et d'intégration des équipements.

Dans le cadre des réseaux mobiles, deux applications peuvent en découler: l'optimisation de l'allocation des fréquences pour le routage dans les réseaux de transport basée sur la hiérarchie numérique synchrone, et l'optimisation de l'architecture BSS (Base Station Subsystem) en vue de l'évolution du trafic et des nouvelles technologies du type **GPRS** (General Packet Radio Service), **UMTS** (Universal Mobile Telecommunication System).

On se propose, dans le cadre de cette thèse, de développer un outil adapté capable de fournir une solution optimale ou approchée au problème de conception topologique des réseaux de télécommunication cellulaires et qui tient compte de tous les types de contraintes. Les aspects dynamiques, comme la notion de Handover, la notion d'allocation de fréquences, ne seront pas abordés dans le cadre de cette thèse. Le problème s'applique dans deux situations: l'extension d'un réseau déjà existant ou la mise sur pied d'un nouveau réseau. Ces deux types de problèmes se formulent de la même manière, le premier étant un cas particulier du deuxième qui peut en être déduit en retirant les coûts fixes d'installation des équipements et liaisons.

La conception topologique consiste donc, étant donné un ensemble de sites E prédéfinis

pour l'installation des équipements du réseau et un ensemble U de liaisons possibles entre ces sites, à déterminer un sous-ensemble E_a de sites à activer et un autre U_a d'arcs permettant de les relier, capable de gérer toute la demande à un coût minimal. Les principales contraintes que l'on retrouve sont les suivantes : le respect des liaisons possibles pour la structure d'arborescence, le respect des capacités des équipements et la satisfaction totale de la demande.

Le regroupement dans un même modèle d'un problème de localisation des différents équipements et d'un problème de recherche d'un plan de connexion de ces équipements pour la résolution du problème de conception topologique a l'avantage de fournir une solution qui tient compte de manière globale des aspects sélection et liaison, deux éléments interdépendants. Les codes de programmation linéaire comme Cplex restent très limités devant la taille de ce type de problème. D'où l'intérêt de passer par les méthodes de décomposition qui ont démontré leur efficacité pour des problèmes de grande taille. Le problème étudié est une extension du problème de Steiner, en ce qu'il cherche un arbre de coût minimal dans les niveaux supérieurs sauf le niveau le plus bas où on peut avoir plusieurs arcs entrant vers une zone. De ce fait, c'est un problème NP-difficile.

Deux types de modèles sont traités dans le cadre de cette thèse. Un premier modèle appelé modèle de synthèse utilisant les caractéristiques du réseau est étudié et est résolu par la méthode de décomposition de Benders. Un deuxième modèle adaptant ce modèle de synthèse en un modèle de flot est résolu par une relaxation lagrangienne combinée avec une technique de sous-gradient. La structure hiérarchique des réseaux de télécommunication induit une conservation de flots entre sous-réseaux, notamment au niveau des sommets de transition. Une décomposition mixte paraît adaptée à ce type de modèle de flot. Cette deuxième méthode de décomposition est aussi appliquée au modèle de flot.

L'analyse détaillée des sous-problèmes dans la mise en oeuvre des différents

schémas de décomposition étudiés a permis des améliorations significatives des performances des algorithmes avec lesquels on a pu traiter des instances où Cplex n'a pas réussi.

La suite du document sera organisée comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la présentation d'un réseau de télécommunication cellulaire. Son mode de fonctionnement ainsi qu'une description des différents équipements qui le composent sont donnés et ensuite un bref survol de l'état de l'art est donné.

Dans le deuxième chapitre, la construction d'un modèle classique est proposée. Après avoir défini les paramètres et les variables du problème, nous construisons la fonction économique et déterminons les contraintes liées au problème. Le modèle ainsi obtenu est résolu par deux algorithmes basés sur la méthode de décomposition de Benders.

Dans le troisième chapitre une formulation du modèle de conception topologique par les flots est proposée et résolue par une approche de relaxation lagrangienne.

Le chapitre quatre est consacré à une description de la méthode de décomposition mixte ainsi que son adaptation au modèle de flots.

À la fin de chacun de ces chapitres, nous présentons les résultats numériques permettant de justifier la validité de la méthode utilisée.

Enfin nous terminons par la conclusion qui est consacrée à une comparaison des différentes méthodes et à la proposition de perspectives de recherches.

Chapitre 1

Présentation d'un Réseau de Télécommunication Cellulaire

1.1 Présentation du réseau mobile

Un réseau de radiotéléphonie a pour premier rôle de permettre des communications entre abonnés mobiles et abonnés du Réseau Téléphonique Commuté Public (RTCP). Sa caractéristique principale est la liaison radio. Comme tout réseau, il doit offrir des facilités d'exploitation et de maintenance. Notre intérêt sera porté, dans le cadre de cette étude, sur les réseaux de type GSM. La norme GSM est la première norme de téléphonie cellulaire de seconde génération (pleinement numérique). Elle constitue désormais la référence mondiale pour les systèmes radiomobiles.

L'UMTS (Universal Mobile Telecommunication System) est une technologie de téléphonie mobile de 3-ième génération qui offre une vitesse de transmission bien supérieure au réseau GSM/GPRS actuel. Avec une capacité qui atteint dans un premier

temps 384 kbps¹ (contre 9 kbps pour le GSM et 171 kbps pour le GPRS), l'UMTS améliore considérablement la capacité et la rapidité de transmission des données de masses (images, musique, vidéo...). La norme UMTS exploite le nouveau protocole de multiplexage W-CDMA² et de nouvelles bandes de fréquences situées entre 1900 et 2200 MHz. À la différence du GSM qui fait passer les données par une cellule (antenne) sur des canaux de fréquences différents, eux-mêmes répartis selon des créneaux de temps, le W-CDMA distingue les communications par des codes différents au sein d'une même fréquence.

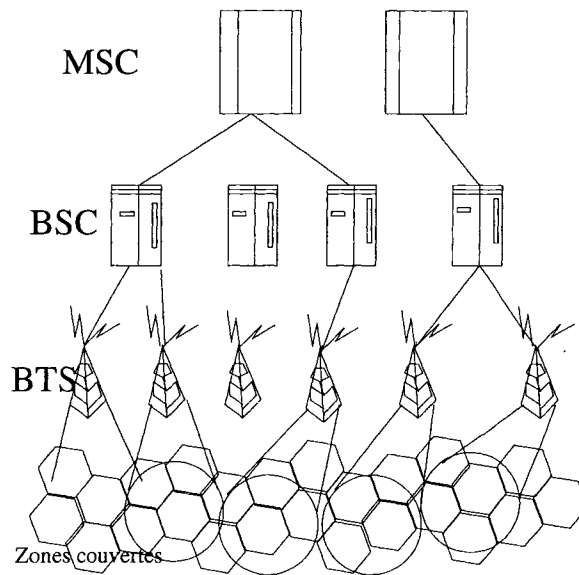


FIG. 1.1 – Réseau cellulaire

-
1. (kilobits par seconde)
 2. (Wireless Code Division Multiple Access)

1.1.1 Architecture d'un réseau GSM

Un réseau GSM se présente sous la forme d'une structure hiérarchisée composée de 3 niveaux (figure 1.2):

- le sous-système radio BSS (Base Station Sub-System) qui assure les transmissions radioélectriques et gère la ressource radio;
- le sous-système d'acheminement appelé réseau fixe NSS (Network Sub-System) qui comprend l'ensemble des fonctions nécessaires à l'établissement des appels et à la mobilité;
- le sous-système d'exploitation et de maintenance OSS (Operation Sub-System) qui permet à l'exploitant d'administrer son réseau.

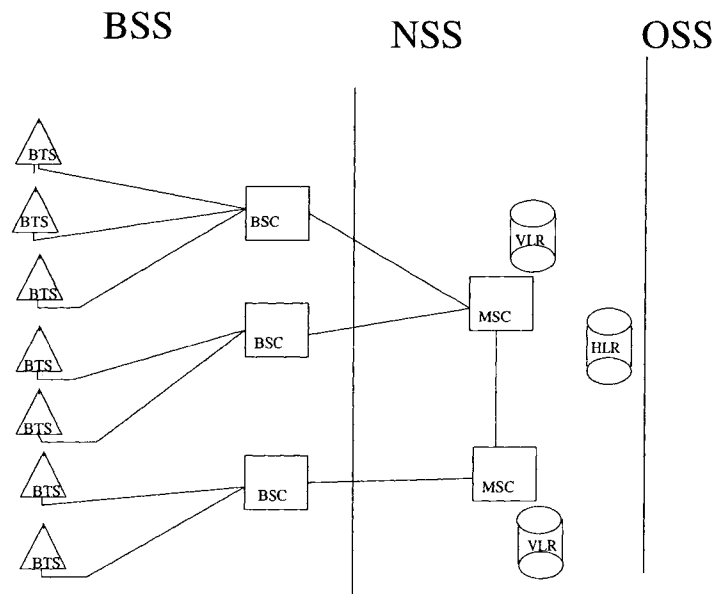


FIG. 1.2 – Architecture d'un réseau GSM

Le sous-système radio se compose de:

***BTS** (*Base Transceiver Station*) qui sont des émetteurs-récepteurs, assurant l'interface

entre la partie mobile et la partie fixe. C'est à ce niveau que les demandes d'appels sont détectées, que les communications sont établies et interrompues.

***BSC** (*Base Station Controller*) qui contrôlent un ensemble de BTS et permettent une première concentration des circuits.

Les équipements qui composent le sous-système d'acheminement sont:

* les **MSC** (*Mobiles-services Switching Center*), commutateurs qui représentent les centres de commutation assurant l'interconnexion avec le réseau fixe et le routage.

* les **HLR** (*Home Location Register*), bases de données qui gèrent les abonnés. Elles mémorisent les principales caractéristiques de chaque abonné (l'identité internationale, le numéro d'annuaire et le profil de l'abonnement);

* les **VLR** (*Visitor Location Register*), bases de données qui mémorisent les données d'abonnement des abonnés en visite dans une zone géographique.

Dans ce qui suit, nous allons donner une description des fonctionnalités des différents équipements d'un réseau GSM et parler des différentes étapes d'une communication. Pour de plus amples détails nous vous recommandons le livre de Xavier Lagrange, P.Goldlewski et S.Tabbane [50].

1.1.2 Systèmes radiomobiles et concepts cellulaires

Station Mobile et Station de Base: BTS

L'objectif principal d'un système radiomobile est de permettre l'accès au réseau téléphonique à partir d'un terminal portatif, communément appelé portable, sur toute l'étendue du territoire à couvrir. Une liaison radioélectrique est utilisée entre le terminal et le réseau. Plusieurs systèmes existent et différentes bandes de fréquences sont utilisées dans chaque système. On retrouve des bandes de fréquences de 450 Mhz, de 900 Mhz ou de 1800 Mhz. Plusieurs BTS sont installées sur toute l'étendue de la zone

à couvrir pour assurer une qualité de service suffisante afin de limiter la puissance des émetteurs. De ce fait, le terminal portatif est toujours à une distance proche d'au moins une BTS. La zone couverte par antenne est appelée Cellule. Ainsi le secteur à couvrir est découpé en plusieurs cellules contiguës. À chaque cellule est affecté un certain nombre de canaux de fréquences qui sont réutilisés dans des cellules plus éloignées afin d'économiser le spectre. On appellera station mobile ou plus couramment Mobile (Mobile Station, MS) tout équipement terminal capable de communiquer avec le réseau.

Commutateurs et Contrôleurs de Stations de Base

Le sous-système réseau (NSS) comprend des commutateurs et des bases de données. Le commutateur du service mobile (MSC) est composé généralement d'un commutateur classique auquel ont été ajoutées de nombreuses de fonctions telles que celles relatives à la gestion des ressources radio. Dans la plupart des réseaux, on trouve un troisième élément : le Contrôleur de Stations de Base (BSC). Le BSC a pour fonction de gérer les ressources radio. Il supervise les accès et gère les communications (contrôle de puissance, aspects radio du handover). Les commutateurs des réseaux mobiles constituent l'interface entre les abonnés mobiles et le réseau téléphonique commuté public (RTCP). Les MSC assurent les fonctions telles que la signalisation, la commutation, la conversion analogique/numérique, la détection de décroché/raccroché du mobile et la localisation.

Itinérance et handover

La notion d'itinérance ou de "roaming" consiste en la liberté de déplacement de l'abonné d'un réseau de radiotéléphonie. Cette notion d'itinérance implique la possibilité qu'un abonné, en déplacement pendant une communication, donc en liaison avec une station de base, puisse changer de cellule, donc de station de base. Il est nécessaire alors, dans ce cas, de maintenir la continuité dans le service alors que l'abonné se déplace. C'est

le transfert intercellulaire ou Handover (hand-off dans certains pays).

1.1.3 Les services

La Station Mobile

Dans le système GSM, l'abonnement est séparé du terminal utilisé. Dans les anciens réseaux de radiotéléphonie, le numéro par lequel l'abonné pouvait être appelé était mémorisé dans l'équipement terminal et physiquement lié à cet équipement. Dans GSM les terminaux sont banalisés, ne possèdent aucune configuration et sont inutilisables tels quels. Des cartes à puces appelées carte **SIM** (Subscriber Identity Module) leur sont adjointes. Cette carte porte en mémoire toutes les caractéristiques de l'abonnement, de l'environnement d'utilisateur (liste de numéros abrégés, mot de passe personnel, dernier numéro appelé etc...), l'environnement radio (caractéristiques du dernier réseau sur lequel l'utilisateur s'est connecté etc...).

Le réseau GSM est le premier du genre à faire la différence entre un numéro d'abonné et une identité. L'identité **IMSI** (International Mobile Subscriber Identity) permet de repérer un abonné de manière unique. Elle n'est pas connue de l'abonné. Le numéro d'abonné **MSISDN** (Mobile Station ISD Number) représente le numéro par lequel le mobile est appelé. La correspondance entre ces numéros sera faite par une base de données. Cette différenciation entre les deux numéros permet à l'opérateur de fabriquer des cartes SIM standards avec les paramètres classiques d'abonnement. Ainsi pour un client qui voudrait s'abonner, il suffit de lui fournir une carte SIM et de déclarer l'abonné dans la base de données (HLR) qui va lui affecter un numéro d'abonné. Plusieurs téléservices sont offerts par GSM: la téléphonie, la transmission de messages courts et la transmission de télécopies. D'autres services supplémentaires comme le renvoi d'appel, le double appel, appel en conférence etc... sont aussi offerts.

Fonction de sécurité

L'utilisation des fréquences radio pour acheminer les communications entraîne des risques d'utilisation frauduleuse du réseau. Pour se prémunir de cela, la confidentialité et la sécurité ont été particulièrement étudiées dans le système GSM. Un algorithme de chiffrement est activé pour assurer la confidentialité des communications et des données transmises. Il permet d'empêcher un intrus écoutant le canal radio, de décoder le numéro de téléphone appelé, puis d'entendre la conversation. Comme, il est nécessaire d'envoyer l'identité de l'appelé par voie radio, l'opérateur alloue une identité temporaire, **TMSI** (Temporary Mobile Subscriber Identity) pour rendre impossible le suivi à la trace d'un abonné.

L'introduction de la mobilité dans les réseaux a nécessité la définition de nouvelles fonctions par rapport aux réseaux fixes classiques. Le système doit connaître à tout moment la localisation de chaque terminal mobile pour pouvoir le joindre (fonction d'itinérance). Contrairement aux réseaux fixes où un numéro correspond à une adresse physique fixe (prise de téléphone) le numéro d'un terminal mobile devient du point de vue du réseau, une adresse logique constante à laquelle il faut faire correspondre une adresse physique qui, elle, varie au gré des déplacements, [50].

1.1.4 Fonction des équipements

Le concept cellulaire repose sur une propriété essentielle des ondes radio de s'atténuer en fonction de la distance. Une fréquence utilisée par un émetteur-récepteur peut, grâce à cette propriété, être réutilisée par un autre, à condition d'être à une certaine distance du premier. L'utilisation d'un même canal de fréquences dans deux cellules voisines entraîne des interférences qui auront pour conséquence la dégradation du service.

Fonction de la BTS

La BTS, figure 1.3, est un ensemble d'émetteurs-récepteurs appelés TRX. Elle a la charge de la transmission radio: modulation, démodulation, égalisation, codage correcteur d'erreur. Elle gère toute la couche physique: multiplexage, saut de fréquence lent et chiffrement. C'est elle aussi qui gère l'échange de signalisation entre les mobiles et l'infrastructure. Pour vérifier qu'une communication en cours se déroule bien, elle réalise les mesures radio nécessaires pour cela. Ces mesures ne sont pas exploitées par la BTS mais directement transmises aux BSC. Les opérateurs possèdent plusieurs sortes d'antennes pour réaliser un réseau régulier: des antennes omnidirectionnelles, sectorielles, réseaux ou adaptatives.

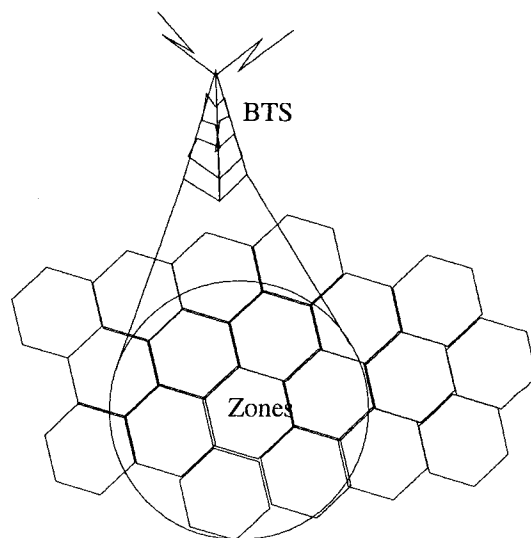


FIG. 1.3 - Configuration d'une BTS.

Fonction du BSC

Il est l'organe "intelligent" du BSS qui assure les fonctions d'allocation de canaux de communication, du traitement des niveaux d'émission (BTS et mobiles). C'est un commutateur qui gère la concentration de circuits routés vers les MSC et la gestion des handover, figure 1.4.

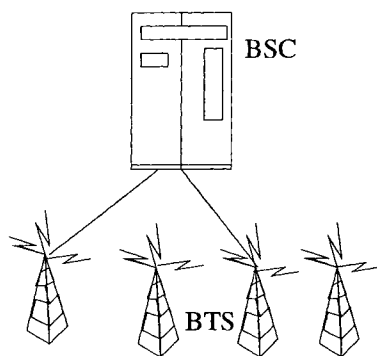


FIG. 1.4 – Configuration d'un BSC

Fonction du MSC

Il gère l'établissement des communications entre un mobile et un autre MSC, la transmission des messages courts et exécute certains handover. Il est toujours associé à un VLR qui mémorise les données d'abonnement des abonnés présents dans une zone. Il peut posséder une fonction passerelle, GMSC (Gateway MSC), qui est activée au début de chaque appel d'un abonné fixe vers un abonné mobile. Le VLR est aussi appelé "enregistreur de localisation d'accueil". L'ensemble MSC-VLR peut gérer une centaine de

milliers d'abonnés. Les données mémorisées par le VLR sont similaires aux données du HLR, mais concernent seulement les abonnés mobiles présents dans une zone de localisation donnée et aussi l'identité temporaire TMSI.

La séparation matérielle entre VLR et MSC proposée par la norme n'est que rarement respectée. Certains constructeurs, pour simplifier les dialogues nécessaires pour l'établissement d'un appel, intègrent le VLR dans la MSC.

1.1.5 Acheminement des appels

Deux types d'appels sont présentés pour illustrer les interactions des équipements du réseau: l'appel d'un abonné du réseau GSM vers un abonné du réseau RTCP (Réseau Téléphonique Commuté Public), l'appel d'un abonné du réseau RTCP vers un abonné du réseau GSM. L'appel d'un abonné GSM vers un autre abonné GSM sera la combinaison des appels sortant de GSM vers le réseau RTCP et entrant de RTCP vers GSM.

Pour émettre un appel, un abonné du réseau GSM compose le numéro de son correspondant et le valide, sa demande arrive à la BTS de sa cellule, puis elle traverse le BSC pour aboutir sur un commutateur MSC, où l'abonné est d'abord authentifié puis son droit d'usage vérifié. Le commutateur transmet alors l'appel au réseau public et demande au contrôleur BSC de réserver un canal pour la future communication. Lorsque l'abonné demandé décroche son téléphone, la communication est établie.

Quand un abonné du réseau public appelle un abonné du réseau GSM, les traitements sont plus nombreux et différents. Lorsqu'un abonné du réseau public compose un numéro, à priori aucun contrôle n'est exercé par le réseau, excepté le cas d'une éventuelle restriction sur les appels sortants. Le numéro demandé est analysé par le commutateur dont dépend l'abonné, puis la demande est aiguillée vers le réseau GSM pour interroger le HLR du numéro d'annuaire demandé, afin de localiser le destinataire. Quand le demandé est

accessible, le réseau interroge le VLR dans lequel il est inscrit pour connaître la cellule et le BSC de la zone, qui pourrait le joindre. Le réseau est alors en mesure de commander la sonnerie du terminal demandé et de réserver un chemin entre l'appelant et l'appelé. Afin de commander la sonnerie du terminal de l'appelé, le BSC de la zone fait diffuser un avis d'appel par l'ensemble des BTS de la zone vers le terminal demandé, lequel écoute le réseau et reconnaît son numéro, ce qui active sa sonnerie. C'est seulement après la prise de ligne par l'abonné appelé que le réseau affecte définitivement les ressources réservées à la communication. Dans le même temps les bases de données VLR et HLR mettent à jour l'état de l'abonné.

1.1.6 Gestion de l'itinérance

Dans les systèmes de radiotéléphonie cellulaire, il est nécessaire de connaître à tout instant la position d'un abonné pour pouvoir le joindre. D'où l'idée de mettre en place un mécanisme capable de gérer la localisation: c'est la gestion de l'itinérance.

La gestion de l'itinérance fait intervenir deux mécanismes: la localisation qui consiste à trouver la position, si possible, d'un mobile à tout moment. La recherche (ou Paging) qui consiste à envoyer des messages d'avis de recherche dans les cellules où le système avait précédemment localisé l'abonné.

Une connaissance exacte de la position du mobile va induire une charge de recherche faible tandis que la charge de localisation sera grande. Inversement une connaissance imprécise de la position du mobile va entraîner un coût de recherche élevé avec un coût de localisation faible.

Les principales méthodes de gestion de l'itinérance sont:

- une méthode sans procédure de localisation: dans certains systèmes où la zone à couvrir est peu étendue ou dans les systèmes de radiomessagerie unidirectionnelle,

aucune gestion de l'itinérance n'est assurée. Donc aucune poursuite n'est effectuée et lorsqu'un utilisateur est appelé, le système lance des avis de recherche sur tout le réseau.

- une méthode avec localisation: la méthode précédente reste inadaptée dans le cas de système de communication bidirectionnelle desservant de nombreux usagers. Pour palier à cela, des zones de localisation qui regroupent un certain nombre de cellules sont créées. De ce fait, pour joindre un abonné, le système envoie un avis de recherche dans les cellules de la dernière zone dans laquelle le mobile s'était signalé. Ainsi le réseau garde toujours en mémoire l'adresse de la zone de localisation courante du mobile.

Plusieurs variantes de méthodes de mise à jour de localisation peuvent être mises en oeuvre: la mise à jour manuelle (c'est l'abonné lui-même qui doit informer le système de sa position manuellement), la mise à jour périodique (la mise à jour est faite de manière périodique par le terminal) et la mise à jour sur changement de zone de localisation (la localisation se fait sous forme d'une voie balise)³.

1.1.7 Réutilisation des fréquences

Ce mécanisme repose sur la propriété d'atténuation des ondes radioélectriques qui fait qu'une fréquence utilisée dans une zone donnée peut-être réutilisée dans une autre zone située à une certaine distance. Les cellules utilisant les mêmes fréquences sont appelées co-cellules. Pour mettre en oeuvre le mécanisme de réutilisation de fréquences,

3. Une voie balise est un canal utilisé par le système pour diffuser des informations permettant aux mobiles d'acquiescer les paramètres système (synchronisation, fréquence, emplacement des canaux). La voie est dite descendante si le sens de transmission est de la BTS vers le mobile et montante dans le sens inverse. Une voie balise portant le numéro de la zone de localisation est diffusée par chaque station de base. Le mobile écoute périodiquement cette voie et stocke en permanence le numéro de zone de localisation. Ainsi si le mobile s'aperçoit que le numéro reçu est différent du numéro précédemment stocké, il signale sa nouvelle position au réseau.

la bande allouée au système est partagée en sous-bandes. Chaque sous-bande est allouée à une station de base particulière et réutilisée dans ses co-cellules.

Dans la prochaine section nous faisons un survol des travaux de modélisation et d'optimisation effectués dans le domaine des télécommunications.

1.2 État de l'art

En général, les principaux sujets d'optimisation traités dans les réseaux de télécommunications cellulaires concernent la conception topologique et l'allocation des fréquences. La conception topologique est souvent traitée dans la littérature suivant deux formulations: une première qui est une synthèse de la structure du réseau et une deuxième qui utilise les flots.

1.2.1 Modèle classique de synthèse

Avec le déploiement de plusieurs équipements pour gérer la couverture et rendre possible la réutilisation des fréquences due à une limitation du spectre, de nouvelles questions se posent. D'abord combien d'équipements doit-on installer et où les placer? Du point de vue de la programmation mathématique ce problème consiste, étant donné un ensemble de sites prédéfinis pour l'installation des équipements, à sélectionner un sous-ensemble de sites à activer et à déterminer leur plan de connexion, de coût minimal capable de gérer la demande de trafic sur toute la région à couvrir. Cette formulation est connue sous l'appellation Network Design Problem. L'autre question est de déterminer comment maximiser la réutilisation de fréquences en maintenant un certain seuil d'interférences entre les canaux de fréquences, c'est le Frequency Assignment Problem.

Dans la littérature les travaux sur la conception topologique des réseaux de télécommunication cellulaires (CTRTC) de type GSM, dans lesquels la couverture des zones peut être faite par plusieurs antennes ne sont pas nombreux. Mazzini et Mateus dans [59] et [60] ont eu à traiter un problème similaire en y intégrant l'allocation de fréquences. Leur problème associe, dans un même modèle, un problème de localisation de BTS (Location Problem), un problème d'allocation de fréquences (Frequency Channel Assignment) et un problème de conception de la topologie du réseau (Topological Network Design). Les auteurs proposent un algorithme basé sur la relaxation lagrangienne. Leur stratégie consiste à calculer une borne inférieure, évaluée à partir de la relaxation lagrangienne combinée avec un algorithme de sous-gradient améliorée à travers une technique de Branch-and-Bound qui prend en considération les aspects spécifiques du problème, et une borne supérieure tirée d'une heuristique. Dans leur modèle, les BTS sont directement connectées aux commutateurs ou par l'intermédiaire de "Hub"⁴. Dans [67], Shahbaz développe une heuristique pour la conception topologique de réseaux cellulaires. L'auteur considère un modèle qui traite des différents aspects intervenant dans la topologie d'un réseau cellulaire de type GSM et minimise la somme des coûts relevant du déploiement des équipements. Le modèle est défini en tenant compte du découpage en zones de localisation. L'auteur propose deux approches de résolution basées sur des heuristiques: une première qui décompose le modèle en sous-problèmes qu'il résout de manière séquentielle. Le processus génère une sous-solution à chaque étape et réduit en même temps le nombre de variables à traiter. Les sous-solutions de chaque sous-problème sont utilisées en données d'entrée au problème suivant et de ce fait la configuration du réseau est effectuée étape par étape. Les sites candidats à l'installation des BSC sont d'abord déterminés par un algorithme de centre de gravité (COG), ensuite une heuristique est utilisée pour affecter les BTS aux BSC choisis dans l'étape précédente. La même procédure est ensuite utilisée pour déterminer les candidats MSC à choisir et à affecter

4. Point de jonction

aux BSC. L'autre approche applique une méthode basée sur le recuit simulé au modèle global.

L'aspect fiabilité du réseau, même si peu souvent pris en considération dans beaucoup de travaux, est très important pour la conception de réseaux de télécommunication. Peter Kubat et Amitava Dutta traitent dans [25] d'un modèle CTRTC dans lequel une cellule, désignant l'antenne et la cellule proprement dite, peut être connectée à la fois à un ou plusieurs "Hubs" distincts. Ceci permet d'assurer un minimum de fiabilité au réseau. En cas de panne d'une liaison, la cellule pourra basculer son trafic sur les autres liaisons possibles. Ils considèrent un ensemble de sommets constitués de "Hubs" et d'un MTSO⁵ sous la forme d'un anneau où les arcs ont les mêmes caractéristiques en terme de capacité. Avec la forte croissance de la demande dont le taux varie de manière non uniforme dans les différentes zones dans le temps, il est important donc de trouver un outil capable d'anticiper l'évolution du trafic. Dans [25], les auteurs proposent différentes formulations du modèle de conception de réseaux multi-périodes. Une relaxation lagrangienne suivie d'une heuristique est présentée et comparée avec des techniques de Branch-and-Bound et de Branch-and-Cut. Leur heuristique s'est avérée plus efficace dans les modèles de grande taille avec contrainte de capacité.

Dans les réseaux cellulaires, le système, avant l'arrivée d'un appel, essaie de localiser l'appelé en recherchant la BTS qui couvre sa cellule parmi un ensemble de BTS. Cette recherche est dénommée "paging" et l'ensemble des BTS, au niveau desquelles cette recherche est faite, est appelé zone de localisation. Le changement de zone de localisation nécessite un enregistrement du mobile pour une mise à jour dans le système de gestion des localisations. La taille de ces zones de localisation est importante dans la mesure où il permet de réduire les coûts de recherche et d'enregistrement. Très rarement pris en considération, le découpage en zones de localisation n'est pas inclus en général dans la conception des réseaux. Dans [8], les auteurs développent un modèle de conception topo-

5. Mobile Telephone Switching Office

logique de réseaux cellulaires qui intègre la détermination des zones de localisation. Le coût de la charge radio développée est considéré pour définir le coût de la recherche et de l'enregistrement. L'idée de décomposition a été aussi retenue par certains auteurs dans le cadre de la conception des réseaux d'accès locaux pour lesquels on retrouve la structure arborescente du concentrateur jusqu'aux usagers, mais sans la notion de couverture de cellules, [65] et [5].

1.2.2 Formulation par les flots

Le problème de conception topologique des réseaux de télécommunication peut aussi être traité avec une formulation par les flots ou un multiflot. Dans ce cas, certains paramètres comme la quantité de flot à acheminer à travers un arc ou la quantité de trafic que peut gérer un équipement sont à définir.

Holmberg a étudié le problème de conception de réseaux suivant deux aspects différents. Dans [40], il traite avec J. Hellstrand d'un modèle multiflot avec une origine et une destination pour chaque commodité sans limite de capacité au niveau des arcs. Dans [42], Holmberg et Yuan traitent le même problème mais cette fois avec une limitation de capacité sur les arcs. Les deux modèles sont résolus par une même approche basée sur une heuristique lagrangienne avec un algorithme de Branch-and-Bound. L'heuristique lagrangienne combine une technique de relaxation lagrangienne avec un algorithme de sous-gradient. Dans les deux cas ce sont les contraintes de conservation de flot qui sont relaxées.

On retrouve aussi dans la littérature beaucoup de travaux sur l'affectation des canaux de fréquences, on peut citer [44], [70] et [28].

La plupart des travaux sur les réseaux cellulaires portent actuellement sur les réseaux de type UMTS. Ce système nécessite l'installation de nouveaux équipements capables de gérer le trafic. Des outils d'optimisation doivent être développés pour les intégrer dans les

structures existantes sans apporter de modifications majeures. Pour faire face à l'insertion de nouvelles applications (image, musique, vidéo) dans les réseaux, le système GSM a depuis quelques années commencé à se tourner vers le système GPRS.

Le problème de conception topologique de réseaux de troisième génération, UMTS, a été abordé dans [27]. Les auteurs traitent d'un modèle qui ressemble un peu à celui que nous traitons dans le cadre de cette thèse en ce sens que les équipements du réseau considéré ont les mêmes fonctionnalités que ceux utilisés dans les réseaux GSM. Il s'agit à part la BTS, du Cell Site Switch (CSS) qui gère un ensemble de BTS, et du LE (Local exchange) qui connecte les BTS au réseau soit directement ou à travers un CSS. Les auteurs optimisent l'interconnexion d'un réseau qui a une structure multi-niveaux de type étoile. Un algorithme de Branch-and-Cut est utilisé pour résoudre le modèle qui consiste à déterminer les équipements à activer (CSS et LE) et un plan pour les relier aux BTS (fixées à l'avance). Steven Chamberland a aussi développé dans [17] une heuristique efficace basée sur la recherche tabou pour l'expansion d'un réseau cellulaire de type UMTS.

Tout au long de ce travail, nous appelons réseau l'ensemble constitué par les MSC, les BSC, les BTS et les différentes zones à couvrir. L'aspect hiérarchique de ces réseaux nous permet d'utiliser le terme sous-réseau en considérant uniquement un niveau. Le sous-réseau 1 désigne le niveau BTS-Zones, le sous-réseau 2 le niveau BSC-BTS et le sous-réseau 3 le niveau MSC-BSC.

Dans le prochain chapitre, nous allons définir les différents éléments qui constituent notre modèle de synthèse à savoir les variables et les contraintes et formuler le modèle que nous résolvons par une méthode de décomposition de Benders. En fin de chapitre, nous présentons quelques résultats numériques obtenus qui justifient l'efficacité de la méthode proposée.

Chapitre 2

Modèle classique de la synthèse du réseau et résolution exacte

À notre connaissance la conception topologique s'effectue, la plupart du temps, sans l'utilisation d'outils d'optimisation, elle est souvent faite à la main par des ingénieurs au sein des compagnies de télécommunication. Cette méthode, même si elle permet de concevoir un réseau acceptable, ne permet pas une gestion optimale des ressources disponibles d'où notre motivation pour proposer un outil d'aide à la décision permettant de concevoir un réseau. L'approche de conception ne tient pas compte de l'allocation de fréquences contrairement à ce que l'on retrouve dans la littérature, [59] et [60], et considère la structure globale d'un réseau cellulaire.

Notre objectif est de sélectionner, à partir d'un ensemble de sites prédéfinis pour l'installation des équipements du réseau, un sous-ensemble à coût minimal qui permet de satisfaire la demande. Deux types de variables vont composer le modèle : des variables binaires servant à l'activation des arcs ou des équipements, et des variables continues représentant la couverture des zones. C'est un modèle qui peut donc être

séparé en deux types de problèmes: un problème de sélection des équipements et de leur connexion et un problème de couverture des zones par les BTS. Ceci justifie l'utilisation de la méthode de décomposition de Benders, [12], pour résoudre le modèle. C'est une méthode très efficace pour ce type de problème.

Dans ce qui suit, nous allons aborder la formulation du modèle, la description de la méthode de Benders dans le cas linéaire et son application au problème de conception topologique d'un réseau de télécommunication cellulaire.

2.1 Formulation du modèle

2.1.1 Hypothèses et Notations

Hypothèses

Les hypothèses suivantes vont être considérées tout au long de ce travail.

- * La demande à l'intérieur de chaque cellule est déjà évaluée par des études adéquates et est supposée connue.
- * La configuration de tous les équipements est prédéfinie, c'est-à-dire que les composants (matériels ou logiciels) spécifiques à chaque équipement sont donnés.
- * La capacité de chacun des équipements est supposée connue à l'avance.
- * Les ensembles des sites prédéfinis pour l'installation des différents types d'équipements sont donnés.

Une BTS est composée d'un certain nombre d'antennes (ayant des configurations précises) et d'un équipement fixe. La configuration d'une BTS est donnée; le terme antenne ou BTS désigne l'ensemble constitué par l'équipement fixe et les antennes qui le composent.

Notations

Les notations ci-dessous seront utilisées tout au long de ce travail. À noter que dans ces définitions l'indice t signifie le site prédéfini pour l'installation de l'équipement : par exemple le terme antenne ou BTS a , indique le site a prédéfini pour l'installation d'une antenne ou d'une BTS .

Ensembles

A , B et M constituent respectivement les ensembles des sites prédéfinis pour l'installation des BTS, BSC et MSC.

Des sous-ensembles de A , B et M sont définis pour indiquer les relations qui existent entre les équipements de types différents. Le terme voisinage est utilisé pour indiquer si un équipement donné peut être connecté ou peut couvrir un autre équipement. Par exemple : l'ensemble des BTS qui sont dans le voisinage d'une zone z est constitué des BTS qui peuvent couvrir une partie ou toute la zone z . De même l'ensemble des BTS qui sont dans le voisinage du BSC b est constitué de toutes les BTS qui peuvent être reliées au BSC b .

Il s'agit de:

A_z = ensemble des BTS qui peuvent couvrir tout ou une partie de la zone z .

B_z = ensemble des BSC qui peuvent connecter une BTS appartenant à A_z .

M_z = ensemble des MSC qui peuvent connecter un BSC appartenant à B_z .

Z_a = ensemble des zones qui peuvent être couvertes par l'antenne a .

B_a = ensemble des BSC qui peuvent gérer l'antenne a .

A_b = ensemble des antennes qui peuvent être reliées au BSC b .

B_m = ensemble des BSC qui peuvent être connectés au MSC m .

M_b = ensemble des MSC qui peuvent être connectés au BSC b .

Paramètres

E_a , E_b et E_m sont respectivement les coûts fixes d'installation d'une BTS a , d'un BSC b et d'un MSC m .

d_z = quantité de trafic demandée dans la zone z .

r_z = revenu engendré par une unité de demande pour une zone z .

l_{ab} = coût d'une liaison entre un BTS a et une BSC b .

l_{bm} = coût d'une liaison entre un BSC b et un MSC m .

Q_m = nombre maximal de BSC que peut connecter un MSC m .

Q_b = nombre maximal de BTS que peut connecter un BSC b .

q_a = quantité maximale de trafic que la BTS a peut couvrir.

Variables

- x_{za} est la variable dénotant la portion du trafic dans la zone z captée par une BTS a ($x_{za} = 1$ si la BTS a couvre entièrement la zone z et $x_{za} < 1$ s'il existe une partie de la zone z qui est couverte par d'autres BTS).

- y_m , y_b et y_a sont des variables binaires indiquant respectivement si un site est choisi pour l'installation d'un équipement MSC, BSC et BTS:

$$y_a = \begin{cases} 1 & \text{si le site } a \text{ est choisi pour installer la BTS } a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y_b = \begin{cases} 1 & \text{si le site } b \text{ est choisi pour installer le BSC } b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y_m = \begin{cases} 1 & \text{si le site } m \text{ est choisi pour installer le MSC } m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- u_{ab} et u_{bm} sont des variables binaires indiquant si un lien existe entre deux équipements.

$$u_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si la BTS } a \text{ est connectée au BSC } b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$u_{bm} = \begin{cases} 1 & \text{si le BSC } b \text{ est connecté au MSC } m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1.2 Définition de la fonction économique

L'objectif de tout opérateur de télécommunication, en fournissant du service, est de tirer le maximum de profit généré par la couverture des zones pour rentabiliser les investissements. La mise en place des équipements entraîne des coûts d'installation et de connexion tandis que l'exploitation du réseau va générer des revenus. Force est de reconnaître qu'une étude préalable est nécessaire pour optimiser ce profit, d'où l'objet de notre étude qui consiste donc à concevoir la topologie du réseau qui génère un profit maximal.

La fonction économique va donc être composée de deux termes:

- * le revenu total engendré par la couverture des zones:

$$R^T x = \sum_{a \in A} \sum_{z \in Z_a} r_z d_z x_{za}$$

x étant le vecteur des variables de couverture des différentes zones, $x = (x_{za})_{z \in Z, a \in A}$.

R représente le vecteur des revenus engendrés par la couverture des zones.

- * la somme des coûts encourus par le déploiement des équipements:

- coût d'installation des équipements:

$$C_1^T y = \sum_{a \in A} E_a y_a + \sum_{b \in B} E_b y_b + \sum_{m \in M} E_m y_m$$

$$C_1^T y = \sum_{a \in A} E_a y_a + \sum_{b \in B} E_b y_b + \sum_{m \in M} E_m y_m$$

y étant le vecteur des variables d'installation d'équipements,

$$y = (y_a, y_b, y_m)_{a \in A, b \in B, m \in M}$$

C_1 vecteur des coûts d'installation des équipements.

- coût de connexion des équipements du réseau:

$$C_2^T u = \sum_{b \in B} \sum_{a \in A_b} l_{ab} u_{ab} + \sum_{m \in M} \sum_{b \in B_m} l_{bm} u_{bm}$$

u étant le vecteur des variables d'installation d'arcs du réseau,

$$u = (u_{ab}, u_{bm})_{a \in A, b \in B, m \in M}$$

C_2 vecteur des coûts de liaison des équipements.

Il s'agit dans cette étude de minimiser $P(x, u, y)$ avec:

$$P(x, u, y) = C(u, y) - R(x), \text{ où } C(u, y) = C_1^T y + C_2^T u.$$

Notons que le coût de couverture des zones n'est pas pris en compte car les liaisons entre les BTS et les zones à couvrir sont faites à l'aide d'ondes radio-électriques. Cette couverture dépend des échanges entre l'utilisateur dont l'appareil est en mode veille et la BTS qui capte son signal. Les coûts de maintenance et d'entretien du réseau ne sont pas aussi pris en compte dans cette étude.

2.1.3 Définition des contraintes

Nous allons définir trois ensembles de contraintes qui caractérisent la couverture des zones, l'installation des équipements et la topologie du réseau.

Contraintes de couverture des zones

1. Chaque zone z doit être totalement couverte:

$$\sum_{a \in A_z} x_{za} = 1, \quad \forall z \in Z.$$

Dans ce cas, la demande est totalement satisfaite et $R^T x = C^{te}$.

2. La part de la demande de trafic couverte par une antenne ne doit pas dépasser sa capacité:

$$\sum_{z \in Z_a} d_z x_{za} \leq q_a y_a, \quad \forall a \in A.$$

Cette contrainte sert aussi de couplage entre les variables y_a et x_{za} . Une BTS non activée ne peut pas couvrir de zone.

3. La part x_{za} de la demande de la zone z couverte par l'antenne a représente un pourcentage donc est au plus égale à 1:

$$x_{za} \leq 1, \quad \forall z \in Z, \forall a \in A_z.$$

Contraintes d'installation d'équipements

4. Chaque zone z est gérée par au moins une BTS:

$$\sum_{a \in A_z} y_a \geq 1, \quad \forall z \in Z.$$

5. $y_a = 0$ signifie la non installation de l'équipement a et entraîne la non existence de lien avec un BSC. Si $y_a = 1$, l'installation d'une antenne implique sa connexion avec un unique BSC. Donc l'activation de tout site a prédéfini pour l'installation d'une BTS, équivaut à l'existence d'une liaison entre a et au plus un BSC:

$$y_a = \sum_{b \in B_a} u_{ab}, \quad \forall a \in A.$$

6. Si une BTS a est choisie, il existe au moins un BSC b choisi qui puisse la connecter:

$$y_a \leq \sum_{b \in B_a} y_b, \quad \forall a \in A.$$

7. $y_b = 0$ signifie la non installation d'un BSC b et implique la non existence de lien avec un MSC. Si $y_b = 1$, l'installation du BSC b implique sa connexion avec

un unique MSC. Donc l'activation de tout BSC $b \in B$ équivaut à l'existence d'une liaison entre b et au plus un MSC m :

$$y_b = \sum_{m \in M_b} u_{bm}, \quad \forall b \in B.$$

8. Il existe au moins un BSC $b \in B_z$ qui connecte au moins une antenne $a \in A_z$:

$$\sum_{b \in B_z} y_b \geq 1, \quad \forall z \in Z.$$

9. Il existe au moins un MSC m qui connecte au moins un BSC $b \in B_z$:

$$\sum_{m \in M_z} y_m \geq 1, \quad \forall z \in Z.$$

10. Si un BSC b est choisi alors il existe au moins un MSC m choisi qui puisse le connecter:

$$y_b \leq \sum_{m \in M_b} y_m, \quad \forall b \in B.$$

Contraintes de topologie du réseau

11. Pour chaque zone z , il existe au moins un arc reliant un élément de A_z et un élément de B_z pour que celle-ci soit couverte:

$$\sum_{b \in B_z} \sum_{a \in A_z} u_{ab} \geq 1, \quad \forall z \in Z.$$

12. Une BTS a ne peut être connectée qu'à un unique BSC b :

$$\sum_{b \in B_a} u_{ab} \leq 1, \quad \forall a \in A.$$

13. Le nombre de liaisons entre un BSC b et les BTS qui sont dans son voisinage ne peut être supérieur à sa capacité:

$$\sum_{a \in A_b} u_{ab} \leq Q_b y_b, \quad \forall b \in B.$$

14. Si un BSC b est activé alors il existe au moins un arc le reliant à une BTS a :

$$y_b \leq \sum_{a \in A_b} u_{ab}, \quad \forall b \in B.$$

15. Si un MSC m est activé alors il existe au moins un arc le reliant à un BSC b :

$$y_m \leq \sum_{b \in B_m} u_{bm}, \quad \forall m \in M.$$

16. Le nombre de liaisons entre un MSC m et les BSC qui sont dans son voisinage ne peut être supérieur à sa capacité:

$$\sum_{b \in B_m} u_{bm} \leq Q_m y_m, \quad \forall m \in M.$$

17. Un lien existe entre une BTS a et un BSC b s'il existe au moins un lien entre un MSC m et le BSC b :

$$u_{ab} \leq \sum_{m \in M_b} u_{bm}, \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

18. Un lien existe entre un MSC m et un BSC b s'il existe au moins un lien entre une BTS a et le BSC b :

$$u_{bm} \leq \sum_{a \in A_b} u_{ab}, \quad \forall b \in B, \quad \forall m \in M.$$

19. Un BSC b ne peut être connecté qu'à un seul MSC m :

$$\sum_{m \in M_b} u_{bm} \leq 1, \quad \forall b \in B.$$

20. L'existence d'un arc implique l'installation des équipements qui forment ses extrémités:

$$u_{ab} \leq y_a y_b, \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B,$$

$$u_{bm} \leq y_b y_m, \quad \forall b \in B, \quad \forall m \in M.$$

Contraintes sur les variables

21. La variable de couverture d'une zone doit être positive:

$$x_{za} \geq 0, \forall z \in Z, \forall a \in A_z.$$

22. Les variables d'installation d'équipements sont binaires:

$$y_a, y_b, y_m \in \{0,1\}, \forall a \in A, \forall b \in B, \forall m \in M.$$

23. Les variables d'activation d'arcs sont binaires:

$$u_{ab}, u_{bm} \in \{0,1\}, \forall a \in A, \forall m \in M, \forall b \in B.$$

Remarque 1

Généralement la contrainte $\sum_{a \in A_z} x_{za} = 1, \forall z \in Z$ devrait être remplacée par les contraintes suivantes:

$$\sum_{a \in A_z} x_{za} \leq 1, \quad \forall z \in Z \quad (R.1),$$

$$\sum_{a \in A_z} x_{za} \geq 0.98, \quad \forall z \in Z \quad (R.2).$$

Les contraintes (R.1) et (R.2) signifient qu'une part minimale de trafic de chaque zone doit être couverte afin d'offrir une meilleure qualité de service. Le taux de couverture minimale est fixé par l'opérateur suivant la qualité de service visée. La valeur 0.98 de la contrainte (R.2) est donnée à titre indicatif.

Pour notre part nous avons opté pour un modèle avec la contrainte égalitaire car, comme nous le verrons plus loin, cela ne complique pas le modèle mais au contraire permet de simplifier la fonction objectif et facilite la résolution du modèle avec l'approche de décomposition de Benders.

2.2 Modèle de conception

Le modèle mathématique peut s'écrire alors:

$$\min \quad C_1^T y + C_2^T u - R^T x$$

sujet à:

$$\sum_{z \in Z_a} d_z x_{za} - q_a y_a \leq 0, \quad \forall a \in A, \quad (2.1)$$

$$\sum_{a \in A_z} x_{za} = 1, \quad \forall z \in Z, \quad (2.2)$$

$$\sum_{a \in A_b} u_{ab} - Q_b y_b \leq 0, \quad \forall b \in B, \quad (2.3)$$

$$y_b - \sum_{a \in A_b} u_{ab} \leq 0, \quad \forall b \in B, \quad (2.4)$$

$$y_m - \sum_{b \in B_m} u_{bm} \leq 0, \quad \forall m \in M, \quad (2.5)$$

$$\sum_{b \in B_m} u_{bm} - Q_m y_m \leq 0, \quad \forall m \in M, \quad (2.6)$$

$$u_{ab} - \sum_{m \in M_b} u_{bm} \leq 0, \quad \forall a \in A, \forall b \in B, \quad (2.7)$$

$$u_{bm} - \sum_{a \in A_b} u_{ab} \leq 0, \quad \forall b \in B, \forall m \in M, \quad (2.8)$$

$$y_b - \sum_{m \in M_b} u_{bm} = 0, \quad \forall b \in B, \quad (2.9)$$

$$y_a - \sum_{b \in B_a} u_{ab} = 0, \quad \forall a \in A, \quad (2.10)$$

$$\sum_{a \in A_z} y_a \geq 1, \forall z \in Z, \quad (2.11)$$

$$\sum_{b \in B_z} \sum_{a \in A_z} u_{ab} \geq 1, \forall z \in Z, \quad (2.12)$$

$$\sum_{b \in B_z} y_b \geq 1, \forall z \in Z, \quad (2.13)$$

$$\sum_{m \in M_z} y_m \geq 1, \forall z \in Z, \quad (2.14)$$

$$u_{ab} - y_a y_b \leq 0, \forall a \in A, \forall b \in B_a, \quad (2.15)$$

$$u_{bm} - y_b y_m \leq 0, \forall b \in B, \forall m \in M_b, \quad (2.16)$$

$$y_a - \sum_{b \in B_a} y_b \leq 0, \forall a \in A, \quad (2.17)$$

$$y_b - \sum_{m \in M_b} y_m \leq 0, \forall b \in B, \quad (2.18)$$

$$\sum_{b \in B_a} u_{ab} \leq 1, \forall a \in A, \quad (2.19)$$

$$\sum_{m \in M_b} u_{bm} \leq 1, \forall b \in B, \quad (2.20)$$

$$x_{za} \leq 1, \forall a \in A, \forall z \in Z, \quad (2.21)$$

$$x_{za} \geq 0, \forall a \in A, \forall z \in Z, \quad (2.22)$$

$$u_{ab}, u_{bm} \in \{0,1\}, \forall a \in A, \forall b \in B, \forall m \in M, \quad (2.23)$$

$$y_a, y_b, y_m \in \{0,1\}, \forall a \in A, \forall b \in B, \forall m \in M. \quad (2.24)$$

2.2.1 Simplification du modèle

Mise en évidence de contraintes redondantes

Le modèle général défini dans le paragraphe précédent contient des contraintes dont la vérification entraîne la satisfaction d'autres contraintes. Dans ce qui suit, nous allons mettre en évidence ces contraintes.

- Les contraintes (2.2) et (2.22) impliquent la contrainte (2.21). En effet:

$$\sum_{a \in A_z} x_{za} = 1 \text{ et } x_{za} \geq 0 \implies x_{za} \leq 1.$$

- Les contraintes (2.1), (2.2) et (2.24) impliquent la contrainte (2.11):

$$\sum_{z \in Z_a} d_z x_{za} - q_a y_a \leq 0 \implies \sum_{a \in A_z} \sum_{z \in Z_a} d_z x_{za} - \sum_{a \in A_z} q_a y_a \leq 0$$

or $\sum_{a \in A_z} x_{za} = 1$

$$\begin{aligned} \implies \sum_{z \in Z_a} d_z - \sum_{a \in A_z} q_a y_a \leq 0 &\implies \sum_{a \in A_z} q_a y_a > 0 \implies \sum_{a \in A_z} y_a \neq 0 \\ &\implies \sum_{a \in A_z} y_a \geq 1. \end{aligned}$$

- Les contraintes (2.10) et (2.11) impliquent la contrainte (2.12):

$$\sum_{b \in B_a} u_{ab} = y_a \implies \sum_{a \in A_z} \sum_{b \in B_a} u_{ab} = \sum_{a \in A_z} y_a \geq 1,$$

or si $a \in A_z$ et $b \in B_a \implies b \in B_z$

$$\implies \sum_{a \in A_z} \sum_{b \in B_z} u_{ab} = \sum_{a \in A_z} \sum_{b \in B_a} u_{ab} \geq 1.$$

- Les contraintes (2.15), (2.12) et (2.24) impliquent la contrainte (2.13).

En effet la contrainte (2.15) donne que:

$$(2.15) \implies u_{ab} \leq y_a y_b, \forall a \in A_z; \forall b \in B_z$$

$$\begin{aligned} \implies \sum_{b \in B_z} \sum_{a \in A_z} u_{ab} &\leq \sum_{b \in B_z} \sum_{a \in A_z} y_a y_b = \left(\sum_{b \in B_z} y_b \right) \left(\sum_{a \in A_z} y_a \right) \\ \sum_{b \in B_z} \sum_{a \in A_z} u_{ab} \geq 1 &\implies \sum_{b \in B_z} y_b \geq 1. \end{aligned}$$

- De la même manière, on démontre que la vérification des contraintes (2.9), (2.13), (2.16) et (2.24) impliquent que la contrainte (2.14) est vérifiée:

$$\begin{aligned} \text{on a : } \sum_{b \in B_z} \sum_{m \in M_z} u_{bm} &= \sum_{b \in B_z} \sum_{m \in M_b} u_{bm} \\ (2.9) \text{ et } (2.13) &\implies \sum_{b \in B_z} \sum_{m \in M_b} u_{bm} = \sum_{b \in B_z} y_b \geq 1 \\ (2.16) &\implies \sum_{b \in B_z} \sum_{m \in M_z} u_{bm} \leq \left(\sum_{b \in B_z} y_b \right) \left(\sum_{m \in M_z} y_m \right) \\ &\implies \sum_{m \in M_z} y_m \geq 1. \end{aligned}$$

- Les contraintes (2.10) et (2.24) impliquent la contrainte (2.19):

$$\sum_{b \in B_a} u_{ab} = y_a, \text{ et } y_a \in \{0,1\} \implies \sum_{b \in B_a} u_{ab} \leq 1.$$

- Les contraintes (2.9) et (2.24) impliquent la contrainte (2.20):

$$\sum_{m \in M_b} u_{bm} = y_b \text{ et } y_b \in \{0,1\} \implies \sum_{m \in M_b} u_{bm} \leq 1.$$

Linéarisation de contraintes

Les contraintes (2.15) et (2.16) ne sont pas linéaires. Afin d'obtenir un problème linéaire nous allons procéder à une linéarisation de ces contraintes.

- La contrainte (2.15) implique que :

* si l'une au moins des deux variables y_a ou y_b est nulle alors $u_{ab} = 0$.

* si $u_{ab} = 1$, alors les variables y_a et y_b sont à la fois égales à 1.

Or u_{ab} ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1; la contrainte (2.15) est donc équivalente à:

$$\begin{cases} u_{ab} \leq y_a, & \forall a \in A, \forall b \in B & (L1), \\ u_{ab} \leq y_b, & \forall a \in A, \forall b \in B & (L2). \end{cases}$$

De même, la contrainte (2.16) s'écrit:

$$\begin{cases} u_{bm} \leq y_b, & \forall b \in B, \forall m \in M & (L3), \\ u_{bm} \leq y_m, & \forall b \in B, \forall m \in M & (L4). \end{cases}$$

Cette linéarisation va entraîner la redondance d'autres contraintes du modèle général.

- Les contraintes (2.4) et (L3) impliquent la contrainte (2.8) :

$$\sum_{a \in A_b} u_{ab} \geq y_b \quad \text{et} \quad y_b \geq u_{bm} \quad \implies \quad u_{bm} \leq \sum_{a \in A_b} u_{ab}.$$

- Les contraintes (2.9) et (L2) impliquent la contrainte (2.7) :

$$\sum_{m \in M_b} u_{bm} = y_b \quad \text{et} \quad y_b \geq u_{ab} \quad \implies \quad u_{ab} \leq \sum_{m \in M_b} u_{bm}.$$

- Les contraintes (L2) et (2.10) impliquent la contrainte (2.17):

$$u_{ab} \leq y_b \implies \sum_{b \in B_a} u_{ab} \leq \sum_{b \in B_a} y_b$$

combiné avec (2.10) alors

$$y_a \leq \sum_{b \in B_a} y_b.$$

- Les contraintes (L4) et (2.9) impliquent la contrainte (2.18):

$$u_{bm} \leq y_m \implies \sum_{m \in M_b} u_{bm} \leq \sum_{m \in M_b} y_m$$

combiné avec (2.9) alors

$$y_b \leq \sum_{m \in M_b} y_m.$$

- Les contraintes (2.3), (2.23) et (2.24) impliquent la contrainte (L2):

$$\sum_{a \in A} u_{ab} \leq Q_b y_b \quad \text{et} \quad y_b = 0 \quad \implies \quad u_{ab} = 0 \quad \forall a \in A,$$

$$\sum_{a \in A} u_{ab} \leq Q_b y_b \quad \text{et} \quad u_{ab} = 1 \quad \text{pour un } a \in A_b \quad \implies \quad y_b = 1$$

$$y_b \in \{0,1\} \quad \text{et} \quad u_{ab} \in \{0,1\} \quad \implies \quad u_{ab} \leq y_b.$$

- De même les contraintes (2.6), (2.23) et (2.24) impliquent la contrainte (L4):

$$\sum_{b \in B} u_{bm} \leq Q_m y_m \quad \implies \quad u_{bm} \leq y_m.$$

- Les contraintes (2.10), (2.23) et (2.24) entraînent la contrainte (L1):

$$\sum_{b \in B_a} u_{ab} = y_a \quad \implies \quad u_{ab} \leq y_a.$$

- Les contraintes (2.9), (2.23) et (2.24) impliquent la contrainte (L3):

$$\sum_{m \in M_b} u_{bm} = y_b \quad \implies \quad u_{bm} \leq y_b.$$

Simplification de la fonction économique

En utilisant la contrainte d'égalité (2.2) du modèle général, le terme $R(x)$ de la fonction objectif devient:

$$-\sum_{a \in A} \sum_{z \in Z} r_z d_z x_{za} = -\sum_{z \in Z} r_z d_z \left(\sum_{a \in A_z} x_{za} \right) = -\sum_{z \in Z} r_z d_z = C^{te}.$$

2.2.2 Modèle simplifié

Le modèle simplifié s'écrit:

$$\min \quad C_1^T y + C_2^T u$$

sujet à:

$$\sum_{z \in Z_a} d_z x_{za} - q_a y_a \leq 0, \quad \forall a \in A, \quad (2.25)$$

$$\sum_{a \in A_z} x_{za} = 1, \quad \forall z \in Z, \quad (2.26)$$

$$\sum_{a \in A_b} u_{ab} - Q_b y_b \leq 0, \quad \forall b \in B, \quad (2.27)$$

$$y_b - \sum_{a \in A_b} u_{ab} \leq 0, \quad \forall b \in B, \quad (2.28)$$

$$y_m - \sum_{b \in B_m} u_{bm} \leq 0, \quad \forall m \in M, \quad (2.29)$$

$$\sum_{b \in B_m} u_{bm} - Q_m y_m \leq 0, \quad \forall m \in M, \quad (2.30)$$

$$y_b - \sum_{m \in M_b} u_{bm} = 0, \quad \forall b \in B, \quad (2.31)$$

$$y_a - \sum_{b \in B_a} u_{ab} = 0, \quad \forall a \in A, \quad (2.32)$$

$$x_{za} \geq 0, \quad \forall a \in A, \quad \forall z \in Z, \quad (2.33)$$

$$y_a, y_b, y_m \in \{0,1\}, \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad \forall m \in M, \quad (2.34)$$

$$u_{ab}, u_{bm} \in \{0,1\}, \quad \forall b \in B, \quad \forall m \in M. \quad (2.35)$$

Définissons les ensembles suivants:

$$X = \{x : (2.26) \text{ et } (2.33) \text{ sont vérifiées}\},$$

$$Y = \{y : (2.34) \text{ est vérifiée}\},$$

$$U = \{u : (2.35) \text{ est vérifiée}\}.$$

Soit $A^T x - g(y,u) \leq 0$ la représentation des contraintes (2.25), couplant les variables x et (y,u) , et $H(y,u) \leq 0$ la représentation des contraintes de (2.27) à (2.32), reliant les variables y ou u .

La forme matricielle du modèle s'écrit:

$$(\mathbf{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \min & C_1^T y + C_2^T u \\ \text{sujet à:} & \\ & A^T x - g(y,u) \leq 0, \\ & H(y,u) \leq 0, \\ & x \in X, (y,u) \in Y \times U. \end{array} \right.$$

Le modèle peut être séparé en deux types de problèmes par la nature des deux types de variables qui le constituent. Un premier problème consistant en une sélection des équipements qu'il faut activer et leur plan de connexion et un deuxième problème de couverture des cellules pour la satisfaction de la demande. La méthode de décomposition de Benders est très efficace pour ce type de problème. Aussi la non existence d'un des types de variables dans la fonction objectif facilite l'application de cette méthode quant à la génération des coupes. Dans ce qui suit, nous allons présenter la méthode de décomposition de Benders dans le cas linéaire avant de proposer son application à notre modèle de conception topologique des réseaux de télécommunication cellulaires.

2.3 Approche de Résolution : décomposition de Benders

Le modèle est composé de variables entières et de variables continues. Avec le nombre élevé de variables qui composent le problème une résolution directe sera difficile, d'où l'idée d'une décomposition pour réduire la taille du problème. La structure hiérarchisée des réseaux mobiles, avec un premier groupe de variables, (s) , sur les niveaux du haut et l'autre groupe de variables, (x) , sur le niveau du bas, le favorise l'utilisation de la méthode de décomposition de Benders. Le principe de cette méthode a été proposé par Benders en 1962, [12], dans le but de résoudre des problèmes linéaires mixtes. Geoffrion a proposé une généralisation de la méthode au cas non linéaire, sous certaines conditions, [33]. Cette idée de décomposition a été aussi retenue par certains auteurs dans le cadre de la conception des réseaux d'accès locaux pour lesquels on retrouve la structure arborescente du concentrateur jusqu'aux usagers, mais sans la notion de couverture de cellules (voir [65] et [5]). Shahbaz a travaillé sur la conception des réseaux mobiles, [67], en utilisant une approche de décomposition à étapes multiples où le nombre de variables est réduit à chaque étape. Le problème étant rattaché à celui de la couverture minimale d'arborescence, on pourrait aussi envisager une modélisation de type Steiner, [53].

La méthode de décomposition de Benders est une application de l'approche de relaxation et est bien adaptée pour traiter des problèmes, dans lesquels interviennent deux groupes de variables différents, de telle sorte que la fixation des variables de l'un des groupes, dites variables compliquantes, réduit le problème initial en un problème de programmation linéaire facile à traiter. Le problème se partitionne en deux composantes : la première, appelée Problème Maître Relaxé (*PMR*), contient la définition de l'ensemble des variables s , la seconde, le Sous-Problème (*SP*), contient la définition de l'ensemble des variables x , où les variables s sont fixées.

Le processus de résolution se transforme en une démarche itérative au cours de laquelle le problème maître relaxé (PMR) va progressivement être enrichi d'informations provenant du (SP). Au bout d'un certain nombre fini d'itérations, le processus soit fournit la solution optimale, soit indique la non-réalisabilité du système de contraintes.

2.3.1 Méthode de Benders dans le cas linéaire

La méthode de Benders est une méthode de décomposition utilisée pour résoudre les problèmes de la forme:

$$(\mathbf{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \min & c^T x + f^T s \\ \text{sujet à:} & \\ & Ax - F(s) \geq b, \\ & x \geq 0, s \in S. \end{array} \right.$$

Dans la suite on suppose que la matrice A est de plein rang et que le problème (P) admet une solution.

L'idée de la méthode est de faire une projection du problème précédent dans l'espace des variables s , ensuite d'appliquer une dualisation puis une linéarisation externe afin d'obtenir un sous-problème qui est facile à résoudre et un problème maître qu'on résout en utilisant une approche de relaxation.

Considérons la projection du problème (P) sur l'espace des variables s . Cette projection s'écrit :

$$(\mathbf{PP}) \left\{ \min_{s \in S} \{ f^T s + \inf_{x \geq 0} \{ c^T x : Ax \geq b + F(s) \} \} \right.$$

Désignons par $V = \{s \in S : Ax - F(s) \geq b, \text{ pour au moins un } x \geq 0\}$ et supposons que notre problème initial admet une solution optimale, alors l'ensemble $S \cap V$ est non vide.

Aussi, si (x, s) est une solution optimale de (P), alors $s \in V$. On peut donc envisager de restreindre s à appartenir à l'ensemble $S \cap V$. Ainsi la projection de (P) sur l'espace des variables s est équivalent au problème suivant:

$$(\mathbf{PP}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{s \in S \cap V} \quad \{f^T s + \inf_{x \geq 0} \{c^T x : Ax \geq b + F(s)\}\}. \end{array} \right.$$

La détermination du Inf correspond, pour un s fixé, au problème de programmation linéaire suivant appelé sous-problème:

$$(\mathbf{SP}_s) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min \quad c^T x \\ \text{sujet à:} \\ \quad Ax \geq b + F(s), \\ \quad x \geq 0. \end{array} \right.$$

Les deux théorèmes suivants permettent, d'une part d'établir une relation entre les problèmes (P) et (PP), et d'autre part de donner une caractérisation de l'ensemble V . Leur démonstration se trouve dans [33].

Théorème 1

- *Le problème (P) est non réalisable ou non borné inférieurement si et seulement si il en est de même pour le problème (PP).*
- *Si (x^*, s^*) est une solution optimale de (P) alors s^* est une solution optimale de (PP).*
- *Si s^* est une solution optimale de (PP) et si x^* est une solution optimale de (SP_{s^*}) alors (x^*, s^*) est une solution de (PP).*

Afin de caractériser l'ensemble V , on va considérer le dual de (SP_s) qui s'exprime comme suit:

$$(\mathbf{DSP}_s) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \Pi^T (b + F(s)) \\ \text{sujet à:} \\ \quad A^T \Pi \leq c, \\ \quad \Pi \geq 0. \end{array} \right.$$

D'après le théorème de résolution de Goldman [36], on sait que tout point Π de l'ensemble $\{A^T\Pi \leq c, \Pi \geq 0\}$ s'écrit comme la somme d'un élément de l'ensemble de ses points extrêmes K et d'un vecteur appartenant à l'ensemble des vecteurs générateurs C du cône défini par $\{\Pi : A^T\Pi \leq 0, \Pi \geq 0\}$.

Supposons que $K = \{\pi^i : 1 \leq i \leq p\}$ et $C = \{\pi^i : p+1 \leq i \leq p+q\}$.

Benders dans [12], donne une caractérisation de l'ensemble V avec le théorème et le corollaire qui suivent. Pour la démonstration voir [33].

Théorème 2

Le problème dual est borné supérieurement si et seulement si:

$$(\pi^i)^T(b + F(s)) \leq 0, \quad \forall p+1 \leq i \leq p+q.$$

les (π^i) étant les rayons extrêmes du polyèdre du sous-problème dual.

Ainsi le corollaire suivant découle de la théorie de la dualité en programmation linéaire.

Corollaire 1

$$s \in V, \text{ si et seulement si, } (\pi^i)^T(b + F(s)) \leq 0, \quad \forall p+1 \leq i \leq p+q.$$

Le problème suivant est donc équivalent au problème (PP):

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad f^T s + v(s) \\ \text{sujet à:} \\ \quad (\pi^i)^T(b + F(s)) \leq 0, \quad \forall p+1 \leq i \leq p+q, \\ \quad s \in S. \end{array} \right.$$

$$\text{où } v(s) = \inf_{x \geq 0} \{c^T x : Ax \geq b + F(s)\} = \max_{1 \leq i \leq p} \{(\pi^i)^T(b + F(s))\}.$$

Ceci nous permet de formuler le problème suivant appelé problème maître qui est équivalent au problème (PP):

$$(\text{PM}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad s_0 \\ \text{sujet à:} \\ f^T s + (\pi^i)^T (b + F(s)) \leq s_0, \quad \forall 1 \leq i \leq p, \\ (\pi^i)^T (b + F(s)) \leq 0, \quad \forall p+1 \leq i \leq p+q, \\ s \in S. \end{array} \right.$$

Pour éviter d'énumérer tous les vecteurs générateurs π^i , $1 \leq i \leq p+q$, une approche de relaxation est utilisée pour résoudre le problème (PM). Les vecteurs générateurs π^i sont alors générés au fur et à mesure qu'ils deviennent pertinents. Le problème maître relaxé s'écrit:

$$(\text{PMR}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad s_0 \\ \text{sujet à:} \\ f^T s + (\pi^i)^T (b + F(s)) \leq s_0, \quad \forall 1 \leq i \leq \mu, \\ (\pi^i)^T (b + F(s)) \leq 0, \quad \forall p+1 \leq i \leq \rho, \\ s \in S. \end{array} \right.$$

où $\rho \leq p+q$ et $\mu \leq p$.

La question qui se pose naturellement est de savoir si une solution optimale réalisable du problème maître relaxé (PMR) est également réalisable pour le problème maître (PM) et dans le cas de non-réalisabilité du problème (PM), quelle contrainte faut-il générer? À l'itération k le problème maître relaxé PMR est résolu et soit (s_0^k, s^k) une solution optimale de ce problème. Elle est optimale pour le problème maître (PM) si et seulement si elle satisfait à toutes les contraintes de celui-ci, d'où la nécessité de vérifier si les contraintes relaxées sont satisfaites par la solution trouvée en résolvant le problème

(DSP_{s^k}) .

Deux cas peuvent se produire:

1. Le problème (DSP_{s^k}) est non borné supérieurement, ce qui veut dire que le sous-problème (SP_{s^k}) est non réalisable; on génère alors une coupe de réalisabilité qui est rajoutée au (PMR) .
2. Le problème (DSP_{s^k}) possède une solution de base optimale finie $\bar{\pi}$.

Dans le deuxième cas, soit on a $f^T s^k + (\bar{\pi}^i)^T (b + F(s^k)) > s_0^k$, ce qui veut dire que la solution s^k n'est pas réalisable; on rajoute alors une coupe d'optimalité de la forme $f^T s^k + (\bar{\pi}^i)^T (b + F(s^k)) \leq s_0^k$. Ceci engendre un nouveau problème maître relaxé. Soit le problème dual possède une solution optimale telle que $f^T s^k + (\bar{\pi}^i)^T (b + F(s^k)) \leq s_0^k$; on résout alors le sous-problème SP_{s^k} pour trouver ensuite (x^k, s^k) qui est une solution optimale du problème original. Notons aussi que le problème maître relaxé peut être non borné inférieurement et pour retrouver une solution (s^k, s_0^k) à l'étape 1, il faudra borner artificiellement ce problème avec des contraintes supplémentaires.

D'autre part, la suite des valeurs optimales obtenues en résolvant la suite des problèmes de la forme (PMR) est une suite non-décroissante de bornes inférieures sur la valeur optimale de (P) . Par ailleurs, chaque solution optimale $\bar{\pi}$ du problème (DSP_{s^k}) pour $s = s^k$ correspond à une solution \bar{x} du sous-problème (SP_{s^k}) et ainsi (\bar{x}, s^k) est un point réalisable de (P) . Par conséquent, $f^T s^k + (\bar{\pi}^i)^T (b + F(s^k))$ est une borne supérieure sur la valeur optimale de (P) , [10].

Dans la prochaine section, on appliquera la méthode de Benders à notre modèle de conception topologique.

2.3.2 Application au modèle

Considérons la forme matricielle du modèle de la section 2.2.2:

$$(\mathbf{P}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad C_1^T y + C_2^T u \\ \text{sujet à:} \\ A^T x - g(y,u) \leq 0, \\ H(y,u) \leq 0, \\ x \in X, (y,u) \in Y \times U. \end{array} \right.$$

Le problème (P) est composé de 2 types de variables : les variables entières y et u qui représentent respectivement les variables d'installation et de liaison des équipements, et les variables continues x qui représentent la couverture des zones.

Posons : $\mathcal{Y} = \{(y,u) \in Y \times U : H(y,u) \leq 0\}$.

Le problème (P) peut alors s'écrire:

$$(\mathbf{P}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad C_1^T y + C_2^T u \\ \text{sujet à:} \\ A^T x \leq g(y,u), \\ x \in X, (y,u) \in \mathcal{Y}. \end{array} \right.$$

La projection de (P) sur l'espace des variables (y,u) s'écrit:

$$(\mathbf{PP}) \left\{ \min_{(y,u) \in \mathcal{Y}} \{C_1^T y + C_2^T u + \inf_{x \in X} \{0 : A^T x \leq g(y,u)\}\} \right\}.$$

Posons :

$$v(y,u) = \inf_{x \in X} \{0 : A^T x \leq g(y,u)\} = \max_{\phi \geq 0} \{\phi^T g(y,u) : A\phi \leq 0\}$$

ϕ étant le vecteur des variables duales.

$$V = \{(y,u) : A^T x - g(y,u) \leq 0, \text{ pour au moins un } x \in X\}.$$

Alors le problème suivant est équivalent au problème (PP):

$$\min_{(y,u) \in \mathcal{Y} \cap V} C_1^T y + C_2^T u.$$

$(y, u) \in \mathcal{Y} \cap V$ si et seulement si $(\phi^i)^T g(y, u) \leq 0$

où ϕ^i représentent l'ensemble des vecteurs générateurs qui engendrent $\{A\phi \leq 0\}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C_1^T y + C_2^T u \\ \text{sujet à:} \\ \quad \phi^T g(y, u) \leq 0, \\ \quad (y, u) \in \mathcal{Y}. \end{array} \right.$$

Le sous-problème correspond au problème de programmation linéaire suivant (pour (y, u) fixé) :

Sous-problème

$$(\text{SP}_{(\bar{y}, \bar{u})}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad 0 \\ \text{sujet à:} \\ \quad \sum_{z \in Z_a} d_z x_{za} \leq q_a \bar{y}_a, \quad \forall a \in A, \\ \quad \sum_{a \in A_z} x_{za} = 1, \quad \forall z \in Z, \\ \quad x \geq 0. \end{array} \right.$$

L'objectif du sous-problème étant constant, résoudre $(\text{SP}_{(\bar{y}, \bar{u})})$ revient donc à déterminer une solution réalisable, toute solution réalisable étant optimale. Pour voir si $\text{SP}_{(\bar{y}, \bar{u})}$ admet une solution réalisable ou non, on va appliquer la méthode des deux phases du simplexe¹. La première phase, par l'intermédiaire du problème auxiliaire permettra de tester la réalisabilité du sous-problème. Maintenant, comme toute solution réalisable du sous-problème est optimale, on n'aura pas besoin d'exécuter la deuxième phase qui devrait servir à optimiser le sous-problème. Ainsi les multiplicateurs optimaux en seront alors directement déduits. Le sous-problème auxiliaire de la phase I du sous-problème,

1. Utilisée souvent pour trouver une solution réalisable de base initiale avant de démarrer la méthode du simplexe.

pour $(y,u) = (\bar{y},\bar{u})$ fixé s'écrit:

$$(\mathbf{SPA}_{(\bar{y},\bar{u})}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad e^T t \\ \text{sujet à:} \\ \sum_{z \in Z_a} d_z x_{za} + x_a + t_a^1 = q_a \bar{y}_a, \quad \forall a \in A, \quad \lambda_a \\ \sum_{a \in A_z} x_{za} + t_z^2 = 1, \quad \forall z \in Z, \quad \mu_z \\ x, x_a, t \geq 0. \end{array} \right.$$

Où $e = (1,1,\dots,1)$, $t^1 = (t_a^1)$, $t^2 = (t_z^2)$, $t = (t^1, t^2)$ et $x = (x_{za})$

Soit $(\bar{x}, \bar{x}_e, \bar{t})$ la solution optimale. Si $e^T \bar{t} > 0$, alors le sous-problème $(SP_{(\bar{y},\bar{u})})$ est non réalisable. Sinon, il est réalisable et \bar{x} en est une solution optimale.

Dans le cas de non réalisabilité du sous-problème, c'est-à-dire si $e^T \bar{t} > 0$, les variables du dual de $SPA_{(\bar{y},\bar{u})}$ seront utilisées pour formuler la coupe de réalisabilité. Le problème dual du problème auxiliaire $SPA_{(\bar{y},\bar{u})}$ s'écrit:

$$(\mathbf{DSPA}_{(\bar{y},\bar{u})}) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \sum_{a \in A} -q_a \bar{y}_a \lambda_a + \sum_{z \in Z} \mu_z \\ \text{sujet à:} \\ -d_z \lambda_a + \mu_z \leq 0, \quad \forall a \in A; \forall z \in Z, \\ \lambda_a \leq 1, \quad \forall a \in A, \\ \mu_z \leq 1, \quad \forall z \in Z, \\ \lambda_a \geq 0, \quad \forall a \in A. \end{array} \right.$$

Le sous-problème $(SP_{(\bar{y},\bar{u})})$ est réalisable, si et seulement si,

$$\sum_{z \in Z} \mu_z - \sum_{a \in A} \lambda_a q_a \bar{y}_a \leq 0, \text{ d'après la théorie de la dualité.}$$

Donc si $\{(\lambda^i, \mu^i), i = 1, \dots, p\}$ est l'ensemble des rayons extrêmes de $(DSPA_{(\bar{y},\bar{u})})$, alors

$$(y,u) \in V, \text{ si et seulement si, } \sum_{a \in A} -q_a \bar{y}_a \lambda_a^i + \sum_{z \in Z} \mu_z^i \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

Le problème maître qui est équivalent au problème (PP) va s'écrire alors :

$$(\text{PM}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad C_1^T y + C_2^T u \\ \text{sujet à:} \\ \sum_{a \in A} -q_a \bar{y}_a \lambda_a^i + \sum_{z \in Z} \mu_z^i \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (CR), \\ (y, u) \in \mathcal{Y}. \end{array} \right.$$

Une approche de relaxation va être utilisée pour résoudre le (PM). À chaque itération une partie des contraintes (CR) est considérée, dans un problème appelé problème maître relaxé, (PMR), qui sera résolu. Les autres contraintes seront rajoutées à ce problème au fur et à mesure que cela est nécessaire. L'algorithme de résolution est défini de la manière suivante:

Algorithme de résolution 1

ÉTAPE 0:

Résoudre une version relaxée du problème maître ne contenant pas de coupe de réalisabilité. Soit (\bar{y}_0, \bar{u}_0) une solution optimale. Aller à l'étape 2.

ÉTAPE 1:

À la k-ième itération résoudre le problème maître relaxé

$$(\text{PMR}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad C_1^T y + C_2^T u \\ \text{sujet à:} \\ \sum_{z \in Z} \mu_z^i - \sum_{a \in A} \lambda_a^i q_a y_a \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, k, \\ H(y, u) \leq 0, \\ y \in Y, \quad u \in U. \end{array} \right.$$

Soit (\bar{y}_k, \bar{u}_k) une solution optimale.

ÉTAPE 2:

Résoudre le sous-problème auxiliaire $SPA_{(\bar{y}_k, \bar{u}_k)}$. Soit (\bar{x}_k, \bar{t}_k) sa solution optimale. Vérifier si les contraintes relaxées du sous-problème sont satisfaites.

- Si $e^T \bar{t}_k > 0$ alors déterminer les vecteurs de multiplicateurs optimaux et générer la

coupe de réalisabilité. Retourner à l'étape 1 pour former un nouveau (PMR).

– Sinon, si $e^T \bar{t}_k = 0$ alors \bar{x}_k est réalisable et optimale pour le sous-problème ($SP_{(\bar{y}_k, \bar{u}_k)}$).

L'algorithme s'arrête: $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{u}_k)$ est une solution optimale de notre problème original.

Dans la sous-section suivante, nous donnons une procédure qui permet de générer les coupes de réalisabilité sans avoir à résoudre le sous-problème auxiliaire.

2.3.3 Procédure de génération de Coupes de réalisabilité

Pour trouver une solution réalisable du problème dual, on va diviser l'ensemble A en sous-ensembles qui facilitent le traitement de la première contrainte. Considérons une topologie (\bar{y}, \bar{u}) fournie par le problème maître. Le terme qui contribue à diminuer la valeur de la fonction objectif est le coefficient négatif de la variable λ . Ce coefficient, $-q_a \bar{y}_a$, est nul si $\bar{y}_a = 0$, c'est-à-dire si la BTS a n'est pas choisie. On serait tenté de prendre $\lambda_a = 0$ pour toute BTS a telle que $\bar{y}_a = 1$. Mais cela ne contribuera pas nécessairement à augmenter la valeur de la fonction objectif.

Pour toute zone $z \in Z$:

* Soit, toutes les BTS pouvant connecter z sont choisies. Dans ce cas en posant $\mu_z > 0$, λ_a sera non nul pour chaque BTS a appartenant à A_z . La première contrainte permet de voir que ces BTS contribueraient à diminuer la valeur de la fonction objectif à cause de leur coefficient négatif. Donc en posant $\mu_z = 0$ cela implique que $\lambda_a = 0, \forall a \in A_z$, et évite une diminution de la fonction objectif

* Soit, la zone peut être couverte à la fois par au moins une BTS choisie et une non choisie.

La valeur de λ_a pour une BTS a non choisie n'influe pas sur l'augmentation de la fonction objectif car son coefficient est nul.

Comme μ_z contribue à la maximisation, on lui alloue la plus grande valeur possible qui

est 1. La première contrainte donne $\frac{\mu_z}{d_z} \leq \lambda_a, \forall a \in A_z$ ce qui implique que λ_a va prendre la plus grande valeur $\frac{\mu_z}{d_z} \leq \lambda_a, \forall z \in Z_a$

À chaque itération, à partir de la topologie, (\bar{y}, \bar{u}) fournie par le (PMR), on définit les ensembles suivants:

- \hat{A} l'ensemble des BTS non choisies et \hat{Z} l'ensemble des zones qui peuvent être couvertes par ces BTS.

$$\hat{A} = \{a \in A : \bar{y}_a = 0\}, \quad \hat{Z} = \cup_{a \in \hat{A}} Z_a.$$

- A_1 l'ensemble des BTS choisies

$$A_1 = \{a \in A : \bar{y}_a = 1\}.$$

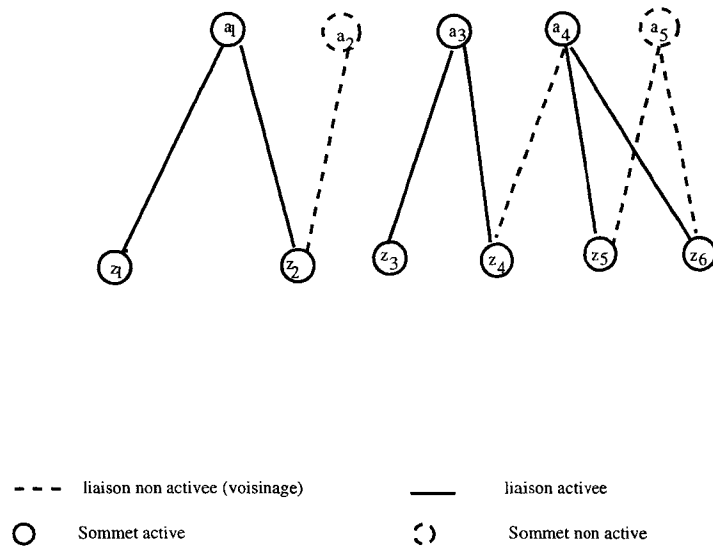


FIG. 2.1 – *Sous-ensembles.*

Dans la figure 2.1 on a :

$$a_1, a_3 \text{ et } a_4 \in A_1; \quad a_2 \text{ et } a_5 \in \hat{A}; \quad a_1 \text{ et } a_4 \in \bar{A}; \quad a_3 \in \underline{A};$$

$$a_1, a_3 \text{ et } a_4 \in A_1; \quad z_1, z_3 \text{ et } z_4 \in \underline{Z}; \quad z_2, z_5 \text{ et } z_6 \in \bar{Z}$$

- \underline{A} l'ensemble des BTS activées couvrant des zones qui peuvent être couvertes par au

moins une BTS non activée.

$$\underline{A} = \{a \in A_1 : Z_a \cap \hat{Z} \neq \emptyset\}.$$

- \bar{A} ensemble des BTS choisies couvrant des zones qui ne peuvent pas être couvertes par des BTS non choisies.

$$\bar{A} = \{a \in A_1 - \underline{A} : Z_a \cap \hat{Z} = \emptyset\}.$$

- \bar{Z} la réunion de zones qui peuvent être couvertes par une BTS appartenant à \bar{A}

$$\bar{Z} = \cup_{a \in \bar{A}} Z_a$$

- \underline{Z} la réunion des zones qui peuvent être couvertes par une BTS appartenant à \underline{A} .

$$\underline{Z} = \cup_{a \in \underline{A}} Z_a.$$

Ainsi la solution $(\bar{\lambda}_a, \bar{\mu}_z)$ va s'écrire :

$$\bar{\lambda}_a = \begin{cases} \max_{z \in Z_a} \frac{1}{d_z} & \text{si } a \in \underline{A} \cup \bar{A} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \bar{\mu}_z = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \bar{Z} \cup \underline{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La coupe qu'on doit ajouter au problème maître s'écrit de la manière suivante:

$$- \sum_{a \in \underline{A} \cup \bar{A}} \frac{q_a}{d_{z_a}} y_a + \sum_{z \in \bar{Z} \cup \underline{Z}} 1 \leq 0$$

$$\text{où } \frac{1}{d_{z_a}} = \max_{z \in Z_a} \frac{1}{d_z}, \quad \forall a \in A$$

Soit $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$, avec $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_a)_{a \in A}$ et $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_z)_{z \in Z}$ le vecteur des multiplicateurs engendré par la procédure ci-dessus.

Le problème maître relaxé va alors s'écrire:

$$(\text{PMR}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad C_1^T y + C_2^T u \\ \text{sujet à:} \\ \\ \sum_{a \in A} \hat{\lambda}_a q_a y_a \geq \sum_{z \in Z} \hat{\mu}_z, \forall i = 1, \dots, q, \\ \\ H(y, u) \leq 0, \\ \\ y \in Y, u \in U. \end{array} \right.$$

Dans ce qui suit nous proposons l'algorithme de résolution utilisant la procédure précédente.

Algorithme de résolution 2

ÉTAPE 0:

Résoudre une version relaxée du problème maître ne contenant pas de coupe de réalisabilité.

Soit (\bar{y}_0, \bar{u}_0) une solution optimale. Aller à l'étape 2.

ÉTAPE 1

À la k-ième itération résoudre le problème maître relaxé

$$(\text{PMR}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad C_1^T y + C_2^T u \\ \text{sujet à:} \\ \\ \sum_{z \in Z} \mu_z^i - \sum_{a \in A} \lambda_a^i q_a y_a \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, k \\ \\ H(y, u) \leq 0, \\ \\ y \in Y, u \in U. \end{array} \right.$$

Soit (\bar{y}_k, \bar{u}_k) une solution optimale.

ÉTAPE 2

Déterminer (λ^k, μ^k) par les formules.

$$\lambda_a^k = \begin{cases} \max_{z \in Z_a} \frac{1}{d_z} & \text{si } a \in \underline{A} \cup \hat{A} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \mu_z^k = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \hat{Z} \cup \underline{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier si les contraintes relaxées du sous-problème sont satisfaites :

– Si $\sum_{z \in Z} \mu_z^k - \sum_{a \in A} \lambda_a^k q_a y_a > 0$ alors le sous-problème est non réalisable on ajoute une coupe de la forme $\sum_{z \in Z} \mu_z^k - \sum_{a \in A} \lambda_a^k q_a y_a \leq 0$.

Retour à l'étape 1.

– Sinon, si $\sum_{z \in Z} \mu_z^k - \sum_{a \in A} \lambda_a^k q_a y_a \leq 0$ alors le sous-problème $(SP_{(\bar{y}_k, \bar{u}_k)})$ est réalisable et sa solution sera trouvée en résolvant le problème auxiliaire. Soit (\bar{x}) la solution optimale.

L'algorithme s'arrête: $(\bar{x}, \bar{y}_k, \bar{u}_k)$ est une solution optimale de notre problème original.

Dans la section suivante, nous présentons les résultats numériques de quelques instances du modèle de synthèse de la conception topologique de réseaux de télécommunication cellulaires. Les solutions sont fournies par Cplex, [21], par la méthode de décomposition de Benders qui utilise le sous-problème auxiliaire pour la génération des coupes (qu'on va noter Benders1) et par l'algorithme de Benders utilisant la coupe de réalisabilité définie dans le paragraphe 2.3.3 de ce chapitre (qu'on note Benders2). Le programme utilisé pour générer les paramètres de manière aléatoire, faute d'avoir des données réelles, fournit des instances avec un nombre élevé de variables. Une instance, par exemple, ayant 200 zones à couvrir par environ 75 BTS, peut compter plus de 10 000 variables.

2.4 Résultats numériques

L'objectif des tests numériques est d'évaluer la qualité de la solution fournie par les deux algorithmes basés sur la méthode de décomposition de Benders. Un ordinateur Pentium 4, 1.5Ghz et 261 Mo de RAM a été utilisé pour exécuter les algorithmes. Le modèle global simplifié est codé en C++ et résolu par Cplex 8.0 Callable Library. L'algorithme de Benders est aussi implémenté en C++ de deux manières : une première qui fait appel, à chaque itération, à Cplex pour résoudre le problème maître et le sous-

problème auxiliaire. Les multiplicateurs optimaux du sous-problème auxiliaire permettent de générer les coupes de réalisabilité. On le note Benders1. L'autre manière consiste à résoudre le problème maître par Cplex et d'utiliser la procédure de génération de coupe définie à la sous-section 2.3.3 et est notée Benders2. Le temps limite de résolution, noté TL , a été fixé de manière arbitraire à 10 heures. Les instances utilisées pour les tests numériques ne sont pas extraites de données réelles d'un réseau de télécommunication mais sont créées par un programme qui génère aléatoirement les différents paramètres du modèle. En sortie on va avoir des matrices en 0 – 1 représentant les contraintes de voisinage, une matrice des coûts des arcs des différents niveaux, une matrice des coûts des équipements et une matrice des capacités de ces équipements. Par exemple si on considère $AZ = (AZ_{az}), a \in A, z \in Z$ la matrice de voisinage entre les BTS et les zones. $AZ_{az} = 1$ si la BTS a peut couvrir la zone z . Les données communes de toutes les instances sont définies comme suit. La demande de trafic pour une zone (cellule) donnée est comprise entre 2 et 4 sans tenir compte des périodes de faible ou de forte demande. La capacité de chaque BTS, en quantité de trafic qu'elle peut écouler est fixée entre 10 et 12. Le nombre de BTS qu'un BSC peut connecter est compris entre 20 et 25. Le nombre maximal de BSC qu'un MSC peut connecter est compris entre 10 et 12 ou entre 20 et 22. Ces données sont arbitrairement fixées. Le nombre de zones qu'une BTS peut couvrir est implicitement limité par la définition de la capacité de la BTS. Les instances sont divisées en trois groupes. Les instances de type I sont constituées de réseaux de petite taille qui ont moins de 10 000 variables, le type II de taille moyenne, moins de 30 000 variables, et le type III représente les réseaux de grande taille, qui ont plus de 30 000 variables. Les tableaux 2.1, 2.2 et 2.3 résument les résultats obtenus en résolvant les instances de type I, II et III par Cplex et par l'algorithme de Benders1. Les tableaux 2.4 et 2.5 comparent les algorithmes de Benders1 et Benders2. La colonne Z représente le nombre de zones (cellules) à couvrir. Au niveau de chaque tableau, les ensembles A , B et M représentent respectivement le nombre de sites disponibles prédéfinis pour l'installation des BTS, BSC

et MSC. Le nombre d'itérations de Benders1 est en général égal à 3, raison pour laquelle on n'a pas eu besoin de mettre une colonne pour cela. La colonne N représente le numéro du problème pour des instances ayant les mêmes paramètres. Sur les instances de grande taille Cplex ne parvient pas souvent à fournir la valeur optimale. De ce fait la dernière colonne du tableau 2.3 mesure le gap existant entre les deux valeurs trouvées par Cplex et par l'algorithme de Benders1. Le "gap" est défini par $gap = (Z_{Benders1} - Z_{cplex})/Z_{Benders1}$ où $Z_{Benders1}$ est la valeur fournie par la procédure Benders1 et Z_{Cplex} celle donnée par Cplex. L'unité de temps sur tous les tableaux est la seconde.

Dans ce qui suit, nous allons d'abord faire une comparaison entre les résultats de Cplex et ceux de Benders1, ensuite une comparaison des deux algorithmes de Benders.

Instances de type I

Le tableau 2.1 montre que pour les problèmes de petite taille les temps de résolution de Cplex et de Benders1 sont sensiblement les mêmes. Les deux méthodes fournissent la solution optimale. Ce faible temps de résolution de Cplex est naturellement dû à la taille des instances.

Paramètres					Méthodes	
					Cplex	Benders1
Z	A	B	M	N	Temps (s)	Temps(s)
9	6	3	2	v1	0.03	0.02
12	6	3	2	4	0.03	0.02
25	6	3	2	v1	0.03	0.02
49	17	2	1	1	0.07	0.04
50	23	3	2	v1	0.03	0.02
69	25	2	1	2	5	0.09
84	27	2	1	3	0.25	0.44
90	32	3	2	v1	0.03	0.02
96	35	2	1	1	91	0.09

TAB. 2.1 – *Instances de type I: comparaison Benders1-Cplex*

Instances de type II

Sur les instances de taille moyenne ayant moins de 30 000 variables, compilées dans le tableau 2.2, Cplex de la même manière que Benders1 fournit la solution optimale. Mais on constate qu’avec le temps de résolution qui atteint la limite, Cplex commence à pêcher. La colonne 7 montre le faible temps de résolution de Benders1.

Z	Paramètres					Méthodes	
						Cplex	Benders1
						Temps (s)	Temps (s)
105	40	3	2	1	TL	1.5	
150	55	3	2	1	TL	3	
180	60	5	2	2	5011	3	
186	68	3	2	2	1120	2	
204	75	3	2	1	34	2	
234	95	3	2	1	TL	539	
234	95	3	2	4	TL	4	
234	95	3	2	5	TL	3	
256	115	7	2	1	TL	550	

TAB. 2.2 – *Instances de type II: comparaison Benders1-Cplex*

Instances de type III

Les résultats des instances de types III sont compilés dans le tableau 2.3. Cplex rencontre d’énormes difficultés avec ces instances. Souvent le temps limite de résolution ne lui suffit pas pour atteindre la solution optimale. Il fournit simplement une borne supérieure. Ceci est compréhensible pour Cplex car il est plus performant pour les modèles de taille réduite. Quant à l’algorithme Benders1, il parvient à fournir la solution optimale avec un temps acceptable comparé à Cplex. Le “gap” non nul, défini par $(Z_{Benders1} - Z_{cplex})/Z_{benders1}$, montre que Cplex atteint la limite de temps sans fournir la solution optimale. Le sous-problème auxiliaire est résolu en général en peu de temps, mais c’est

le problème maître qui prend beaucoup de temps avec l'augmentation de la taille des instances. On a remarqué aussi que le temps de résolution de Benders1 ne dépend pas uniquement de la taille du problème mais aussi de la forme de la matrice de voisinage BTS-Zones et des paramètres de l'instance pour les problèmes de grande taille. C'est pourquoi on note souvent des instances ayant le même nombre d'équipements qui sont résolues avec un écart considérable de temps. Les tableaux 2.4 et 2.5 présentent une

Paramètres					Méthodes		
					Cplex	Benders1	
Z	A	B	M	N	Temps (s)	Temps (s)	gap
300	150	5	2	1	TL	9977	0.0008
350	180	5	2	2	TL	TL	0
350	180	5	2	4	TL	15013	0.0015
400	375	3	2	1	TL	333	0.0014
500	450	3	2	2	TL	329	0.0013

TAB. 2.3 – *Instances de type III: comparaison Benders1-Cplex*

comparaison entre les résultats obtenus par les deux algorithmes de Benders. Le “gap”, représenté par la dernière, colonne est défini par $gap = (Z_{Benders2} - Z_{Benders1})/Z_{Benders2}$. Sur les instances de petite taille les deux méthodes fournissent la solution optimale en très

Paramètres					Méthodes		
					Benders1	Benders2	
Z	A	B	M	N	Temps (s)	Temps (s)	gap
204	75	3	2	1	3	1	0
234	95	3	2	1	539	769	0
234	95	3	2	3	22	4	0
256	115	7	2	1	TL	37	-0.0030
256	115	7	2	4	TL	22	-0.0028
300	150	5	2	1	9977	602	0
300	150	5	2	3	8705	66	0

TAB. 2.4 – *Instances de type II: comparaison Benders1-Benders2*

peu de temps. Sur les instances de taille moyenne les deux algorithmes arrivent à fournir

la valeur optimale. Mais le temps de résolution de Benders1 plus élevé que celui Benders2. Avec les instances de grande taille, on remarque que la méthode Benders2 arrive à obtenir la solution optimale avec un temps de résolution inférieur à celui Benders1. Plus la taille de l'instance augmente plus Benders1 rencontre des difficultés à résoudre l'instance. Le tableau 2.5 montre que la méthode de Benders1 s'arrête souvent avec la limite de temps sans fournir la solution optimale alors que Benders2 trouve la solution optimale en un temps acceptable. Donc l'algorithme de Benders2 a permis non seulement d'améliorer la qualité de la solution mais de réduire le temps de résolution sur les instances de grande taille. Le "gap" négatif sur les tableaux 2.4 et 2.5 s'explique par le fait que Benders1 ne fournit pas la valeur optimale de l'instance. Quand il est nul alors les deux algorithmes fournissent la valeur optimale.

					Méthodes		
Paramètres					Benders1	Benders2	
Z	A	B	M	N	Temps (s)	Temps (s)	gap
300	150	5	2	6	TL	143	-0.0008
350	180	5	2	2	TL	TL	-0,0018
350	180	5	2	4	15013	47	-0.0015
450	280	5	2	1	TL	19	-0.0006
450	280	5	2	2	TL	18	-0.001
450	280	5	2	2	TL	255	-0.001

TAB. 2.5 – *Instances de type III: comparaison Benders1-Benders2*

2.5 Conclusion

Notre modèle est composé de variables entières et de variables continues. Avec le nombre élevé de variables qui composent le problème, une résolution directe s'avère non réaliste, d'où l'idée d'une décomposition pour réduire la taille de notre problème. Nous

avons appliqué dans ce chapitre la méthode de décomposition de Benders à la conception topologique des réseaux de télécommunication cellulaires. Deux algorithmes sont développés. Un premier algorithme appelé Benders1 s'est avéré efficace sur des problèmes de taille moyenne. En revanche pour les instances de grande taille il existe quelques difficultés liées à la résolution du problème maître. Le deuxième algorithme noté Benders2 qui génère la coupe de réalisabilité par une procédure n'utilisant pas le sous-problème permet d'améliorer la qualité de la solution et de réduire le temps de résolution sur les instances de grande taille là où Cplex ou Benders1 ne parviennent pas à fournir une solution optimale du fait que le temps limite de résolution fixé arbitrairement est atteint. Dans des tests préliminaires qui ne figurent pas sur les tableaux précédents, sur certaines instances Cplex s'arrête bien avant la limite de temps pour une mémoire insuffisante, "out of memory".

Dans le prochain chapitre une autre formulation par les flots de la conception topologique des réseaux cellulaires va être traitée. Le flot doit être acheminé à travers le réseau depuis une source fictive qu'on va créer vers les différentes zones, en traversant les différents niveaux. La forme du modèle de flot obtenue et l'explosion du nombre de variables expliquent l'utilisation d'une méthode de relaxation lagrangienne pour trouver une approximation de la solution optimale. Les tests numériques effectués confirment l'efficacité de cette méthode appliquée aux problèmes de flot.

Chapitre 3

Modélisation par les flots

Dans ce chapitre, nous proposons une autre formulation du problème de conception topologique des réseaux de télécommunication cellulaires. Cette nouvelle formulation exploite le fait que la couverture des zones par les BTS, en terme de quantité de trafic, puisse être considérée comme un flot. L'idée développée consiste à acheminer ce flot à travers le réseau, à partir d'une source fictive qui sera créée, vers les différentes zones à couvrir. Ainsi, le problème consiste à sélectionner un ensemble d'arcs permettant de connecter les sommets du réseau et la quantité de flots à véhiculer dans ces arcs pour assurer une couverture totale des zones à coût minimal. C'est un problème qui ressemble à l'arbre de Steiner, [4], avec comme seule différence la possibilité qu'une zone soit couverte par plusieurs BTS, ce qui implique plusieurs arcs entrants. L'augmentation du nombre de variables qui est fonction du nombre d'équipements, fait qu'une tentative de résolution directe pour une solution optimale serait non réaliste. Une relaxation lagrangienne, combinée avec une méthode de sous-gradient est utilisée pour trouver une approximation de la valeur optimale du modèle. C'est une méthode qui a démontré son efficacité pour fournir une solution approchée pour des problèmes de conception de réseaux de grande

taille. Dans le cadre des problèmes de flot ou de multiflot, deux approches de relaxation possibles s'offrent à nous : l'une applique une relaxation aux contraintes de capacités (1), qui servent aussi de couplage entre les variables de flot et d'arcs, et l'autre s'applique aux contraintes de conservation de flot (2), qui servent de relais entre les différents sous-réseaux du point de vue hiérarchique. La première alternative a été utilisée par Mateus et Mazzini dans [60] pour résoudre le problème de conception des réseaux de télécommunication cellulaires. Leur modèle intègre dans un même problème la conception topologique et l'allocation des fréquences. Elle a été aussi utilisée pour résoudre un problème de conception de réseaux de téléphonie fixe, [55]. Dans ce modèle, les auteurs utilisent une formulation multiflot pour décrire le problème qui consiste à déterminer la topologie du réseau, le routage du trafic et l'affectation des capacités sur chaque arc. Le deuxième cas est rarement utilisée dans la littérature, dans [42], elle est couplée avec une technique de "Branch-and-Bound" pour résoudre un problème de conception de réseaux avec capacités. Dans [4], les auteurs présentent un algorithme pour obtenir une solution approchée du problème de Steiner dans les graphes. L'algorithme est basé sur une relaxation des contraintes de conservation de flot combinée avec un algorithme de volume pour obtenir une borne inférieure et estimer la solution primale. Dans [40], Holmberg et Hellstrand traitent d'un modèle multiflot avec une origine et une destination pour chaque commodité sans limite de capacités au niveau des arcs. Dans [42], Holmberg et Yuan traitent le même problème mais cette fois avec une limitation de capacités sur les arcs. Les deux modèles sont résolus par une même approche basée sur une heuristique lagrangienne et un algorithme de Branch-and-Bound. L'heuristique lagrangienne combine une technique de relaxation lagrangienne avec un algorithme de sous-gradient.

Dans ce chapitre, nous proposons une formulation du problème de conception topologique des réseaux de télécommunication cellulaires par un modèle de flots. Cette formulation, contrairement à ce qui a été fait dans la littérature, tout en utilisant

les paramètres du modèle de synthèse, exploite l'aspect couverture des zones et les caractéristiques d'un réseau cellulaire. Finalement nous obtenons un problème équivalent au modèle de synthèse développé dans le chapitre 2, dans le sens qu'il fournit, à l'optimum la même valeur optimale. Nous proposons, après avoir fait un bref aperçu de la méthode, une approche de résolution basée sur une heuristique lagrangienne. Dans la dernière section, les résultats numériques, justifiant la validité de la méthode, sont proposés.

3.1 Présentation du problème

Le modèle de synthèse développé dans le chapitre précédent consistait à rechercher une topologie du réseau capable de satisfaire la demande en terme de trafic à moindre coût. Cette demande de trafic au niveau des zones peut être considérée comme un flot qui doit quitter une source fictive et être acheminé à travers les arcs du réseau vers les zones à couvrir.

La particularité de notre type de réseau, avec la limitation du nombre de liaisons entrantes et sortantes, et l'aspect hiérarchique, fait que certaines hypothèses seront considérées pour avoir une formulation équivalente à celle du modèle classique.

- Une source fictive s disposant initialement d'une quantité de flot égale à la demande totale au niveau de toutes les zones va être créée. Le flot envoyé à partir de cette source et cheminant à travers les arcs du réseau représente la part de ressource servant à couvrir la quantité de trafic demandée à travers les zones qui doivent être gérées par les BTS.

- Le coût des arcs va être défini comme la somme entre le coût réel de l'arc et le coût du sommet destination de cet arc. Étant donné que tout sommet de transition

admet au plus un arc entrant, son coût d'installation sera comptabilisé une seule fois s'il est choisi. Cette aggrégation est possible car tous les coûts (arcs et sommets) sont fixes sauf pour le niveau inférieur de satisfaction de la demande. Cela évite aussi d'avoir des variables d'installation d'équipements dans notre modèle et, du même coup, réduit le nombre de variables en $0 - 1$. Les sommets ne participent qu'à la formation des arcs, l'activation d'un arc entraînant la sélection de ses extrémités. Les arcs créés, issus de la source fictive s , n'existent pas dans le réseau initial et ont un coût nul. On prend aussi comme hypothèse que le coût des arcs reliant les zones et les BTS, représentant des liaisons radios, est nul.

- Exceptées les zones et la source qui constituent respectivement des sommets de demande et de disponibilité, tous les autres sommets sont des sommets de transition, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de demande à satisfaire ni d'offre initiale et restituent tout le flot qu'ils reçoivent.

- Une zone ne pouvant pas recevoir plus de trafic qu'elle n'en demande, la capacité des arcs reliant les BTS aux zones est égale à la demande de la zone.

- Une BTS gère une quantité de trafic limitée par sa capacité. Elle ne doit donc pas recevoir un flot supérieur à sa capacité. Tout arc reliant un BSC à une BTS a alors une capacité égale à la capacité de la BTS.

- Les capacités des MSC et des BSC, en terme de nombre d'arcs qu'ils peuvent connecter, vont être conservées.

- La capacité d'un arc reliant la source à un MSC ou reliant un BSC à un MSC est égale à la demande totale pouvant être véhiculée à travers le réseau.

Dans ce nouveau modèle, l'aspect voisinage qui indiquait que deux équipements peuvent être reliés et qui dépendait de la sélection des sommets n'est plus pris en considération. Il est remplacé par la prédéfinition d'arcs susceptibles d'être installés.

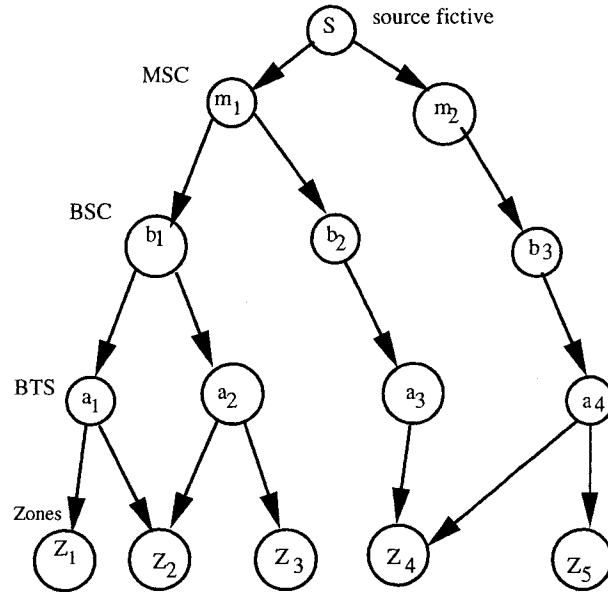


FIG. 3.1 – Modélisation par les flots

Considérons un graphe $G = (V, E)$ où V est un ensemble de sommets représentant l'ensemble des sites prédéfinis pour l'installation des équipements et E est un ensemble d'arcs reliant ces différents sommets. L'ensemble E est une réunion de sous-ensembles E_k d'arcs appartenant à un même niveau hiérarchique k . Chaque sous-ensemble est dénommé sous-réseau, (E_m sous-réseau Source-MS, E_b sous-réseau MSC-BSC, E_a sous-réseau BSC-BTS, E_z sous-réseau BTS-Zones). Notre objectif est de sélectionner parmi un ensemble d'arcs prédéfinis pour connecter les différents sites destinés à l'installation des équipements, un sous-ensemble capable d'acheminer le flot, qui représente la quantité de trafic, et satisfaire toute la demande à coût minimal. Dans ce qui suit, nous allons définir les différents paramètres et variables du problème et donner la forme du modèle.

3.2 Formulation du problème par les flots

Tout au long de ce chapitre, sauf indication contraire, certaines notations utilisées dans la section 2.1.1 pour définir certains paramètres sont maintenues. Dans ce qui suit, nous introduisons de nouvelles notations qui vont être utilisées dans ce chapitre.

3.2.1 Définition des paramètres et des variables

Les paramètres

- Certaines notations définies dans la section 2.1.1 vont être adaptées à la nouvelle formulation mais gardent la même définition.

r_{az} est le revenu engendré par une unité de flot à travers l'arc (a,z) .

$$r_{az} = \begin{cases} r_z & \text{si } (a,z) \in A \times Z, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

d_{az} est la capacité de l'arc (a,z) .

$$d_{az} = \begin{cases} d_z & \text{si } (a,z) \in A \times Z, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

q_{ba} est la capacité de l'arc (b,a) .

$$q_{ba} = \begin{cases} q_a & \text{si } (b,a) \in B \times A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- C_{ij} est le coût fixe de l'arc (i,j) . Ce coût est égal à la somme des coûts fixes l_{ij} et E_j respectivement coût fixe d'installation de l'arc (i,j) et du coût fixe d'installation du sommet destination j de l'arc (i,j) . Ces coûts fixes sont les mêmes que précédemment définis dans le paragraphe 2.3.2.

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in Z \text{ ou } i = s, \\ l_{ij} + E_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

- t_{ij} est la capacité de tout arc (i,j) appartenant aux niveaux E_m ou E_b :

$$t_{ij} = \sum_{z \in Z} d_z = D$$

- N_j^+ ensemble des successeurs du sommet j .

- N_j^- ensemble des prédécesseurs du sommet j .

Variables

- f_{ij} est la quantité de flot passant à travers l'arc (i,j) .

- y_{ij} est la variable de liaison indiquant si un arc va être activé

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc } (i,j) \text{ est choisi,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fonction objectif

Notre objectif est de minimiser le coût des arcs utilisés pour acheminer le flot depuis la source fictive vers les zones, sous des contraintes de capacité. La fonction objectif est donc composée de deux termes:

- Le revenu engendré par la couverture totale des zones:

$$L(f) = - \sum_{z \in Z} \sum_{a \in A_z} (r_{az} f_{az}).$$

- Le coût total d'installation des arcs:

$$C(y) = \sum_{(m,b) \in M \times B} C_{mb} y_{mb} + \sum_{(b,a) \in B \times A} C_{ba} y_{ba} + \sum_{m \in M} C_{sm} y_{sm}.$$

Il s'agit de minimiser:

$$Z = L(f) + C(y).$$

3.2.2 Définition des contraintes

Contraintes

1. La somme des flots sortant de la source est exactement égale à la demande totale:

$$\sum_{m \in M} f_{sm} = \sum_{z \in Z} d_z = D.$$

2. Toute zone doit recevoir suffisamment de flot pour que sa demande soit satisfaite:

$$\sum_{a \in N_z^-} f_{az} = d_z, \quad \forall z \in Z.$$

3. La quantité de flot entrant vers un sommet de transition est égale à la quantité de flot qui en sort (conservation du flot):

$$\sum_{z \in N_a^+} f_{az} - \sum_{b \in N_a^-} f_{ba} = 0, \quad \forall a \in A,$$

$$\sum_{a \in N_b^+} f_{ba} - \sum_{m \in N_b^-} f_{mb} = 0, \quad \forall b \in B,$$

$$\sum_{b \in N_m^+} f_{mb} - f_{sm} = 0, \quad \forall m \in M.$$

4. Le flot passant à travers un arc est au plus égal à la capacité de cet arc. Cette contrainte assure aussi le couplage entre les variables de flot et d'installation d'arc:

$$f_{az} \leq d_{az} y_{az}, \quad \forall z \in Z, \quad \forall a \in A,$$

$$f_{ba} \leq q_{ba} y_{ba}, \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B,$$

$$f_{mb} \leq t_{mb} y_{mb}, \quad \forall b \in B, \quad \forall m \in M,$$

$$f_{sm} \leq t_{sm} y_{sm}, \quad \forall m \in M.$$

5. Le nombre d'arcs sortant d'un sommet MSC ou BSC est limité:

$$\sum_{a \in N_b^+} y_{ba} \leq Q_b, \quad b \in B,$$

$$\sum_{b \in N_m^+} y_{mb} \leq Q_m, \quad m \in M.$$

6. Chaque sommet de transition admet au plus un arc entrant:

$$\sum_{b \in N_a^-} y_{ba} \leq 1, \quad \forall a \in A,$$

$$\sum_{m \in N_b^-} y_{mb} \leq 1, \quad \forall m \in M.$$

7. Les variables de flots sont positives: $f_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in E$.

8. Les variables d'installation d'ars sont binaires: $y_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in E$.

Contraintes redondantes

Les contraintes redondantes suivantes nous sont utiles pour imposer au problème relaxé une structure de réseau et influencer sur la réalisabilité de la solution. À noter que ces contraintes redondantes n'apparaissent pas dans notre modèle mais servent uniquement dans la partie des tests numériques. Elles permettent d'avoir une solution la moins non-réalisable possible avec la relaxation langrangienne.

9. Tout sommet de transition j ayant un ou plusieurs arcs sortants doit avoir un arc entrant:

$$y_{kj} \leq \sum_{i \in N_j^+} y_{ji} \quad \forall j \in M \cup B \cup A, \quad k \in N_j^-.$$

10. On doit avoir suffisamment de capacité au niveau des antennes choisies pour satisfaire la demande:

$$\sum_{i \in B} \sum_{j \in A} u_{ij} y_{ij} \geq \sum_{z \in Z} d_z.$$

11. Tout sommet de transition j ne peut avoir d'arcs sortants à moins d'avoir un arc entrant:

$$y_{kj} \geq y_{ji} \quad \forall j \in M \cup B \cup A \quad i \in N_j^+, k \in N_j^-.$$

3.2.3 Modèle

Le modèle MIP s'écrit:

$$\begin{aligned} & \min && C(y) + L(f) \\ \text{sujet à:} &&& \\ &&& \sum_{b \in N_m^-} f_{mb} - f_{sm} = 0 \quad \forall m \in M, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\sum_{a \in N_b^+} f_{ba} - \sum_{m \in N_b^-} f_{mb} = 0 \quad \forall b \in B, \quad (3.2)$$

$$\sum_{z \in N_a^+} f_{za} - \sum_{b \in N_a^-} f_{ba} = 0 \quad \forall a \in A, \quad (3.3)$$

$$\sum_{m \in N_s^+} f_{sm} = D \quad (3.4)$$

$$\sum_{a \in N_z^-} f_{az} = d_z \quad \forall z \in Z, \quad (3.5)$$

$$f_{az} - d_{az}y_{az} \leq 0 \quad \forall (a,z) \in A \times Z, \quad (3.6)$$

$$f_{ba} - q_{ba}y_{ba} \leq 0 \quad \forall (b,a) \in B \times A, \quad (3.7)$$

$$f_{mb} - t_{mb}y_{mb} \leq 0 \quad \forall (m,b) \in M \times B, \quad (3.8)$$

$$f_{sm} - t_{sm}y_{sm} \leq 0 \quad \forall m \in M, \quad (3.9)$$

$$\sum_{b \in N_a^-} y_{ba} \leq 1 \quad \forall a \in A, \quad (3.10)$$

$$\sum_{m \in N_b^-} y_{mb} \leq 1 \quad \forall b \in B, \quad (3.11)$$

$$\sum_{a \in N_b^+} y_{ba} \leq Q_b \quad \forall b \in B, \quad (3.12)$$

$$\sum_{b \in N_m^+} y_{mb} \leq Q_m \quad \forall m \in M, \quad (3.13)$$

$$f_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E, \quad (3.14)$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in E. \quad (3.15)$$

Définissons les matrices de contraintes suivantes:

$$Y_{ba} = \begin{cases} \sum_{b \in N_a^-} y_{ba} \leq 1 & \forall a \in A, \\ \sum_{a \in N_b^+} y_{ba} \leq Q_b & \forall b \in B. \end{cases}$$

$$Y_{mb} = \begin{cases} \sum_{m \in N_b^-} y_{mb} \leq 1 & \forall b \in B, \\ \sum_{b \in N_m^+} y_{mb} \leq Q_m & \forall m \in M. \end{cases}$$

Les contraintes de couplage (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9) rendent la résolution du modèle difficile. Leur relaxation permet de séparer notre modèle en deux types de problèmes: un problème de flot, d'une part, et, d'autre part, un problème qui s'apparente à l'arbre

de Steiner, [53], à la seule différence qu'on peut avoir au dernier niveau plusieurs arcs entrant vers les zones (ce qui nous fait perdre la structure d'arbre).

3.3 La Relaxation lagrangienne

L'utilisation des multiplicateurs de Lagrange dans les problèmes d'optimisation a déjà été suggérée par Everett, [26]. Le succès des travaux de Held et Karp, [39], sur l'application de la relaxation lagrangienne au problème de voyageur de commerce a stimulé une utilisation étendue de cette approche. Fisher ([29], [30], [31]), fournit un traitement d'ensemble de la théorie et de l'application de la dualité lagrangienne dans le domaine de la programmation en nombres entiers. Cette méthode est utilisée dans [40] et [42], pour déterminer une solution approchée d'un problème de multiflot respectivement dans un modèle avec contraintes de capacités et sans capacités sur les arcs. La relaxation lagrangienne consiste à mettre un ensemble de contraintes du MIP dans la fonction objectif, avec des multiplicateurs fixés. Dans sa forme de base la méthode est composée d'une relaxation des contraintes dites compliquantes, d'une procédure de sous-gradient pour résoudre le dual lagrangien et d'une heuristique qui permet d'atteindre une solution réalisable.

Dans ce qui suit nous allons décrire la méthode de relaxation lagrangienne combinée avec une technique de sous-gradient.

Soit un modèle de la forme:

$$(\text{LP}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad C^T x \\ \text{sujet à:} \\ \quad Ax - a \leq 0, \\ \quad Bx - b \leq 0, \\ \quad x \in X. \end{array} \right.$$

où C est un vecteur, A et B sont des matrices et X est un sous-ensemble quelconque éventuellement discret. On suppose qu'on dispose d'un outil logiciel capable de minimiser

une fonction linéaire sous les contraintes $Ax - a \leq 0, \forall x \in X$, mais l'introduction des contraintes $Bx - b \leq 0$ rend le problème difficile. Les contraintes $Bx - b \leq 0$ sont appelées de manière générique les "contraintes de couplage". La dualisation de cette contrainte induit une nouvelle fonction objectif appelée lagrangien qui est une fonction des variables primale x et duale $\alpha \geq 0$.

$$L(x, \alpha) = C^T x + \alpha^T (Bx - b).$$

Le lagrangien remplace chaque contrainte à relaxer par un coût linéaire à payer ou à recevoir. La fonction duale qui lui est associée est une fonction qui, à tout $\alpha \geq 0$ fait correspondre $W(\alpha)$ qui est une borne inférieure de (LP) et est déterminée en résolvant le problème:

$$(\mathbf{RLP}_\alpha) \left\{ \begin{array}{l} W(\alpha) = \min L(x, \alpha) \\ \text{sujet à:} \\ Ax - a \leq 0, \\ x \in X. \end{array} \right.$$

Par la dualité faible on a la relation:

$$\forall \alpha \geq 0, W(\alpha) \leq C^T x, \quad \forall x \text{ tel que } Ax - a \leq 0, \quad Bx - b \leq 0, \quad x \in X$$

$$\implies W(\alpha) \leq z^*.$$

où z^* est la valeur optimale du problème (LP) . Cette dernière inéquation est vérifiée pour tout x réalisable pour notre problème et tout $\alpha \in R_+^m$, ce qui nous donne deux motivations pour résoudre le problème dual.

- Comme chaque $W(\alpha)$ est une borne inférieure de la valeur optimale du problème (LP) alors chercher à maximiser W revient à trouver une meilleure borne inférieure.

- Si la solution x_α de (RLP_α) est réalisable pour le problème (LP) alors l'égalité $W(\alpha) = C^T x_\alpha$ est vérifiée et par conséquent x_α est une solution optimale de (LP) . Notre α doit donc maximiser W .

En utilisant la dualité lagrangienne le problème dual s'écrit:

$$(\mathbf{DLP}) \left\{ \max_{\alpha \in \mathbb{R}_+^m} W(\alpha). \right.$$

Le principe de la relaxation lagrangienne consiste alors à résoudre de manière itérative la suite de problèmes $RLP(\alpha)$ pour différentes valeurs de α .

Le problème (DLP_α) est en général non-différentiable et sa fonction objectif est concave et linéaire par morceaux. Une des techniques utilisées pour résoudre ce problème est l'algorithme du sous-gradient, [62], [30], [31]. Il consiste, à chaque itération, à faire une mise à jour des multiplicateurs de Lagrange.

La relaxation lagrangienne remplace la résolution du problème primal par celle de son dual. Mais des questions se posent après avoir résolu le problème dual: le saut de dualité est-il faible? Comment retrouver une bonne solution réalisable? Généralement la fonction duale n'est pas différentiable, alors pour résoudre le problème dual, on utilise souvent la concavité de la fonction duale et une méthode de type sous-gradient. Pour cela, il est essentiel de savoir déterminer facilement un sous-gradient de W en un point α .

On a le théorème suivant:

Théorème 3

La fonction $W(\alpha)$, sur son ensemble de définition, est toujours concave et semi-continue supérieurement. De plus si α est tel que (RLP_α) admette une solution optimale x_α (non nécessairement unique), alors $g_\alpha = Bx_\alpha - b$ est un sous-gradient de W en α , donc la relation suivante est vérifiée:

$$W(v) \leq W(\alpha) + g_\alpha^T(v - \alpha) \quad \forall v \in \text{Dom}(W).$$

Soit α^k le vecteur des multiplicateurs de l'itération courante. Pour un $t > 0$ assez petit,

soit le point $\alpha(t) = \alpha^k + tg_{\alpha_k}$, d'après le théorème 3 on a la relation:

$$W(\alpha^k + tg_{\alpha_k}) \leq W(\alpha^k) + (g_{\alpha_k})^T(tg_{\alpha_k}),$$

$$W(\alpha^k + tg_{\alpha_k}) \leq W(\alpha^k) + t\|g_{\alpha_k}\|^2.$$

Cette relation permet de justifier la mise à jour des vecteurs de multiplicateurs en posant $\alpha^{k+1} = \alpha^k + t^k g_{\alpha_k}$.

D'autres techniques existent pour résoudre le problème dual. On peut utiliser la méthode des faisceaux, la méthode des plans de coupes, [62], l'algorithme du volume [7], la méthode proximale, etc... Dans ce qui suit nous allons appliquer la méthode de relaxation lagrangienne au modèle de flots.

3.4 Application au modèle de flot

L'approche utilisée pour résoudre notre problème MIP consiste à fournir des bornes sur la valeur optimale du problème. Une borne inférieure est évaluée à travers une technique de relaxation lagrangienne. Elle sera améliorée à chaque itération par une méthode de sous-gradient. Une borne supérieure sera aussi calculée à travers une heuristique qui exploite les caractéristiques du réseau.

Les contraintes qui rendent notre modèle "difficile" à résoudre sont les contraintes dans lesquelles on retrouve les deux types de variables, ce sont les contraintes de capacités. Ces contraintes permettent un couplage entre les deux types de variables. Leur relaxation va permettre de les découpler et de décomposer le problème en différents sous-problèmes plus simples à résoudre. Dans les prochaines sections la fonction duale sera définie suivie de la résolution des sous-problèmes induits par la relaxation.

3.4.1 Fonction duale

La relaxation lagrangienne consiste à affecter à chacune des contraintes à relaxer une variable duale qui représente le coût à payer ou à recevoir. Considérons :

α le vecteur des multiplicateurs associés à l'ensemble de contraintes (3.6),

$$\alpha = (\alpha_{az}),$$

β le vecteur des multiplicateurs associés à l'ensemble de contraintes (3.7),

$$\beta = (\beta_{ba}),$$

γ le vecteur des multiplicateurs associés à l'ensemble de contraintes (3.8),

$$\gamma = (\gamma_{mb}),$$

λ le vecteur des multiplicateurs associés à l'ensemble de contraintes (3.9),

$$\lambda = (\lambda_{sm}).$$

Notons $\Phi = (\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$. Le lagrangien s'écrit alors:

$$L(y, f, \Phi) = L_1(f, \Phi) + L_2(y, \Phi) + L_3(y, \Phi) + L_4(y, \Phi) + L_5(y, \Phi)$$

où:

$$\begin{aligned} L_1(f, \Phi) &= \sum (\alpha_{az} - r_{az}) f_{az} + \sum \beta_{ba} f_{ba} + \sum_{(m,b)} \gamma_{mb} f_{mb} + \sum_{m \in M} \lambda_{sm} f_{sm} \\ L_2(y, \Phi) &= \sum_{(a,z)} (C_{az} - d_{az} \alpha_{az}) y_{az}, \\ L_3(y, \Phi) &= \sum_{(b,a)} (C_{ba} - q_{ba} \beta_{ba}) y_{ba}, \\ L_4(y, \Phi) &= \sum_{(m,b)} (C_{mb} - t_{mb} \gamma_{mb}) y_{mb}, \\ L_5(y, \Phi) &= \sum_{m \in M} (C_{sm} - t_{sm} \lambda_{sm}) y_{sm}. \end{aligned}$$

Le problème relaxé $PR(\Phi)$ s'écrit:

$$PR(\Phi) \begin{cases} W(\Phi) = \min Z_{LR} & L(y, f, \Phi) \\ \text{sujet à:} & (3.1) \text{ à } (3.5), (3.10) \text{ à } (3.15). \end{cases}$$

En utilisant la dualité lagrangienne le problème dual s'écrit:

$$(\text{DLP}) \left\{ \begin{array}{l} \max_{\alpha \in R_+^m} W(\Phi) \end{array} \right.$$

Le problème $PR(\Phi)$ peut être décomposé en cinq sous-problèmes. Un premier sous-problème dépendant des variables de flot et quatre autres dépendant des variables d'arcs de même niveau hiérarchique dans le réseau.

3.4.2 Résolution des sous-problèmes

Sous-problème (SPR_1)

Le premier sous-problème (SPR_1) regroupe des variables de flot.

$$(SPR_1) \left\{ \begin{array}{l} \min Z = L_1(f, \Phi) \\ \text{sujet à:} \\ (3.1) \text{ à } (3.5), (3.15). \end{array} \right.$$

La forme de la fonction objectif permet de définir les coefficients $(\alpha_{az} - r_{az})$, (β_{ba}) , (γ_{mb}) et (λ_m) comme étant les coûts de transport d'une unité de flot à travers les arcs du réseau. Le sous-problème reviendrait à trouver un plan d'acheminement du flot disponible de la source fictive s vers les différentes zones au coût minimal. C'est un problème de flot dans lequel la capacité des arcs est infinie. Il consiste à déterminer la quantité de flot à envoyer à travers chaque arc du réseau et qui permettrait de satisfaire la demande au niveau des zones à coût minimal. Pour résoudre le sous-problème, on détermine le plus court chemin de s à n'importe quelle zone z et on route sur ce chemin une quantité de flot égale à la demande d_z . Le coût unitaire de transport du flot sur chaque chemin est la somme des coûts de chaque unité de flot sur les arcs qui le composent. La valeur de chaque flot, sur chaque arc, est la somme des demandes des zones dont le plus court chemin passe par cet arc.

Les quatre autres sous-problèmes dépendent des variables d'arcs d'un même niveau du réseau.

Sous-problème (SPR_2)

L'absence de coûts de liaison au niveau des arcs du niveau BTS-Zone va simplifier la résolution de ce sous-problème. Le sous-problème (SPR_2), est fonction des variables d'arcs du niveau BTS-Zones. Il s'écrit:

$$(SPR_2) \begin{cases} \min & L_2(y, \Phi) \\ \text{sujet à:} & y_{az} \in \{0,1\}, \forall (a,z). \end{cases}$$

Le sous-problème (SPR_2) peut être séparé en Z sous-problèmes définis pour chaque $z \in Z$ comme suit:

$$(SPR_2^z) \begin{cases} \min L_2^z(y, \alpha) = & - \sum_{a \in A_z} d_{az} \alpha_{az} y_{az} \\ \text{sujet à:} & y_{az} \in \{0,1\}, \quad \forall a \in A_z. \end{cases}$$

Pour tout $z \in Z$, la solution optimale est

$$y_{az}^* = \begin{cases} 1 & \text{si } -d_{az} \alpha_{az} \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sous-problème (SPR_3)

Le sous-problème (SPR_3), est fonction des variables d'arcs du niveau BSC-BTS. Il s'écrit:

$$(SPR_3) \begin{cases} \min & L_3(y, \Phi) = \sum_{(b,a)} (C_{ba} - q_{ba} \beta_{ba}) y_{ba} \\ \text{sujet à:} & y_{ba} \in Y_{ba}, \\ & y_{ba} \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Ce sous-problème peut être interprété comme un problème d'affectation. La première contrainte ressemble à la contrainte de demande et la deuxième à une contrainte de disponibilité.

Posons: $\Phi_{ba} = C_{ba} - q_{ba}\beta_{ba}$, $N = \{(a,b) : \Phi_{ba} \leq 0\}$ et

$\underline{A} = \{a \in A \text{ tel qu'il existe un } b_a \in B_a; \Phi_{b_a a} < 0\}$. Les arcs qui ont un coût Φ_{ba} positif sont forcés à prendre la valeur zéro pour ne pas contribuer à l'augmentation de la fonction objectif. Nous allons donc considérer une restriction $(SPR_3)_N$ sur l'ensemble N du sous-problème (SPR_3) . Ce sous-problème s'interprète comme un problème d'affectation de la manière suivante:

- la variable d'arc y_{ba} indique si le sommet origine b est affecté au sommet destination a ,
- le coût d'affectation du sommet b au sommet a est considéré comme étant égal à Φ_{ba} ,
- Q_b est interprété comme étant le nombre de sommets BTS qui pourront être atteints à partir du BSC b ,
- la demande au niveau d'un sommet destination $a \in \underline{A}$ est égale à 1.

Le problème d'affectation sera résolu par un algorithme de transport pour obtenir une solution optimale. Soit $(y_{ba}^*)_{(b,a) \in N}$ la solution optimale trouvée.

Sous-problème (SPR_4)

Le sous-problème (SPR_4) est fonction des variables d'arc du niveau MSC-BSC. Il se formule de la même manière que le sous-problème (SPR_3) traité précédemment et est résolu de la même manière.

$$(SP_4) \left\{ \begin{array}{l} W_4(\gamma) = \min \quad L_4(y, \Phi) \\ \text{sujet à:} \\ y_{mb} \in Y_{mb}, \\ y_{mb} \in \{0,1\}. \end{array} \right.$$

Sous-problème (SPR_5)

$$(SPR_5) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad L_5(y, \Phi) = \sum_{m \in M} (C_{sm} - t_{sm} \lambda_{sm}) y_{sm} \\ \text{sujet à:} \\ y_{sm} \in \{0, 1\}, \quad \forall m \in M. \end{array} \right.$$

Le sous-problème (SPR_5) se résout simplement. La solution optimale est :

$$y_{sm}^* = \begin{cases} 1 & \text{si } C_{sm} - t_{sm} \lambda_{sm} \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.4.3 Algorithme du sous-gradient

Les méthodes de sous-gradient sont proposées pour minimiser des fonctions convexes (ou maximiser des fonctions concaves) non nécessairement différentiables pour lesquelles il est relativement aisé de déterminer un sous-gradient en un point. La méthode générique consiste à effectuer de petits pas dans la direction du sous-gradient [62], [39]. Utilisons les notations suivantes pour désigner les contraintes de capacités qui ont été relaxées:

$$\begin{aligned} g_1(f, y) &= (f_{az} - d_{az} y_{az})_{a \in A_z, z \in Z}, \\ g_2(f, y) &= (f_{ba} - q_{ba} y_{ba})_{a \in A, b \in B_a}, \\ g_3(f, y) &= (f_{mb} - t_{mb} y_{mb})_{b \in B, m \in M_b}, \\ g_4(f, y) &= (f_{sm} - t_{sm} y_{sm})_{m \in M}, \\ g &= (g_1, g_2, g_3, g_4). \end{aligned}$$

Les multiplicateurs sont mis à jour de la manière suivante:

$$\alpha^{k+1} = \max\{0, \alpha^k + p^k g_1(f^k, y^k)\},$$

$$\beta^{k+1} = \max\{0, \beta^k + p^k g_2(f^k, y^k)\},$$

$$\gamma^{k+1} = \max\{0, \gamma^k + p^k g_3(f^k, y^k)\},$$

$$\lambda^{k+1} = \max\{0, \lambda^k + p^k g_4(f^k, y^k)\},$$

$$\Phi^{k+1} = (\alpha^{k+1}, \beta^{k+1}, \gamma^{k+1}, \lambda^{k+1}).$$

$$p^{k+1} = \pi \frac{1.05UB - Z_{LR}(\Phi^{k+1})}{nbiter \|g(f^{k+1}, y^{k+1})\|^2}$$

π est un scalaire défini par $0 \leq \pi \leq 2$, [62]; nbiter = nombre d'itérations et Z_{LR} la valeur optimale du problème $PR(\Phi)$.

π est utilisé pour contrôler la vitesse de convergence de la méthode. Le paramètre UB représente une borne supérieure, une estimation par excès de la valeur optimale du problème initial associée à une solution réalisable.

Notre problème relaxé s'écrit sous forme matricielle de la manière suivante:

$$PR(\Phi) \begin{cases} W(\Phi) = \min & H(f, y) + \Phi^T g(f, y) \\ \text{s.c} & \\ & y \in Y, f \in F \end{cases}$$

Y est l'ensemble des contraintes dépendant uniquement des variables de liaison, F l'ensemble des contraintes de flot et $H(f, y) = C(y) + L(f)$.

La procédure de résolution est définie de la manière suivante:

a) **Initialisation**

Partir d'un point $\Phi^0 \geq 0$

b) **Itération k**

Résoudre les sous-problèmes

soit (f^k, y^k) la solution optimale trouvée.

$g(f^k, h^k)$ est un sous-gradient de W au point Φ^k

c) **test d'arrêt**

– Si le test d'arrêt est vérifié, l'algorithme s'arrête .

Soit (\bar{f}, \bar{y}) la solution obtenue.

– Sinon faire une mise à jour des multiplicateurs.

On fait $k=k+1$ et on retourne à l'étape b

Les contraintes relaxées, permettent non seulement de limiter le flot traversant les arcs, mais aussi servent de couplage entre les variables d'arcs et de flots. Ces deux conditions ne sont plus forcément satisfaites après la relaxation, ce qui fait que la solution fournie par la relaxation lagrangienne est en général non-réalisable. La solution non-réalisable obtenue peut donc comporter: des arcs ayant une quantité de flot supérieure à leur capacité, ou des arcs ayant un flot positif tandis que l'arc n'est pas choisi, ou un arc choisi sans flot. Donc il faut une autre procédure pour générer une solution réalisable à partir de cette dernière. Dans la prochaine section nous développons une heuristique qui permet de rendre réalisable la solution obtenue après l'algorithme du sous-gradient.

3.4.4 Heuristique

L'heuristique qu'on va développer consiste d'abord à réduire le surplus de capacité au niveau des BTS jusqu'à satisfaction de la demande de toutes les zones, ensuite à connecter toutes les BTS activées, ayant un flot sortant, aux BSC. Enfin, on connecte ces BSC aux MSC qui sont connectés à leur tour à la source fictive. Aussi tout arc non traversé par du flot est annulé.

Considérons (\bar{y}, \bar{f}) la solution fournie par l'algorithme de sous-gradient.

Définissons les paramètres suivants:

$capaciterestante(a)$	=	la quantité de flot restant pour que la BTS a soit saturée;
$nbarcsortant[i]$	=	le nombre d'arcs activés sortant du sommet i ;
$nbarcentrant[i]$	=	le nombre d'arcs activés entrant vers le sommet i ;
$flotsortant[i]$	=	la quantité de flot sortant du sommet i ;
$flotentrant[i]$	=	la quantité de flot entrant vers le sommet i ;
$nbarcrestant[j]$	=	surplus de capacité en terme de nombre d'arcs;

Soit $Qr(a) = q_{ba} - \sum_{z \in Z_a} f_{az} =$ surplus de capacité d'une BTS a . $Qr(a) > 0$ signifie que la capacité de la BTS a est dépassée. $Qr(a) < 0$ indique que la capacité de la BTS a n'est pas encore atteinte.

L'heuristique est définie de la manière suivante:

1. Activation d'arcs ayant un flot non nul

Pour chaque arc (p,q) tel que $y_{pq} = 0$ et $f_{pq} > 0$ alors faire $y_{pq} = 1$

2. Réduction de capacité pour une BTS

a) Transfert de flot vers une autre BTS de capacité non saturée

+ Tant qu'il existe une BTS a telle que $Qr(a) < 0$ alors

choisir une zone z' telle que $y_{az'} = 1$ et $f_{az'} > 0$

s'il existe une BTS $a' \neq a$ telle que $y_{a'z'} = 1$ alors

- si $f_{az'} \leq Qr(a')$ faire:

$$f_{a'z'} = f_{az'}$$

$$f_{az'} = 0$$

- sinon

si $f_{az'} > Qr(a') > 0$, faire:

$$f_{a'z'} = Qr(a')$$

$$f_{az'} = f_{az'} - Qr(a')$$

+ fin tant que

b) Transfert de flot vers n'importe quelle autre BTS

+ Tant qu'il existe $a \in A$ telle que $Qr(a) < 0$ alors

choisir une zone z telle que $f_{az} > 0$

choisir une BTS $a' \neq a$ telle que $y_{a'z} = 1$ alors

- si $-Qr(a) < \text{capaciterestante}(a')$ faire

$$f_{a'z} = f_{a'z} - Qr(a)$$

$$f_{az} = f_{az} + Qr(a)$$

- Sinon $f_{a'z} = f_{a'z} + \text{capaciterestante}(a')$

$$f_{az} = f_{az} - \text{capaciterestante}(a')$$

Sinon si a' appartient au voisinage de z et que $y_{a'z} = 0$

faire $y_{a'z} = 1$ et $f_{a'z} = f_{az}$ et $f_{az} = 0$

+ Fin tant que

3. Réduction de capacité d'un BSC

+ Tant qu'il existe un BSC b tel que $\text{nbarcrestant}[b] < 0$

Choisir une BTS a reliée au BSC b tel que $f_{ba} > 0$ et $y_{ba} = 1$

choisir un BSC $b' \in V(a)$ tel que $\text{nbarcrestant}[b'] > 0$,

et $\text{nbarcsortant}[b'] > 0$, poser

$$f_{b'a} = f_{ba}, \quad y_{b'a} = 1 \quad f_{ba} = 0, \quad y_{ba} = 0$$

+ Fin tant que

4. Réduction de capacité d'un MSC

+ Tant qu'il existe un MSC m tel que $\text{nbarcrestant}[m] < 0$

Choisir un BSC b reliée au MSC m tel que $f_{mb} > 0$ et $y_{mb} = 1$

choisir un BSC $m' \in V(b)$ tel que $\text{nbarcrestant}[m'] > 0$,

et $\text{nbarcsortant}[m'] > 0$, poser:

$$f_{m'b} = f_{mb}, \quad y_{m'b} = 1 \quad f_{mb} = 0, \quad y_{mb} = 0$$

+ Fin tant que

5. Annulation d’arcs

Si la variable de flot est nulle alors prendre la variable d’arc nulle.

Dans la prochaine section, nous présentons les résultats numériques obtenus, en résolvant le modèle de flot : d’une part, directement par Cplex, et d’autre part, par l’heuristique lagrangienne.

3.5 Résultats numériques

Les tests numériques ont été effectués dans les mêmes conditions que dans le chapitre 2 avec le même ordinateur. Les données sont encore générées de manière aléatoire par le même programme codé en C++. Le temps limite de résolution TL est toujours fixé à 10 heures. Les instances utilisent les mêmes paramètres qu’à la section 2.4. Au niveau de chaque tableau, la colonne Z représente le nombre de zones (cellules) à couvrir et les colonnes des ensembles A , B et M représentent respectivement le nombre de sites disponibles prédéfinis pour l’installation des BTS, BSC et MSC. La colonne N représente, pour des instances dont les paramètres sont les mêmes, le numéro de l’instance. La colonne 6 indique le meilleur temps de résolution fourni par Cplex, entre le modèle de synthèse du chapitre 2 et le modèle global de flot. La borne supérieure UB est déterminée par l’heuristique tandis que la borne inférieure LB est déterminée après quelques itérations du sous-gradient. L’avant dernière colonne mesure le saut de dualité ($dgap$) qui existe entre les deux bornes fournies par l’heuristique lagrangienne: $dgap = (UB - LB)/UB$.

La dernière colonne mesure le “gap” existant entre la valeur optimale ($V.O$) fournie par Cplex ou Benders et la valeur donnée par l’heuristique. Il est défini par:

$gap = (V.O - UB)/V.O$, L’unité de temps est la seconde sur tous les tableaux. Pour les instances de petite taille présentées dans le tableau 3.1, la relaxation donne souvent la solution optimale, même si le temps de résolution est légèrement supérieur à celui de

Paramètres					Méthodes				
Z	A	B	M	N	Cplex	Relaxation Lagrangienne			
					Meilleur Temps (s)	Temps (s)	dgap	gap	
36	12	2	1	2	0.03	3	0.06	0	
49	17	2	1	1	0.07	3	0.12	0	
49	17	2	1	1	0.19	3	0.28	0.12	
69	25	2	1	2	5	5	0.09	0.072	
84	27	2	1	3	0.25	8	0.15	0	
96	35	2	1	1	11	13	0.18	0.007	
96	35	2	1	2	0.30	13	0.003	0	
96	35	2	1	3	44	6	0.006	0	

TAB. 3.1 – *Instances type I: comparaison Cplex-Relaxation*

Cplex. Les tableaux 3.2 et 3.3 font entrevoir que l’augmentation de la taille des instances influe sur la borne inférieure et la qualité de la borne supérieure. L’efficacité de la méthode de relaxation lagrangienne, est notable pour les instances de taille moyenne. Elle fournit souvent, pour ces instances, une bonne borne supérieure en un temps acceptable, là où Cplex ne fournit même pas la solution optimale dans la limite de temps fixée. C’est ce que montre le tableau 3.2 qui fait ressortir le gain en temps au prix de perdre l’optimalité. Le “gap” entre la borne supérieure et la solution optimale est d’autant plus petite que la borne inférieure est meilleure. Dans le tableau 3.3, on voit que pour les instances de grande taille l’heuristique lagrangienne fournit une très bonne borne supérieure en peu de temps. Même si le saut de dualité donné par l’avant dernière colonne du tableau est relativement grand, le gap faible de moins de 13% entre la valeur optimale et la valeur de l’algorithme confirme l’efficacité de la relaxation lagrangienne appliquée aux problèmes de grande taille. Cplex par contre atteint toujours la limite de temps et souvent ne fournit pas la valeur optimale.

Paramètres					Méthodes			
Z	A	B	M	N	Cplex Meilleur temps(s)	Relaxation Lagrangienne Temps (s)	dgap	gap
105	40	3	2	2	TL	16	0.33	0.12
150	55	3	2	1	TL	30	0.53	0.10
150	55	3	2	2	TL	30	0.53	0.017
180	60	3	2	2	5011	63	0.92	0.03
186	68	3	2	1	1120	63	0.46	0.14
200	175	3	2	3	TL	31	0.23	0.01
204	75	3	2	3	TL	34	0.13	0.11
234	95	3	2	1	TL	72	0.22	0.03
234	95	3	2	1	TL	72	0.14	0.03

TAB. 3.2 – *Instances de type II: comparaison Cplex-Relaxation*

Paramètres					Méthodes			
Z	A	B	M	N	Cplex Meilleur temps (s)	Relaxation Lagrangienne Temps (s)	dgap	gap
256	115	3	2	1	TL	72	0.34	0.13
300	150	5	2	1	TL	197	0.40	0.10
400	375	3	2	32	TL	201	0.35	0.014
400	375	3	2	3	TL	174	0.30	0.022
500	450	3	2	2	TL	298	0.43	0.013

TAB. 3.3 – *Instances de type III: comparaison Cplex-Relaxation*

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité une formulation de la conception topologique des réseaux de télécommunication cellulaires par les flots. Une méthode de relaxation lagrangienne a été utilisée pour trouver une approximation de la solution optimale. Avec la forme particulière du modèle, la relaxation des contraintes de capacités a permis de séparer le modèle en plusieurs sous-problèmes simples à traiter. Un premier sous-problème consiste à envoyer une quantité de flot d'une source vers des destinations qui ont une demande à satisfaire. Ce sous-problème est résolu comme un problème de plus court chemin. Quatre autres sous-problèmes dépendent des variables d'arcs de même niveau et ont été traités simplement en tenant compte de leur forme particulière.

La performance et l'efficacité de la méthode de relaxation lagrangienne appliquée aux problèmes de grande taille sont encore vérifiées dans cette étude. Même si l'heuristique lagrangienne perd par rapport à l'optimalité pour ce type de problème, on note un gain considérable au niveau du temps de résolution comparé même à la méthode de Benders qui a montré quelques difficultés à atteindre la solution optimale dans la limite de temps fixée. La qualité de la borne qu'elle fournit et le saut de dualité faible montrent tout l'intérêt de ce modèle de flot comparé avec le modèle classique.

Dans le prochain chapitre, nous appliquons une méthode de décomposition mixte à notre modèle de flot. De cette décomposition on déduit, avec une relaxation des contraintes de flots, des sous-problèmes qui dépendent des niveaux hiérarchiques du réseau.

Chapitre 4

Décomposition Mixte

L'objectif principal des méthodes de décomposition en programmation mathématique est naturellement de réduire la taille des problèmes, permettant de substituer un gros moyen de calcul par des calculateurs locaux de taille réduite travaillant en parallèle ou séquentiellement, ou même de manière interactive suivant le type de coordination adopté. Avec la particularité de la structure hiérarchique des réseaux de télécommunication, une décomposition en niveaux peut influencer sur la qualité de la solution. Elle permet de traiter le problème de manière locale pour chaque niveau, reste après à trouver un moyen de coordonner les interactions entre deux niveaux successifs. La méthode de décomposition mixte, [54], est très efficace pour résoudre des modèles à structure hiérarchisée comme dans le cadre des réseaux de télécommunication cellulaires. Elle combine à la fois une décomposition par les prix (variables duales) et une décomposition par les ressources (variables d'allocation). La décomposition par les ressources permet de gérer le transfert de flot d'un niveau du réseau à un autre.

Chaque niveau représente un sous-réseau. Appelons E_z , E_a , E_b et E_m les sous-réseaux définis respectivement par les niveaux BTS-Zones, BSC-BTS, MSC-BSC et Source-MSC.

L'idée consiste à traiter le problème de manière locale en déterminant les arcs à sélectionner pour chaque sous-réseau et le flot qui doit y passer. Le problème qui se pose cependant est la satisfaction de la contrainte de conservation de flots entre ces différents sous-réseaux. Ces contraintes sont définies comme différence entre deux termes appartenant à des sous-réseaux successifs. Par exemple, si on considère un sommet b appartenant à l'ensemble des BSC, la contrainte de conservation s'exprime comme la différence d'une somme de termes dont les composantes sont des variables du sous-réseau E_b et d'une autre dont les composantes sont des variables de E_a . Cette contrainte de conservation de flots peut alors être décomposée par l'intermédiaire d'une variable tampon, qu'on appellera variable d'allocation, qui sera égale à chacun des termes de cette contrainte.

Dans les sections qui vont suivre, nous donnons une description de la méthode de décomposition mixte. Ensuite nous proposons son application au modèle de flot (*MIP*) décrit dans la section 3.2.3 et l'algorithme de résolution utilisé pour les tests numériques. En fin nous présentons les résultats numériques justifiant la validité de cet algorithme.

4.1 Description de la méthode

La méthode de Décomposition Mixte a été proposée dans le cadre des programmes linéaires Bloc-angulaires par Mahey [54]. Elle est fortement liée au Principe de Prédiction des Interactions introduit par Takahara (voir [61]) dans le cadre de la commande des systèmes complexes et analysé formellement par Cohen [19] dans le cadre de l'Optimisation Convexe. D'une façon plus générale, on appellera décomposition mixte tout schéma de décomposition-coordination itératif qui s'appuie à la fois sur des allocations de ressources et de prix. On pourra donc qualifier ce type de schéma de primal-dual même si ce terme signifie autre chose en programmation linéaire. L'un des premiers algorithmes qui combine les coordinations par les prix et par les ressources est celui de

Kornai et Liptak [46].

Les motivations pour combiner les deux schémas classiques de décomposition par les ressources ou par les prix sont diverses :

- la décentralisation des décisions locales;
- la réduction des dégénérescences des bases optimales dans le cadre de la P.L.;
- la possibilité d’une coordination à un niveau dans laquelle les sous-systèmes échangent directement leurs informations primales et duales.

Le premier point correspond à la volonté de rendre les sous-systèmes le plus autonome possible en leur permettant d’identifier l’optimalité de leur solution. Les implications économiques et organisationnelles sont nombreuses et on peut consulter à ce sujet l’article de Burton et Obel [15] dans lequel plusieurs schémas mixtes sont analysés, comme par exemple la ”cross decomposition” de Van Roy [72] utilisée pour des modèles contenant des variables entières. Les deux autres points sont analysés dans [54] dans le cadre des programmes linéaires bloc-angulaires.

4.1.1 Dégénérescence des sous-problèmes et allocations mixtes

On donne ici une description simplifiée du schéma de décomposition appliqué à un programme linéaire bloc-angulaire. Il s’agit donc d’un programme linéaire contenant p blocs indépendants représentés par des polyèdres $S_j, j = 1, \dots, p$, supposés bornés et non vides, et couplés par m contraintes couplantes :

$$\sum_{i=1}^p A_j x_j = b$$

Le modèle de P.L. est donc dans $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_p}$:

$$\begin{aligned}
z^* &= \min_{x_1, \dots, x_p} \sum_{j=1}^p c_j \cdot x_j \\
&\sum_{j=1}^p A_j x_j = b, \\
&x_j \in S_j, j = 1, \dots, p.
\end{aligned}$$

et on suppose que ce P.L. possède une solution optimale x^* et des multiplicateurs optimaux associés aux contraintes de couplage notés u^* .

Observations :

1. Du point de vue de la relaxation lagrangienne, ce défaut de décentralisation est une conséquence immédiate de la non différentiabilité de la fonction duale $h(u) = \sum_{j=1}^p h_j(u) + b^T u$; en effet, cette fonction est par construction concave linéaire par morceaux et, par conséquent, non différentiable en u^* .
2. L'algorithme de coordination qui cherche à résoudre le problème dual (par exemple par une méthode de sous-gradient) ne pourra qu'approcher la solution optimale duale u^* ; donc seuls certains sous-gradients (extrémaux) seront calculés par l'oracle qui s'appuie sur les sous-problèmes. La mise en place d'une procédure de coordination qui permet de récupérer des solutions primales réalisables (Dantzig-Wolfe, cf. Lasdon [51], ou méthode du volume [7]) pourra contourner ce problème au prix d'efforts calculatoires additionnels, mais les sous-systèmes resteront partiellement décentralisés, car seul le niveau coordinateur pourra reconnaître l'optimalité d'une solution.

Dans le cas de la Décomposition par les Ressources, chaque sous-problème reçoit une allocation de ressources y_j , choisie globalement réalisable, c.a.d. telles que $\sum_{j=1}^p y_j = b$. Les sous-problèmes sont donc sous la forme :

$$v_j(y_j) = \min_{x_j \in S_j} c_j \cdot x_j$$

$$A_j x_j = y_j$$

dont les solutions duales optimales seront notées $u_j(y_j)$.

Ici encore, la décentralisation n'est pas acquise, même si les sous-problèmes reçoivent les allocations optimales $y_j = A_j x_j^*$. En effet, x_j^* est bien solution optimale du sous-problème j mais la solution duale n'est pas unique (dégénérescence duale) ce qui empêche les sous-problèmes de tester la condition d'optimalité $u_1(y_1) = \dots = u_p(y_p)$. Cette difficulté est, comme précédemment, une conséquence de la non différentiabilité de la fonction de coordination $v(y) = \sum_j v_j(y_j)$, ce qui implique un coût de calcul élevé pour le niveau coordonnateur.

Pour obtenir une décomposition décentralisée, il faut donc allouer chaque ressource à un seul sous-problème. Cela revient à partitionner chaque bloc A_j des contraintes de couplage en p sous-blocs :

Les contraintes de couplage sont alors reformulées en introduisant des allocations (y_{11}, \dots, y_{pp}) :

$$\left. \begin{array}{l} (c1) \quad A_{jj}x_j - y_{jj} = 0 \\ (c2) \quad A_{jj}x_j + y_{jj} = b_j \end{array} \right\} j = 1, \dots, p.$$

On maintient alors (c1) dans le sous-problème j alors que (c2) est relaxé avec un vecteur de multiplicateur noté u_j (donc associé aux contraintes allouées au sous-problème j).

Le sous-problème j dépend donc de deux paramètres y_{jj} et u_j de même dimension, et s'écrit :

$$w_j(y_j, u_j) = \min_{x_j \in S_j} (c_j \cdot + \sum_{i \neq j} u_i \cdot A_{ij}) x_j$$

$$A_{jj}x_j = y_{jj}$$

Soit \bar{x}_j et \bar{u}_j les solutions primales et duales du sous-problème. On notera $\bar{y}_{jj} = b_j - \sum_{i \neq j} A_{ji} \bar{x}_i$. Le rôle du coordonnateur est maintenant de résoudre le problème minmax suivant :

$$\max_u \min_y \sum_j [w_j(y_j, u_j) - u_j(y_{jj} - b_j)]$$

Dans [54], Mahey propose un schéma de coordination à un niveau qui exploite les propriétés du sous-différentiel des fonctions de coordination w_j et qui consiste à transmettre les propositions d'un sous-problème aux autres de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_j &= \bar{u}_j, \\ y_{jj} &= \bar{y}_{jj}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi le principe dit de *Prédiction des Interactions* introduit par Takahara et analysé par Cohen [19]. La convergence dépend du choix de la partition des contraintes de couplage. D'autres schémas de coordination ont été analysés par Cohen et al [20]. Kydland a proposé également un schéma de coordination mixte très intéressant quand la matrice des contraintes de couplage est bloc-triangulaire [49].

4.1.2 Application à la décomposition de problèmes de flots en sous-réseaux

Comme il a été remarqué dans [54], le choix d'une bonne partition du couplage entre les sous-systèmes s'avère très délicat. Une situation semble cependant exploitable, c'est celle des problèmes d'optimisation sur un réseau. On considère un graphe décomposé en sous-réseaux interconnectés par des nœuds appelés points frontières. L'idée consiste à découpler les sous-réseaux en appliquant un schéma de décomposition mixte aux contraintes de conservation de flot aux nœuds frontières.

Considérons donc un graphe orienté $G = (V, E)$ dont les arcs sont partitionnés en sous-réseaux $E = E_1 \cup \dots \cup E_p$. Les arcs, munis éventuellement de capacités et de coûts, portent des quantités de flot $f_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in E$. À chaque contrainte

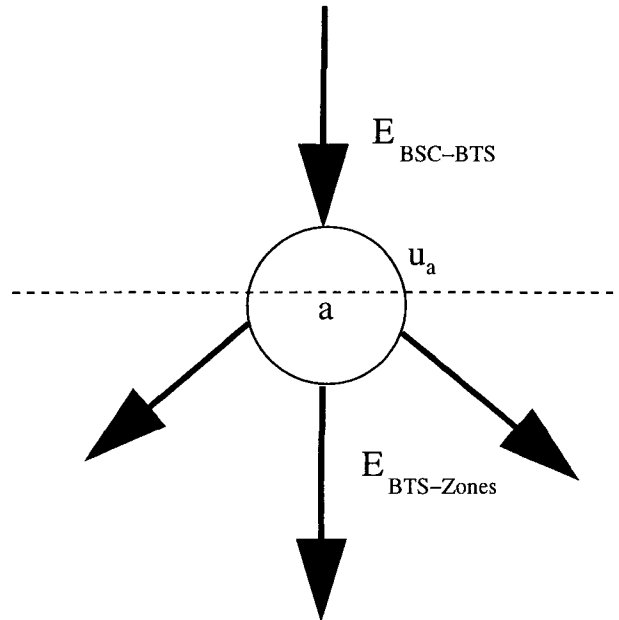


FIG. 4.1 – *Décomposition*

de conservation de flots d'un nœud limitrophe donné, on fait correspondre une variable d'allocation de ressources qui permet de la séparer en deux contraintes. Soient respectivement $w_m \forall m \in M$, $v_b, \forall b \in B$ et $u_a, \forall a \in A$ les variables d'allocations associées aux contraintes de conservation de flots des sommets limitrophes du modèle de flot développé dans la section 3.2.3.

La décomposition se fait de la manière suivante, voir figure 4.1 :

$$\forall a \in A, \quad \sum_{z \in N_a^+} f_{az} - \sum_{b \in N_a^-} f_{ba} = 0 \implies \begin{cases} \sum_{b \in N_a^-} f_{ba} = u_a, \\ \sum_{z \in N_a^+} f_{az} = u_a. \end{cases}$$

$$\forall b \in B, \quad \sum_{a \in N_b^+} f_{ba} - \sum_{m \in N_b^-} f_{mb} = 0 \implies \begin{cases} \sum_{m \in N_b^-} f_{mb} = v_b, \\ \sum_{a \in N_b^+} f_{ba} = v_b. \end{cases}$$

$$\forall m \in M, \quad f_{sm} - \sum_{b \in N_m^+} f_{mb} = 0 \implies \begin{cases} \sum_{b \in N_m^+} f_{mb} = w_m, \\ f_{sm} = w_m. \end{cases}$$

Ces contraintes sont appelées contraintes d'allocation de ressources. Avec ces décompositions, le modèle de flot de la section 3.2.3 devient équivalent au problème suivant qu'on appellera $(PD(u_a, v_b, w_m))$:

$$\min \sum_{(b,a)} C_{ba} y_{ba} \quad + \quad \sum_{(m,b)} C_{mb} y_{mb} + \sum_{m \in M} C_{sm} y_{sm}$$

sujet à:

$$\sum_{m \in N_s^+} f_{sm} = D \tag{4.1}$$

$$f_{sm} = w_m \quad \forall m \in M, \tag{4.2}$$

$$\sum_{b \in N_m^+} f_{mb} = w_m \quad \forall m \in M, \tag{4.3}$$

$$\sum_{m \in N_b^-} f_{mb} = v_b \quad \forall b \in B, \tag{4.4}$$

$$\sum_{a \in N_b^+} f_{ba} = v_b \quad \forall b \in B, \tag{4.5}$$

$$\sum_{b \in N_a^-} f_{ba} = u_a \quad \forall a \in A, \quad (4.6)$$

$$\sum_{z \in N_a^+} f_{az} = u_a \quad \forall a \in A, \quad (4.7)$$

$$\sum_{a \in N_z^+} f_{az} = d_{az} \quad \forall z \in Z, \quad (4.8)$$

$$f_{az} - d_{az} y_{az} \leq 0 \quad \forall (a,z) \in A \times Z, \quad (4.9)$$

$$f_{ba} - q_{ba} y_{ba} \leq 0 \quad \forall (b,a) \in B \times A, \quad (4.10)$$

$$f_{mb} - t_{mb} y_{mb} \leq 0 \quad \forall (m,b) \in M \times B, \quad (4.11)$$

$$f_{sm} - t_{sm} y_{sm} \leq 0 \quad \forall m \in M, \quad (4.12)$$

$$y_{ba} \in Y_{ba}, \quad (4.13)$$

$$y_{mb} \in Y_{mb}, \quad (4.14)$$

$$f_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E, \quad (4.15)$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in E. \quad (4.16)$$

Le terme $L(f)$ qui représentait le revenu engendré par la couverture des zones ne figure pas sur la fonction objectif car c'est un terme constant.

Dans le modèle que nous obtenons, il n'y a plus de couplage entre les variables de flot appartenant à des sous-réseaux différents, ce qui favorise la décomposition du problème en sous-problèmes, un sous-problème pour chaque sous-réseau. Les variables d'allocation vont assurer le transfert du flot entre deux sous-réseaux successifs et ainsi vont permettre de sauvegarder la relation entre les différents niveaux qui composent un réseau de télécommunication. Après la décomposition on obtient les sous-problèmes suivants :

- le sous-problème du sous-réseau E_z qui regroupe les variables f_{az} et y_{az} ainsi que la

variable d'allocation u_a . Soit $V_{az}(u_a)$ sa valeur optimale.

$$\mathbf{SP}_{az}(\mathbf{u}_a) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad 0 \\ \text{sujet à:} \\ (4.7), (4.8), (4.9), (4.15), (4.16). \end{array} \right.$$

- le sous-problème qui regroupe les variables du sous-réseau E_a et consiste, pour u_a et v_b fixés, à trouver un plan de transfert du flot à travers les arcs y_{ba} . Soit $V_{ba}(u_a, v_b)$ sa valeur optimale.

$$\mathbf{SP}_{ba}(\mathbf{u}_a, \mathbf{v}_b) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{(a,b)} C_{ba} y_{ba} \\ \text{sujet à:} \\ (4.5), (4.6), (4.10), (4.13), (4.15), (4.16). \end{array} \right.$$

- le sous-problème du sous-réseau E_b consiste à sélectionner les arcs qui doivent acheminer le flot pour w_m et v_b fixés. Soit $V_{mb}(v_b, w_m)$ sa valeur optimale.

$$\mathbf{SP}_{mb}(\mathbf{v}_b, \mathbf{w}_m) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{(b,m)} C_{mb} y_{mb} \\ \text{sujet à:} \\ (4.3), (4.4), (4.11), (4.14), (4.15), (4.16). \end{array} \right.$$

- le sous-problème du sous-réseau E_m qui est indépendant des variables d'allocation. Soit $V_{sm}(w_m)$ sa valeur optimale.

$$\mathbf{SP}_{sm}(\mathbf{w}_m) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{m \in M} C_{sm} y_{sm} \\ \text{sujet à:} \\ (4.1), (4.2), (4.12), (4.15), (4.16). \end{array} \right.$$

L'idée de la méthode consiste à appliquer une relaxation lagrangienne au problème, ce qui équivaut à l'appliquer à chaque sous-problème. Deux choix de relaxation des contraintes d'allocation s'offrent à nous. On peut relaxer l'ensemble des contraintes d'allocation qui indiquent que la somme des flots sortant vers un sommet de transition est égale à la variable d'allocation correspondante, ce sont les contraintes (4.3), (4.5) et (4.7) qui forment le groupe de type 1. On peut aussi relaxer l'ensemble des contraintes

qui indiquent que la somme des flots entrant vers un sommet de transition est égale à la variable d'allocation correspondante, ce sont les contraintes (4.4), (4.6) et (4.8), qui vont former le groupe de type 2. Chaque sommet transition admet deux contraintes d'allocation de ressources, l'une appartenant à l'ensemble des contraintes de type 1 et l'autre à l'ensemble de type 2, qui sont dans deux sous-problèmes distincts. La mise à jour des multiplicateurs de Lagrange se fait en considérant la variable duale associée à la deuxième contrainte d'allocation non relaxée. Supposons que la contrainte de type 1 d'un sommet de transition i , du sous-problème k , soit relaxée. Le multiplicateur associé à cette contrainte correspond à la variable duale de la deuxième contrainte d'allocation de i , qui est évidemment non relaxée et est dans le sous-problème voisin. Ces variables duales sont calculées normalement à partir des sous-problèmes duaux, d'où la nécessité de relaxer les contraintes d'intégrité.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons d'abord décrire les deux types de relaxation et proposer des méthodes de résolution des différents sous-problèmes relaxés. Ensuite nous terminons par la procédure de résolution qui a été testée numériquement qui consiste en une adaptation de la méthode de décomposition mixte aux problèmes de réseaux cellulaires admettant des variables binaires.

4.2 Application au modèle

Dans cette partie, nous allons appliquer une relaxation lagrangienne des contraintes d'allocation du groupe de type 1 (4.3), (4.5) et (4.7) des sous-problèmes $SP_{az}(u_a)$, $SP_{ba}(u_a, v_b)$, $SP_{mb}(v_b, w_m)$, qui indiquent que la somme des flots sortant d'un équipement est égale à la variable d'allocation. Soient Π_m, Π_b et Π_a les multiplicateurs associés respectivement à ces contraintes et $\Pi = (\Pi_a, \Pi_b, \Pi_m)$ et $U = (u_a, v_b, w_m)$.

Nous allons obtenir un sous-problème relaxé pour chaque sous-réseau. Dans ce qui suit

nous présentons les différents sous-problèmes relaxés et leur résolution.

4.3 Définition et résolution des sous-problèmes relaxés

4.3.1 Sous-problème relaxé $RSP_{az}^1(\Pi_a)$

La relaxation de la contrainte (4.7) du sous-problème $SP_{az}(u_a)$ donne le sous-problème relaxé suivant :

$$RSP_{az}^1(\Pi_a) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{a \in A} \sum_{z \in N_a^+} \Pi_a f_{az} \\ \text{sujet à:} \\ (4.8), (4.9), \\ y_{az} \leq 1, \quad \forall (a, z) \in E, \\ f_{az}, y_{az} \geq 0, \quad \forall (a, z) \in E. \end{array} \right.$$

Soit $RV_{az}(\Pi_a)$ sa valeur optimale.

Le coût d'installation de chaque arc de ce sous-problème est nul, donc tous les arcs potentiels peuvent être installés. Pour éviter qu'une BTS ne reçoive plus de flot que sa capacité, on ajoute la contrainte redondante suivante: $\sum_{z \in Z_a} f_{az} \leq q_{ba}$, qui indique que toute BTS a peut gérer une quantité de flot au plus égale à sa capacité.

Le sous-problème devient équivalent au sous-problème suivant qu'on appelle (RSP_{az}^1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{a \in A} \sum_{z \in N_a^+} \Pi_a f_{az} \\ \text{sujet à:} \\ (4.8), (4.9), \\ \sum_{z \in Z_a} f_{az} \leq q_{ba}, \quad \forall a \in A, \quad (s_2), \\ y_{az} \leq 1, \quad \forall (a, z) \in E, \\ f_{az}, y_{az} \geq 0, \quad \forall (a, z) \in E. \end{array} \right.$$

Les contraintes $f_{az} - d_{az}y_{az} \leq 0$ et $y_{az} \leq 1$ impliquent que: $1 \geq y_{az} \geq \frac{f_{az}}{d_{az}}$.

Or la valeur de y_{az} n'a aucune influence sur la valeur optimale du problème car n'apparaissant pas sur la fonction objectif. Donc nous pouvons poser:

$$y_{az} = \frac{f_{az}}{d_{az}}, \forall a \in A.$$

Ainsi, le problème (RSP_{az}^1) est équivalent au problème suivant:

$$(FRSP_{az}^1) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{a \in A} \sum_{z \in N_a^+} \Pi_a f_{az} \\ \text{sujet à:} \\ \sum_{a \in N_z^+} f_{az} = d_{az}, \quad \forall z \in Z, \\ \sum_{z \in Z_a} f_{az} \leq q_{ba}, \quad \forall a \in A, \\ f_{az} \geq 0, \quad \forall a \in A, \forall z \in Z_a. \end{array} \right.$$

Le problème $(FRSP_{az}^1)$ se résout comme un problème de transport dans lequel les sommets a constituent les sources et les sommets z , les destinations. Les paramètres q_{ba} et d_{az} représentent respectivement la disponibilité au niveau des sources et la demande des destinations. Soit $(\bar{y}_{az}, \bar{f}_{az})$ la solution du sous-problème (RSP_{az}^1) déduite de la solution de $(FRSP_{az}^1)$.

La mise à jour des variables d'allocation associées aux sommets intermédiaires, BTS, est alors effectuée pour que la conservation de flot soit sauvegardée entre ce niveau et le niveau suivant. On va poser: $u_a = \sum_{z \in Z_a} \bar{f}_{az}, \forall a \in A$.

Les variables u_a sont utilisées pour résoudre le sous-problème $RSP_{ba}^1(\Pi_b, u_a)$.

4.3.2 Sous-problème relaxé $RSP_{ba}^1(\Pi_b, u_a)$

La relaxation de la contrainte (4.5) du sous-problème $SP_{ba}(\Pi_b, u_a)$ donne le sous-problème suivant :

$$RSP_{ba}^1(\Pi_b, u_a) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{b \in B} \sum_{a \in N_b^+} (C_{ba} y_{ba} + \Pi_b f_{ba}) - \sum_{b \in B} \Pi_b v_b \\ \text{sujet à:} \\ (4.6), (4.10), (4.17), \\ y_{ba} \leq 1, \quad \forall (a, b) \in A \times B, \\ y_{ba} \in Y_{ba}, \quad \forall (a, b) \in A \times B, \\ f_{ba}, y_{ba} \geq 0, \quad \forall (a, b) \in A \times B. \end{array} \right.$$

Soit $RV_{ba}(u_a, \Pi_b)$ la valeur optimale.

Nous allons utiliser la méthode de décomposition de Benders, décrite au chapitre 2, pour résoudre le sous-problème $RSP_{ba}^1(u_a, \Pi_b)$. La projection sur l'espace des variables y donne le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{(b,a)} C_{ba} y_{ba} + K(y) \\ \text{sujet à:} \\ y_{ba} \in Y_{ba}, \\ y_{ba} \geq 0, \quad \forall (b, a) \in E. \end{array} \right.$$

où pour un y fixé on a :

$$SP_{ba}^{\bar{y}}(\Pi_b, u_a) \left\{ \begin{array}{l} K(\bar{y}) = \min \quad \sum_{a \in A} \sum_{b \in N_a^-} \Pi_b f_{ba} \\ \text{sujet à:} \\ \sum_{b \in N_b^-} f_{ba} = u_a, \quad \forall a \in A, \\ f_{ba} \leq q_{ba} \bar{y}_{ba}, \quad \forall b \in B, \forall a \in A_b, \\ f_{ba} \geq 0, \quad \forall (b, a) \in E. \end{array} \right.$$

Ce problème s'interprète comme un problème de flot qui consiste à déterminer un plan d'acheminement du flot à coût minimal à topologie fixée. Le coût de transfert du flot, pour chaque arc d'origine b , est égal à Π_b . La réalisabilité dépend de la valeur de u_a ,

qu'elle soit ou non plus grande que q_{ba} . Ce problème se sépare en plusieurs sous-problèmes qui s'écrivent, pour chaque BTS $a \in A$, sous la forme :

$$\text{SP}_a(\bar{y}) \left\{ \begin{array}{l} K_a(\bar{y}) = \min \quad \sum_{b \in B_a} \Pi_b f_{ba} \\ \text{sujet à:} \\ \sum_{b \in N_b^-} f_{ba} = u_a, \quad (s_a), \\ f_{ba} \leq q_{ba} \bar{y}_{ba}, \quad \forall b \in B_a, \quad (s_b), \\ f_{ba} \geq 0, \quad \forall b \in B_a. \end{array} \right.$$

Le dual du sous-problème $SP_a(\bar{y})$ s'écrit :

$$\text{DSP}_a(\bar{y}) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \Phi^a u_a - \sum_{b \in B_a} \Phi_b^a q_{ba} \bar{y}_{ba} \\ \text{sujet à:} \\ \Phi^a - \Phi_b^a \leq \Pi_b, \quad \forall b \in B_a, \\ \Phi_b^a \geq 0, \quad \forall b \in B_a. \end{array} \right.$$

Dans ce qui suit nous allons d'abord déterminer la coupe de réalisabilité ensuite donner une formulation des coupes d'optimalité.

Coupe de réalisabilité

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une topologie (y_{ba}) soit réalisable est que $\forall a \in A$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{b \in B_a} q_{ba} y_{ba} \geq u_a, \\ y_{ba} \in Y_{ba}, \quad \forall b \in B_a. \end{array} \right.$$

La première contrainte exprime qu'au moins un arc dirigé vers a doit avoir une capacité supérieure à sa demande qui, en tenant compte du fait qu'il doit admettre au plus un arc entrant, est égale u_a . Le rajout de cette contrainte au problème maître rend réalisable tous les sous-problèmes $RSP_{ba}(\Pi_b, u_a)$ pour toute topologie (y_{ba}) fixée. Il ne reste donc qu'à vérifier la condition d'optimalité.

Coupe d'optimalité

La coupe d'optimalité est générée quand le sous-problème est déjà réalisable. La variable d'allocation de ressource étant déterminée à partir du sous-problème précédent alors la combinaison des contraintes $\sum_{b \in B_a} f_{ba} = u_a$ et $f_{ba} \leq q_{ba} \bar{y}_{ba}$ et l'unicité de l'arc entrant entraînent la contrainte $u_a \leq q_{ba}$ pour que le sous-problème soit réalisable. On note deux cas de réalisabilité du sous-problème, voir figure 4.2 :

1. Cas 1: $u_a < q_{ba}$.

Dans ce cas la solution optimale du sous-problème $SP_a(\bar{y})$ est:

$$\bar{f}_{ba} = \begin{cases} u_a & \text{si } b = \bar{b}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où \bar{b} tel que $\bar{y}_{\bar{b}a} = 1$.

À partir du théorème des écarts complémentaires, on peut déduire les variables duales.

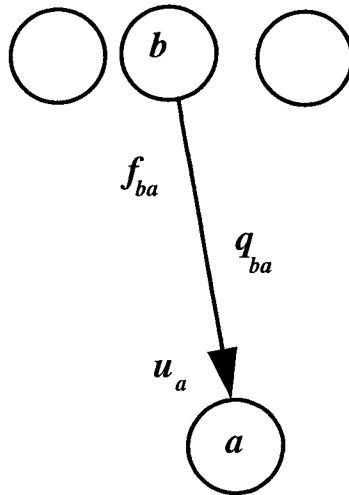


FIG. 4.2 - Coupe

- pour $b = \bar{b}$, on a $f_{\bar{b}a} > 0$, donc la contrainte correspondante au niveau du problème dual est égalitaire:

$$\Phi^a - \Phi_{\bar{b}}^a = \Pi_{\bar{b}};$$

- la contrainte $(s_{\bar{b}})$, donne que $f_{\bar{b}a} < q_{ba}\bar{y}_{\bar{b}a}$ ce qui implique que $\Phi_{\bar{b}}^a = 0$;
- pour $b \neq \bar{b}$, on a $f_{ba} = 0$, et la contrainte correspondante dans le problème dual est stricte:

$$\Phi^a - \Phi_b^a < \Pi_b;$$

- pour b tel que $\bar{y}_{ba} = 0$ et $f_{ba} = 0$, la contrainte (s_b) est une égalité, donc la variable duale qui lui correspond $\Phi_b^a > 0$.

La solution optimale du sous-problème $DRSP_{ba}^1(u_a, \Pi_b)$ est alors :

$$\begin{cases} \bar{\Phi}^a &= \min_{\forall b \in B_a} \Pi_b, \\ \bar{\Phi}_b^a &= \max\{0, \bar{\Phi}^a - \Pi_b\} = (\bar{\Phi}^a - \Pi_b)_1^+, \text{ si } b \neq \bar{b}, \\ \bar{\Phi}_{\bar{b}}^a &= 0. \end{cases}$$

2. Cas 2: $u_a = q_{ba}$

$$\bar{f}_{ba} = \begin{cases} q_{ba} & \text{si } b = \bar{b}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On applique le théorème des écarts complémentaires pour déterminer les variables duales de la manière suivante :

- pour $b = \bar{b}$, on a $f_{\bar{b}a} > 0$ ce qui implique que la contrainte correspondante au niveau du problème dual est égalitaire

$$\Phi^a - \Phi_{\bar{b}}^a = \Pi_{\bar{b}};$$

- la contrainte $(s_{\bar{b}})$ donne que $f_{\bar{b}a} = q_{ba}\bar{y}_{\bar{b}a}$, ce qui implique $\Phi_{\bar{b}}^a > 0$;
- pour $b \neq \bar{b}$, on a $f_{ba} = 0$, donc la contrainte correspondante dans le problème dual est stricte

$$\Phi^a - \Phi_b^a < \Pi_b;$$

- pour b tel que $\bar{y}_{ba} = 0$ et $f_{ba} = 0$, la contrainte (s_b) est une égalité, donc la variable duale qui lui correspond $\Phi_b^a > 0$.

La solution optimale du sous-problème $DRSP_{ba}^1(u_a, \Pi_b)$ est alors :

$$\begin{cases} \bar{\Phi}^a &= \min_{\forall b \in B_a} \Pi_b \\ \bar{\Phi}_b^a &= \max\{0, \bar{\Phi}^a - \Pi_b\} = (\bar{\Phi}^a - \Pi_b)^+, \text{ si } \forall b \in B_a. \end{cases}$$

La coupe d'optimalité s'écrit finalement:

$$\sum_{a \in A} (\bar{\Phi}^a u_a - \sum_{b \in B_a} (\bar{\Phi}_b^a)^+ q_{ba} y_{ba}) \leq y_0.$$

Problème maître relaxé

Le problème maître relaxé s'écrit :

$$\begin{aligned} \min & \sum_{(b,a)} C_{ba} y_{ba} + y_0 \\ \text{sujet à:} & \\ & y_0 + \sum_{a \in A} \sum_{b \in B_a} ((\bar{\Phi}_b^a)^+)^j q_{ba} y_{ba} \geq \sum_{a \in A} (\bar{\Phi}^a)^j u_a, \quad 0 \leq j \leq p, \\ & \sum_{b \in B_a} q_{ba} y_{ba} \geq u_a, \quad \forall a \in A, \\ & y_{ba} \in Y_{ba}, \\ & y_{ba} \leq 1, \quad \forall (b,a) \in E_a, \\ & y_{ba} \geq 0, \quad \forall (b,a) \in E_a. \end{aligned}$$

4.3.3 Sous-problème relaxé $RSP_{mb}^1(\Pi_m, v_b)$

La relaxation de la contrainte (4.3) du sous-problème $SP_{mb}(\Pi_m, v_b)$ conduit au sous-problème suivant :

$$RSP_{mb}^1(\Pi_m, v_b) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{m \in M} \sum_{b \in N_m^+} (C_{mb} y_{mb} + \Pi_m f_{mb}) - \sum_{m \in M} \Pi_m v_m \\ \text{sujet à:} \\ (4.4), (4.11), \\ y_{mb} \leq 1, \quad \forall (m, b), \\ y_{mb} \in Y_{mb}, \quad \forall (m, b), \\ f_{mb}, y_{mb} \geq 0, \quad \forall (m, b). \end{array} \right.$$

Le sous-problème $RSP_{mb}^1(v_b, \Pi_m)$ se résout de la même manière que le sous-problème $RSP_{ba}^1(u_a, \Pi_b)$. Soit $RV_{mb}(v_b, \Pi_m)$ sa valeur optimale. Le sous-problème $RSP_{sm}^1(w_m)$ reste inchangé car il ne dispose pas de contraintes de type 1.

4.3.4 Sous-problème relaxé $RSP_{sm}^1(w_m)$

$$RSP_{sm}^1(w_m) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{m \in M} C_{sm} y_{sm} \\ \text{sujet à:} \\ (4.1), (4.2), (4.17), \\ y_{sm} \leq 1, \quad \forall m \in M, \\ f_{sm}, y_{sm} \geq 0, \quad \forall m \in M. \end{array} \right.$$

Soit $RV_{sm}(w_m)$ sa valeur optimale. Pour le sous-problème $RSP_{sm}^1(w_m)$ la solution est donnée par $\bar{f}_{sm} = w_{sm}$. Mais on a besoin de résoudre le sous-problème pour déterminer les multiplicateurs optimaux Π_m qui permettent de formuler le sous-problème ($RSP_{mb}(v_b, \Pi_m)$) à l'itération suivante.

Mise à jour des multiplicateurs de lagrange

Pour démarrer l'algorithme nous devons disposer de valeurs initiales pour les variables duales et les allocations de ressources. Pour cela, une relaxation lagrangienne combinée avec une méthode de sous-gradient est appliquée au modèle initial de flot MIP défini à la section 3.2.6. Toutes les contraintes de conservation de flots vont être relaxées. La mise à jour des variables dans les itérations suivantes se fait comme indiqué dans le paragraphe qui suit. Les sous-problèmes sont résolus de manière séquentielle.

1. Soit p_a^{t-1} , p_b^{t-1} et p_m^{t-1} les multiplicateurs associés aux contraintes d'allocation non relaxées à l'itération $t - 1$.

2. À l'itération t :

poser $\Pi_a^t = p_a^{t-1}$, $\Pi_b^t = p_b^{t-1}$ et $\Pi_m^t = p_m^{t-1}$.

- Résoudre d'abord le sous-problème $RSP_{az}^1(\Pi_a^t)$ pour obtenir une solution optimale $(\bar{f}_{az}, \bar{y}_{az})$. Poser

$$u_a^t = \sum_{z \in Z_a} \bar{f}_{az}.$$

- Résoudre le sous-problème $RSP_{ba}^1(\Pi_b^t, u_a^t)$. Soit $(\bar{f}_{ba}, \bar{y}_{ba})$ sa solution optimale. Déterminer p_a^t la variable duale associée à la contrainte d'allocation et poser

$$v_b^t = \sum_{a \in A_b} \bar{f}_{ba}.$$

- Résoudre le sous-problème $RSP_{mb}^1(\Pi_m^t, v_b^t)$ et soit $(\bar{f}_{mb}, \bar{y}_{mb})$. Déterminer p_b^t la variable duale associée à la contrainte d'allocation et poser

$$w_m^t = \sum_{b \in B_m} \bar{f}_{mb}.$$

- Résoudre le sous-problème $RSP_{sm}^1(w_m^t)$ soit $(\bar{f}_{sm}, \bar{y}_{sm})$ la solution optimale. Déterminer p_m^t la variable duale associée à la contrainte d'allocation de ressource non relaxée.

3. Passer à l'itération $t + 1$ et poser :

$$\Pi_a^{t+1} = p_a^t, \Pi_b^{t+1} = p_b^t \text{ et } \Pi_m^{t+1} = p_m^t.$$

Remarque 2 *Une relaxation des contraintes de type 2, qui représentent la somme des flots entrant vers un sommet de transition, peut aussi être effectuée. Les sous-problèmes relaxés seront résolus de la même manière que dans les sections précédentes. Le sous-problème du sous-réseau 2, cette fois-ci se sépare en sous-problèmes pour chaque $b \in B$. La variable d'allocation v_b qui est fixée à l'avance permet de déterminer la coupe de réalisabilité qui cette fois-ci exprime qu'on doit avoir suffisamment de capacité dans les arcs sortant de tout BSC b pour que tout le flot v_b soit transféré. La coupe d'optimalité sera déduite en utilisant les caractéristiques du sous-réseau. La mise à jour des multiplicateurs se fait aussi de la même manière.*

4.3.5 Procédure de résolution

Les tests numériques effectués en appliquant la méthode de décomposition mixte telle que décrite dans la section précédente n'a pas fourni de résultats satisfaisants. Après un certain nombre d'itérations l'algorithme oscille entre deux valeurs approchées sans atteindre l'optimalité. Ceci est dû à la relaxation des contraintes d'intégrité. Mais on s'est inspiré de cette méthode pour développer un algorithme qui fournit la solution optimale ou une solution approchée intéressante. Cette procédure consiste en un algorithme adaptant la méthode de décomposition mixte à la conception topologique de réseaux cellulaires.

Dans ce qui suit, nous proposons les deux phases de la procédure. La première phase consiste à appliquer une relaxation lagrangienne des contraintes de flots au modèle combinée avec un algorithme de sous-gradient. Dans la deuxième phase on applique une itération de la décomposition mixte pour rendre la solution réalisable. Les multiplicateurs

obtenus à la fin de la première phase vont être utilisés dans la deuxième phase.

Phase I

La procédure qui va être utilisée consiste d'abord, à appliquer une relaxation des contraintes de conservation de flot combinée avec un algorithme du sous-gradient au modèle MIP de flot, puis à utiliser les variables duales pour démarrer une itération de la décomposition mixte.

Soit Π_a, Π_b, Π_m les vecteurs des multiplicateurs associés aux trois contraintes de conservation de flots. Posons

$$\Pi_{ba} = \Pi_b - \Pi_a, \quad \Pi_{mb} = \Pi_m - \Pi_b.$$

La relaxation des contraintes de conservation de flots des sommets intermédiaires du problème de flots MIP donne le problème relaxé suivant qu'on appelle ($MIPR_{\Pi}$):

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in E} (C_{ij}y_{ij} + \Pi_{ij}f_{ij}) \\ \text{sujet à:} \quad & \\ & f_{az} - d_{az}y_{az} \leq 0, \quad \forall (a,z) \in A \times Z, \\ & f_{ba} - q_{ba}y_{ba} \leq 0, \quad \forall (b,a) \in B \times A, \\ & f_{mb} - t_{mb}y_{mb} \leq 0, \quad \forall (m,b) \in M \times B, \\ & f_{sm} - t_{sm}y_{sm} \leq 0, \quad \forall m \in M, \\ & y_{ba} \in Y_{ba}, \\ & y_{mb} \in Y_{mb}, \\ & f_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in E, \\ & y_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in E. \end{aligned}$$

Le problème ($MIPR_{\Pi}$) se sépare en quatre sous-problèmes. Chaque sous-problème est fonction des variables d'arcs et de flots appartenant au même niveau hiérarchique dans

le réseau.

Le sous-problème correspondant au sous-réseau E_z est de la forme suivante :

$$(SPR_{\Pi_a}^2) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{(a,z) \in A \times Z} \Pi_a f_{az} \\ \text{sujet à:} \\ (4.8), (4.9), (4.15) \text{ et } (4.16). \end{array} \right.$$

Le sous-problème correspondant au sous-réseau E_a de la forme :

$$(SPR_{\Pi_{ba}}^2) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{(b,a) \in B \times A} (C_{ba} y_{ba} + \Pi_{ba} f_{ba}) \\ \text{sujet à:} \\ (4.10), (4.13), (4.15) \text{ et } (4.16). \end{array} \right.$$

Le sous-problème correspondant au sous-réseau E_b :

$$(SPR_{\Pi_{mb}}^2) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{(m,b) \in M \times B} (C_{mb} y_{mb} + \Pi_{mb} f_{mb}) \\ \text{sujet à:} \\ (4.11), (4.14), (4.15) \text{ et } (4.16). \end{array} \right.$$

Le sous-problème correspondant au sous-réseau E_m :

$$(SPR_{\Pi_m}^2) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{m \in M} (C_{sm} y_{sm} + \Pi_m f_{sm}) \\ \text{sujet à:} \\ (4.1), (4.12), (4.15) \text{ et } (4.16). \end{array} \right.$$

La mise à jour des multiplicateurs de Lagrange se fait grâce à un algorithme de sous-gradient comme défini au paragraphe 3.5.

La solution fournie par la phase I n'est pas réalisable. Contrairement au chapitre 3 dans lequel une heuristique consistant en une réduction de capacités et d'affectation de flot a été utilisée, nous exploitons l'interdépendance des sous-réseaux définie par les contraintes de conservation de flots qui ont été relaxées. Nous présentons dans la sous-section suivante, la phase II de la procédure de résolution qui consiste à rendre réalisable la solution obtenue après la phase I.

Phase II

Dans la phase II on applique une itération de la décomposition mixte en utilisant les variables duales trouvées dans la dernière itération de la phase I. Pour renforcer la réalisabilité des sous-problèmes et d'approcher le plus possible la solution optimale, on va rajouter des contraintes redondantes à chaque sous-problème. Ces contraintes redondantes assurent qu'à partir des équipements sélectionnés de chaque niveau il existe au moins un chemin pour atteindre n'importe quelle zone.

Avant de construire ces contraintes redondantes, rappelons la définition des sous-ensembles suivants des ensembles A , B et M introduits à la section 2.1.1 :

A_z = ensemble des BTS qui peuvent couvrir la zone z ,

B_z = ensemble des BSC qui peuvent connecter une BTS appartenant à A_z ,

M_z = ensemble des MSC qui peuvent connecter un BSC qui est dans B_z .

Donc on a $B_z = \cup_{a \in A_z} B_a$ et $M_z = \cup_{b \in B_z} M_b$.

Les contraintes redondantes s'écrivent pour chaque niveau de la manière suivante:

$$\sum_{m \in M_z} f_{sm} \geq d_{az}, \quad \forall z \in Z,$$

$$\sum_{m \in M_z} \sum_{b \in B_z} f_{mb} \geq d_{az}, \quad \forall z \in Z,$$

$$\sum_{b \in B_z} \sum_{a \in A_z} f_{ba} \geq d_{az}, \quad \forall z \in Z.$$

La première contrainte nous garantit l'existence d'au moins un MSC sélectionné dans le voisinage de chaque zone. La deuxième indique qu'il existe au moins un BSC sélectionné dans un voisinage de chaque zone et la troisième nous dit qu'au moins une antenne doit être sélectionnée dans le voisinage de chaque zone. Le terme voisinage signifiant ici qu'il

existe un chemin permettant, à partir de l'équipement concerné, d'atteindre la zone z .
La résolution se fait de manière séquentielle en gardant l'intégrité des variables d'installation d'arcs.

- On résout d'abord le sous-problème.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{m \in M} (C_{sm} y_{sm} + \Pi_m f_{sm} - \Pi_m w_m) \\ \text{sujet à:} \\ (4.1), (4.12), (4.15) \text{ et } (4.16). \end{array} \right.$$

Soit $(\bar{y}_{sm}, \bar{f}_{sm})$ la solution optimale. Poser: $w_m = \bar{f}_{sm}$.

- On résout le sous-problème .

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{m \in M} \sum_{b \in N_m^+} (C_{mb} y_{mb} + \Pi_b f_{mb}) - \sum_{b \in B} \Pi_b v_b \\ \text{sujet à:} \\ (4.11), \\ \sum_{b \in N_m^+} f_{mb} = w_m, \quad \forall m \in M, \\ y_{mb} \in Y_{mb}, \quad \forall (m, b) \in M \times B, \\ f_{mb} \geq 0, y_{mb} \in \{0, 1\}, \quad \forall (m, b) \in M \times B, \end{array} \right.$$

Soit $(\bar{y}_{mb}, \bar{f}_{mb})$ la solution optimale.

Poser: $v_b = \sum_{m \in M_b} \bar{f}_{mb}, \quad \forall b \in B$.

On remplace v_b par sa valeur dans le sous-problème qui suit.

-On résout le sous-problème .

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{b \in B} \sum_{a \in N_b^+} (C_{ba} y_{ba} + \Pi_a f_{ba}) - \sum_{a \in A} \Pi_a u_a \\ \text{sujet à:} \\ (4.10), (4.17), \\ \sum_{a \in N_b^+} f_{ba} = v_b, \quad \forall b \in B, \\ y_{ba} \in Y_{ba}, \quad \forall (b,a) \in B \times A, \\ f_{ba} \geq 0, y_{ba} \in \{0,1\}, \quad \forall (b,a) \in B \times A, \end{array} \right.$$

Soit $(\bar{y}_{ba}, \bar{f}_{ba})$ la solution optimale du sous-problème.

Poser : $u_a = \sum_{b \in B_a} \bar{f}_{ba}$, puis le remplacer dans le sous-problème suivant.

-Résolution du sous-problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{a \in A} \sum_{z \in N_a^+} \Pi_a f_{az} \\ \text{sujet à:} \\ (4.8)(4.9), \\ \sum_{z \in N_a^+} f_{az} = u_a, \quad \forall a \in A, \\ f_{az} \geq 0, y_{az} \in \{0,1\}, \quad \forall (a,z) \in E, \end{array} \right.$$

Cas sous-problème 1 non-réalisable

Les 3 premiers sous-problèmes regroupent toutes les variables d'arcs qui permettent d'évaluer le coût du réseau. Il peut arriver que ces sous-problèmes soient réalisables et que le dernier sous-problème qui représente la couverture des zones soit non réalisable, dû à la mauvaise affectation de la quantité de flot à travers les arcs des niveaux supérieurs. Dans cette situation, pour lever la non réalisabilité, le sous-problème se remplace par un problème consistant à trouver un plan de couverture des zones par les BTS qui sont les extrémités des arcs portant du flot dans le sous-réseau BTS-BSC. Ensuite on réajuste le flot des arcs des niveaux supérieurs.

Dans la prochaine section, nous présentons les résultats numériques obtenus par la procédure de résolution qui associe une relaxation lagrangienne avec une itération

de la décomposition mixte.

Les figures 4.3, 4.4 et 4.5 permettent de comparer les solutions obtenues sur une instance de 9 zones, 6 BTS , 3 BSC et 2 MSC. La figure 4.3 représente la solution non réalisable fournie par la relaxation des contraintes de flots. La figure 4.4 représente la solution trouvée à la fin de l'algorithme. La figure 4.5 est une représentation de la solution optimale donnée par Cplex. Les nombres sur les arcs représentent la quantité de flot qui traverse l'arc. Les flèches qui sortent des sommets BTS indiquent l'existence d'un flot sortant.

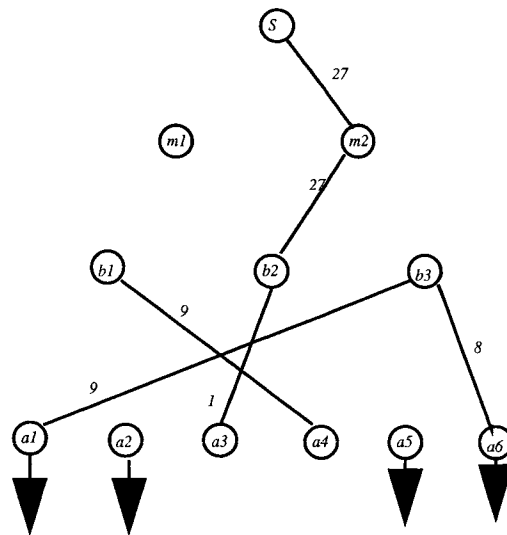


FIG. 4.3 – *Solution de la phase I*

La solution fournie par l'algorithme n'est pas réalisable au niveau BTS-Zones car le flot est mal réparti sur les arcs du niveau BSC-BTS.

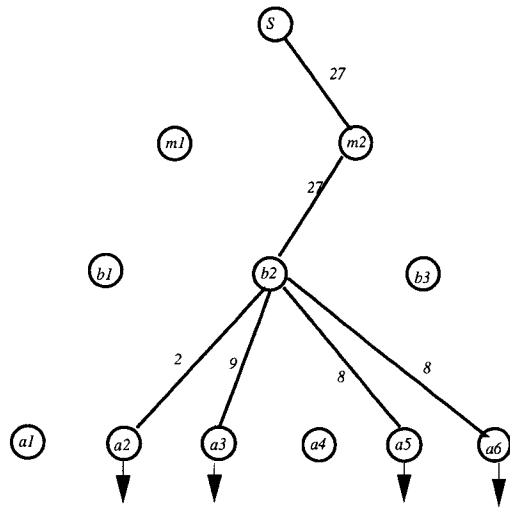


FIG. 4.4 – *Solution de la phase II*

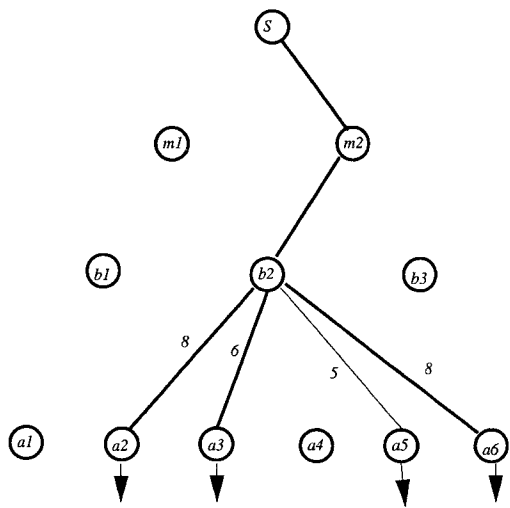


FIG. 4.5 – *Solution optimale de Cplex*

4.4 Résultats numériques

Les tests numériques montrent que l'algorithme fournit, dans beaucoup d'instances, la solution optimale. Il arrive quelques fois que le dernier sous-problème, du sous-réseau BTS-Zones, soit non-réalisable malgré l'optimalité de la valeur de la fonction objectif. Dans cette situation on va résoudre une restriction du sous-problème qui consiste à déterminer un plan de couverture des BTS ayant un flot entrant non nul vers les zones. C'est un problème de transport qui se résout facilement avec Cplex. Ensuite on fait une mise à jour des variables de flot des niveaux supérieurs de manière séquentielle. Dans les différents tableaux, la première colonne représente le nombre de zones à couvrir et les trois colonnes suivantes donnent respectivement le nombre de sites disponibles prédéfinis pour l'installation des BTS, BSC et MSC. La colonne N représente, pour des instances dont les paramètres sont les mêmes, le numéro de l'instance. La dernière colonne mesure le "gap" existant entre la valeur optimale et celle trouvée par notre algorithme. La colonne état nous renseigne sur la réalisabilité du sous-problème associé au sous-réseau BTS-Zones. L'état R signifie que le sous-problème est réalisable. L'état de non réalisabilité de ce sous-problème signifie que tous les sous-problèmes sont réalisables excepté le sous-problème $SP_{az}(\Pi_a)$ du sous-réseau BTS-Zones qui n'influe pas sur la valeur optimale. Cette non-réalisabilité est due à une mauvaise affectation du flot sur les arcs du sous-réseau BSC-BTS. La colonne $T.O$ indique le meilleurs temps de résolution à l'optimum fournie par Cplex ou par l'algorithme de Benders1. $gap = (Z_{decmix} - val.op)/val.opt.$ où Z_{decmix} désigne la valeur fournie par la procédure de résolution et $val.op$ la valeur de la solution optimale trouvée par Cplex où Benders. Le saut de dualité $dgap$ est évalué par la relation: $dgap = (\bar{Z} - Z_{decmix})/Z_{decmix}$ où \bar{Z} est la valeur de la solution non réalisable fournie par la relaxation lagrangienne. Sur tous les tableaux l'unité de temps est la seconde. Pour les instances de petite taille, l'algorithme fournit en général la solution optimale. Sur quelques instances la valeur trouvée est la valeur optimale mais le sous-problème (SP_{az})

Paramètres					Cplex	Méthodes			
Z	A	B	M	N	T.O (s)	État	Temps (s)	dgap	gap
69	25	2	1	2	0.39	R	5	0.040	0.014
69	25	2	1	3	0.41	R	5	0.043	0.014
84	27	2	1	2	117	R	8	0.045	0.0026
84	27	2	1	3	0.25	R	8	0.047	0
96	35	2	1	1	11	R	11	0.046	0.0039
96	35	2	1	2	0.30	R	10	0.048	0
96	35	2	1	3	44	R	10	0.049	0

TAB. 4.1 – *Instances de type I: comparaison Cplex-Decomposition mixte*

est non réalisable. La procédure de réaffectation de flot le rend facilement réalisable. Le temps de résolution est presque le même que celui de Cplex. Le tableau 4.1 montre déjà

Paramètres					Cplex	Méthodes			
Z	A	B	M	N	T.O (s)	État	Temps (s)	dgap	gap
105	40	3	2	1	TL	R	13	0.048	0.05
105	40	3	2	2	TL	R	14	0.047	0.005
150	55	3	2	1	TL	R	33	0.036	0.012
186	68	3	2	2	5000	R	56	0.042	0.0042
186	68	3	2	4	TL	R	23	0.046	0.0021
186	68	3	2	5	TL	R	32	0.043	0.0035
204	75	3	2	1	34	R	47	0.033	0.003
204	75	3	2	2	222	R	105	0.045	0.0025

TAB. 4.2 – *Instances de type II: comparaison Cplex-Decomposition mixte*

qu’avec des instances de petite taille, l’algorithme parvient quelques fois à trouver la solution optimale. Le “gap” très faible entre la valeur que l’algorithme fournit et la valeur optimale met en évidence son efficacité. Le temps de résolution de l’algorithme est souvent bien meilleur que celui de Cplex. Le tableau 4.2 donne les résultats numériques des instances de taille moyenne. Notre algorithme fournit toujours des solutions réalisables. Le saut de dualité est très faible et le gap entre la valeur optimale et la valeur trouvée

par l'algorithme est inférieure à 5%. Ce qui montre l'efficacité de notre algorithme quant à l'approximation de la solution optimale. Cette perte par rapport à l'optimalité, dans certaines instances, est compensée par un temps de résolution faible comparé au temps de Cplex qui, quelque fois n'arrive même pas à fournir la valeur optimale atteignant la limite de temps fixé.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la méthode de décomposition mixte dont l'application au modèle de flot en théorie s'est avérée facile à traiter. Les sous-problèmes obtenus sont résolus simplement. Dans la pratique pour son application aux problèmes de conception topologique de réseaux quelques difficultés sont survenues. La méthode de décomposition mixte étant destinée aux problèmes à variables continues, la relaxation des contraintes d'intégrité n'a pas suffi pour approcher la solution optimale. Après un certain nombre d'itérations l'algorithme oscille entre deux solutions. Un algorithme adaptant cette méthode à des problèmes à variables mixtes a été développé. Il consiste d'une part, à appliquer une relaxation lagrangienne aux contraintes de conservation de flots suivie d'un algorithme de sous-gradient et d'autre part, à résoudre séquentiellement les sous-problèmes. Ces derniers sont renforcés par ajout de contraintes redondantes qui améliorent la réalisabilité et par l'utilisation de variables d'allocation de ressources pour coordonner le transfert de flots entre les différents sous-réseaux. Les tests numériques effectués sur quelques instances ont montré la qualité de la borne fournie par l'algorithme. Le saut de dualité est faible et le gap entre la valeur optimale et celle trouvée par notre algorithme est inférieure à 5%.

4.6 Récapitulatif

Les tableaux 4.3 et 4.4 donnent respectivement un récapitulatif des instances de petite et moyenne taille traitées par les différentes méthodes. On voit que l'algorithme de Benders1 est plus performant que les différentes autres méthode utilisées. Non seulement il fournit la solution optimale mais son temps de résolution est faible. L'algorithme

Paramètres					Cplex	Benders1	Benders2	Rela.L	Decom.Mixte
Z	A	B	M	N	Temps (s)	Temps(s)	Temps (s)	Temps (s)	Temps (s)
69	25	2	1	2	5	0.09	0.34	5	5
84	27	2	1	3	0.25	0.44	0.30	5	8
96	35	2	1	1	91	0.09	0.08	13	10
96	35	2	1	2	91	0.09	0.08	13	10
105	40	3	2	1	TL	11.5	1	15	13
105	40	3	2	2	TL	11.5	0.8	16	14

TAB. 4.3 – Instances de type I: comparaison générale

Paramètres					Cplex	Benders1	Benders2	Rela.L	Decom.Mixte
Z	A	B	M	N	Temps (s)	Temps(s)	Temps (s)	Temps (s)	Temps (s)
150	55	3	2	1	TL	30	1	30	33
186	68	3	2	2	1120	2	2	63	56
204	75	3	2	1	TL	2	1	34	47
204	75	3	2	2	TL	3	1	40	105
204	75	3	2	3	TL	3	1	34	25

TAB. 4.4 – Instances de type II: comparaison générale

de Benders2 quant à lui fournit de bonnes solutions sur les instances de petite et de moyenne taille mais rencontre des difficultés pour les problèmes de grande taille sur lesquelles il n'arrive pas souvent à sortir l'optimum. Mais il est plus performant que la relaxation et la décomposition mixte en termes de temps de résolution. Les deux algorithmes qui traitent le modèle de flots ont des temps de résolution similaires, mais la

décomposition mixte *gagne par rapport* à une bonne approximation de la valeur optimale. Le prochain chapitre porte sur une conclusion générale du travail accompli dans le cadre de cette thèse.

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons présenté une contribution importante à la conception topologique des réseaux de télécommunication cellulaires. Nous avons formulé, de manière rigoureuse, un modèle de synthèse qui ne tient pas compte des aspects dynamiques de ce type de réseaux. Les deux algorithmes basées sur la méthode de décomposition de Benders appliquée à ce modèle se sont avérées très efficaces. L'absence de coûts sur les liaisons entre les BTS et les zones a entraîné la non existence de coupes d'optimalité. Le premier algorithme noté Benders1 génère les coupes de réalisabilité en utilisant le sous-problème auxiliaire (*SPA*). Les coupes de réalisabilité qui doivent être générées, dans le deuxième algorithme noté Benders2, ont été déterminées par une procédure qui permet de calculer les rayons extrêmes du sous-problème.

Considérant la couverture des zones, en termes de trafic, comme du flot, nous avons déduit du modèle de synthèse une autre formulation du problème de conception des réseaux cellulaires. Le caractère hiérarchique du réseau, ne permettant qu'un seul arc entrant vers les sommets de transition, a permis de transférer le coût d'installation des équipements aux coûts des arcs. Le traitement de ce modèle est rendu difficile par la limitation des arcs sortant des sommets BSC et MSC. Deux approches de décomposition ont été utilisées pour résoudre le modèle de flot. D'une part, les contraintes de capacité qui gênent la décomposition du problème par les deux types de variables ont été relaxées.

L'heuristique lagrangienne utilisée, s'appuie sur les caractéristiques du réseau pour fournir une bonne borne supérieure.

D'autre part, la méthode de décomposition mixte a été adaptée au modèle de flot dans le but de mieux gérer les contraintes de conservation de flots aux noeuds frontières. Si la mise à jour des allocations primales et duales d'un niveau intermédiaire vers le niveau voisin n'a pas permis de stabiliser la convergence, les solutions réalisables obtenues par les heuristiques sont en général d'excellente qualité, voire optimales. Ce qui encourage vers une poursuite des recherches sur les schémas de décomposition non conventionnels. La méthode de Benders est utilisée pour résoudre les sous-problèmes associés aux sous-réseaux MSC-BSC et BSC-BTS. Les coupes sont déterminées en exploitant la forme de la topologie du réseau.

Les tests numériques permettent de justifier la validité des méthodes utilisées. L'efficacité du premier algorithme de Benders noté Benders1 pour fournir une solution optimale est plus notable sur les instances de grande taille. Cependant quelques difficultés sont notées dans la résolution du problème maître dépendant uniquement de variables en 0 – 1 sur ces instances de grande taille. Le deuxième algorithme de Benders noté Benders2 a permis non seulement d'améliorer le temps de résolution mais aussi d'atteindre l'optimalité sur les instances de grande taille où l'algorithme de Benders1 va jusqu'à la limite de temps fixée. L'heuristique lagrangienne développée pour trouver une valeur approchée de l'optimum fournit une borne de qualité satisfaisante. La perte qu'elle accuse par rapport à l'optimalité est compensée par un gain de temps. L'adaptation de la méthode de décomposition à la conception topologique de réseaux a permis d'avoir une meilleure borne supérieure que l'heuristique lagrangienne.

L'idée de développer un modèle qui permet deux liaisons entrant vers une BTS pourrait être envisagée pour les réseaux de troisième génération (3G). La deuxième liaison serait destinée au transfert de données ou d'images. L'application des différentes

méthodes utilisées dans le cadre de la thèse à la conception des réseaux 3G au vu de la ressemblance des topologies pourrait aussi être envisagée.

Dans l'adaptation de la méthode de décomposition mixte à la conception topologique de réseaux cellulaires, une étude supplémentaire pourrait être faite dans le sens d'une combinaison des deux possibilités de relaxation des contraintes d'allocation de ressources.

Même si un travail supplémentaire reste à faire, nous avons pu montrer cependant que, d'une part, il est possible de formuler le modèle de synthèse en un modèle de flot qui intègre les principaux aspects d'un réseau cellulaire, d'autre part que la méthode de Benders est une approche intéressante pour la résolution du modèle de synthèse. Aussi, nous avons montré que la méthode de décomposition mixte peut être très efficace pour résoudre des problèmes de conception de réseaux à structure hiérarchique.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [1] Ahuja, R.K., Magnanti, T.L., Orlin, J.B., *Network flows: Theory, Algorithms and Applications*, Prentice Hall, New-York (1993).
- [2] Akyildiz, Ian F., McNair, J., Ho, J., Uzunalioglu H., Wang W., *Mobility Management in Current and Future Communication Networks*, Appeared in IEEE Network Magazine, vol. 12, No. 8, p.39-49, (1998).
- [3] Alyson, M. C., *A survey on benders decomposition applied to fixed-charge network design problems*, Computer & Operations Research 32, p.1429-1450 (2005).
- [4] Bahiense, L., Barahona F., Porto, O., *Solving tree Steiner Problems in Graphs with Lagrangian Relaxation*, IBM research report, 22 pages, (2000).
- [5] Balakrishnan, A., Magnanti, T.L., Wong, R.T., *A decomposition algorithm for local access telecommunications network expansion planning*, Operations Research, vol.43, p.58-76 (1995).
- [6] Balakrishnan, A., Magnanti, T.L., Mirchandani, *A dual-based algorithm for multilevel network design*, Management Science, vol.40, No.5, p.566-581 (1994).
- [7] Barahona, F., Anbil, R., *The Volume Algorithm: producing primal solutions with a subgradient algorithm*, Mathematical Programming 87, p.385-399 (2000).
- [8] Bauer, C., *Minimization of the impact of subscriber mobility on the resources of a GSM network*. B.R. Haverkort et al. (Eds): Tools 2000, LNCS 1786, p.132-144 (2000).

- [9] Benchakroun, A., Ferland, J.A., Gascon, V., *Benders Decomposition for Network Design Problems With Underlying Tree Structure*, *Investigacion Operativa*, p.165-180 (1998).
- [10] Benchakroun, A., *Un modèle de planification des réseaux de distribution d'énergie électrique*, Thèse de Doctorat. Université de Montréal (1988).
- [11] Benchakroun, A., Mahey, P., Boyer, F., *Capacity and flow assignment of data networks by generalized Benders decomposition*, *Journal of Global Optimization*, vol.20, 2 , p.173-193 (2001).
- [12] Benders, J.F., *Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems*, *Numerische Mathematik* 4, p.238-252 (1962).
- [13] Bertsekas, D.P., *Nonlinear Programming*, 2nd edition, Athena Scientific (1999).
- [14] Bertrand S., Luna, H.P.L., *Méthode de décomposition de Benders appliquée à la conception des réseaux d'accès local*, *Projet de troisième année d'étude, ISIMA 27* (1997).
- [15] Burton, R., Obel, B., *The efficiency of the price, budget and mixed approaches under varying a priori information levels for decentralized planning*, *Management Science* 26, p.401-417 (1980).
- [16] Chamaret, B., *Outils de planification pour réseaux cellulaires*, Thèse de Doctorat. Université de Saint-Étienne (2003).
- [17] Chamberland, S., *An efficient heuristic for the expansion problem of cellular wireless networks*, *Computer & Operations Research* 31, p.1769-1791 (2004).
- [18] Chauvet F., J-Lagreze, E., Pajou, L., Rottembourg, B., *Planification de Réseaux Mobiles: problématique, modélisation, méthodes*, *Algotel*, (2001).
- [19] Cohen, G., *Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems*, *Journal of Optimization Theory and Applications* 32, p. 277-305 (1980).

- [20] Cohen, G., Miara, B., *Optimization with an auxiliary constraint and decomposition*, SIAM Journal of Control and Optimization 28, p.137-157 (1990).
- [21] CPLEX optimization, inc., *CPLEX: using the CPLEX Callable Library*, version 4.0 CPLEX copyright 1989-1995 CPLEX Optimization.
- [22] Cruz, F.R.B., Mateus G.R., Smith J.M., *A Branch-and-Bound Algorithm to solve a Multi-level Network Optimization Problem*, Journal of Mathematical Modelling and Algorithms 2, 37-56 (2003).
- [23] Dantzig, G.B., Wolfe, P., *Decomposition Principle for Linear Programs*, Naval Research Logistics Quarterly, vol. 1, p.217-222 (1960).
- [24] Diop, M.El M., Mahey, P., Benchakroun, A., *Conception de Réseaux de télécommunication par une relaxation lagrangienne*, Proceedings ROADEF'05, Tours, p.327-341 (2005).
- [25] Dutta, A., Kubat P., *Design of partially survivable networks for cellular telecommunication systems*, European Journal Of Operational Research 134, p.439-456 (2001).
- [26] Everett, H. III, *Generalized lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources*, Operation Research 11, p. p.399-417 (1963).
- [27] Fichetti, M., Giorgio, R.J., González, J.J.S., *Optimisation of the interconnecting network of UMTS radio mobile telephone system*, European Journal of .Operational Research 144, p.56-67 (2003).
- [28] Fichetti, M., Lepschy, C., Minerva, G., Romanin-Jacur G., *Frequency Assigment in Mobile Radio Systems Using Branch-And-Cut Techniques*, European Journal of Operational Research 123, p.241-255 (2000).
- [29] Fisher, M.L., *The Lagrangean Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems* Management Science 27 (1), p.1-18 (1981).
- [30] Fisher, M.L., *An Application Oriented Guide to Lagrangean Relaxation*, Interfaces 15 (2), p.10-21 (1985).

- [31] Fisher, M.L., Northup W.D., Shapiro J.F., *Using Duality to Solve Discrete Optimization Problems: Theory and Computational Experience*, Mathematical Programming Study 3, p.56-94 (1975).
- [32] Gavish, B., *Topological design of Centralized Computer Networks-Formulations and Algorithms*, Networks, vol.12, p.255-377(1982).
- [33] Geoffrion, A.M., *Generalized Benders Decomposition*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol.10, No 4, p.237-260 (1972).
- [34] Geoffrion, A.M., Graves, G.W., *Multicommodity Distribution Systems Design by Benders Decomposition*, Management Science, vol.20, No 5, p.822-844 (1974).
- [35] Geoffrion, A.M., *Elements of Large-Scale Mathematical Programming*, Management Science, vol.16, No.16 (1970).
- [36] Goldman, A.J., *Resolution and separation theorems for polyhedralconvex sets*, dans Linear inequalities and related systems, Annals of Mathematics Study, n 38, Princeton University Press, p.41-51 (1956).
- [37] Gouveia, L., Lopes, M.J., *Using generalized capacited trees for designing the topology of local access networks*, Telecommunication systems vol 7, 315-337 (1997).
- [38] Guignard, M., Siwhan, K., *Lagrangean Decomposition for Integer Programming: Theory and Applications*, R.A.I.R.O. Recherche Operationnelle/Operations Research, vol. 21, No 4, p.307-323 (1987).
- [39] Held, M., Karp, R., *The Travelling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees: Part II*, Mathematical Programming 1, p.6-25 (1971).
- [40] Holmberg, K., Hellstrand, J., *Solving the Uncapacited Network Design Problem by Lagrangean Heuristic and Branch-And-Bound*, Operations Research (Informs) vol. 46, No 2, Mar-Apr, p.247-259 (1998).
- [41] Holmberg, K., Yuan, Di, *A Lagrangean Approach to nerwork design problem*, International Transactions operational Research, vol. 5 No 6, p.529-539 (1998).

- [42] Holmber, K., Yuan, Di, *A Lagrangean Heuristic Based Branch-And-Bound Approach for the Capacitated Network Design Problem*, Operations Research (Informs) vol. 48, No 3, p.461-481 (2000).
- [43] Holmberg, K. *A note on Lagrangean Relaxation of the Master problem*, Rapport de Recherche, Lith Mat R-89-04 (1989).
- [44] Jaumar, B., Vovor, T., *A column generation approach for the exact slution of channel assignement problems*, Technical report Les cahiers du GERAD G-98-39, département de Mathématiques et de génie Industriel, École Polytechnique de Montréal, Montréal (Québec), canada (1998).
- [45] Jornsten, K., Nasberg, M., *A new lagrangian relaxation approach to the generalized assignment problem*, European Journal of Operational Research 27, p.313-323 (1986).
- [46] Kornai, J., Liptak, L., *Two-level planning*, Econometrica 33, p.141-169 (1965).
- [47] Kubat, P., Smith, J.MacG., Yum, C., *On the design of cellular networks with diversity and capacity constraints*, Reliability, IEEE Transaction on, vol:49 25 Issue 1, p.72-83 (2000).
- [48] Kubat, P., Smith, J.MacG., *A multi-period network design problem for cellular telecommunication systems*, European Journal Of Operational Research 134, p.439-456 (2001).
- [49] Kydland, F., *Hierarchical decomposition in linear economic models*, Management Science 21, p.1029-1039 (1975).
- [50] Lagrange, X., Goldlewski, P., Tabbane, S., *Réseaux GSM*, Hermès Science Publications 5ème édition revue et augmentée (2000).
- [51] Lasdon, L., *Optimization for Large Systems*, Mac Millan (1970).
- [52] Lemarechal, C., *Lagrangian relaxation*, in Computational Combinatorial Optimiza-tion, Lecture Notes in Computer Science 2241, p.112-156 (2001).

- [53] Maculan, N., *The Steiner problem in graph*, Annals of Discrete Mathematics 31, p.185-212 (1987).
- [54] Mahey, P., *Méthode de décomposition et décentralisation en programmation linéaire*, R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle/Operations Research vol.20, No.4, p.287-306, (1986).
- [55] Mateus, G.R., Mazzini, F.F., Franqueira, R.V.L., *Model and heuristic for a generalized access network design problem*, Telecommunication System 15, p.257-271 (2000).
- [56] Mateus, G.R., Luna, H.P.L., Sirihal, A.B., *Heuristics for Distribution Network design in Telecommunication*, Journal of Heuristics, 6, p.131-148 (2000).
- [57] Mathar, R., Nielsen, T., *Optimum positioning of base stations for cellular radio networks*, Wireless Networks vol. 6, p.421-428 (2000).
- [58] Mathar, R., Schmeink, M., *Optimal Base Station Positioning and Channel Assignment for 3G Mobile Networks by Integer Programming*, Annals of Operations Research 107, p.225-236 (2001).
- [59] Mazzini, F.F., Mateus, G.R., *A mixed-integer programming model for the cellular telecommunication network design*, Proceedings of the 5th international workshop on discrete algorithms and methods for mobile computing and communications, Rome (Italy), p.68-76 (2001).
- [60] Mazzini, F.F., Mateus, G.R., Smith, J.McG., *Lagrangian based methods for solving large-scale cellular network design*, Wireless Networks, p.659-672 (2000).
- [61] Mesarovic, M.D., Macko, D., Takahara, Y., *Theory of Hierarchical Multilevel Systems*, Academic Press, New York (1970). Wireless Networks 6, p.421-428 (2000).
- [62] Minoux M., *Programmation Mathématique: Théorie et Algorithmes*, Dunod, vol.2 (1983).

- [63] Narciso, M.G., Lorena, L.A.N., *Lagrangean/surrogate relaxation for generalized assignment problems*, European Journal of Operational Research 114, p.165-177 (1999).
- [64] Reininger, P., Iksal, S., Caminada, A., Korczak, J., *Multi-stage optimization for mobile radio network planning*, Proceedings IEEE Vehical Technologie Conference, p.2034-2038, 27 nov.(1999).
- [65] Randazzo, C.D., Luna, H.P.L., Mahey, P., *Benders decomposition for local access network design with two technologies*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 4, p.235-246 (2001).
- [66] Sakarovich, M., *Optimisation combinatoire, Méthodes mathématiques et algorithmes*, Hermann, Paris (1984).
- [67] Shahbaz, M., *Topological Network Design of Mobile Communication Networks*. AEU International Journal Electronics Communication. 50, No 4, p.240-246 (1996).
- [68] Simonnard, M., *Programmation Linéaire*, vol.2, Dunod, Paris (1973).
- [69] Smith, D., Allen, S., Hurley, S., Watkins, J., *Frequency assignment: Method and algorithms*, Global Communications, p.110-127(1998).
- [70] Smith, D., Hurley, S., Thiel, S.U., *Improving Heuristics for the frequency assignment problem*, European Journal of Operational Research, 107, p.76-86(1998).
- [71] Tzifa, E.C., Demesticha, V.P., Demestichas, P.P., Theologou, M.E., Anagnostou, M.E., *Design of the Access Network Segment of Future Communication Systems*, Wireless Personal Communications 11, p.247-268 (1999).
- [72] VanRoy, T.J., *Cross-decomposition for mixed-integer programming*, Mathematical Programming 25, p.46-63 (1983).
- [73] Virgilio, J.M.F., Galvo, F., Galvo, R.D., *Design of Interconnection of Local Area networks*, International Transactions Operational Research. vol.5, No 3, p.211-231 (1998).