

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté de génie
Département de génie mécanique

IMPLÉMENTATION DE LA TECHNIQUE
DE SIMULATION DES GRANDES
ÉCHELLES DANS UN SOLVEUR
PARALLÈLE DE DYNAMIQUE DES
FLUIDES

Mémoire de maîtrise
Spécialité : génie mécanique

Patrick LEPAGE

Jury : Stéphane MOREAU (directeur)
Christopher JACKSON
Martin BROUILLETTE

Sherbrooke (Québec) Canada

Janvier 2012

IV -2214



Library and Archives
Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-90942-3

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-90942-3

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

RÉSUMÉ

Ce mémoire de maîtrise en milieu industriel présente les travaux réalisés chez Maya Heat Transfer Technologies afin d'implémenter la technique de la simulation des grandes échelles dans le solveur de dynamique des fluides parallèle NIECE. Les modèles de sous-maille algébriques de Smagorinsky, WALE (Wale Adapting Local Eddy-Viscosity) et le modèle de Vreman ont été retenus et validés. Ce projet de maîtrise se divise quatre volets.

La première partie présente l'implémentation et l'analyse d'un nouveau schéma de discrétisation spatial et temporel dans le contexte d'un algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes par une approche *mixte volumes éléments finis* sur maillage non structuré. Une étude comparative sur la stabilité, la diffusion et dispersion numérique des nouveaux schémas et ceux déjà existants dans le code permet d'identifier le schéma centré de second ordre en espace, couplé au schéma de Crank-Nicolson en temps comme un compromis adéquat pour la simulation des grandes échelles dans un contexte industriel.

Le second volet détaille les résultats de la simulation de la décroissance d'une turbulence homogène isotrope. La décroissance des spectres d'énergie est présentée pour chacun des modèles de sous-maille, puis comparée à la solution sans modèle. L'effet du raffinement du maillage est investigué. Ce volet détaille également l'implémentation et la validation de l'algorithme permettant l'initialisation d'une turbulence isotrope incompressible. Une discussion sur les formulations analytiques des spectres d'énergie de Passot-Pouquet et de von Karman-Pao est finalement présentée.

Le problème de la représentation de l'écoulement à l'entrée du domaine de calcul est ensuite abordé. Ce troisième volet détaille la méthode de génération de turbulence, appelée méthode des tourbillons synthétiques, servant à générer un champ de vitesse cohérent et représentatif d'une turbulence réelle. Une étude de l'influence des paramètres numériques de la méthode permet de dériver un critère automatique de sélection pour l'utilisateur. Pour terminer, une étude comparative de la méthode des tourbillons synthétiques à une méthode d'injection aléatoire est présentée.

En dernier lieu, la réalisation du cas de validation du canal plan périodique permet d'investiguer la capacité du code à simuler les propriétés d'une turbulence cisailée. Les résultats des modèles de sous-maille sont comparés au cas sans modèle de turbulence. L'effet du raffinement du maillage est étudié sur trois différentes grilles. Les statistiques de premier ordre (profil de vitesse moyenne) et les statistiques de second ordre (profils des composantes du tenseur de Reynolds) sont détaillées et analysées. Finalement, la contribution de l'énergie cinétique résolue et de l'énergie de sous-maille permet de quantifier la contribution des modèles de turbulence sur la solution.

Mots-clés : Simulation des grandes échelles, dynamique des fluides numérique, modèles de sous-maille, turbulence

TABLE DES MATIÈRES

1	INTRODUCTION	1
2	ÉTAT DE L'ART	5
2.1	La turbulence	5
2.1.1	Les échelles de turbulence	5
2.1.2	Les différentes approches de modélisation	6
2.2	La simulation des grandes échelles	10
2.2.1	La notion de filtre	11
2.2.2	Les équations de Navier-Stokes filtrées	11
2.2.3	La modélisation de sous-maille	12
2.3	Le traitement des conditions limites	16
2.3.1	Condition limite de parois	17
2.3.2	Condition de flux d'entrée - l'injection de turbulence	18
3	MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS	27
3.1	Approche mixte volumes éléments finis	28
3.1.1	Schéma temporel	30
3.1.2	Opérateur de diffusion	31
3.1.3	Opérateur de convection	32
3.2	Algorithme de résolution	34
3.3	Analyse des schémas de convection et d'intégration temporelle dans NIECE	35
3.3.1	Stabilité des schémas de discrétisation	36
3.3.2	Diffusion et dispersion des schémas de discrétisation	40
3.3.3	Ordre de convergence de la solution des schémas	44
4	LA DÉCROISSANCE D'UNE TURBULENCE HOMOGENÈ ISOTROPE	49
4.1	Les statistiques d'une turbulence isotrope	49
4.2	L'initialisation du champ de vitesse	51
4.3	Les spectres d'énergie de turbulence	53
4.3.1	Le spectre de Passot-Pouquet	54
4.3.2	Le spectre de von Karman-Pao	55
4.3.3	Les spectres de grille	57
4.4	Validation des champs de vitesse initiaux	58
4.4.1	Coefficients de corrélation	59
4.4.2	Longueurs intégrales de corrélation	61
4.4.3	Les spectres d'énergie	63
4.4.4	Visualisation des champs de vitesse initiaux	65
4.5	Résultats de la décroissance	67
4.5.1	Résultats sans modèle de turbulence	68
4.5.2	Comparaison des modèles de sous-maille	69

5	CHOIX ET VALIDATION DE LA MÉTHODE D'INJECTION DE TUR- BULENCE	75
5.1	Présentation de la méthode des tourbillons synthétiques	75
5.2	Simulation d'une turbulence isotrope	77
5.3	Influence des paramètres numériques	80
5.3.1	Critères de sélection des paramètres σ et N	84
5.4	Convection d'une turbulence isotrope dans un domaine périodique	86
6	LE CANAL PLAN PÉRIODIQUE	91
6.1	Configuration géométrique	91
6.2	Conditions limites	91
6.3	Condition initiale	93
6.4	Configurations de calcul et stratégie de maillage	93
6.4.1	Le calcul des statistiques	94
6.5	Résultats statistiques	94
6.5.1	Profil de vitesse moyen	95
6.5.2	Profils des composantes du tenseur de Reynolds	97
6.5.3	Contribution des modèles de sous-maille	101
7	CONCLUSION	103
A	LA MÉTHODE DES VOLUMES ÉLÉMENTS FINIS	105
A.1	Les fonctions de formes et leurs dérivées	105
A.2	Le calcul du vecteur normal surfacique $(\Delta n_j)_{ip}$	107
A.3	Le calcul des gradients	112
	LISTE DES RÉFÉRENCES	115

LISTE DES FIGURES

2.1	<i>DNS - Spectre d'énergie entièrement résolu</i>	7
2.2	<i>Spectre d'énergie entièrement modélisé pour les méthodes RANS</i>	8
2.3	<i>Spectre d'énergie LES - Petites échelles modélisées, grandes échelles résolues</i>	10
2.4	<i>Méthode de recyclage</i>	20
2.5	<i>Spectre typique d'une turbulence vs spectre d'une méthode aléatoire</i>	21
3.1	<i>Arrangement décalé entre les volumes de contrôle et les éléments</i>	29
3.2	<i>Aggrandissement sur un élément de la structure décalée de la méthode volumes éléments finis</i>	29
3.3	<i>Représentation du schéma amont de premier ordre</i>	33
3.4	<i>Exemple de dissipation numérique</i>	41
3.5	<i>Dissipation numérique introduire par le schéma décalé avant et Euler (à gauche), le schéma centré et Euler (à droite). Notons que les échelles ne sont pas identiques.</i>	41
3.6	<i>Comparaison de la dissipation numérique entre les différents schémas. CFL = 0.5.</i>	42
3.7	<i>Dispersion numérique introduire par le schéma décalé avant et Euler (en haut à gauche), le schéma centré et Euler (en haut à droite) et le schéma centré et Crank-Nicolson (en bas).</i>	43
3.8	<i>Comparaison de la dispersion numérique entre les différents schémas. CFL = 0.5.</i>	44
3.9	<i>Exemples de maillages 2-D utilisés pour la convection d'un profil gaussien. Un maillage d'hexaèdres réguliers à gauche et de prisme à base triangulaire à droite.</i>	45
3.10	<i>Profil de $u(x, y)$ après un tour complet.</i>	46
3.11	<i>Convergence de la norme L^2 de l'erreur. À droite : maillage 2D hexaédrique, à gauche : maillage 2-D de prismes à base triangulaire.</i>	47
3.12	<i>Comparaison des gaussiennes initiales à convecter.</i>	48
3.13	<i>Convergence de la norme L^2 de l'erreur sur le maillage 1-D.</i>	48
4.1	<i>Schématization de la condition $\hat{u}'(-k) = \hat{u}^*(k)$</i>	53
4.2	<i>Effet des paramètres k_e et U_p sur la forme du spectre d'énergie de Passot-Pouquet</i>	55
4.3	<i>Effet du rapport k_d/k_e sur la forme du spectre d'énergie de von Karman-Pao</i>	57
4.4	<i>Les intégrales I_p pour $p = 3, 4$ et 5.</i>	57
4.5	<i>Les coefficients de corrélation longitudinale du spectre de Passot-Pouquet.</i>	59
4.6	<i>Les coefficients de corrélation transverses du spectre de Passot-Pouquet.</i>	60
4.7	<i>Les coefficients de corrélation longitudinale du spectre de von Karman-Pao.</i>	60
4.8	<i>Les coefficients de corrélation transverses du spectre de von Karman-Pao.</i>	61
4.9	<i>Comparaison des spectres théoriques initiaux de Passot-Pouquet avec les spectres numériques.</i>	64

4.10	<i>Comparaison des spectres théoriques initiaux de von Karman-Pao avec les spectres numériques.</i>	65
4.11	<i>Champ de vitesse initial - Spectre de Passot-Pouquet à gauche, spectre de von Karman-Pao à droite. En haut : la composant u', au milieu : la composante v', en bas : la composante w'</i>	66
4.12	<i>Décroissance de l'énergie cinétique turbulente sans modèle de sous-maille.</i>	68
4.13	<i>Décroissance des spectres de Passot-Pouquet sans modèle de sous-maille. Les courbes sont espacées d'un intervalle de : 0.2 sec. à gauche, 0.4 sec. au milieu et 0.6 sec. à droite.</i>	69
4.14	<i>Comparaison de la décroissance de l'énergie cinétique turbulente des différents modèles de sous-maille. Colonne de gauche 32^3 noeuds, colonne du milieu 64^3 noeuds, colonne de droite 128^3 noeuds.</i>	72
4.15	<i>Décroissance du spectre de von Karman-Pao avec les différents modèles de sous-maille. Les courbes sont espacées d'un intervalle de 0.2 sec.</i>	73
5.1	<i>Domaine virtuel qui englobe le plan d'injection.</i>	76
5.2	<i>Évolution temporelle de la vitesse moyenne et des composantes du tenseur de Reynolds. Les échelles de temps sont différentes pour les deux graphiques.</i>	78
5.3	<i>Historique des signaux de u, v, w et contours instantannés de la vitesse sur le plan d'injection.</i>	79
5.4	<i>Distribution de probabilité de la composante v'</i>	80
5.5	<i>Corrélation en deux points</i>	81
5.6	<i>Simulations d'une turbulence isotrope en variant le nombre de tourbillons. De haut en bas : $N = 10$, $N = 100$, $N = 1000$, $N = 10000$</i>	82
5.7	<i>Simulations d'une turbulence isotrope en variant la taille des tourbillons. De haut en bas : $\sigma = 0.25m$, $\sigma = 0.5m$, $\sigma = 1.0m$</i>	83
5.8	<i>Convection d'une turbulence isotrope</i>	86
5.9	<i>Contours de vitesse dans le plan symétrie du domaine à trois instants. En haut à droite : 0.3 s, en haut à gauche 1.2 s, en bas : 2.1 s</i>	87
5.10	<i>Comparaison de la décroissance spatiale de l'énergie cinétique turbulente.</i>	88
5.11	<i>Comparaison de distribution spatiale du signal RMS de la pression.</i>	88
6.1	<i>Géométrie du canal plan</i>	92
6.2	<i>Comparaison des profil de vitesse moyen. Canal plan $Re_\tau = 395$.</i>	95
6.3	<i>Profils du tenseur de Reynolds. Modèle de Smagorinsky.</i>	98
6.4	<i>Profils du tenseur de Reynolds. Modèle de WALE.</i>	98
6.5	<i>Profils du tenseur de Reynolds. Modèle de Vreman.</i>	99
6.6	<i>Profils du tenseur de Reynolds. Sans modèle de sous-maille.</i>	100
6.7	<i>Comparaison de l'énergie cinétique résolue et de l'énergie de sous-maille.</i>	102
A.1	<i>Structure d'un élément et sa terminologie</i>	105
A.2	<i>Concept d'élément de référence et d'élément local</i>	106
A.3	<i>Position des points d'intégration dans un élément hexaédrique</i>	110
A.4	<i>Surface d'intégration 1 de l'élément hexaédrique</i>	111

LISTE DES TABLEAUX

4.1	<i>Paramètres des simulations ayant servi à valider la procédure d'initialisation du champ de vitesse turbulent avec le spectre de Passot-Pouquet</i>	58
4.2	<i>Paramètres des simulations ayant servi à valider la procédure d'initialisation du champ de vitesse turbulent avec le spectre de von Karman-Pao</i>	59
4.3	<i>Comparaison des longueurs intégrales d'autocorrélation longitudinales du spectre de Passot-Pouquet. Les longueurs intégrales sont en mètre.</i>	61
4.4	<i>Comparaison des longueurs intégrales d'autocorrélation transverses du spectre de Passot-Pouquet. Les longueurs intégrales sont en mètre.</i>	62
4.5	<i>Comparaison des longueurs intégrales d'autocorrélation longitudinales du spectre de von Karman-Pao. Les longueurs intégrales sont en mètre.</i>	62
4.6	<i>Comparaison des longueurs intégrales d'autocorrélation transverse du spectre de von Karman-Pao. Les longueurs intégrales sont en mètre.</i>	62
4.7	<i>Valeurs de l'exposant n en fonction de la forme du spectre.</i>	67
4.8	<i>Caractéristiques des simulations avec les spectres de Passot-Pouquet</i>	68
4.9	<i>Caractéristiques des simulations avec le spectre de von Karman-Pao</i>	70
4.10	<i>Contribution de l'énergie de sous-maille.</i>	71
5.1	<i>Configuration des simulations ayant servi à évaluer l'influence des paramètres numériques σ et N.</i>	81
5.2	<i>Constantes C des simulations A à D.</i>	85
6.1	<i>Configurations des maillages utilisés pour le canal turbulent.</i>	94
6.2	<i>Hauteur approximative dans le canal où les résultats de la simulation divergent de plus 2% de la DNS de [Moser et al., 1999].</i>	96
6.3	<i>Comparaison des valeurs de U_{+max} pour les simulations à 80^3 noeuds.</i>	96
6.4	<i>Comparaison du cisaillement à la paroi des différents simulations. L'erreur par rapport à la valeur analytique est mise entre parenthèses.</i>	97

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Ce projet de maîtrise en milieu industriel a été réalisé chez Maya Heat Transfer Technologies au siège social de l'entreprise, à Montréal. La compagnie compte une cinquantaine d'employés, dont une dizaine s'occupe de développer, tester et promouvoir auprès des clients différents produits d'analyse et de simulation de transfert de chaleur et d'écoulement de fluide. L'équipe de développeurs et de programmeurs, avec laquelle cette maîtrise s'est déroulée, est composée de quatre docteurs en génie mécanique qui s'occupent de tous les aspects du développement et de la maintenance du solveur de dynamique des fluides.

Afin d'améliorer les performances actuelles du logiciel, cette équipe travaille depuis maintenant deux ans à la programmation d'un nouveau code numérique parallèle pour les écoulements, NIECE (New Implicit Explicit CDF Engine), qui sera mieux adapté aux utilisateurs existants et permettra à l'entreprise de cibler de nouveaux marchés. Une fois le projet à terme, ce nouveau code permettra aux utilisateurs de lancer une simulation sur de multiples processeurs à la fois, réduisant ainsi de façon considérable le temps de calcul nécessaire pour la construction et la résolution de modèles numériques. Ce code parallèle permettra, entre autres, de résoudre des modèles et des phénomènes complexes beaucoup plus rapidement. Dans le contexte d'un marché en croissance et de la disponibilité grandissante en industrie de grappes parallèles pour la simulation numérique, le nouveau solveur NIECE permettra à l'entreprise de se positionner de façon compétitive par rapport à ses concurrents.

Ce logiciel est destiné à des clients souhaitant modéliser des phénomènes d'écoulements basses vitesses dans un contexte général d'applications industrielles. À terme, NIECE sera couplé à un solveur thermique de résolution de la conduction et de la radiation dans les solides, ce qui lui permettra de résoudre une large gamme de problèmes en thermofluide. Plus spécifiquement, NIECE cible des applications liées à l'aéronautique, à l'automobile et aux transports, à la mécanique du bâtiment, au refroidissement de systèmes électroniques, à la modélisation de systèmes de chauffage, de ventilation, de climatisation et aux procédés de fabrication. Ce produit est donc conçu comme un outil de design et d'optimisation, destiné aux ingénieurs. Les différentes fonctionnalités offertes dans le produit, c'est-à-dire la diversité des conditions limites, la variété des modèles de turbulence et des modèles de viscosité non newtoniens, la complexité des schémas de discrétisation, sont orientées vers

les besoins spécifiques des clients. Sachant que la parallélisation du code permettra de traiter de très grands modèles auparavant inaccessible avec le solveur série, l'entreprise a jugé intéressant de considérer l'implémentation de nouvelles fonctionnalités généralement limitées au domaine de la recherche.

Le travail de maîtrise s'insère à l'intérieur de ce vaste plan dans lequel Maya Heat Transfer Technologies s'est lancée et consiste à implémenter la méthode de modélisation de la turbulence appelée : simulation des grandes échelles. L'implémentation s'est faite, directement dans le nouveau solveur, en collaboration avec l'équipe de développement. Le travail a ainsi pu bénéficier de l'optimisation et du perfectionnement continu du logiciel.

L'objectif principal du travail du maîtrise consiste à implémenter la technique de la simulation des grandes échelles dans le solveur NIECE, afin de pallier aux limitations des modèles RANS déjà en place, dont une discussion est présentée à section 2.1.2. En particulier, le projet vise à adapter les formulations de quatre modèles de sous-maille algébriques à l'architecture actuelle du solveur. Ces différents modèles de turbulence doivent être fonctionnels avec tous les types d'éléments du maillage (hexaèdre, tétraèdre, prisme à base triangulaire, pyramide) supportés par NIECE. De plus, leur mise en œuvre par l'utilisateur doit respecter la structure existante des autres modèles déjà implémentés.

La réalisation de cet objectif principal a nécessité l'addition ou la modification de plusieurs éléments numériques ainsi que leur validation.

D'abord, la mise en œuvre d'un calcul de simulation aux grandes échelles nécessite la résolution spatiale et temporelle des plus grandes structures turbulentes dans l'écoulement. La précision des schémas numériques est donc particulièrement importante afin de capturer adéquatement la partie instantanée des champs de vitesse et de pression. Un schéma peu précis, dont la diffusivité numérique est importante, risquerait de dissiper ces fluctuations par rapport aux champs moyens, rendant la méthode complètement inutile. Par conséquent, un des objectifs secondaires du projet consiste à implémenter et comparer de nouveaux schémas de discrétisation afin d'améliorer l'exactitude des solutions. Les différents schémas mis en place devront faire l'objet d'une validation sur des cas simples et bien documentés.

Ensuite, l'ensemble des conditions limites offert dans le solveur devra faire l'objet d'une révision afin de s'assurer qu'elles soient compatibles avec un calcul de simulation aux grandes échelles. En particulier, la condition limite de flux d'entrée devra faire l'objet d'un traitement particulier afin de permettre à l'utilisateur de générer en amont de son domaine de calcul les caractéristiques d'une turbulence en accord avec la réalité. En somme, la vitesse

à l'entrée du domaine doit tenir compte d'un profil de vitesse moyen, pas nécessairement uniforme, sur lequel se superposent des fluctuations turbulentes dans l'espace et dans le temps. La difficulté dans l'implémentation de ce type de méthode est liée à génération de fluctuations qui sont spatialement et temporellement cohérentes afin de représenter les propriétés d'une turbulence représentative de la réalité. La méthode mise en place doit également être en mesure de tenir compte de l'aspect parfois anisotrope de la turbulence comme dans le cas d'un écoulement en canal plan ou en tuyau.

Une série de cas de validation devra être mise en œuvre afin de démontrer les performances et les limitations des différents modèles de sous-maille. Le choix des cas tests à réaliser devra inclure des cas tests simples et bien documentés ainsi que des problèmes avec une géométrie plus complexe. La mise en œuvre de ces problèmes devra permettre de couvrir l'ensemble des conditions limites susceptible d'être utilisées avec un calcul de simulation aux grandes échelles. Une comparaison des résultats numériques obtenus avec NIECE à des données expérimentales ou des données tirées de calcul de simulation DNS permettra d'évaluer la qualité des schémas et des modèles de sous-maille implémentés. Finalement, l'ensemble de ce travail permettra de réaliser une analyse comparative des différents modèles de sous-maille.

CHAPITRE 2

ÉTAT DE L'ART

2.1 La turbulence

En dynamique des fluides numérique, la modélisation des effets de la turbulence revêt une importance particulière. En effet, la grande majorité des écoulements ayant un intérêt d'un point de vue de l'ingénierie sont en régime turbulent de par leur efficacité pour le mélange et le transfert de chaleur [Versteeg et Malalasekera, 1995]. Les utilisateurs de logiciels de dynamique des fluides ont donc besoin d'avoir accès à des outils de simulation capables de représenter ces effets de la turbulence. Dans le cadre de cette maîtrise, nous nous intéresserons uniquement à la modélisation des effets de la turbulence liés aux écoulements externes et internes, sans tenir compte des aspects thermiques ou compressibles.

2.1.1 Les échelles de turbulence

Un écoulement turbulent est caractérisé par un nombre de Reynolds élevé. Le nombre de Reynolds représente une mesure de l'importance relative des forces d'inertie, liées aux effets de convection en rapport aux forces visqueuses dans l'écoulement. Lorsque le nombre de Reynolds est bas, les forces visqueuses dominent et l'on observe un écoulement laminaire, constitué de couches de fluide glissant les unes sur les autres. L'augmentation du nombre de Reynolds peut éventuellement mener à un changement radical du caractère de l'écoulement. Au-delà d'un nombre de Reynolds critique, les forces d'inertie dominent et l'écoulement présente un comportement aléatoire et chaotique. Les échanges de quantité de mouvement ne se font plus uniquement au niveau moléculaire (viscosité laminaire), mais font intervenir des structures de différentes tailles (tourbillons) dans l'écoulement. Le mouvement des particules de fluide devient intrinsèquement instationnaire et la vitesse et les autres propriétés du fluide varient de façon aléatoire autour d'une valeur moyenne.

Ces fluctuations turbulentes possèdent un caractère tridimensionnel dans l'espace. De plus, la visualisation d'écoulements en régime turbulent révèle l'apparition de structures en rotation appelées tourbillons, sur un large spectre d'échelle. Un mécanisme appelé cascade d'énergie permet de décrire le transfert d'énergie s'opérant entre les différentes structures de la turbulence [Pope, 2000]. Ce mécanisme explique comment l'énergie contenue dans

les gros tourbillons est transférée vers des échelles de turbulence de plus en plus petites. À partir d'une certaine échelle, ce mécanisme de transfert cesse de dominer l'écoulement et l'énergie est alors dissipée sous l'effet des forces visqueuses. Le mécanisme de cascade d'énergie permet de visualiser la turbulence comme étant composée de tourbillons de différentes tailles. À chacun des ces tourbillons, il est possible d'associer une longueur caractéristique ℓ , une vitesse caractéristique $u(\ell)$ et un temps caractéristique $\tau(\ell) = \ell/u(\ell)$. Dans le mécanisme de cascade d'énergie, les grands tourbillons, liés aux échelles géométriques du problème (diamètre du tuyau, épaisseur de la couche limite, etc), sont instables et se fractionnent en plus petits tourbillons, transférant du même coup leur énergie à ces plus petites structures turbulentes. À leur tour, ces plus petits tourbillons subissent le même phénomène jusqu'à ce que le nombre de Reynolds $Re(\ell) \equiv u(\ell)\ell/\nu$ local devienne suffisamment petit pour que le mouvement des tourbillons devienne stable et que la viscosité moléculaire puisse efficacement dissiper l'énergie cinétique.

On remarque dans ce mécanisme de transfert d'énergie qu'il existe un nombre de Reynolds et donc une échelle de tourbillon associée limitant la taille des plus petites échelles de la turbulence responsable de la dissipation de l'énergie. Cette taille minimale est appelée échelle de Kolmogorov η_k [Kolmogorov, 1941]. Sous l'hypothèse d'homogénéité des petites structures turbulentes, Kolmogorov a démontré qu'il était possible d'estimer le rapport entre les plus grandes et les plus petites échelles spatiale et temporelle de la turbulence, en faisant intervenir le nombre de Reynolds Re de l'écoulement, basé sur l'échelle géométrique du problème :

$$\eta_k/\ell_0 \sim Re^{-3/4} \quad (2.1)$$

$$\tau_k/\tau_0 \sim Re^{-1/2} \quad (2.2)$$

où τ_k correspond à une échelle de temps caractéristique des tourbillons, ℓ_0 est une échelle spatiale du domaine et τ_0 est une échelle temporelle caractérisant l'ensemble de l'écoulement. Les relations (2.1) et (2.2) [Pope, 2000] quantifient, en quelques sortes, la plage des échelles d'espace et de temps à résoudre pour capturer une turbulence homogène isotrope.

2.1.2 Les différentes approches de modélisation

La simulation de la dynamique des fluides et plus particulièrement l'étude de la turbulence peut avoir différents objectifs. Un premier s'intéresse principalement à l'aspect théorique et vise à comprendre les différents mécanismes qui génèrent et engendrent la turbulence. Un second s'inscrit plutôt dans un contexte industriel et vise à prédire la nature de l'écoulement pour ses applications en aéronautique, hydraulique, propulsion, etc.

On distingue trois grandes familles de méthodes permettant la modélisation de la turbulence : la simulation numérique directe (DNS - Direct Numerical Simulation), l'approche moyennée (RANS - Reynolds Average Numerical Simulation) et la simulation aux grandes échelles (LES - Large Eddy Simulation).

La simulation numérique directe

La simulation numérique directe consiste à résoudre la totalité des échelles (de η à ℓ_0) présentes dans l'écoulement (figure 2.1). La résolution de toutes les échelles de la turbulence nécessite la réalisation d'une discrétisation spatiale et temporelle extrêmement fine pour venir capturer l'évolution des plus petites structures tourbillonnaires dans l'écoulement. Encore aujourd'hui, le temps de calcul nécessaire pour réaliser la simulation directe d'un

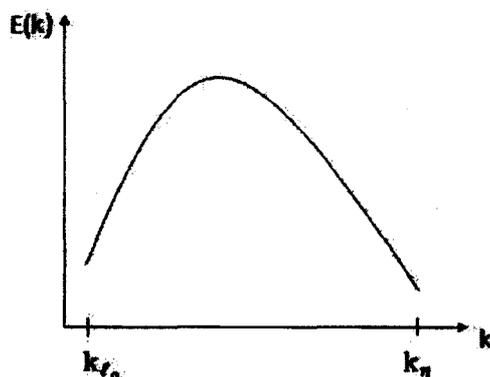


Figure 2.1 DNS - Spectre d'énergie entièrement résolu

écoulement turbulent est plusieurs ordres de grandeur trop grand pour être envisageable dans le cadre d'applications industrielles. À titre d'exemple, considérons le cas d'un écoulement autour d'un avion commercial en vol rectiligne en palier, où le nombre de Reynolds basé sur la corde moyenne de l'aile vaut $Re = 10^8$. En considérant une longueur caractéristique du domaine $\ell_0 = 100$ m, l'échelle de Kolmogorov associée vaut $\eta_k = 0.1$ mm. En considérant le cas extrême, où la totalité du domaine serait maillée avec des éléments de taille égale à l'échelle de Kolmogorov, le modèle nécessiterait $\sim 10^{14}$ éléments. À l'heure actuelle, les gros modèles solutionnés dans un contexte d'applications industriel sont plutôt de l'ordre de $\sim 10^8$ éléments.

Malgré les difficultés techniques liées à la simulation numérique directe, cette méthode demeure fondamentale à la recherche en turbulence, car elle donne accès à une quantité d'informations essentielles pour le développement de modèles de simulations numériques tels que la LES ou les modèles RANS.

L'approche moyennée

Cette famille de méthodes est présentement la plus utilisée dans le milieu industriel pour simuler de la turbulence. Elle est basée sur une approche moyennée des équations de Navier-Stokes. Dans ce type de simulation, l'écoulement est décrit uniquement à l'aide de moyennes statistiques. Les termes faisant intervenir les fluctuations par rapport au champ moyen sont modélisés à l'aide de modèle de fermeture. Le spectre d'énergie de turbulence est donc entièrement modélisé (figure 2.2). Les méthodes RANS sont basées

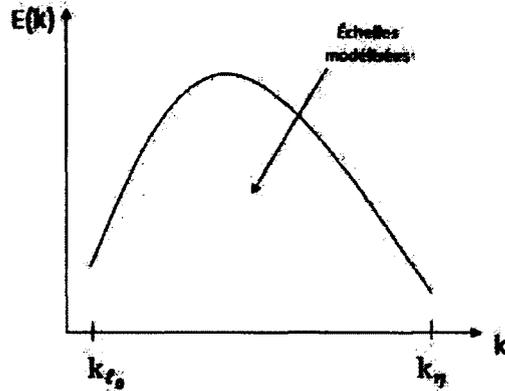


Figure 2.2 Spectre d'énergie entièrement modélisé pour les méthodes RANS

sur la décomposition de Reynolds [Versteeg et Malalasekera, 1995], où les champs de vitesse et de pression sont décomposés en une valeur moyenne statistique et une quantité fluctuante. Pour la vitesse on peut donc écrire $u_i(t) = \bar{u}_i + u'_i(t)$, où par définition $u'_i(t)$, moyennée sur un intervalle de temps Δt , vaut zéro :

$$\overline{u'_i(t)} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} u'_i(t) dt = 0 \quad (2.3)$$

Suivant le formalisme de [Labourasse et Sagaut, 2002], la quantité \bar{u}_i peut être définie comme une moyenne d'ensemble sur un échantillon Ω :

$$\bar{u}_i = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in \Omega} u_{i(\xi)} \quad (2.4)$$

où N correspond au nombre d'échantillons dans Ω et $u_{i(\xi)}$ dénote la réalisation ξ de l'ensemble possible Ω . La moyenne d'ensemble définie à l'équation (2.4) peut être interprétée comme une moyenne statistique classique ou une moyenne conditionnelle dépendant de la taille de l'ensemble d'échantillons Ω . Cette moyenne peut donc représenter à la fois une solution en régime permanent ou en régime instationnaire. De plus, sous l'hypothèse

d'ergodicité il s'agit d'une moyenne temporelle sur un temps très long devant les échelles de temps de la turbulence.

Les approches moyennées instationnaires (URANS - Unsteady Reynolds Average Numerical Simulation) permettent de résoudre des phénomènes déterministes, périodiques comme la fluctuation de charge périodique sur un stator du fait de l'impact d'un sillage de rotor ou l'échappement tourbillonnaire derrière un objet dans un écoulement externe. L'introduction de cette décomposition dans les équations de Navier-Stokes fait apparaître un terme supplémentaire ($-\overline{\rho u_i' u_j'}$) appelé tenseur des contraintes Reynolds. C'est ce terme qui est modélisé à l'aide d'un modèle de fermeture.

Ce type d'approche est largement répandu en industrie, car elle ne nécessite pas une discrétisation particulièrement raffinée puisqu'on ne souhaite pas capturer la partie instantanée des champs. En plus, les différents modèles de fermeture (par exemple $k - \epsilon$, $k - \omega$ [Wilcox, 1993]) sont valides sur large gamme de problèmes d'intérêts pour les applications industrielles. En revanche, ce gain se fait au détriment de la qualité des résultats obtenus, puisque ce type de simulation ne donne accès qu'aux quantités moyennes de l'écoulement.

La simulation des grandes échelles

Une méthode intermédiaire permet de pallier aux difficultés de la simulation numérique directe (très grand nombre de mailles, simulations à nombre de Reynolds limité), tout en donnant accès à une partie de l'information concernant les champs instantanés. La résolution de ces champs instantanés permet, en post-traitement, d'en extraire les statistiques pertinentes. Cette technique est appelée simulation aux grandes échelles ou LES (Large Eddy Simulation).

Plutôt que de tenter de résoudre la totalité du spectre d'énergie, la méthode propose de définir un maillage permettant de capturer uniquement les grandes structures de la turbulence (les plus grands tourbillons), jusqu'à une échelle Δ , appelée échelle de coupure. Ces grandes structures sont dépendantes de la géométrie du problème et des conditions limites et représentent l'extrémité gauche du spectre. Sous la seconde hypothèse de similitude de la théorie de Kolmogorov, il est possible de séparer l'extrémité gauche du spectre en une zone inertielle et une zone de dissipation. Selon cette hypothèse, la dynamique des tourbillons de la zone inertielle est dominée par les effets inertiels dans l'écoulement alors que la zone de dissipation est dominée par les effets visqueux. Les structures turbulentes situés dans la zone inertielle et dans la zone de dissipation possède un caractère homogène et universel dans l'écoulement ce qui permet de les modéliser. Il devient alors possible d'introduire un modèle physique ou empirique, appelé modèle de sous-maille, permettant

de tenir compte de leur effet dans l'écoulement. La figure 2.3 schématise le concept fondamental derrière cette méthode. La technique de simulation aux grandes échelles possède

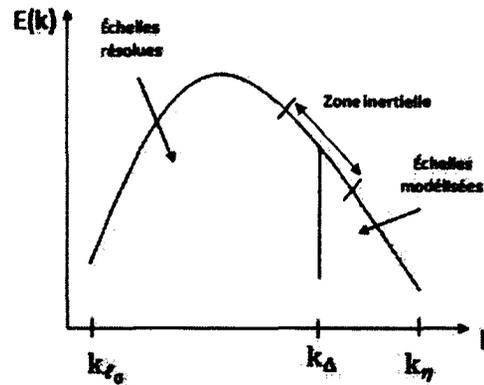


Figure 2.3 Spectre d'énergie LES - Petites échelles modélisées, grandes échelles résolues

l'avantage de pouvoir considérer des écoulements avec nombre de Reynolds plus élevé que la DNS. La méthode donne également accès à certaines informations concernant les champs instantanés (corrélations doubles et triples). Elle permet finalement de visualiser les structures tourbillonnaires résolues. La description détaillée de cette technique et des principaux modèles de sous-maille font l'objet de la section 2.2.

2.2 La simulation des grandes échelles

L'idée derrière la technique de simulation des grandes échelles repose sur la modélisation des plus petites échelles de la turbulence et de la résolution directe des grandes échelles. Le concept permettant la séparation des échelles à résoudre de celles à modéliser s'appelle échelle de coupure. La théorie suppose que la résolution de seulement les tourbillons dont la taille est supérieure à cette échelle de coupure est nécessaire pour représenter correctement la dynamique de l'écoulement. On suppose que l'action des tourbillons plus petits que cette échelle de coupure est surtout limitée à rôle dissipatif. En exploitant l'hypothèse de similitude de Kolmogorov sur la nature universelle et homogène de ces petites échelles, il devient alors possible de tenir compte de leur effet à l'aide de modèles de sous-maille.

La séparation des différentes échelles fait intervenir le concept de filtrage spatial, détaillé à la section 2.2.1. L'application de cette notion de filtrage aux équations de Navier-Stokes incompressibles sera également détaillée plus loin. Enfin, une description des principaux modèles de sous-maille dans la littérature sera présentée.

2.2.1 La notion de filtre

La technique de simulation des grandes échelles consiste à définir une fonction de filtrage G_Δ permettant de séparer les échelles résolues explicitement de celles qui seront modélisées. Soit un champ filtré $\bar{u}_i(\mathbf{x}, t)$, obtenu par le produit de convolution dans l'espace physique :

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}, t) = \int G_\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_i(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \quad (2.5)$$

où l'on impose que :

$$\int G_\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1 \quad (2.6)$$

Différentes fonctions de filtrage ont été développées dans la littérature, citons entre autres le filtrage gaussien et le filtrage de Cauchy [Pope, 2000]. Le filtrage le plus simple [Bailly et Comte-Bellot, 2003] et qui est généralement utilisé dans les codes commerciaux [CFX, 2009; FLUENT, 2009; Jiang et Lai, 2009] est appelé filtre boîte ou *box filter*. Il consiste à moyenner localement sur la taille du volume de contrôle Δ associé à chaque nœud du maillage :

$$G_\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1/\Delta^3 & \text{si } |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.7)$$

Dans le cadre de ce projet de maîtrise, nous privilégierons l'utilisation du filtre boîte qui a déjà été utilisé avec succès dans un grand nombre d'applications.

2.2.2 Les équations de Navier-Stokes filtrées

Pour un fluide incompressible, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.9)$$

Ces équations correspondent au cadre d'hypothèses sur lesquelles ce projet de maîtrise sera réalisé.

L'approche de la simulation des grandes échelles consiste à appliquer l'opération de filtrage aux équations précédentes, puis à décomposer les termes de vitesse et de pression en une somme d'un terme filtré (principal) et un terme de sous-maille $u_i = \bar{u}_i + u'_i$. Les équations

(2.8) et (2.9) deviennent alors :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial \tau_{ij}^{sg}}{\partial x_j} \quad (2.11)$$

où :

$$\tau_{ij}^{sg} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (2.12)$$

Le terme τ_{ij}^{sg} s'appelle le tenseur de sous-maille. C'est ce terme qui doit être modélisé. Cette modélisation peut être approchée en introduisant le concept de viscosité turbulente ν_t . Cette notion de viscosité turbulente peut être conceptualisée de deux manières :

- De façon analogue à la viscosité moléculaire, il est possible d'associer les échanges de quantité de mouvement qui apparaissent avec la turbulence à un terme de viscosité supplémentaire.
- Un point de vue plus théorique consiste à faire intervenir le concept de cascade d'énergie. Les grandes échelles de la turbulence transfèrent leur énergie aux plus petites structures, jusqu'à ce que cette énergie soit dissipée. Le terme de viscosité turbulente sert à représenter l'effet dissipatif de ces petites échelles.

Le concept de viscosité turbulente est introduit dans le tenseur de sous-maille à l'aide de l'expression :

$$\tau_{ij}^{sg} - \frac{1}{3} \tau_{ii}^{sg} \delta_{ij} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.13)$$

En remplaçant l'équation du tenseur de sous-maille dans l'expression de la conservation de la quantité de mouvement filtrée, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.14)$$

2.2.3 La modélisation de sous-maille

La plupart des modèles de simulation des grandes échelles sont basés sur la modélisation du tenseur de sous-maille. Dans cette section, nous passerons en revue les principaux modèles de viscosité dans la littérature. Les avantages et les limitations de chacun de ces modèles seront présentés.

Le modèle de Smagorinsky

Le modèle de sous-maille le plus répandu et le mieux documenté se nomme le modèle de Smagorinsky [Smagorinsky, 1963]. Ce modèle standard sert presque toujours de référence lors de la validation de nouvelles modèles de sous-maille. Le modèle de Smagorinsky propose de construire l'expression de la viscosité turbulente $\nu_t = \mu_t/\rho$ à partir de l'analyse dimensionnelle :

$$\nu_t \sim \frac{l \cdot u}{\rho} \sim \frac{l \cdot l}{\rho} \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right| \sim \frac{l^2}{\rho} \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right| \quad (2.15)$$

En choisissant pour la longueur $l = C_s \Delta$ et pour mesure des gradients de la vitesse résolue l'invariant $|\bar{S}| \equiv \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$, où :

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.16)$$

Il est possible de construire le modèle suivant :

$$\nu_t = \rho |\bar{S}| (C_s \Delta)^2 \quad (2.17)$$

Le modèle de Smagorinsky possède l'avantage d'être très simple à implémenter et donne de bons résultats dans le cas d'écoulements pleinement développés. En revanche, ce dernier possède plusieurs désavantages qui ont été abondamment documentés. D'abord, le modèle est intrinsèquement diffusif ce qui rend impossible la modélisation de la transition naturelle du régime laminaire vers le régime turbulent (voir par exemple [Voke et Yang, 1995]). De plus, ce modèle est incapable de tenir compte de la variation asymptotique de la viscosité turbulente près des parois. Il est d'ailleurs nécessaire d'inclure une fonction d'amortissement, telle que la fonction de Van Driest [Van Driest, 1956] pour corriger cet effet. Finalement, le modèle de Smagorinsky est défini à l'aide d'une constante empirique C_s qui s'avère être dépendante de la nature de l'écoulement et difficile à ajuster a priori [Lilly, 1992]. Malgré ces nombreux désavantages, le modèle sera implémenté dans le cadre de ce projet de maîtrise du fait de l'étendue de la documentation dont il a fait l'objet.

Le modèle de WALE (Wall Adapting Local Eddy-Viscosity)

Une autre approche utilisée pour définir un modèle de sous-maille a été développée par Nicoud et Ducros [Nicoud et Ducros, 1999]. Ce modèle de viscosité turbulente combine l'invariant utilisé par le modèle de Smagorinsky $|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$, en plus d'un nouvel

invariant $(s_{ij}^d s_{ij}^d)$. Le modèle proposé s'écrit :

$$\nu_t = (C_w \Delta)^2 \frac{(s_{ij}^d s_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (s_{ij}^d s_{ij}^d)^{5/4}} \quad (2.18)$$

où :

$$s_{ij}^d = \bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj} + \bar{\Omega}_{ik} \bar{\Omega}_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} [\bar{S}_{mn} \bar{S}_{mn} - \bar{\Omega}_{mn} \bar{\Omega}_{mn}] \quad (2.19)$$

avec :

$$\bar{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.20)$$

La combinaison de ces deux invariants permet au modèle de prendre en compte les effets dissipatifs des structures turbulentes possédant un grand taux de déformation ($|\bar{S}|$), un grand taux de rotation ($s_{ij}^d s_{ij}^d$) ou les deux. Le modèle permet également de reproduire la variation asymptotique de la viscosité turbulente près des murs sans introduire de nouvelles fonctions de corrections. Contrairement au modèle de Smagorinsky, la constante C_w du modèle peut être considéré comme une *vraie* constante, indépendante de la nature de l'écoulement. Ce modèle possède finalement l'avantage d'avoir déjà été utilisé avec succès sur des géométries complexes (voir exemple [Addad *et al.*, 2008; Rundström et Moshfegh, 2009]).

L'implémentation de la méthode ne nécessite aucune modification fondamentale au niveau de l'architecture de calcul par rapport au modèle de Smagorinsky. La méthode nécessite uniquement l'introduction d'un nouvel opérateur pour le calcul des invariants. Étant donné la simplicité d'implémentation et ces avantages par rapport au modèle de Smagorinsky, le modèle de WALE sera étudié dans le cadre de ce projet de maîtrise.

Le modèle de Vreman

Un autre modèle de sous-maille de viscosité turbulente a été récemment développé par Vreman [Vreman, 2004]. L'objectif du modèle est de corriger l'incapacité du modèle de Smagorinsky à capturer les écoulements en transition. Le modèle de viscosité proposé s'écrit :

$$\nu_t = C \sqrt{\frac{B_\beta}{\alpha_{ij} \alpha_{ij}}} \quad (2.21)$$

avec :

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (2.22)$$

$$\beta_{ij} = \Delta_m^2 \alpha_{mi} \alpha_{mj} \quad (2.23)$$

$$B_\beta = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 + \beta_{11}\beta_{33} - \beta_{13}^2 + \beta_{22}\beta_{33} - \beta_{23}^2 \quad (2.24)$$

De façon analogue au modèle de WALE, le modèle de Vreman est basé sur la construction de nouveaux invariants assurant que la viscosité turbulente s'approche de zéro dans les écoulements laminaires et dans les régions en transition. Puisque sa structure ne nécessite aucune modification par rapport au modèle de Smagorinsky à part l'implémentation de nouveaux opérateurs basés sur les gradients de vitesse, ce dernier sera implémenté dans le cadre de la maîtrise. Finalement, le modèle possède l'avantage d'avoir déjà été adapté comme formulation dynamique. Ce type de formulation des modèles de sous-maille fait l'objet de la prochaine section.

Par opposition aux modèles de sous-maille algébriques présentés précédemment qui utilisent un filtre Δ dépendant uniquement du volume local du volume de contrôle, le modèle de Vreman propose d'intégrer une forme de filtrage orthotropique avec son opérateur Δ_m . Cette fonction vient pondérer les différents termes du tenseur des gradients de vitesse résolue $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$ dans les directions de l'espace où le volume de contrôle est étiré. L'utilité de cette opération de filtrage sur la construction de l'invariant B_β s'illustre bien avec l'exemple d'une couche limite turbulente. Dans cette situation, le gradient de vitesse perpendiculaire au mur est très élevé, en revanche le maillage est typiquement étiré dans la direction principale de l'écoulement. L'opération de filtrage a donc pour effet d'équilibrer un gradient de vitesse élevé avec un filtre spatial plus petit. Dans le cas d'une couche limite, cette combinaison favorable permet au modèle de venir capturer plus facilement la décroissance de la viscosité turbulente près des murs.

Les modèles dynamiques

Un des principaux inconvénients du modèles de Smagorinsky est que la constante C_s est généralement définie en s'appuyant sur la théorie de Kolmogorov pour une turbulence homogène isotrope. Cependant, dans bien des cas, cette constante n'est pas universelle et dépend de l'écoulement. Le principe derrière l'approche dynamique [Germano *et al.*, 1991] consiste à calculer localement cette constante afin de corriger cet inconvénient.

Le concept de filtrage double est introduit pour mettre en œuvre ce type de méthode. Un premier filtrage classique (filtre G) sert à séparer les échelles résolues des échelles modélisées. Un second filtre, de taille plus grande (filtre \tilde{G}), nommé filtre test est également introduit. En appliquant le premier filtre aux équations incompressibles de Navier-Stokes, on fait apparaître le tenseur de sous-maille τ_{ij}^{sg} . L'application d'un second filtre permet d'obtenir le nouveau terme :

$$T_{ij} = \widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \tilde{\bar{u}}_i \tilde{\bar{u}}_j \quad (2.25)$$

Le terme T_{ij} correspond au tenseur de sous-maille associé à la vitesse \widetilde{u}_i . Le tenseur des contraintes résolues :

$$\mathcal{L} = \widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j \quad (2.26)$$

est une quantité qui peut donc être évaluée de manière exacte lors de la simulation. Elle vérifie la relation de Germano [Germano, 1992] : $\mathcal{L} = T_{ij} - \widetilde{\tau_{ij}^{sg}}$. Cette expression lie les termes de sous-maille aux deux échelles de filtrage dans l'hypothèse où la taille des filtres coupe dans le spectre d'énergie dans la zone inertielle. La procédure consiste d'abord à choisir un modèle pour ces deux termes de sous-maille, puis à appliquer les deux échelles de filtre afin d'évaluer l'identité de Germano pour en tirer la constante. La démarche peut donc être appliquée à n'importe quel modèle de sous-maille. En particulier, cette approche peut être appliquée au modèle de Smagorinsky et au modèle de Vreman.

Les modèles dynamiques assurent que la viscosité turbulente devient nulle en régime laminaire, permettant ainsi de résoudre les problèmes associés aux écoulements en transition [You et Moin, 2007]. Un inconvénient récurrent pour ce type d'approche est lié à l'apparition d'instabilités numériques. Ces instabilités sont généralement provoquées par l'apparition locale d'une viscosité turbulente négative. De nombreux modèles dynamiques dérivés du principe de Germano se sont succédés pour venir corriger ce type de problème. On peut, entre autres, citer les modèles Park [Park *et al.*, 2006] et l'amélioration apportée par You et Moin [You et Moin, 2007]. Le modèle de You et Moin est basé sur l'approche utilisée par Vreman [Vreman, 2004] et utilise une constante globale dans l'espace qui est recalculée à chaque pas de temps. Le modèle assure une viscosité turbulente nulle dans les régions laminares de l'écoulement et ne nécessite pas de traitement numérique particulier pour assurer la stabilité de la solution.

Les trois modèles de sous-maille algébriques présentés plus haut (Smagorinsky, WALE, Vreman) seront implémentés dans le cadre du projet. L'introduction de modèles algébriques dans un code commercial constitue une première étape logique dans l'implémentation de la technique de simulation des grandes échelles. La simplicité d'implémentation et l'étendue des publications dont ont fait l'objet cette famille de modèle constituent les critères ayant guidé ce choix.

2.3 Le traitement des conditions limites

L'adaptation des conditions limites déjà implémentées dans NIECE afin de les rendre compatibles avec la simulation des grandes échelles constituent un objectif important de ce projet de maîtrise. La condition limite de parois (condition de non-glissement) et la

condition limite de flux d'entrée ont été identifiées comme les deux conditions devant faire l'objet d'un traitement particulier.

2.3.1 Condition limite de parois

La condition d'adhérence à la paroi nécessitant une discussion particulière dans le cadre de la simulation des grandes échelles est celle qu'on associe à une condition de Dirichlet, où l'on impose ($u_i = 0$) à la paroi. L'application de cette condition de Dirichlet introduit une zone de transition où la vitesse locale à proximité de la paroi croît jusqu'à la valeur *moyenne* de l'écoulement. Cette zone de transition est appelée couche limite.

Une couche limite est divisée en deux régions distinctes :

- La **région interne** correspondant à environ 10 à 20% de son épaisseur totale. Au sein même de cette région, on distingue trois zones différentes [Versteeg et Malalasekera, 1995] :
 - La sous-couche laminaire ($y^+ < 5$), où les forces visqueuses dominent l'écoulement ;
 - Une zone de transition, où les forces visqueuses et les contraintes de Reynolds sont du même ordre ;
 - La sous-couche logarithmique ($30 < y^+ < 500$), où les contraintes de Reynolds dominant ;
- La **région externe**, où les effets de convection dominent l'écoulement.

En faisant intervenir une hypothèse de longueur de turbulence, [Schlichting, 1992], par exemple, a dérivé par analyse dimensionnelle une relation entre u^+ et y^+ à l'intérieur de la sous-couche logarithmique, où $u^+ \equiv \frac{U}{u_\tau}$ et U correspond à la vitesse de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (2.27)$$

où κ correspond à la constante de von Karman et B est une constante empirique dépendant de la rugosité de la paroi.

D'un point de vue des champs instantanés, des études de simulations directes [Hartel *et al.*, 1994; Juneja et Brasseur, 1999; Lin, 1999; Piomelli *et al.*, 1996] ont montré qu'un écoulement confiné est fortement agité très près de la paroi. Étant donné la nature très mince de la couche limite turbulente, des poches de fluide à basse vitesse migrent lentement à l'extérieur de cette dernière, puis sont violemment expulsées à la frontière entre la région

interne et externe de la couche limite. Cette expulsion est suivie par l'arrivée de fluide à grande vitesse dans la direction de la paroi, balayant les couches de fluide régulières et presque parallèles de la zone interne. Ce phénomène induit de fortes variations dans l'écoulement ce qui se traduit par une importante production et dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Ces variations produisent des fluctuations dans le terme de dissipation de sous-maille qui peuvent atteindre 300% de leur valeur moyenne [Sagaut, 2005].

Cette description de la dynamique de la couche limite turbulente montre les problèmes associés à l'application de la technique de la simulation des grandes échelles. D'abord, la région associée aux grandes fluctuations d'énergie de turbulence près de la paroi est extrêmement petite et donc difficile de capturer avec un maillage approprié à la simulation des grandes échelles. Deuxièmement, les modèles algébriques de sous-maille les plus simples sont incapables de modéliser le transfert d'énergie des échelles de sous-maille vers les grandes échelles. Les mécanismes en jeu dans l'écoulement deviennent donc incorrectement représentés. Face à cette situation, deux approches sont possibles [Moin et Jimenez, 1993] :

- Puisque les mécanismes de production peuvent échapper à la modélisation de sous-maille, il est nécessaire d'utiliser un maillage suffisamment fin pour résoudre directement la dynamique de l'écoulement près de la paroi.
- Utiliser un modèle supplémentaire, basé sur l'approche de Schlichting, pour représenter la dynamique de l'écoulement près de la paroi. Le modèle permet de spécifier le premier nœud du maillage dans la zone logarithmique de la couche limite ($20 < y^+ < 200$). Le modèle permet de définir la condition limite en calculant la vitesse et/ou le gradient de la vitesse à ce premier nœud.

NIECE possède déjà un modèle de paroi basé sur le cisaillement au mur qui est présenté dans [UNCLE, 1995]. Le modèle est basé sur la relation linéaire entre le cisaillement au mur et la composante principale de la vitesse, en assumant que l'écoulement correspond à une couche limite canonique d'une plaque plane. Dans le cadre de ce projet de maîtrise, mon travail consistera à m'assurer de la compatibilité de ce modèle de couche limite avec la technique de simulation des grandes échelles mise en place dans NIECE. En revanche, la validation de ce modèle de couche limite avec les différents modèles de sous-maille ne sera détaillé dans le cadre du mémoire.

2.3.2 Condition de flux d'entrée - l'injection de turbulence

La représentation de l'écoulement à l'entrée du domaine de calcul pose également un problème particulier lors d'une simulation des grandes échelles. En général, la description

d'une condition de flux d'entrée se limite à la connaissance de quantités statistiques comme le débit moyen, le champ de vitesse moyen et les profils d'énergie cinétique. Dans le cas des approches moyennées (RANS), ces données statistiques sont suffisantes. En revanche, pour les simulations LES ou DNS la connaissance des champs turbulents instantanés à l'entrée du domaine est nécessaire. Puisqu'en pratique ces quantités sont difficilement accessibles, la spécification de ces champs instantanés est approximée à l'aide de techniques d'injection de turbulence. L'expérience accumulée [Sagaut, 2005] a permis de démontrer que l'énergie cinétique et la cohérence des fluctuations du champ de vitesse doivent être prises en compte afin de modéliser correctement la condition d'entrée.

Cette section passe en revue certaines méthodes de génération de turbulence en comparant leur coût de calcul, l'information nécessaire à fournir pour leur mise en œuvre et la qualité des champs turbulents qu'elles génèrent.

Écoulement laminaire perturbé

Cette technique fait exception aux autres méthodes, car elle ne nécessite pas de traitement particulier. La méthode propose d'initialiser une zone d'entrée laminaire où l'écoulement transite vers un régime turbulent. Pour cette méthode, un signal aléatoire est superposé au profil d'entrée laminaire afin de faciliter la transition. Cette technique a déjà été utilisée avec succès pour certains problèmes [Grinstein *et al.*, 1996; Rai et Moin, 1993], mais n'est évidemment pas applicable dans le cas où l'ensemble du domaine de calcul est turbulent.

Méthode de recyclage

La façon la plus précise de spécifier les fluctuations turbulentes pour une simulation LES ou DNS consiste à simuler un modèle précurseur dont le rôle est de fournir les conditions limites d'entrée pour la simulation principale. Dans la situation où l'écoulement turbulent est pleinement développé à l'entrée du domaine de la simulation principale (ce qui est généralement le cas pour des écoulements internes), des conditions de périodicité dans la direction principale de l'écoulement peuvent être utilisées pour la simulation précurseur. L'information sur les champs turbulents sur un plan de la simulation précurseur est ensuite recyclée à chaque pas de temps comme condition d'entrée pour la simulation principale. La figure 2.4 illustre la méthode : Cette méthode est très coûteuse d'un point de vue numérique puisqu'elle nécessite la réalisation d'une simulation DNS précurseur avant la simulation principale. De plus, elle nécessite d'enregistrer des quantités considérables d'informations qui seront utilisées pour la génération de la condition d'entrée de la simulation principale. Son application dans le cas général pour NIECE semble difficilement réalisable.

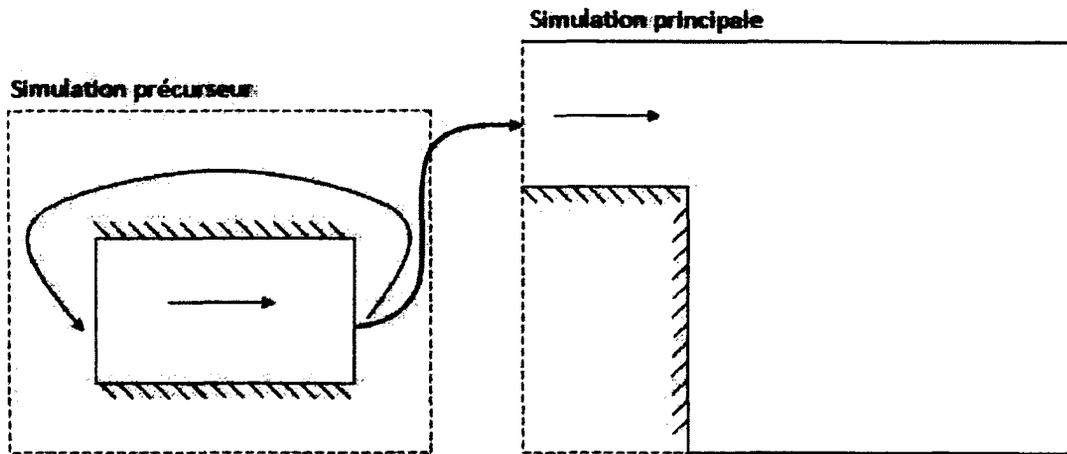


Figure 2.4 Méthode de recyclage

Méthodes de génération synthétique de turbulence

Ces méthodes sont toutes basées sur une forme ou une autre de procédures stochastiques qui utilisent un générateur de nombres aléatoires pour construire un champ de vitesse instantanée qui ressemble à de la turbulence. Ces méthodes sont basées sur l'hypothèse qu'un champ turbulent peut être approximé en reproduisant une série de corrélations simples ou doubles à partir des composantes du champ de vitesse. Ces techniques permettent de reproduire différentes propriétés de l'écoulement, incluant les profils de vitesse moyen, l'énergie cinétique dans le plan d'injection, le tenseur de Reynolds, les corrélations doubles croisées en temps et en espace, etc. Cependant, il est important de rappeler que ces méthodes ne représentent qu'une approximation de la *vraie* turbulence. De plus, les champs générés dans le plan d'injection ne satisfont pas les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Le signal synthétique généré passe donc par une phase de transition immédiatement après avoir été injecté dans le domaine de calcul afin de se transformer vers un état plus réaliste.

Méthode aléatoire

Cette technique consiste à générer une série de nombres aléatoires indépendants r_i , obtenus à partir d'une distribution normale $\mathcal{N}(0, 1)$, de moyenne $\mu = 0$ et de variance $\sigma = 1$. L'échelle de cette série de nombres aléatoires est ensuite ajustée afin d'obtenir la bonne quantité d'énergie cinétique turbulente k . Ces fluctuations sont finalement superposées au profil moyen \mathbf{U} . Le champ de vitesse total s'écrit alors :

$$u_i = U_i + r_i \sqrt{\frac{2}{3}k} \quad (2.28)$$

La méthode permet de générer un champ de vitesse possédant le bon profil moyen et la bonne quantité d'énergie cinétique turbulente. En revanche, tous les termes de corrélations croisés du champ de vitesse fluctuants (termes croisés du tenseur de Reynolds) restent nuls.

Une amélioration à cette méthode aléatoire a été proposée par [Lund *et al.*, 1998]. Dans le cas où le tenseur de Reynolds R_{ij} est disponible (à partir d'une simulation RANS, par exemple), la décomposition de Cholesky a_{ij} peut être utilisée pour reconstruire un signal reproduisant les termes de corrélations croisés de ce tenseur :

$$u_i = U_i + r_i a_{ij} \quad (2.29)$$

où a_{ij} s'écrit :

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{R_{11}} & 0 & 0 \\ R_{21}/a_{11} & \sqrt{R_{22} - a_{21}^2} & 0 \\ R_{31}/a_{11} & (R_{32} - a_{21}a_{31})/a_{22} & \sqrt{R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Cette méthode aléatoire améliorée génère tout de même des fluctuations possédant la même quantité d'énergie sur l'ensemble du spectre. La cascade d'énergie, typique d'une *vraie* turbulence, ne peut donc pas être reproduite correctement puisque l'énergie contenue dans les grosses structures est insuffisante, alors que celle contenue dans les petites structures est trop importante (figure 2.5). Dans cette optique, les méthodes basées exclusivement sur un générateur de fluctuations aléatoires sont celles qui fournissent des résultats les moins satisfaisants puisque ces dernières génèrent des modes incohérents à haute fréquence qui sont rapidement dissipés au cours de la simulation [Jiang et Lai, 2009].

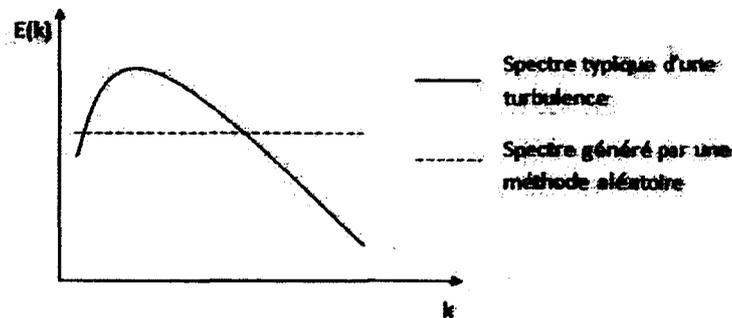


Figure 2.5 Spectre typique d'une turbulence vs spectre d'une méthode aléatoire

Méthode de filtre digital

Une procédure basée sur le concept de filtre digital a été proposée par [Klein *et al.*, 2003]. Cette procédure permet de résoudre un problème de la méthode aléatoire lié à la distribution du spectre d'énergie entre les petites et les grandes structures turbulentes. En 1-D, le champ de vitesse $u'(m)$ au point m est défini par la convolution (ou filtre digital non-récurrent) :

$$u'(m) = \sum_{n=-N}^N b_n r(m+n) \quad (2.31)$$

où b_n correspond aux coefficients du filtre, N est connecté au support du filtre et $r(m+n)$ est un nombre aléatoire généré au point $(m+n)$ à partir d'une distribution normale $\mathcal{N}(0, 1)$. À partir de l'équation 2.31, on en déduit que la corrélation double entre les points m et $m+k$ s'écrit :

$$\langle u'(m)u'(m+k) \rangle = \sum_{n=-N+k}^N b_n b_{n-k} \quad (2.32)$$

Afin de reproduire des fluctuations reproduisant la corrélation double souhaitée $\langle u'(m)u'(m+k) \rangle$, les coefficients de filtres b_n sont calculés en inversant l'équation 2.32. La généralisation de la méthode en 3-D est présentée dans [Klein *et al.*, 2003].

Bien que la méthode permette de reproduire correctement le tenseur des corrélations doubles, ce dernier est rarement disponible pour une simulation donnée. Dans leur article, Klein *et al* supposent que ce tenseur prend la forme d'une Gaussienne qui dépend d'une échelle intégrales unique. En plus, la procédure d'inversion de l'équation 2.32 permettant d'obtenir les coefficients b_n est coûteuse et difficile à mettre en œuvre dans le cas général.

Méthode des vortex

La méthode des vortex [Sergent, 2002] est basée sur la forme Lagrangienne de l'évolution en 2-D de l'équation de vorticité de la loi de Biot-Savard [Bailly et Comte-Bellot, 2003]. La discrétisation de cette équation est réalisée en introduisant une certaine quantité de particules ou vortex dans un plan d'injection. Ces vortex sont convectés de manière aléatoire sur ce plan et transportent l'information sur le champ de vorticité. La circulation Γ_i associé à un vortex i , en assumant une distribution spatiale η est donnée par :

$$\Gamma_i(\mathbf{x}) = 4 \sqrt{\frac{\pi A k(\mathbf{x})}{3N[2\ln(3) - 3\ln(2)]}} \quad (2.33)$$

avec :

$$\eta(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} (2e^{-|\mathbf{x}|^2/2\sigma^2} - 1) 2e^{-|\mathbf{x}|^2/2\sigma^2} \quad (2.34)$$

où N est le nombre de vortex, A correspond à l'aire du plan d'injection et k correspond à l'énergie cinétique turbulente. Le résultat de cette discrétisation pour le champ de vitesse est donné par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \frac{((\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) \times \mathbf{z})(1 - e^{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2/2\sigma^2})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \quad (2.35)$$

où le vecteur unitaire \mathbf{z} pointe dans la direction principale de l'écoulement. Le paramètre σ fournit une relation entre les profils moyens d'énergie cinétique k et de taux dissipation ϵ :

$$\sigma = \frac{ck^{3/2}}{2\epsilon} \text{ avec } c = 0.16 \quad (2.36)$$

La méthode permet de générer des fluctuations cohérentes à la fois dans l'espace et dans le temps. En plus, les informations nécessaires pour mettre en œuvre la méthode sont relativement simples à déterminer. En revanche, cette technique ne permet pas d'utiliser la décomposition de Cholesky pour récupérer les termes croisés du tenseur de Reynolds. Son implémentation dans le cas général pour un code parallèle n'est pas triviale puisque chaque vortex doit connaître l'information sur l'ensemble des vortex dans le plan d'injection. Finalement, la méthode nécessite un traitement particulier des conditions limites (périodicité, condition de parois) croisant le plan d'injection.

Méthode de tourbillons synthétiques

Cette méthode [Jarrin *et al.*, 2006] est basée sur le concept que la turbulence est composée d'une superposition de structures cohérentes. Considérons le cas 1-D, où un signal turbulent doit être initialisé sur un ligne d'injection définie sur l'intervalle $[a, b]$. Soit $f_\sigma(x)$ la fonction de forme d'un *spot* de turbulence, où l'intervalle $[-\sigma, \sigma]$ correspond au support du *spot*. Cette fonction de forme doit satisfaire la condition de normalisation :

$$\frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} f_\sigma^2(x) dx = 1 \quad (2.37)$$

où Δ correspond au support physique du *spot* du turbulence. Chaque *spot* de turbulence i possède une position x_i tirée de façon aléatoire et un signe ϵ_i . La contribution $u^{(i)}(x)$ d'un *spot* de turbulence au champ de fluctuation de vitesse est donnée par :

$$u^{(i)}(x) = \epsilon_i f_\sigma(x - x_i) \quad (2.38)$$

En conséquence, la contribution de N spot s'écrit :

$$u'(x) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i f_\sigma(x - x_i) \quad (2.39)$$

La généralisation de la méthode en 3-D est détaillée dans [Jarrin, 2008]. Le champ de vitesse final est reconstruit en utilisant la décomposition de Cholesky afin que ce dernier satisfasse les valeurs d'un tenseur de Reynolds préalablement obtenu :

$$u_i = U_i + a_{ij} u'_j \quad (2.40)$$

Une fois la fonction f_σ déterminée, cette méthode devient très simple à implémenter et permet de calculer les coefficients du tenseur double de corrélation :

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} f_\sigma(\mathbf{x}) f_\sigma(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \quad (2.41)$$

Un des inconvénients de la méthode provient de sa sensibilité au paramètre σ , servant à normaliser la distance $(x - x_i)$. Une méthode pour calibrer ce paramètre a été proposée dans [Jarrin *et al.*, 2009] et validée pour le cas du canal plan. Cependant, ce paramètre reste difficile à déterminer dans le cas général.

Méthode spectrale

Une méthode classique pour générer un signal turbulent cohérent dans l'espace et dans le temps consiste à initialiser un champ de vitesse en 3-D en utilisant sa décomposition dans l'espace de Fourier :

$$\mathbf{u}' = \sum_{\mathbf{k}} \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.42)$$

où \mathbf{k} correspond au vecteur d'onde en 3-D. Chaque coefficient $\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}$ est calculé à partir d'un spectre d'énergie isotrope $E(\mathbf{k})$ et une phase θ déterminée aléatoirement sur l'intervalle $[0, 2\pi]$:

$$\mathbf{u}' = \sum_{\mathbf{k}} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \theta)} \quad (2.43)$$

L'adaptation de cette méthode pour générer des conditions limites de flux d'entrée a été proposée par [Lee *et al.*, 1992]. La technique consiste essentiellement à générer un champ de vitesse en trois dimensions sur un domaine virtuel, puis à transformer une dimension de l'espace (correspondant à la direction principale de l'écoulement) en une dimension temporelle. L'implémentation de cette technique nécessite la mise en place d'un

algorithme de transformée de Fourier inverse. Cette implémentation dans le cas général est peu pratique (particulièrement dans le cas d'un code parallèle), cette méthode d'injection de turbulence ne sera donc pas discutée davantage.

Méthode de décomposition en séries de Fourier

La méthode de [Smirnov *et al.*, 2001] propose de décomposer un champ de vitesse turbulent en une série d'harmoniques de Fourier. La méthode originale nécessite la diagonalisation explicite du tenseur de Reynolds R_{ij} , mais ne propose pas de méthodologie pour y arriver. [Batten *et al.*, 2004] modifièrent la formulation proposée par [Smirnov *et al.*, 2001] de façon à ce que le champ de vitesse puisse être calculé directement à partir de paramètres simples comme le profil de vitesse moyen U_i , le tenseur de Reynolds R_{ij} , le taux de dissipation ϵ et l'énergie cinétique moyenne k . La formulation du champ turbulent s'écrit :

$$u'_i(x_1, x_2, x_3, t) = U_i + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N [p_i^n \cos(\hat{d}_j^n \hat{x}_j + \omega^n \hat{t}) + q_i^n \sin(\hat{d}_j^n \hat{x}_j + \omega^n \hat{t})] \quad (2.44)$$

où $\hat{x}_j = 2\pi x_j / L_b$ et $\hat{t} = 2\pi t / \tau_b$ sont des coordonnées spatiales et temporelles normalisées par $L_b = k^{3/2} / \epsilon$ et $\tau_b = k / \epsilon$ et x_j correspond aux coordonnées physiques du plan d'injection. Les fréquences ω^n sont tirées de façon aléatoire à partir d'une distribution normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Les amplitudes p_i^n et q_i^n sont données par :

$$p_i^n = \gamma^n \times d_i^n, \quad q_i^n = \xi^n \times d_i^n \quad (2.45)$$

où γ^n et ξ^n sont obtenus aléatoirement à partir d'une distribution normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\hat{d}_j^n = d_j^n V_b / c^n$ correspondent à des nombres d'onde modifiés obtenus en multipliant les nombres d'onde d_j^n par le ratio de l'échelle de vitesse $V_b = L_b / \tau_b$ sur c^n , où :

$$c^n = \sqrt{\frac{3}{2} R_{lm} \frac{d_l^n d_m^n}{d_k^n d_k^n}} \quad (2.46)$$

où les nombres d'onde d_i^n sont déterminés à partir d'une distribution normale $\mathcal{N}(0, 1/2)$.

Bien que la méthode soit relativement coûteuse à mettre en œuvre, cette dernière demeure intéressante, car elle peut être implémentée dans le cas général et pourrait s'intégrer relativement aisément dans l'architecture actuelle de NIECE.

Cette revue des différentes technique de génération de turbulence a permis d'identifier le meilleur compromis pouvant être réaliser afin de conserver les caractéristiques les plus importantes d'une turbulence réelle dans le contexte d'un solveur général d'applications

industrielles. Les méthodes d'écoulement laminaire perturbé et les méthodes de recyclage offrent la représentation la plus réaliste d'une turbulence. En revanche, ces méthodes sont difficilement applicables dans le cas général ou nécessitent la résolution d'une simulation précurseur coûteuse en temps de calcul et le stockage des résultats instantanés de la simulation. À l'opposé du spectre des méthodes, la technique de génération aléatoire offre une solution rapide et peu coûteuse pour produire un signal qui s'apparente à une turbulence, car elle ne nécessite que la mise en place d'un générateur de nombres aléatoires. En revanche la méthode reste fortement limitée puisqu'elle ne permet que de spécifier la quantité d'énergie cinétique turbulente au niveau du plan d'injection. Cette méthode produit donc un signal fortement décorrélé qui se dissipe rapidement dans le domaine de calcul. Les autres méthodes proposent différentes façons d'obtenir un signal corrélé dans l'espace et dans le temps qui possède les propriétés d'une turbulence réelle (quantité d'énergie cinétique, profil du tenseur de Reynolds, longueur intégrale de corrélation).

La section suivante détaille la formulation mixte volumes finis éléments finis utilisée dans NIECE permettant de résoudre les équations incompressibles de Navier-Stokes dans un contexte général d'applications industrielles. La méthode d'injection de turbulence à mettre en œuvre dans le solveur doit donc être facilement compatible avec ce type de formulation. La méthode des vortex, la méthode des tourbillons synthétiques et la méthode de décomposition en série de Fourier constituent trois formulations relativement simples d'implémentation dans le cas général et ne nécessitent pas le calcul de transformée de Fourier. Finalement, les paramètres de calcul nécessaires pour la mise en œuvre de ces méthodes sont compatibles avec les caractéristiques classiques (k , ϵ) des modèles de fermeture de type RANS. Au final, la méthode des tourbillons synthétiques de Jarrin a été sélectionnée de part sa nouveauté et sa simplicité d'intégration dans l'architecture du solveur.

CHAPITRE 3

MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS

Ce chapitre introduit les méthodes numériques nécessaires en mécanique des fluides pour simuler les équations de Navier-Stokes. On y détaille la discrétisation des différents termes ainsi que l'implémentation de nouveaux schémas en temps et en espace mieux adaptés à la simulation des grandes échelles. Une analyse comparative des entre les nouveaux schémas et ceux déjà en place est également présentée. Une étude sur la stabilité numérique des différentes formulation, ainsi que leur diffusion et dispersion numérique est aussi incluse. Le chapitre se conclut avec la présentation du cas académique de la convection d'un scalaire passif dans un domaine périodique, confirmant l'implémentation adéquate des nouveaux schémas de discrétisation.

La résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles, pour un fluide monophasique, peut se faire à l'aide de différentes méthodes. NIECE est un solveur parallèle de dynamique des fluides utilisant une formulation mixte volumes éléments finis. [Schneider et Raw, 1987a,b]. Cette technique permet de traiter des maillages non-structurés à géométries complexes grâce à l'approche par éléments finis en plus combiner les propriétés de conservation qu'on retrouve intrinsèquement avec les méthodes par volumes finis [CFX-TASC, 2002]. Le solveur est basé sur un algorithme de résolution prédicteur-correcteur présenté dans [Ferziger et Peric, 1996]. L'approche consiste à découpler le terme de pression dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement et d'introduire une équation de Poisson pour résoudre le champ de pression afin d'obtenir un champ de vitesse à divergence nulle. Les hypothèses supportant cet algorithme de résolution ne permettent donc de traiter que des écoulements incompressibles ou faiblement compressibles.

La section 3.2 présente l'algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes implémenté dans NIECE. La section 3.1 est consacrée à une brève description de l'approche par volumes éléments finis et à la discrétisation des différents termes dans les équations de Navier-Stokes. Finalement, la section 3.3.2 présente quelques cas de validation qui ont été développés afin de valider l'implémentation des nouveaux schémas de discrétisation.

3.1 Approche mixte volumes éléments finis

Dans le cadre de ce projet de maîtrise, nous nous intéresserons à la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles pour un fluide monophasique auxquelles est appliqué un filtre spatial. NIECE utilise une approche par volumes éléments finis, nécessitant l'écriture des équations de Navier-Stokes sur un volume de contrôle V . L'imposition de la continuité des flux sur les faces des volumes de contrôle assure la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. L'intégration des équations (2.8) et (2.9) sur un volume de contrôle V donne :

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV = 0 \quad (3.1)$$

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) dV = - \int_V \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dV \quad (3.2)$$

où $\nu_e = \nu + \nu_t$ s'appelle la viscosité effective.

Puisque les volumes de contrôle demeurent inchangés en fonction du temps, il est possible d'appliquer le théorème de la divergence aux équations (3.1) et (3.2) :

$$\int_S u_i n_i dS = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V u_i dV \right) + \int_S u_i u_j n_j dS = - \int_V \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} dV + \int_S \nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j dS \quad (3.4)$$

où n_j est le vecteur normal à la face du volume de contrôle et S correspond au contour du volume de contrôle.

La figure 3.1 représente l'arrangement décalé entre les éléments et les volumes de contrôle qui est implémenté dans NIECE. Tel que présenté sur la figure, l'intersection des volumes de contrôle (VC) avec les différents éléments permet de subdiviser les VC en différents quadrants, appelés sous-volumes de contrôle. La contribution des différents flux sur un VC est faite aux différents points d'intégration (ip) indiqués sur le schéma. L'arrangement décalé entre les éléments et les volumes de contrôle permet l'utilisation d'une grille co-localisée pour évaluer le champ de pression et les champs de vitesse [Schneider et Raw, 1987a]. Un agrandissement de la figure précédente sur un élément 2-D (figure 3.2) permet de mieux visualiser la position des points d'intégration autour d'un volume de contrôle et la subdivision des éléments en sous-volume de contrôle. En trois dimensions, un élément hexaédrique est divisé en 8 sous-volumes de contrôle et contient 12 surfaces d'intégration dont chacune est supportées par un point d'intégration. La forme discrète des équations

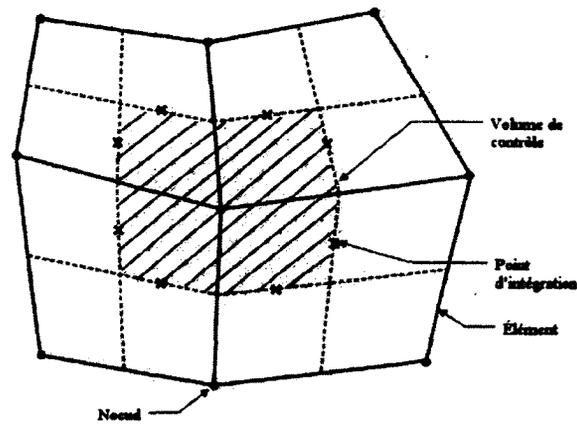


Figure 3.1 Arrangement décalé entre les volumes de contrôle et les éléments

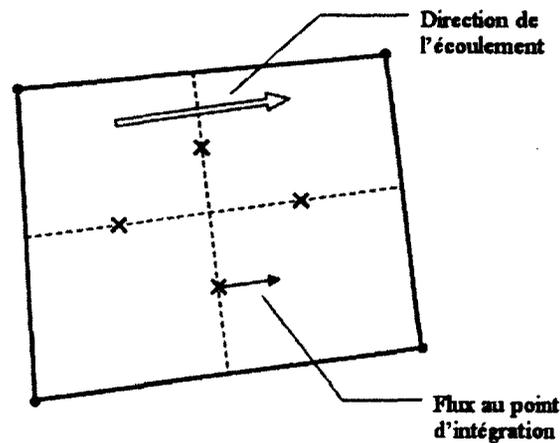


Figure 3.2 Aggrandissement sur un élément de la structure décalée de la méthode volumes éléments finis

(3.3) et (3.4) s'écrit :

$$\sum_{ip} (u_i \Delta n_i)_{ip} \quad (3.5)$$

$$V \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \sum_{ip} \dot{m}_{ip} (u_i)_{ip} = -V \left(\frac{1}{\rho} p_n \right) + \sum_{ip} \left(\nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Delta n_j \right)_{ip} \quad (3.6)$$

où : $\dot{m}_{ip} = (u_j \Delta n_j)_{ip}^n$.

V correspond au volume du volume contrôle, l'indice (ip) fait référence au point d'intégration, la sommation se fait sur l'ensemble des points d'intégration bordant le (VC), Δn_j est la forme discrète du vecteur normal à la face portée par les points d'intégration, p_n correspond à la valeur de pression au noeud solutionnée à l'itération précédente et l'exposant n signifie la valeur à l'itération précédente.

30 CHAPITRE 3. MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS

Dans la méthode des volumes éléments finis, l'évaluation du gradient de vitesse le calcul du vecteur normal à la face d'un volume de contrôle dans les équations de transport s'effectue à l'aide des fonctions de forme de l'élément choisi. La définition de ces fonctions de forme et les dérivations nécessaires pour l'obtention des différents termes du gradient de vitesse et de Δn_j est introduit à l'annexe A.

Les prochaines sections détaillent la procédure de discrétisation utilisée pour chacun des termes des équations 3.5 et 3.6. On y introduira le formalisme des fonctions de forme pour la discrétisation du terme de diffusion et du terme de convection.

3.1.1 Schéma temporel

Par défaut, le schéma d'intégration temporel disponible dans NIECE est celui d'Euler implicite, où :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t f_i(u_i^{n+1}) + O(\Delta t) \quad (3.7)$$

où Δt correspond au pas temps entre deux itérations. Ce schéma a été mis en place, car il est entièrement implicite et ne génère donc pas de limitation sur la taille du pas de temps puisqu'il est inconditionnellement stable.

Afin d'améliorer la précision du schéma d'intégration temporel, une autre approche similaire de la famille des méthodes d'Adams-Moulton a été implémentée [Payre, 2010].

Le schéma d'intégration temporel de Crank-Nicolson :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left(f_i(u_i^{n+1}) + f_i(u_i^n) \right) + O(\Delta t^2) \quad (3.8)$$

Ce schéma de second ordre requiert le calcul explicite des fonctions $f_i(u_i^n)$, $f_i(u_i^{n+1})$ une fois que l'assemblage des matrices des équations de conservation de la quantité de mouvement a été complété.

Une expansion en série de Taylor dans l'espace et dans le temps de l'algorithme de résolution prédicteur-correcteur des équations des Navier-Stokes implémentée dans NIECE a permis de démontrer qu'une erreur proportionnelle à Δt^2 est introduite dans les solutions en raison du décalage d'un pas de temps entre la résolution du champ de vitesse et celle du champ de pression. En conséquence, il n'existe aucun intérêt à monter davantage en ordre de précision dans le schéma de discrétisation temporelle avec un schéma prédicteur / correcteur.

3.1.2 Opérateur de diffusion

Pour des raisons de simplicité et de temps de calcul, NIECE approxime la forme différentielle du terme de diffusion D par l'expression suivante :

$$D = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \approx \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.9)$$

L'erreur R introduite par la simplification de ce terme s'évalue en calculant la différence entre le terme de diffusion exact et l'expression (3.9). On tiendra compte de l'hypothèse d'incompressibilité $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ pour évaluer cette erreur.

$$R = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.10)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_e \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.11)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_e \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.12)$$

$$= \nu_e \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial \nu_e}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.13)$$

$$= \nu_e \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right] + \left(\frac{\partial \nu_e}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.14)$$

$$= \left(\frac{\partial \nu_e}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.15)$$

NIECE néglige donc les termes qui dépendent de la variation spatiale de la viscosité effective. En conséquence, dans la situation où on s'intéresse à un écoulement laminaire, $\nu_e = \nu = \text{const}$ et l'erreur devient nulle. Cette approximation est communément faite dans plusieurs solveurs incompressibles.

En prenant l'intégral de volume de l'équation (3.9) et en appliquant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\int_V D dV \approx \int_S \nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dS \quad (3.16)$$

Dans sa forme discrète, on peut finalement écrire :

$$\int_V D dV \approx \sum_{ip} \nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{ip} \Delta n_j \quad (3.17)$$

Tel que mentionné dans la section précédente, les fonctions de forme des éléments sont utilisées pour évaluer les termes du gradient de vitesse. On peut donc utiliser le formalisme

des fonctions de forme pour discrétiser les dérivées contenues dans le terme de diffusion. Par exemple, si on considère la dérivée dans la direction x à un point d'intégration, on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{ip} = \sum_n \frac{\partial N_n}{\partial x} \Big|_{ip} \phi_n \quad (3.18)$$

où la sommation se fait sur toutes les fonctions de forme de l'élément considéré. La dérivée des fonctions de forme est exprimée à partir des métriques servant à passer de l'élément local à l'élément cartésien orthogonal de référence via la transformation matricielle de l'inverse du Jacobien.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial s} \\ \frac{\partial N}{\partial t} \\ \frac{\partial N}{\partial u} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Le détail de ces transformations matricielles est présenté à l'annexe A.

3.1.3 Opérateur de convection

La discrétisation de l'opérateur de convection est d'une importance cruciale dans l'apparition de la turbulence dans les solutions des équations de Navier-Stokes. En fait, l'apparition de fluctuations aléatoires dans les champs de vitesse et les champs de pression s'explique par la nature non linéaire de ce terme [Bailly et Comte-Bellot, 2003].

Le traitement de l'opérateur de convection peut être approché de différentes manières. Nous présentons ici le schéma amont de premier ordre, implémenté par défaut dans le solveur, ainsi que le schéma centré de second ordre qui a été mis en place et validé dans le cadre de ce projet de maîtrise.

Schéma amont de premier ordre

Par défaut, un schéma amont de premier ordre est utilisé dans NIECE où :

$$\phi_{ip} = \phi_{up} \quad (3.20)$$

La variable ϕ représente la quantité convectée, c'est-à-dire les trois composantes de la vitesse dans le cas des équations de la conservation de la quantité de mouvement. Le schéma consiste à supposer que la quantité ϕ_{ip} au point d'intégration est égale à cette quantité au noeud ϕ_{up} en amont (upwind) de la vitesse de convection (figure 3.3).

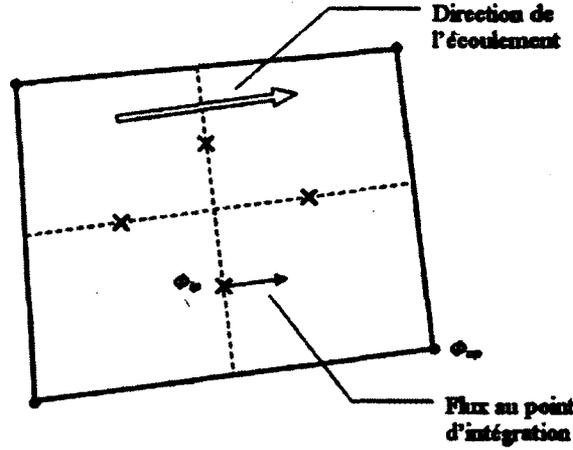


Figure 3.3 Représentation du schéma amont de premier ordre

Schéma centré de second ordre

Le schéma centré consiste à évaluer la quantité ϕ_{ip} en utilisant les fonctions de forme de l'élément contenant le point d'intégration. On obtient ainsi :

$$\phi_{ip} = \sum_m N_m(s_{ip}, t_{ip}, u_{ip}) \phi_m \quad (3.21)$$

où, $N_m(s_{ip}, t_{ip}, u_{ip})$ correspond aux différents coefficients des fonctions de forme de l'élément évalués à la position du point d'intégration.

Afin de faciliter la convergence des solutions en régime permanent, l'implémentation du schéma est réalisé de façon semi-implicite où :

$$\phi_{ip}^{n+1} = \alpha(\phi_{up}^{n+1}) + \left[\left(\sum_m N_m(s_{ip}, t_{ip}, u_{ip}) \phi_m \right)^n - \alpha(\phi_{up}^n) \right] \quad (3.22)$$

où l'exposant n représente l'itération précédente et l'exposant $n+1$ correspond à l'itération actuelle. Le paramètre α est un facteur de relaxation choisie entre 0 et 1, servant à expliciter la formulation du terme de convection.

Dans le cadre d'une solution en régime permanent, où l'on impose $\alpha = 1$, on remarque que la quantités $\phi_{up}^{n+1} - \phi_{up}^n = 0$ à convergence. On retrouve alors le schéma centré original.

La littérature contient plusieurs exemples de simulations aux grandes échelles ayant été réalisées avec succès avec un schéma centré d'ordre deux [Addad *et al.*, 2008; Dejoan et Leschziner, 2004; Mahesh *et al.*, 2004]. Le schéma centré possède des propriétés intéres-

santes pour la LES du fait de sa nature intrinsèquement non diffusive, permettant d'éviter de filtrer les petites structures tourbillonnaires dans l'écoulement [Addad *et al.*, 2008]. En conséquence, le schéma centré a été retenu lors de la validation des modèles de sous-mailles sur des applications d'écoulements turbulents.

3.2 Algorithme de résolution

NIECE utilise un algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes basé sur une approche prédicteur-correcteur. Considérons les équations (3.5) et (3.6) décrivant le mouvement d'un fluide newtonien, incompressible. En décomposant le champ de vitesse u_i en un champ prédiction u_i^* et un champ correction u_i' , on obtient :

$$u_i = u_i^* + u_i' \quad (3.23)$$

En substituant l'expression de u_i , on peut réécrire l'équation (2.9) sous sa forme discrétisée :

$$\frac{(u_i^* + u_i') - u_i^n}{\Delta t} + A(u_i^n, u_i^*) = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x_j} + D(u_i^n, u_i^*) \quad (3.24)$$

où $A(u_i^n, u_i^*)$ correspond à l'opérateur discret de convection, $D(u_i^n, u_i^*)$ correspond à l'opérateur discret de diffusion, $\frac{\delta}{\delta x_i}$ est l'opérateur discret de dérivée. L'exposant n fait référence aux valeurs des champs au pas de temps précédent. L'équation (3.24) peut être séparée en une équation de prédiction et une équation de correction :

$$\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} + A(u_i^n, u_i^*) = D(u_i^n, u_i^*) \quad (3.25)$$

$$\frac{u_i'}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x_j} \quad (3.26)$$

En faisant intervenir l'équation de conservation de la masse sous sa forme discrète, on peut écrire :

$$\frac{\delta u_i}{\delta x_i} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\delta(u_i^* + u_i')}{\delta x_i} = 0 \quad (3.27)$$

En substituant la relation (3.26) dans l'équation précédente :

$$\frac{\delta(u_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x_j})}{\delta x_i} = 0 \quad (3.28)$$

En réarrangeant, on obtient une équation de Poisson qui peut être résolue pour obtenir le champ de pression :

$$\frac{\delta}{\delta x_j} \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x_j} = \frac{\delta u_i^*}{\delta x_i} \quad (3.29)$$

La procédure de résolution consiste à construire le système matriciel des trois composantes de la vitesse permettant de résoudre l'équation (3.25) pour u_i^* . Une fois u_i^* résolu, on assemble le système d'équations de la relation (3.29) et on solutionne pour obtenir p . Finalement, la combinaison de l'équation (3.26) et (3.23) est utilisée pour corriger le champ de vitesse.

3.3 Analyse des schémas de convection et d'intégration temporelle dans NIECE

NIECE est un solveur conçu pour supporter des géométries complexes en trois dimensions sur des maillages non-structurés. La formulation volumes éléments finis utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes rend délicate l'implémentation de schémas de discrétisation supérieurs à l'ordre deux. Néanmoins, il s'avère important, dans le cadre de la simulation des grandes échelles, d'utiliser des schémas de discrétisation précis afin de capturer la partie instantanée des champs $u_i'(\mathbf{x}), p'(\mathbf{x})$.

On s'intéressera maintenant à caractériser les performances des différents schémas numériques de convection et d'intégration temporelle présentée dans les sections précédentes. Cette étude théorique et pratique des différentes méthodes de discrétisation s'appuiera sur l'équation de convection monodimensionnelle en régime transitoire.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.30)$$

où u représente la quantité convectée et c correspond à la vitesse de convection. L'équation 3.30 est retenue, car elle représente la description la plus simple pour le transport d'une quantité scalaire.

L'objectif de cette étude consiste essentiellement à comparer la qualité des schémas implémentés par défaut dans le code, c'est-à-dire le schéma amont de premier ordre (UDS Upwind Differencing Scheme) en espace et Euler en temps, aux nouveaux schémas de discrétisation mis en place dans le cadre de ce projet recherche, c'est-à-dire le schéma centré de second ordre (CDS Central Difference Scheme) en espace et Crank-Nicolson en temps. On s'intéressera uniquement à la discrétisation de l'équation de convection sur un domaine

périodique. L'analyse des conditions limites ne sera pas abordée ce qui permettra d'éviter de surcharger la discussion.

L'analyse de stabilité des schémas sera réalisée en utilisant l'approche développée par von Neumann. Suivant la même méthode, une étude comparative de la dissipation et de la dispersion numérique des différents schémas sera présentée. On détaillera ensuite les résultats du cas académique de la convection d'une gaussienne d'un scalaire passif sur un domaine périodique afin de mesurer numériquement l'ordre de convergence de l'erreur des différents schémas.

3.3.1 Stabilité des schémas de discrétisation

On considère maintenant que l'équation (3.30) est résolue sur une domaine périodique de longueur unitaire de N éléments. On peut donc écrire la condition limite suivante :

$$u(x + 1, t) = u(x, t) \quad \forall t \quad (3.31)$$

Considérons le domaine périodique $\Omega = (0, 1)$, discrétisé de manière régulière en introduisant un pas d'espace $h = 1/N$ et un pas de temps Δt strictement positif. Les noeuds du maillage en temps et en espace s'écrivent donc (x_j, t^n) . Pour simplifier les notations, on notera la solution u au point x_j et au temps t^n : $u(x_j, t^n) = u_j^n$. De façon analogue, la solution numérique donnée par le système discrétisé s'écrit : U_j^n .

La solution discrétisée de l'équation (3.31) s'écrit donc :

$$U_0^n = U_N^n \quad \forall n \quad (3.32)$$

Les fonctions u et U sont périodiques et peuvent donc s'écrire sous forme de séries de Fourier au temps $t = t^n = n\Delta t$.

$$U_j^n = \sum_p \hat{U}^n(p) e^{2i\pi p x_j} \quad (3.33)$$

En introduisant le nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et la longueur d'onde $\lambda = \frac{1}{p}$, on peut réécrire l'équation (3.33) :

$$U_j^n = \sum_k \hat{U}^n(k) e^{ikx_j} \quad (3.34)$$

On peut écrire une transformation semblable pour la variable continue u . Un effort sera demandé au lecteur afin de distinguer le symbole k pour le nombre d'onde et k qui représente l'énergie cinétique turbulente.

Solution exacte

La solution de l'équation (3.30) est donnée par la translation de la condition initiale $u(x, t = 0)$ d'une distance ct . On a donc :

$$u(x, t) = u(x - ct, 0) \quad (3.35)$$

D'après [Hirsch, 1988], on peut étudier la solution harmonique par harmonique en faisant abstraction du signe de sommation dans l'équation (3.33). En injectant la forme continue de l'équation (3.34) dans (3.30), on peut écrire pour tout k :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + ikc\hat{u} = 0 \quad (3.36)$$

La solution de 3.36 s'écrit : $\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0)e^{-ikct}$.

En définissant le coefficient d'amplification $G(k)$ comme le rapport de la solution au temps $t + \Delta t$ sur la solution au temps t , on peut écrire :

$$G(k) \equiv \frac{\hat{u}(k, t + \Delta t)}{\hat{u}(k, t)} = e^{-ikc\Delta t} \quad (3.37)$$

Ce rapport d'amplification correspond à une convection parfaite de la quantité u à la vitesse c .

Discretisation avec le schéma UDS et Euler implicite

Considérons maintenant la discretisation de l'équation (3.30) avec le schéma décalé amont implicite en espace et le schéma d'Euler implicite en temps.

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x} \left(U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} \right) = 0 \quad (3.38)$$

En remplaçant U_j^n par son expression dans l'espace de Fourier on obtient, pour tout k :

$$\frac{\hat{U}^{n+1} e^{ikx_j} - \hat{U}^n e^{ikx_j}}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x} \left(\hat{U}^{n+1} e^{ikx_j} - \hat{U}^{n+1} e^{ik(x_j - \Delta x)} \right) = 0 \quad (3.39)$$

38 CHAPITRE 3. MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS

Après simplification et en regroupant les termes on peut écrire l'expression du coefficient d'amplification sous la forme suivante :

$$G_1(k) = \frac{\hat{U}^{n+1}}{\hat{U}^n} = \left[\frac{1}{\underbrace{1 + \nu(1 - \cos(k\Delta x))}_a + i \underbrace{\nu \sin(k\Delta x)}_b} \right] \quad (3.40)$$

où $\nu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ correspond au nombre CFL (Courant-Friedrich-Lewy). Ce paramètre est utilisé pour déterminer la plage de stabilité des schémas numériques de convection.

$G_1(k)$ peut être réécrit sous la forme :

$$G_1(k) = \frac{a}{(a^2 + b^2)} - \frac{ib}{a^2 + b^2} \quad (3.41)$$

Le module du coefficient d'amplification est donné par le produit de G_1 par son conjugué complexe :

$$|G_1| = G_1 G_1^* = \frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{1}{(1 + \nu - \nu \cos(k\Delta x))^2 + (\nu \sin(k\Delta x))^2} \leq 1 \quad (3.42)$$

On en conclut donc que le schéma est inconditionnellement stable, puisque l'erreur ne s'amplifie pas au cours du temps.

Discrétisation avec le schéma CDS et Euler implicite

De façon analogue au schéma précédent, on considère maintenant la discrétisation de l'équation (3.30) avec le schéma centré implicite en espace et le schéma d'Euler implicite en temps. On prendra en considération le décalage temporel de la correction explicite ($\alpha = 1$) du schéma centré pour l'analyse.

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x} (U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}) + \underbrace{\left[\frac{c}{2\Delta x} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) - \frac{c}{\Delta x} (U_j^n - U_{j-1}^n) \right]}_{\text{correction explicite}} = 0 \quad (3.43)$$

En remplaçant U_j^n par son expression dans l'espace de Fourier on obtient, pour tout k :

$$\frac{\hat{U}^{n+1}e^{ikx_j} - \hat{U}^n e^{ikx_j}}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x} \left(\hat{U}^{n+1}e^{ikx_j} - \hat{U}^{n+1}e^{ik(x_j-\Delta x)} \right) + \left[\frac{c}{2\Delta x} \left(\hat{U}^n e^{ik(x_j+\Delta x)} - \hat{U}^n e^{ik(x_j-\Delta x)} \right) - \frac{c}{\Delta x} \left(\hat{U}^n e^{ikx_j} - \hat{U}^n e^{ik(x_j-\Delta x)} \right) \right] = 0 \quad (3.44)$$

Après simplification et en regroupant les termes on peut écrire l'expression du coefficient d'amplification sous la forme suivante :

$$G_2(k) = \frac{\hat{U}^{n+1}}{\hat{U}^n} = \frac{(1 + \nu - \nu \cos(k\Delta x))}{(1 + \nu - \nu \cos(k\Delta x) + i\nu \sin(k\Delta x))} \quad (3.45)$$

$G_2(k)$ peut être réécrit sous la forme suivante :

$$G_2(k) = \left(\frac{a}{a + ib} \right) \quad \text{où : } \begin{cases} a = 1 + \nu - \nu \cos(k\Delta x) \\ b = \nu \sin(k\Delta x) \end{cases} \quad (3.46)$$

$$G_2(k) = \left[\frac{a^2}{(a^2 + b^2)} \right] - i \left[\frac{ab}{a^2 + b^2} \right] \quad (3.47)$$

Finalement le module de G_2 peut se simplifier à l'expression :

$$|G_2| = G_2 G_2^* = \frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{(1 + \nu - \nu \cos(k\Delta x))^2}{(1 + \nu - \nu \cos(k\Delta x))^2 + (\nu \sin(k\Delta x))^2} \leq 1 \quad (3.48)$$

Le schéma est donc inconditionnellement stable.

Discrétisation avec le schéma CDS et Crank-Nicolson

Finalement, on considère la discrétisation de l'équation (3.30) avec le schéma centré implicite en espace et le schéma d'intégration temporelle de Crank-Nicolson.

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{2} \left[\left(\frac{U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) - \left(\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \right] + \frac{c}{2} \left[\left(\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} \right) + \left(\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) - \left(\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \right] = 0 \quad (3.49)$$

40 CHAPITRE 3. MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS

En remplaçant U_j^n par son expression dans l'espace de Fourier et en regroupant certains termes on obtient, pour tout k :

$$\frac{\hat{U}^{n+1}e^{ikx} - \hat{U}^n e^{ikx}}{\Delta t} + \frac{c}{2} \left[\left(\frac{\hat{U}^{n+1}e^{ikx} - \hat{U}^{n+1}e^{ik(x-\Delta x)}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\hat{U}^n e^{ik(x+\Delta x)} - \hat{U}^n e^{ik(x-\Delta x)}}{\Delta x} \right) - \left(\frac{\hat{U}^n e^{ikx} - \hat{U}^n e^{ik(x-\Delta x)}}{\Delta x} \right) \right] = 0 \quad (3.50)$$

Après simplification et en regroupant les termes on peut écrire l'expression du coefficient d'amplification sous la forme suivante :

$$G_3(k) = \frac{\hat{U}^{n+1}}{\hat{U}^n} = \frac{\left(1 + \nu/2 - \nu/2 \cos(k\Delta x) - i\nu/2 \sin(k\Delta x) \right)}{\left(1 + \nu/2 - \nu/2 \cos(k\Delta x) + i\nu/2 \sin(k\Delta x) \right)} \quad (3.51)$$

Quelques manipulations algébriques permettent de démontrer que le module de $G_3(k)$ vaut :

$$|G_3(k)| = G_3 G_3^* = 1 \quad (3.52)$$

Le schéma est donc inconditionnellement stable.

En somme, on conclut que la formulation semi-implicite de tous les schémas permet d'assurer leur stabilité inconditionnelle. Cette propriété est particulièrement intéressante pour un code commercial où les valeurs typique de CFL spécifiés par les utilisateurs avoisinent la plage allant $\sim 10^1 \sim 10^2$.

3.3.2 Diffusion et dispersion des schémas de discrétisation

La dissipation numérique d'un schéma est mesurée par le module du coefficient d'amplification $|G|$ et correspond à une erreur dans l'amplitude du signal initialisé sur le domaine périodique. La figure 3.4 met en évidence une erreur due à la diffusion numérique sur le transport d'une onde ayant la forme d'une gaussienne. On remarque que l'amplitude de l'onde initiale est moins élevée après avoir été convectée sur une certaine distance à la vitesse c . On note également que le gradient du signal a diminué. La figure 3.5 présente la dissipation numérique des schémas numériques étudiés pour quelques valeurs de CFL. Les courbes ont été adimensionnalisées en multipliant le nombre d'onde k par une longueur de référence Δx . Le module du coefficient d'amplification $|G|$ a été tracé sur une plage de nombre d'onde adimensionnalisés allant de $[0, \pi]$. On remarque que le schéma décalé avant en espace couplé au schéma d'Euler implicite correspond à la discrétisation

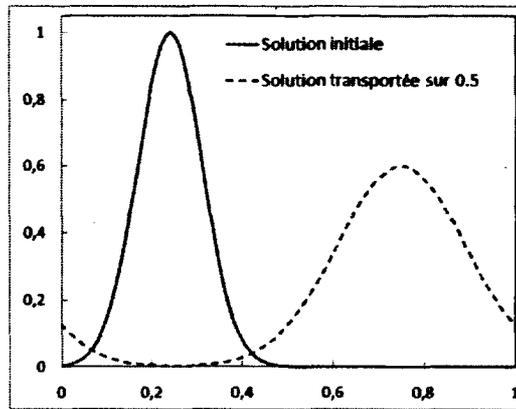


Figure 3.4 Exemple de dissipation numérique

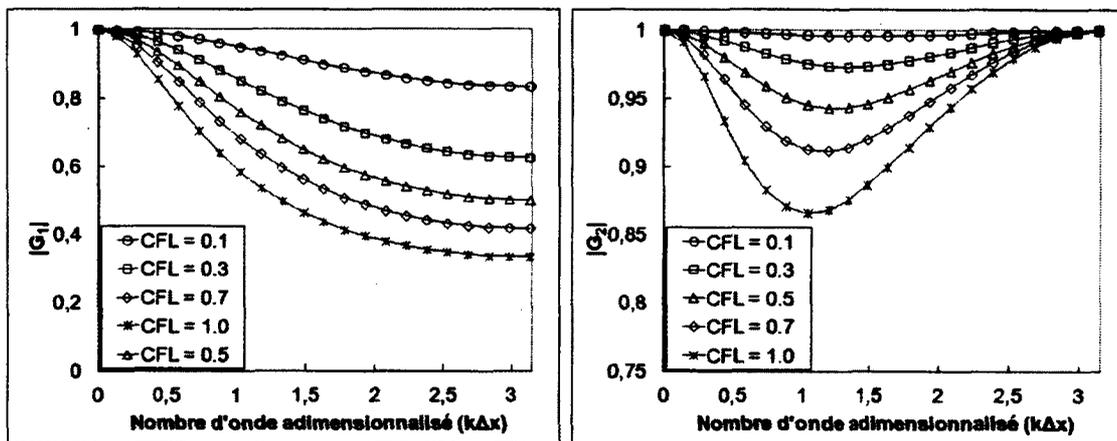


Figure 3.5 Dissipation numérique introduite par le schéma décalé avant et Euler (à gauche), le schéma centré et Euler (à droite). Notons que les échelles ne sont pas identiques.

généralisant le plus de dissipation numérique. Le schéma centré en espace couplé au schéma d'Euler implicite permet quant à lui de diminuer considérablement cette erreur. On note la forme asymétrique des courbes provenant du décalage temporel de la correction explicite du schéma. Finalement, on remarque que le graphique combinant du schéma centré avec l'intégration temporelle de Crank-Nicolson n'est pas inclus sur la figure 3.5, puisque cette combinaison de schémas de discrétisation permet d'éliminer complètement l'erreur provenant de la dissipation numérique dans le cas de l'équation de convection en régime transitoire pour n'importe quelle plage de CFL ($|G_3| = 1$).

La figure 3.6 met quant à elle en évidence les différences entre les trois schémas à un CFL de 0,5.

La dispersion d'un schéma correspond à sa capacité à convecter tous les nombres d'onde

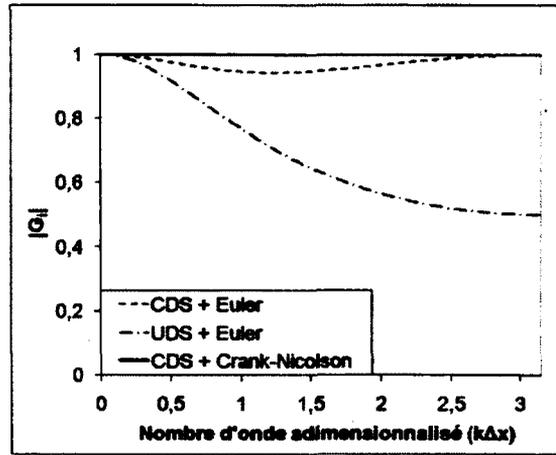


Figure 3.6 Comparaison de la dissipation numérique entre les différents schémas. $CFL = 0.5$.

de la solution à la même vitesse. La relation de dispersion exacte de l'équation 3.36 est :

$$\omega = \Omega(k) = kc \quad (3.53)$$

où ω correspond à la pulsation temporelle. De façon analogue, on peut introduire la relation de dispersion d'un schéma numérique :

$$\omega^* = \Omega^*(k) = kc^*(k) = k^*(k)c \quad (3.54)$$

où ω^* , c^* et k^* sont respectivement la pulsation, la vitesse de phase et le nombre d'onde modifiés qui varient selon la nature du schéma numérique. Ces trois variables correspondent à des grandeurs complexes pouvant être décomposées en une partie réelle ω_R^* , c_R^* , k_R^* et une partie imaginaire ω_I^* , c_I^* et k_I^* .

Si la composante réelle de la vitesse de phase c_R^* n'est pas constante en fonction de k , alors les ondes (correspondant à la solution) sont dites dispersives, car elles ne se déplaceront pas à la même vitesse. Une conséquence classique de la dispersion est l'apparition d'oscillations non physiques au cours de la simulation.

Suivant l'approche présentée dans [Lamarque, 2007], la relation de dispersion du schéma numérique faisant intervenir le coefficient d'amplification s'écrit :

$$\omega^* = \Omega^*(k) = -\frac{1}{i\Delta t} \ln(G(k)) \quad (3.55)$$

et la partie réelle du nombre d'onde modifiée est :

$$k_R^* = -\frac{\omega_R^* \Delta t}{\nu \Delta x} \quad (3.56)$$

L'étude de la dispersion permet de comparer la vitesse de propagation des ondes en fonction du nombre d'ondes. L'erreur de dispersion fait en sorte que les oscillations sont transportées à des vitesses de convection différentes (et erronées) en fonction de k .

On quantifiera la dispersion des différents schémas de discrétisation spatiale et temporelle en étudiant la partie réelle du nombre d'onde modifié k_R^* . Ce nombre d'onde modifié sera adimensionnalisé par la taille Δx des éléments du maillage. La figure 3.7 présente la dispersion des schémas en fonction de différentes valeurs de CFL. On remarque que

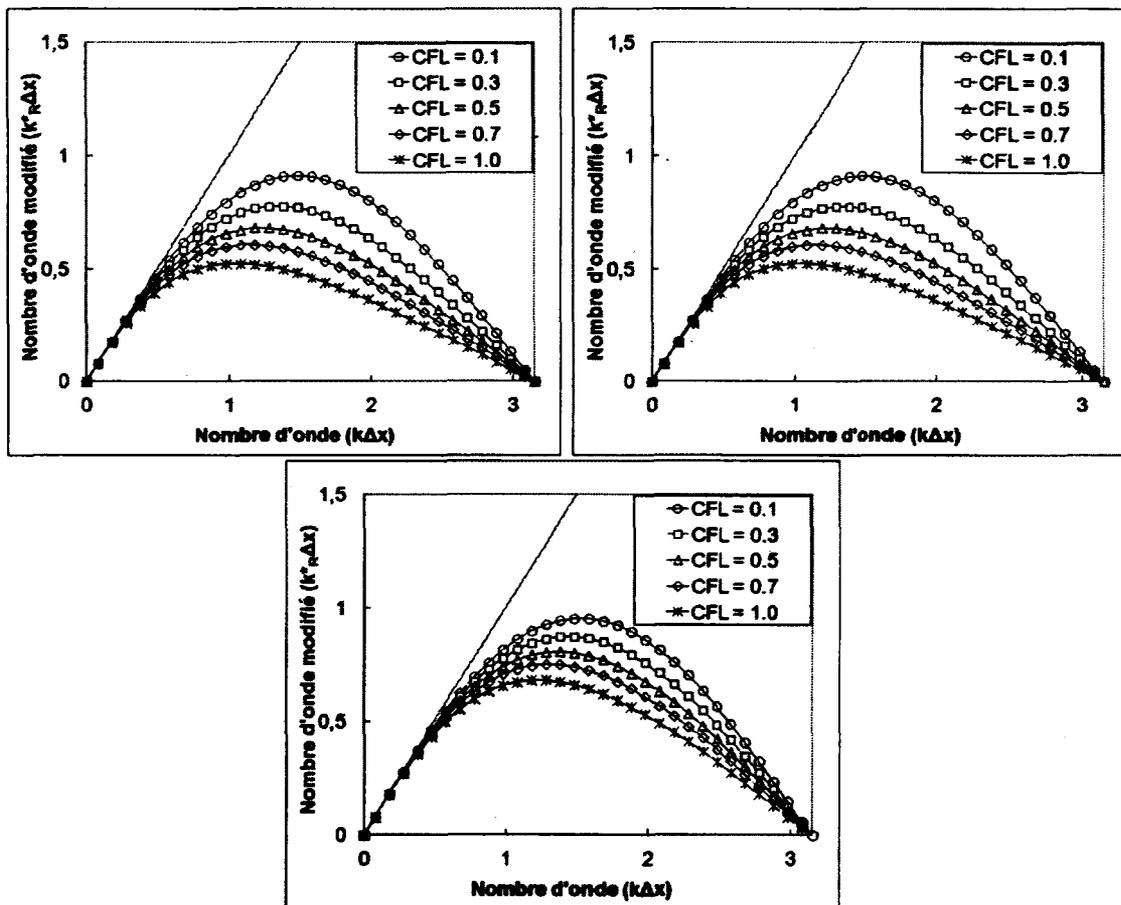


Figure 3.7 Dispersion numérique introduire par le schéma décalé avant et Euler (en haut à gauche), le schéma centré et Euler (en haut à droite) et le schéma centré et Crank-Nicolson (en bas).

le schéma décalé amont en espace couplé au schéma d'Euler implicite génère exactement

la même erreur de dispersion que le schéma centré en espace couplé au schéma d'Euler implicite. On remarque néanmoins une amélioration des courbes de dispersion lorsque le schéma centré est utilisé avec Crank-Nicolson. Cette amélioration s'accroît plus le nombre de CFL augmente. La droite $k_R^* \Delta x = k \Delta x$ correspond à la solution exacte par laquelle l'ensemble des nombres d'onde seraient convectés à la même vitesse c .

La figure 3.8 met en évidence les différences entre les trois schémas à un nombre de CFL de 0.5. La figure inclut également la courbe de dispersion pour le schéma centré classique (purent implicite), afin d'évaluer l'effet du décalage temporel dans le terme de correction explicite. Les courbes (UDS + Euler) et (CDS + Euler) se superposent parfaitement.

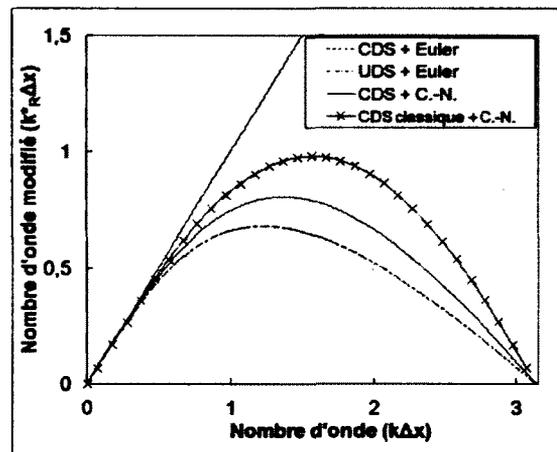


Figure 3.8 Comparaison de la dispersion numérique entre les différents schémas. $CFL = 0.5$.

3.3.3 Ordre de convergence de la solution des schémas

Le calcul de l'ordre de convergence de l'erreur des schémas en fonction de la taille du maillage sera réalisé à l'aide d'une expérience numérique consistant à simuler la convection d'un scalaire passif en présence d'un champ de vitesse. Afin de simplifier le problème au maximum, on impose un champ de vitesse \vec{c} constant et uniforme dans l'ensemble du domaine. Ce champ de vitesse transporte un champ scalaire passif défini à l'instant initial à partir d'un profil gaussien sur un domaine périodique. Ce profil régulier permet de calculer avec précision l'ordre de convergence de l'erreur et permet de quantifier la précision des différents schémas implémentés dans NIECE.

On s'intéressera à deux domaines de calcul :

- Le premier en 2-D défini sur l'espace : $\Omega_1 = [0, 1] \text{ m} \times [0, 1] \text{ m}$

- Le second en 1-D défini sur l'espace : $\Omega_2 = [0, 1]$ m

La figure 3.9 présente les deux types de maillage 2-D utilisés pour réaliser cette expérience numérique. Puisque, NIECE est un code commercial traitant uniquement des géométries en trois dimensions, les éléments "2-D" possèdent une épaisseur non-nulle dans l'axe perpendiculaire au plan de convection. Le maillage 1-D est composé, quant à lui, d'éléments hexaédriques réguliers. En deux dimensions, le champ scalaire à transporter correspond à

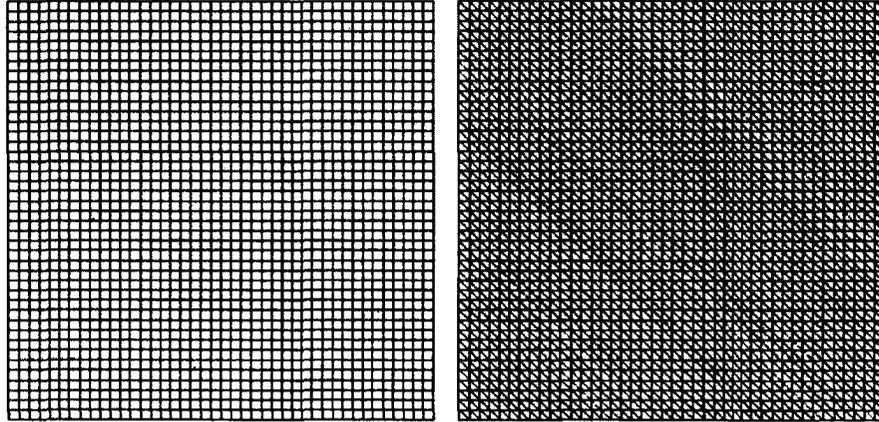


Figure 3.9 Exemples de maillages 2-D utilisés pour la convection d'un profil gaussien. Un maillage d'hexaèdres réguliers à gauche et de prisme à base triangulaire à droite.

une impulsion gaussienne défini par l'équation suivante :

$$u(x, t = 0) = \exp\left(\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{(y - y_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.57)$$

avec $\sigma = 0.05$ m, $(x_0, y_0) = (0.5 \text{ m}, 0.5 \text{ m})$. La vitesse de convection est définie le long de la diagonale comme :

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \text{ m/s} \\ 1 \text{ m/s} \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

De façon analogue en une dimension, le champ scalaire est défini par :

$$u(x, t = 0) = \exp\left(\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.59)$$

avec $\sigma = 0.1$ m, $x_0 = 0.5$ m. La vitesse de convection est définie comme $c = 1$ m/s.

Pour réaliser l'étude de convergence, on compare la solution numérique obtenue après $t = 1$ s (c'est-à-dire 1 tour), à la solution analytique. Tous les simulations sont réalisés en utilisant un nombre de CFL constant égal à 0.1.

46 CHAPITRE 3. MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS

Pour mesurer numériquement la précision d'un schéma, on calcule la norme L^2 de son erreur ϵ . Cette norme est définie comme :

$$L^2(\epsilon) = \|\epsilon\|_2 = \left(\sum_{j=0}^N \Delta x |\epsilon_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.60)$$

où ϵ_j correspond à la différence entre la solution analytique et la solution discrète au noeud j . Calculer la norme L^2 de l'erreur revient essentiellement à calculer l'intégrale discrète de l'erreur sur le plan de convection. Si le schéma est précis à l'ordre s , alors $\epsilon = O(\Delta x^s)$, de même que sa norme L^2 et on peut écrire :

$$\log \epsilon = \log C - s \log \Delta x \quad (3.61)$$

où C est une constante. Par conséquent, si l'on souhaite calculer la précision spatiale d'un schéma, il suffit d'effectuer plusieurs simulations identiques en raffinant progressivement la taille caractéristique du maillage, puis tracer le logarithme de l'erreur. La pente est identique à l'ordre du schéma.

La figure 3.10 présente une coupe selon l'axe x à $y = 0.5$ du profil de la quantité convectée $u(x, y)$ après un tour sur le maillage 60×60 . On note que les différents schémas influencent grandement les profils de $u(x, y)$. Les résultats avec le schéma décalé avant montre une

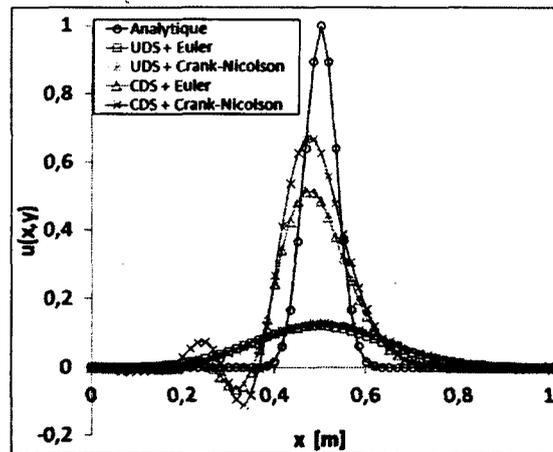


Figure 3.10 Profil de $u(x, y)$ après un tour complet.

onde gaussienne très aplatie. Le schéma de discrétisation temporel n'a pratiquement aucune incidence sur la solution puisque l'erreur en espace domine. En revanche, on observe aucune dispersion dans la solution, puisque les hautes fréquences ont été dissipées. On note finalement que le maximum est situé au bon endroit. Les résultats avec le schéma centré en

espace sont beaucoup moins dissipés. En contrepartie, les effets dispersifs sont fortement ressentis dans la solution, ce qui explique que le maximum ne se trouve pas à exactement à $x = 0.5$. Finalement, on remarque que le schéma d'intégration temporelle de Crank-Nicolson diminue significativement la dissipation numérique, mais accentue l'amplitude des oscillations dues aux effets dispersifs. Ces différences s'expliquent par le fait que l'erreur d'ordre 2 en temps avec le schéma d'Euler devient importante devant l'erreur en espace.

La figure 3.11 indique l'ordre de convergence de l'erreur calculé par les schémas numériques sur les maillages 2-D. L'ordre de convergence des différents schémas restent approximative-

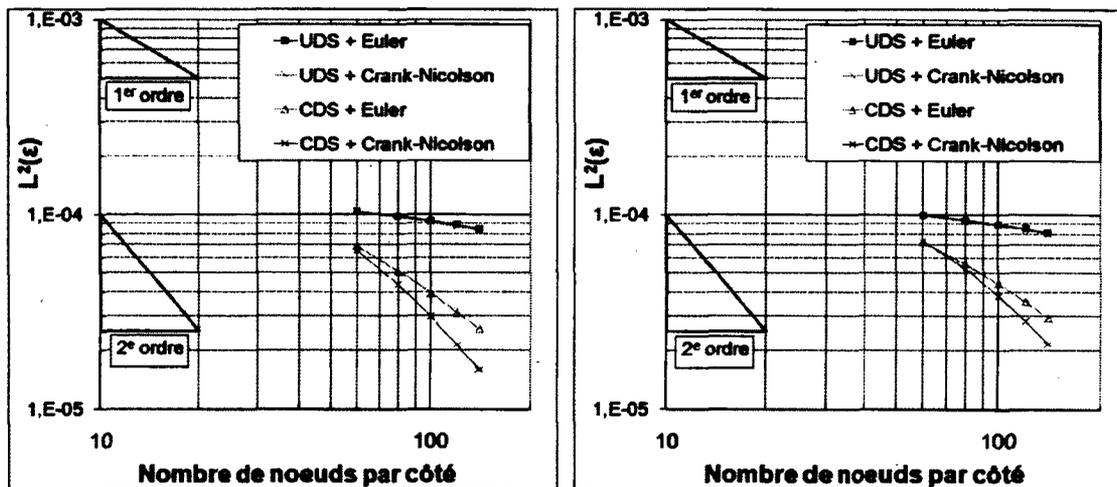


Figure 3.11 Convergence de la norme L^2 de l'erreur. À droite : maillage 2D hexaédrique, à gauche : maillage 2-D de prismes à base triangulaire.

ment la même d'un maillage à l'autre. On remarque également que l'ordre de convergence du schéma centré s'approche davantage de sa pente théorique d'ordre 2 que le schéma décalé amont de la pente d'ordre 1. Ce phénomène s'explique par le fait que les termes d'erreurs en espace d'ordre supérieurs sont non négligeables devant le terme d'erreur principal (ordre 1). Il est d'ailleurs possible de diminuer cet effet en convectant une gaussienne dont les gradients initiaux sont moins prononcés.

Afin de valider l'influence de la fonction initiale à convecter, une gaussienne moins prononcée est initialisée sur le maillage 1-D. La figure 3.12 illustre la différence entre la gaussienne initiale sur le maillage 2-D et celle sur la grille 1-D. Finalement, la figure 3.13 illustre la convergence de la norme L^2 de l'erreur sur le maillage 1-D. On note que l'ordre de convergence en espace du schéma décalé amont s'approche beaucoup plus de sa pente théorique d'ordre 1 que dans le cas du maillage 2-D.

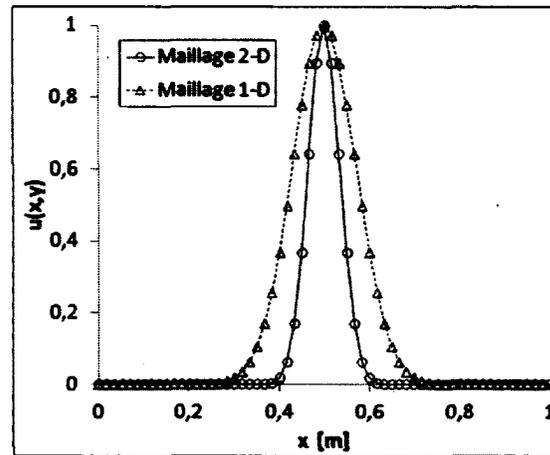


Figure 3.12 Comparaison des gaussiennes initiales à convecter.

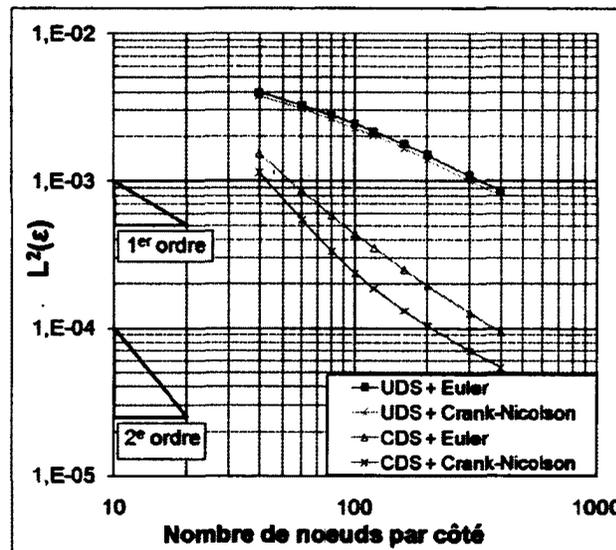


Figure 3.13 Convergence de la norme L^2 de l'erreur sur le maillage 1-D.

Cette analyse numérique de l'ordre des schémas de convection et d'intégration temporelle vient valider l'implémentation adéquate des nouveaux schémas. On vient également confirmer que la combinaison du schéma centré en espace et Crank-Nicolson en temps offre un compromis intéressant pour réaliser des simulations aux grandes échelles par rapport aux méthodes existantes auparavant dans NIECE.

Pour la suite du travail on s'intéressa à la validation des différents modèles de sous-maille déjà implémentés à l'aide du cas validation le plus simple et le plus fondamental pour l'étude de la turbulence : la décroissance d'une turbulence homogène isotrope. Ce cas test permettra d'évaluer conjointement la capacité des nouveaux schémas et des modèles de sous-maille à représenter adéquatement une turbulence isotrope.

CHAPITRE 4

LA DÉCROISSANCE D'UNE TURBULENCE HOMOGÈNE ISOTROPE

La validation des différents modèles de sous-maille implémentés dans NIECE représente une étape majeure de ce projet de maîtrise. Le choix des modèles à tester permettra de valider la précision avec laquelle il est possible de mettre en œuvre un calcul de simulation des grandes échelles dans le solveur. Les cas de validation qui seront mis en place devront permettre de démontrer la capacité du code à modéliser des écoulements internes et externes.

La décroissance d'une turbulence homogène isotrope constitue le cas de validation le plus simple à réaliser pour tester une simulation des grandes échelles. Le travail consiste à initialiser un champ de vitesse turbulent et cohérent dans l'espace à partir d'un spectre d'énergie prédéfini. On laisse ensuite ce champ turbulent se dissiper au cours de la simulation en utilisant des conditions de périodicité dans les trois directions cartésiennes de l'espace. L'objectif consiste à capturer correctement la décroissance de l'énergie cinétique turbulente en fonction du temps. Ce cas test constitue une configuration incontournable lors de la validation d'un nouveau modèle de sous-maille, car elle permet de s'assurer que le modèle prédit correctement l'effet dissipatif des petites échelles. Citons quelques études ayant déjà été réalisées dans le contexte de nouvelles approches de modélisation de sous-maille [Bhushan et Warsi, 2005; Chaouat et Schiestel, 2009; Kang *et al.*, 2003; Nicoud et Ducros, 1999], de la modélisation de la turbulence à l'aide de la technique de la simulation des grandes échelles : [Okong'o *et al.*, 2000; Thornber *et al.*, 2007] ou de la simulation numérique directe [Mansour et Wray, 1994].

4.1 Les statistiques d'une turbulence isotrope

La turbulence correspond à des fluctuations aléatoires de la vitesse autour d'une valeur moyenne dans un écoulement. En conséquence, on peut décomposer un écoulement turbulent en une valeur moyenne et une quantité fluctuante : $u_i = U_i + u'_i$. Dans la simulation de la décroissance d'une turbulence homogène isotrope, on suppose que la composante

moyenne de la vitesse est nulle $U_i = 0$ et on initialise uniquement des fluctuations de vitesse u'_i dans le domaine.

En définissant $\langle X \rangle$, la moyenne d'ensemble de la variable X , on peut introduire le concept de fonctions de corrélations double croisées des fluctuations de vitesse $Q_{ij}(A, B)$:

$$Q_{ij}(A, B) = \langle u'_i(A)u'_j(B) \rangle \quad (4.1)$$

Les fonctions de corrélations double croisées sont analogues aux différentes composantes du tenseur de Reynolds. La version adimensionnée de ces fonctions de corrélations sont appelées coefficients de corrélation $R_{ij}(A, B)$:

$$R_{ij} = \frac{Q_{ij}(A, B)}{\sqrt{\langle (u'_i(A))^2 \rangle} \sqrt{\langle (u'_j(B))^2 \rangle}} \quad (4.2)$$

Finalement, on définit les échelles intégrales d'autocorrélation L_{ij}^l :

$$L_{ij}^l = \int_0^\infty R_{ij}(x_l, 0, 0) dx_l \quad (4.3)$$

L_{ij}^l correspond à la distance de corrélation moyenne dans la direction l pour les composantes i et j du vecteur de fluctuations de vitesse.

Dans le cas d'une turbulence homogène isotrope les propriétés statistiques des champs sont indépendantes de la position et de l'orientation du repère de référence, on a donc les propriétés suivantes :

- $\langle (u'_i(A))^2 \rangle = U_p^2$ où U_p est la vitesse turbulente ;
- $Q_{ij}(A, B) = Q_{ij}(r)$ où r est la distance entre les points A et B ;
- $R_{ij}(A, B) = R_{ij}(r) = \frac{Q_{ij}(r)}{U_p^2}$;

On peut également simplifier la définition des échelles intégrales d'autocorrélation longitudinales associées. On a par exemple pour R_{11} :

$$f(r) = \frac{Q_{11}(r, 0, 0)}{U_p^2} = R_{11}(r, 0, 0) \quad (4.4) \quad L_{11}^1 = \int_0^\infty f(r) dr \quad (4.5)$$

Pour une turbulence isotrope, si $i \neq j$, alors $\langle u'_i u'_j \rangle = 0$, donc $Q_{ij} = 0$. Par conséquent, seules les échelles intégrales d'autocorrélation L_{ii}^l demeurent non nulles. Finalement, l'iso-

troupe impose [Zhang et Rutland, 1995] :

$$L_{11}^1 = L_{22}^2 = L_{33}^3 = L \quad (4.6)$$

On définit également une fonction transverse de corrélation et son échelle intégrale. On a par exemple pour R_{22} :

$$g(r) = \frac{Q_{22}(\dot{r}, 0, 0)}{U_p^2} = R_{22}(r, 0, 0) \quad (4.7) \quad L_{22}^1 = \int_0^\infty g(r) dr \quad (4.8)$$

Il en est de même pour R_{33} .

L'hypothèse d'un écoulement incompressible, isotrope, en 3-D permet d'écrire la relation de [von Karman et Howarth, 1938] :

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \quad (4.9)$$

Une fois intégrée entre 0 et l'infini, la relation précédente mène à l'expression suivante [Tennekes et Lumley, 1972; Zhang et Rutland, 1995] :

$$L_{ii}^j = \frac{L_{ii}^i}{2} \text{ si } i \neq j \quad (4.10)$$

4.2 L'initialisation du champ de vitesse

La procédure d'initialisation consiste à calculer les composantes du champ de vitesse dans le domaine spectral qui respecte un spectre d'énergie prédéfini. Pour y arriver, on définit d'abord les composantes k_1, k_2, k_3 du vecteur d'onde \mathbf{k}_1 [Van Kalmthout, 1995] :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}_1) = \frac{\varepsilon(|\mathbf{k}|)}{4\pi k^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \right) \text{ avec } \begin{cases} k_1 = \frac{2\pi n_1}{L_x} & -\frac{N_x}{2} + 1 \leq n_1 \leq \frac{N_x}{2} \\ k_2 = \frac{2\pi n_2}{L_y} & -\frac{N_y}{2} + 1 \leq n_2 \leq \frac{N_y}{2} \\ k_3 = \frac{2\pi n_3}{L_z} & -\frac{N_z}{2} + 1 \leq n_3 \leq \frac{N_z}{2} \\ |\mathbf{k}| = \sqrt{k_i^2} \end{cases} \quad (4.11)$$

où $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}_1)$ correspond au tenseur du spectre d'énergie discret en 3-D, N_x, N_y, N_z correspondent aux nombres de nœuds du maillage dans les trois directions cartésiennes de l'espace, $\varepsilon(|\mathbf{k}|)$ correspond au spectre d'énergie discret et L_x, L_y, L_z correspondent aux longueurs du domaine.

Dans l'espace spectral, l'équation de conservation de la masse d'un écoulement incompressible s'écrit [Boughanem et Trouvé, 1996] :

$$k_i \hat{u}_i = 0 \quad (4.12)$$

Cette relation d'incompressibilité se traduit donc par une orthogonalité entre le vecteur d'onde \mathbf{k} et le vecteur vitesse $\hat{\mathbf{u}}$. Définissons une nouvelle base orthonormale $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, définie par rapport à une base de départ $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de telle sorte que $\mathbf{e}'_3 = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$. Dans cette nouvelle base, si on souhaite respecter le principe d'incompressibilité, le vecteur vitesse $\hat{\mathbf{u}}$ devra s'écrire :

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{u}'_1 \mathbf{e}'_1 + \hat{u}'_2 \mathbf{e}'_2 \quad (4.13)$$

Il existe une infinité de couples $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$, portée par le vecteur \mathbf{k} permettant satisfaire l'équation (4.13). Dans son papier, [Boughanem et Trouvé, 1996] propose la base suivante :

$$\mathbf{e}'_3 = \left(\frac{k_1}{|\mathbf{k}|}, \frac{k_2}{|\mathbf{k}|}, \frac{k_3}{|\mathbf{k}|} \right)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{e}'_2 = \left(\frac{k_1 k_3}{|\mathbf{k}| \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)}}, \frac{k_2 k_3}{|\mathbf{k}| \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)}}, -\frac{\sqrt{(k_1^2 + k_2^2)}}{|\mathbf{k}|} \right)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{e}'_1 = \left(\frac{k_2}{\sqrt{(k_1^2 + k_2^2)}}, \frac{-k_1}{\sqrt{(k_1^2 + k_2^2)}}, 0 \right)_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3} \quad (4.16)$$

La forme de $\hat{\mathbf{u}}$ impose :

$$(\hat{u}'_1)^2 + (\hat{u}'_2)^2 = \frac{\varepsilon(|\mathbf{k}|)}{2\pi|\mathbf{k}|^2} \quad (4.17)$$

avec :

$$\hat{u}'_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{2\pi k^2}} \cos \theta e^{i\theta_1} \quad (4.18)$$

$$\hat{u}'_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{2\pi k^2}} \sin \theta e^{i\theta_2} \quad (4.19)$$

Les phases $\theta, \theta_1, \theta_2$ sont choisies de façon aléatoire sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Finalement, la reconstruction du champ de vitesse dans le repère orthonormé original $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ s'écrit :

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\hat{u}'_1 k_2 |\mathbf{k}| + \hat{u}'_2 k_1 k_3}{|\mathbf{k}| \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)}} \mathbf{e}_1 + \frac{\hat{u}'_2 k_2 k_3 - \hat{u}'_1 k_1 |\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}| \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)}} \mathbf{e}_2 - \frac{\hat{u}'_2 \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)}}{|\mathbf{k}|} \mathbf{e}_3 \quad (4.20)$$

Finalement, les composantes du champ de vitesse dans l'espace physique peuvent être récupérées en opérant la transformée de Fourier inverse en trois dimensions du champ \tilde{u}'_i :

$$u'_i = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{u}'_i(\mathbf{k}) e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (4.21)$$

où j représente le nombre imaginaire et \mathbf{x} correspond au vecteur position dans le domaine physique.

La procédure de changement de repère proposé par [Boughanem et Trouvé, 1996] assure que le champ vitesse généré respecte l'équation de conservation de la masse et possède l'ensemble des caractéristiques supportées par le spectre d'énergie $E(\mathbf{k})$. En revanche, la méthode ne garantit pas que le champ de vitesse dans l'espace réel ainsi obtenu aura une composante imaginaire nulle. On doit donc introduire la condition $\tilde{u}'(-\mathbf{k}) = \tilde{u}'^*(\mathbf{k})$, garantissant que u'_i soit une fonction réelle. De façon pratique, cette condition est satisfaite

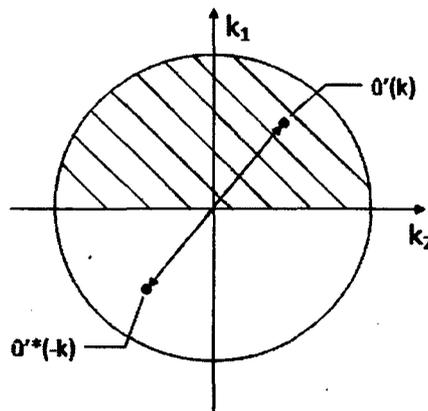


Figure 4.1 Schématisation de la condition $\tilde{u}'(-\mathbf{k}) = \tilde{u}'^*(\mathbf{k})$

dans la méthode d'initialisation en calculant uniquement le champ de vitesse dans l'espace de Fourier sur la demi-sphère $k_1 > 0$. Ainsi, aux coordonnées $(+k_1, \pm k_2, \pm k_3)$ la valeur de $\tilde{u}'(\mathbf{k})$ est connue. À cette position, on peut associer le vecteur d'onde inverse $(-k_1, \mp k_2, \mp k_3)$ et imposer qu'à cette position la vitesse correspond au conjugué complexe de $\tilde{u}'(\mathbf{k})$ comme l'illustre la figure 4.1.

4.3 Les spectres d'énergie de turbulence

Le spectre d'énergie utilisé pour l'initialisation doit respecter certaines caractéristiques spectrales afin d'être un candidat adéquat. Pour une turbulence homogène isotrope, ces caractéristiques [Hinze, 1975] permettent de lier la donnée du spectre $E(\mathbf{k})$ aux propriétés

d'énergie cinétique k , de taux de dissipation ϵ et d'échelle intégrale L_i^i :

$$k = \int_0^{\infty} E(k) dk \quad (4.22)$$

$$\epsilon = 2\nu \int_0^{\infty} k^2 E(k) dk \quad (4.23)$$

$$L_i^i = \frac{\pi}{2U_p^2} \int_0^{\infty} \frac{E(k)}{k} dk \quad (4.24)$$

[Passot et Pouquet, 1987] et Von Karman-Pao [Hinze, 1975] ont proposé deux formulations de spectre théorique pouvant être utilisées. Les paramètres de ces deux formulations peuvent être calibrés afin de capturer les échelles de turbulence associées au domaine de calcul et au maillage.

On peut relier l'échelle de Kolomogorov η_k au spectre d'énergie en remplaçant son expression analytique dans l'équation (4.23), puis en réalisant l'intégrale. On injecte ensuite le résultat de cette intégration dans la définition de l'échelle de Kolmogorov $\eta_k \equiv \epsilon^{-\frac{1}{4}} \nu^{\frac{3}{4}}$.

Finalement, il est possible de calculer la longueur intégrale d'autocorrélation théorique en fonction de l'expression analytique du spectre d'énergie utilisée. Il suffit de remplacer l'équation pour $E(k)$ dans la relation (4.24), puis de réaliser l'intégrale.

4.3.1 Le spectre de Passot-Pouquet

Le spectre proposé par [Passot et Pouquet, 1987] prend la forme :

$$E(k) = A \left[\frac{k}{k_e} \right]^4 \exp \left[-2 \left[\frac{k}{k_e} \right]^2 \right] \quad (4.25)$$

où A est l'amplitude du spectre et k_e correspond au nombre d'onde associé à l'énergie de turbulence la plus grande. En substituant l'expression du spectre de Passot-Pouquet dans l'équation (4.22) et en combinant la définition de l'énergie de turbulence $k \equiv \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{3}{2} U_p^2$ on peut calculer la constante A :

$$A = \frac{16U_p^2}{k_e} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (4.26)$$

Le spectre est donc entièrement défini si on fournit le couple U_p, k_e , où :

- k_e contrôle la position de l'extremum du spectre d'énergie ;
- U_p contrôle l'amplitude du spectre d'énergie ;

La figure 4.2 présente l'effet de ces deux paramètres sur la forme du spectre de Passot-Pouquet. La forme analytique du spectre de Passot-Pouquet possède l'avantage de pouvoir

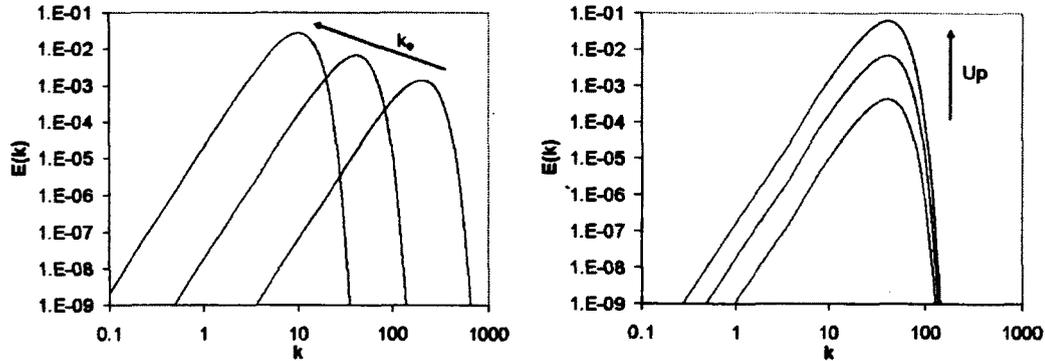


Figure 4.2 Effet des paramètres k_e et U_p sur la forme du spectre d'énergie de Passot-Pouquet

être aisément implémenté sous forme numérique. En revanche, la forme de $E(k)$ concentre l'essentiel de l'énergie autour des nombres d'onde voisins de k_e . On remarque également que ce spectre possède une plage inertielle très étroite, qui donne peu d'importance aux petites structures turbulentes.

Échelle de Kolmogorov

Dans le cas du spectre de Passot-Pouquet l'expression de η_k se simplifie à :

$$\eta_k = \left[\frac{15}{4} \right]^{-\frac{1}{4}} \left[\frac{U_p k_e}{\nu} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.27)$$

Échelle intégrale d'autocorrélation

Pour le spectre de Passot-Pouquet l'expression de L_{ii}^i se simplifie à :

$$L_{ii}^i = \frac{\sqrt{2\pi}}{k_e} \quad (4.28)$$

4.3.2 Le spectre de von Karman-Pao

Afin de corriger le problème lié à la résolution des petites échelles, on introduit le spectre de von Karman-Pao qui permet de décrire l'ensemble du spectre d'une turbulence réelle.

L'expression analytique est la suivante :

$$E(k) = \frac{AU_p^5}{\epsilon} \frac{\left[\frac{k}{k_e}\right]^4}{\left[1 + \left[\frac{k}{k_e}\right]^2\right]^{\frac{17}{6}}} \exp\left[-\frac{3}{2}\gamma\left[\frac{k}{k_d}\right]^{\frac{4}{3}}\right] \quad (4.29)$$

où k_e et k_d représentent respectivement le nombre d'onde le plus énergétique et le plus dissipatif. [Boughanem et Trouvé, 1996] suggèrent de fixer les constantes A et γ à 1.5 pour ce modèle. Le choix des variables U_p , ϵ , ν , k_e , k_d doit satisfaire simultanément les relations (4.22) et (4.23).

On définit la famille d'intégrale I_p qui est fonction du rapport $\frac{k_d}{k_e}$:

$$I_p = \int_0^\infty \frac{X^p}{[1 + X^2]^{\frac{17}{6}}} \exp\left[-\frac{3}{2}\gamma\left[\frac{k_e}{k_d}X\right]^{\frac{4}{3}}\right] dX \quad (4.30)$$

où X n'est qu'une variable d'intégration.

En remplaçant l'expression du spectre d'énergie dans les relations (4.22) et (4.23) et en utilisant la définition de I_p , on peut dériver les expressions de U_p et ϵ :

$$U_p = \frac{9k_e I_6 \nu}{2A I_4^2} \quad (4.31) \quad \epsilon = \frac{243k_e^4 I_6^3 \nu^3}{4A^2 I_4^5} \quad (4.32)$$

En fixant le rapport $\frac{k_d}{k_e}$ et la viscosité ν , le reste des paramètres du modèle peut donc être calculé. La figure 4.3 présente l'influence de ce rapport sur l'allure du spectre d'énergie. Ces courbes ont été obtenues en ajustant la viscosité de sorte que l'énergie cinétique k demeure constante pour chacun des spectres. On remarque que pour un rapport $\frac{k_d}{k_e} = 1$, on retrouve la forme typique du spectre de Passot-Pouquet sans zone inertielle. On note également que cette zone inertielle croît au fur et à mesure que le rapport $\frac{k_d}{k_e}$ augmente. Les intégrales I_p n'admettent pas de solution analytique. L'intégration numérique sur l'intervalle $\frac{k_d}{k_e} : [1, 30]$ permet d'obtenir les courbes suivantes de la figure 4.4 pour $p = 3, 4$ et 6 . Ces courbes ont été implémentées dans l'algorithme d'initialisation d'un champ vitesse turbulent.

Échelle de Kolmogorov

Dans le cas du spectre de von Karman-Pao, l'expression de η_k se simplifie à :

$$\eta_k = \left[\frac{243I_6^3}{4A^2I_4^5}\right]^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{k_e} \quad (4.33)$$

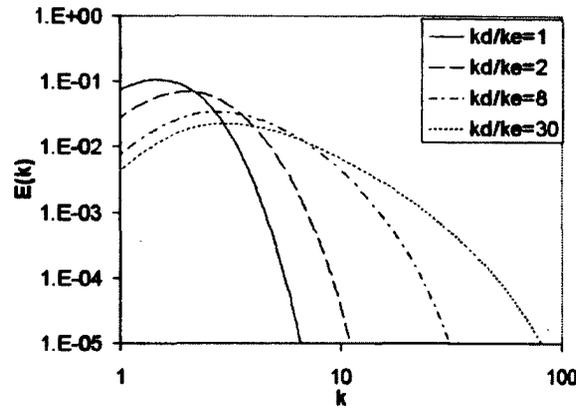


Figure 4.3 Effet du rapport k_d/k_e sur la forme du spectre d'énergie de von Karman-Pao

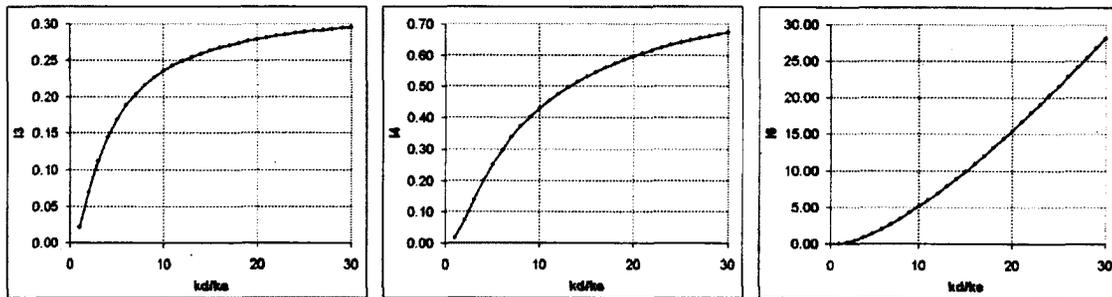


Figure 4.4 Les intégrales I_p pour $p = 3, 4$ et 5 .

Échelle intégrale d'autocorrélation

Dans le cas du spectre de von Karman-Pao l'expression de L_{ii}^i se simplifie à :

$$L_{ii}^i = \frac{3\pi I_3}{4k_e I_4} \quad (4.34)$$

4.3.3 Les spectres de grille

Plutôt qu'utiliser une formulation analytique, il aurait également été possible d'utiliser un spectre de grille mesuré expérimentalement comme dans l'expérience de [Comte-Bellot et Corrsin, 1971]. D'ailleurs, quelques auteurs [Chaouat et Schiestel, 2009; Nicoud et Ducros, 1999] ont utilisé ces données expérimentales pour leur simulation de décroissance homogène isotrope. Citons également les travaux de [Kang *et al.*, 2003] ayant récemment revisité l'expérience de Comte-Bellot et Corrsin.

En revanche, ces résultats expérimentaux de décroissance d'une turbulence isotrope ont été obtenus à des nombres de Reynolds trop élevé pour être retenu dans le cadre de ce projet de maîtrise. Le temps de calcul nécessaire pour réaliser de telles simulations aurait été inutilement long. L'utilisation de spectres numériques s'est avéré un choix adéquat pour démontrer la capacité du code à simuler une turbulence isotrope.

4.4 Validation des champs de vitesse initiaux

Les tableaux 4.1 et 4.2 présentent les six simulations ayant servi à valider l'implémentation de la procédure d'initialisation des champs de vitesse turbulents, présentée à la section 4.2. L'ensemble de ces simulations ont été réalisées sur un domaine périodique de dimension $2\pi \times 2\pi \times 2\pi \text{ m}^3$.

Dans le cas du spectre de Passot-Pouquet, les paramètres ont été choisis de tel sorte que l'échelle de Kolmogorov η_k du spectre coïncide avec la taille d'un volume de contrôle du maillage. Cette configuration assure que le domaine physique est suffisamment discrétisé pour capturer toute la plage d'échelles turbulentes dans l'écoulement. Le spectre de Passot-Pouquet est particulièrement bien adapté pour obtenir ce type de configuration. En effet, l'expression de l'échelle de Kolmogorov pour ce spectre est fonction de la viscosité du domaine, or la formulation du spectre lui-même est indépendante de cette propriété. En revanche, cette stratégie n'a pu être employée pour déterminer les configurations du

Tableau 4.1 Paramètres des simulations ayant servi à valider la procédure d'initialisation du champ de vitesse turbulent avec le spectre de Passot-Pouquet

Simulation	$N_x \times N_y \times N_z$	U_p [m/s]	k_e [m^{-1}]	ν [m^2/s]	η_k [m]
A	$32 \times 32 \times 32$	0.1	6	0.0475	0.2022
B	$64 \times 64 \times 64$	0.1	7	0.0135	0.0998
C	$128 \times 128 \times 128$	0.1	14	0.0067	0.0495

spectre de von Karman-Pao. Pour ce spectre, η_k reste indépendante de la viscosité du domaine et les paramètres de calcul sont reliés entre eux de tel sorte que la seule variable indépendante est l'échelle de discrétisation du domaine. Par conséquent, on a choisi de fixer les paramètres du spectre de von Karman-Pao pour les 3 simulations et de comparer l'influence de la grille sur la procédure d'initialisation. On note que le rapport k_d/k_e est fixé à 15, on aura donc une proportion intéressante du spectre qui servira à modéliser les petites échelles turbulentes dans le domaine. Ces six cas couvrent trois maillages différents. Le choix de la discrétisation est limité à un nombre de noeuds par arête correspondant à une puissance de deux. Cette contrainte provient de l'algorithme de transformation de

Tableau 4.2 Paramètres des simulations ayant servi à valider la procédure d'initialisation du champ de vitesse turbulent avec le spectre de von Karman-Pao

Simulation	$N_x \times N_y \times N_z$	U_p [m/s]	k_e [m ⁻¹]	k_d [m ⁻¹]	ν [m ² /s]	η_k [m]
D	32 × 32 × 32	2.2	3	45	0.007	0.0118
E	64 × 64 × 64	2.2	3	45	0.007	0.0118
F	128 × 128 × 128	2.2	3	45	0.007	0.0118

Fourier rapide (FFT). La validation des champs de vitesse initiaux est basée sur la comparaison des coefficients de corrélation $R_{ij}(r)$. On s'intéressera également aux longueurs intégrales d'autocorrélation longitudinales L_{ii}^i et transverses L_{ii}^j . Ces longueurs intégrales seront calculées à partir des différents champs de vitesse obtenus par la méthode d'initialisation, puis seront comparées aux valeurs théoriques pour une turbulence isotrope. Finalement, on comparera la forme des spectres d'énergie initiaux calculés en réalisant la transformée de Fourier du champ de vitesse discret avec leur formulation analytique.

4.4.1 Coefficients de corrélation

La figure 4.5 présente les courbes des fonctions de corrélation longitudinales $R_{11}(r, 0, 0)$, $R_{22}(0, r, 0)$ et $R_{33}(0, 0, r)$ calculées à partir des champs de vitesse initiaux du spectre de Passot-Pouquet. Les indices 1, 2 et 3 font référence aux trois composantes du champ de vitesse. Ces fonctions de corrélation ont été évaluées indépendamment selon les trois directions cartésiennes de l'espace. L'intégration de ces courbes permettra par la suite d'évaluer les longueurs intégrales d'autocorrélation longitudinales. La figure 4.6 présente les fonctions de corrélation transverses $R_{11}(0, r, 0)$, $R_{11}(0, 0, r)$, $R_{22}(r, 0, 0)$, $R_{22}(0, 0, r)$, $R_{33}(r, 0, 0)$, $R_{33}(0, r, 0)$ calculés à partir des mêmes champs de vitesse. Étant donné que le champ de

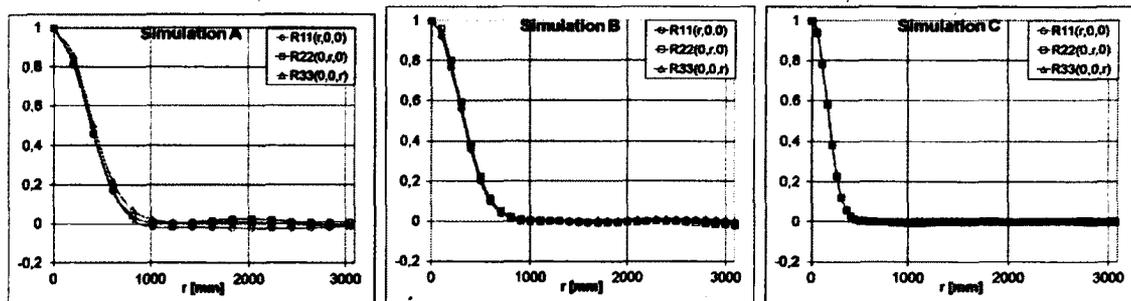


Figure 4.5 Les coefficients de corrélation longitudinale du spectre de Passot-Pouquet.

vitesse est calculé sur un maillage discret, les différentes courbes ne se superposent pas

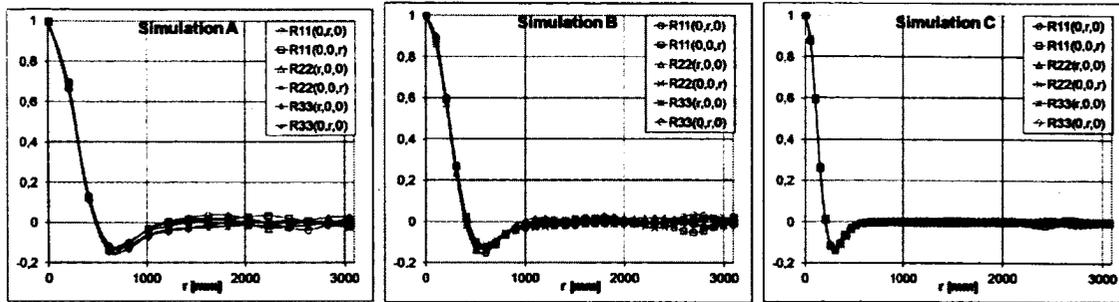


Figure 4.6 Les coefficients de corrélation transverses du spectre de Passot-Pouquet.

parfaitement. Ces écarts diminuent plus la discrétisation du domaine augmente. On note sur que les fonctions de corrélation de Passot-Pouquet que l'aire sous la courbe diminue plus la discrétisation augmente. Cette observation a un impact direct sur l'amplitude des longueurs intégrales d'autocorrélation des différents spectre. Cette propriété s'explique par le fait que les maillages plus raffinés, la quantité d'énergie de turbulence contenue dans les valeurs de nombres d'onde élevées devient si faible que l'algorithme d'initialisation n'est plus en mesure de suivre le spectre analytique à cause de la précision numérique. Cette aspect est étudié plus en détail à la section 4.4.3 lorsque l'on s'intéressa aux spectres d'énergie discret.

La figure 4.7 présente les fonctions de corrélation longitudinales calculées à partir des champs de vitesse initiaux du spectre de von Karman-Pao. La figure 4.8 montre les fonctions de corrélation transverses pour les mêmes simulations. Dans ce cas-ci, on ne note que l'aire sous les différentes courbes reste essentiellement identique avec le maillage. Cette observation suggère aucune erreur de précision numérique lors de l'initialisation. En com-

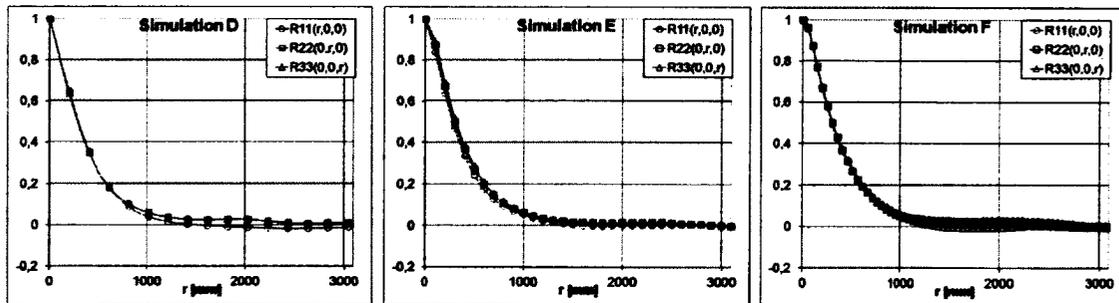


Figure 4.7 Les coefficients de corrélation longitudinale du spectre de von Karman-Pao.

parant les courbes de corrélation, on remarque que la cohérence des champs de vitesse initiaux s'étend sur une distance plus importante avec le spectre de von Karman-Pao que

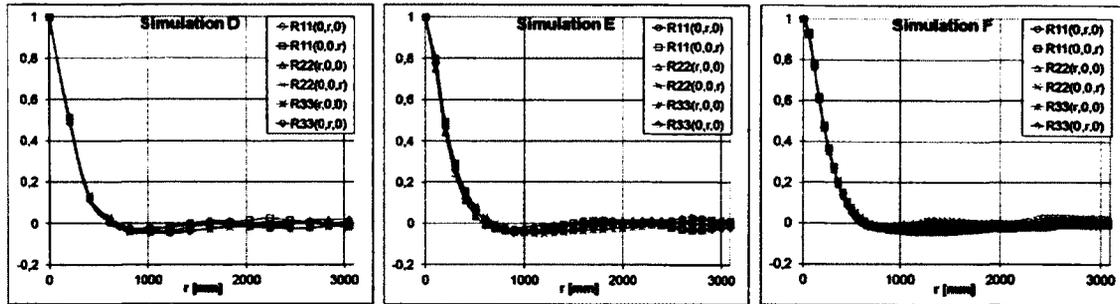


Figure 4.8 Les coefficients de corrélation transverses du spectre de von Karman-Pao.

pour le spectre de Passot-Pouquet. Cette propriété est bien illustrée à la section suivante lorsque l'on compare les intégrales d'autocorrélation des différents spectres d'initialisation.

4.4.2 Longueurs intégrales de corrélation

L'intégration numérique des courbes des coefficients de corrélation permet d'obtenir les longueurs intégrales d'autocorrélation longitudinales et transverses. Ces intégrations ont été réalisées sur une distance de π [m], correspondant à une demi arête du cube. Les tableaux 4.3 et 4.4 compilent les résultats de ces intégrations numériques pour le spectre de Passot-Pouquet et les tableaux 4.5 et 4.6 compilent celles pour le spectre de von Karman-Pao. On observe un faible écart entre les longueurs intégrales théoriques et les valeurs numériques moyennes. On peut attribuer l'essentiel des différences à la portion des courbes située autour de l'axe horizontal. Cette excellente correspondance entre les valeurs théoriques et numériques permet de valider la méthode d'initialisation qui génère un champ de vitesse dont les longueurs de corrélation sont en accord avec une turbulence isotrope réelle.

Tableau 4.3 Comparaison des longueurs intégrales d'autocorrélation longitudinales du spectre de Passot-Pouquet. Les longueurs intégrales sont en mètre.

Simulation	L_{ii}^i (théorique)	L_{11}^1	L_{22}^2	L_{33}^3	L_{ii}^i (moyenne)
A	0.418	0.362	0.433	0.449	0.415
Erreur (%)	-	13.3	3.6	7.5	0.8
B	0.358	0.353	0.360	0.365	0.359
Erreur (%)	-	1.4	0.7	2.0	0.4
C	0.179	0.187	0.180	0.183	0.183
Erreur (%)	-	4.3	0.4	2.3	2.4

Tableau 4.4. Comparaison des longueurs intégrales d'autocorrélation transverses du spectre de Passot-Pouquet. Les longueurs intégrales sont en mètre.

Simulation	L_{ii}^j (théorique)	L_{11}^2	L_{11}^3	L_{22}^1	L_{22}^3	L_{33}^1	L_{33}^2	L_{ii}^j (moyenne)
A	0.209	0.225	0.244	0.220	0.228	0.165	0.163	0.208
Erreur (%)	-	7.7	16.8	5.2	9.3	20.9	21.9	0.7
B	0.179	0.188	0.162	0.173	0.175	0.187	0.174	0.177
Erreur (%)	-	5.0	9.6	3.4	2.2	4.6	2.9	1.4
C	0.090	0.091	0.084	0.084	0.091	0.089	0.093	0.089
Erreur (%)	-	1.3	5.8	6.7	1.5	0.7	3.8	1.5

Tableau 4.5. Comparaison des longueurs intégrales d'autocorrélation longitudinales du spectre de von Karman-Pao. Les longueurs intégrales sont en mètre.

Simulation	L_{ii}^i (théorique)	L_{11}^1	L_{22}^2	L_{33}^3	L_{ii}^i (moyenne)
D	0.390	0.350	0.409	0.412	0.390
Erreur (%)	-	10.3	5.0	5.6	~ 0.0
E	0.390	0.365	0.407	0.418	0.396
Erreur (%)	-	6.2	4.5	7.3	1.7
F	0.390	0.424	0.403	0.380	0.402
Erreur (%)	-	8.9	3.3	2.6	3.2

Tableau 4.6. Comparaison des longueurs intégrales d'autocorrélation transverse du spectre de von Karman-Pao. Les longueurs intégrales sont en mètre.

Simulation	L_{ii}^j (théorique)	L_{11}^2	L_{11}^3	L_{22}^1	L_{22}^3	L_{33}^1	L_{33}^2	L_{ii}^j (moyenne)
D	0.195	0.214	0.230	0.217	0.216	0.159	0.177	0.202
Erreur (%)	-	10.0	18.2	11.2	10.9	18.4	9.2	3.7
E	0.195	0.209	0.204	0.203	0.209	0.177	0.176	0.196
Erreur (%)	-	7.3	4.8	4.2	7.4	9.2	9.6	0.7
F	0.195	0.222	0.175	0.165	0.213	0.204	0.214	0.199
Erreur (%)	-	13.8	10.1	15.5	9.1	4.9	9.6	2.0

4.4.3 Les spectres d'énergie

Une autre approche permettant de valider l'implémentation de la procédure d'initialisation consiste à calculer le spectre d'énergie à partir du champ de vitesse discret, puis de remonter jusqu'au spectre d'énergie initial et de le comparer avec l'expression analytique.

Le spectre d'énergie analytique $E(k)$ est relié au spectre d'énergie discret $\varepsilon(k)$ par les relations suivantes [Boughanem et Trouvé, 1996] :

$$k = \frac{1}{2} \sum_k \varepsilon_{ii}(k) \quad (4.35) \quad k = \int_0^\infty E(k) dk = \sum_k \frac{\varepsilon(k)}{4\pi k^2} \quad (4.36)$$

Le facteur $4\pi k^2$ correspond à la surface de la sphère portée par le vecteur d'onde k . En égalisant les relations (4.35) et (4.36), le terme de summation disparaît et on peut écrire une équation liant la diagonale du tenseur spectral d'énergie avec le spectre d'énergie discret :

$$\varepsilon(k) = 2\pi k^2 \varepsilon_{ii}(k) \quad (4.37)$$

En développant la somme dans l'équation (4.36), on obtient :

$$\int_0^\infty E(k) dk = \frac{1}{\Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{\varepsilon(k)}{4\pi k^2} \Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3 \quad (4.38)$$

L'isotropie de la distribution d'énergie dans l'espace de Fourier permet de passer d'une somme triple à une somme simple :

$$\sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{\varepsilon(k)}{4\pi k^2} \Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3 = \sum_k \frac{\varepsilon(k)}{4\pi k^2} 4\pi k^2 \Delta k \quad (4.39)$$

Cette étape correspondant au passage d'une somme en coordonnées cartésiennes vers une somme en coordonnées sphériques. Finalement, en utilisant :

$$\Delta k_1 = \frac{2\pi}{L_1} \quad (4.40) \quad \Delta k_2 = \frac{2\pi}{L_2} \quad (4.41) \quad \Delta k_3 = \frac{2\pi}{L_3} \quad (4.42)$$

On obtient la relation :

$$k = \int_0^\infty E(k) dk = \frac{L_1 L_2 L_3}{8\pi^3} \sum_k \varepsilon(k) \Delta k \quad (4.43)$$

En enlevant la sommation et le signe d'intégrale et en considérant uniquement une géométrie cubique, on obtient l'expression finale :

$$\varepsilon(k) = \frac{8\pi^3}{L^3} E(k) \quad (4.44)$$

La relation entre le champ de vitesse dans l'espace de Fourier et la diagonale du tenseur spectral d'énergie discret en 3-D ε_{ii} est donnée par l'expression suivante [Boughanem et Trouvé, 1996] :

$$\varepsilon_{ii}(k) = \widehat{u}_i^*(k)\widehat{u}_i(k) = |\widehat{u}_i|^2 \quad (4.45)$$

La transformée de Fourier permettant de passer de l'espace réel vers l'espace spectral se fait sur une plage de vecteurs d'onde définie à l'équation (4.11). Ces vecteurs d'onde sont ensuite convertis en amplitude, puis l'énergie cinétique contenue sur chacune de ces amplitudes est moyennée sur une largeur de bande δk correspondant à la taille d'un volume de contrôle. Ce moyennage du signal de l'énergie de turbulence joue le rôle de filtre servant à lisser les courbes des spectres.

La figure 4.9 compare les spectres théoriques de Passot-Pouquet des simulations A à C avec les spectres numériques obtenus à partir des champs de vitesse. On note une excellente

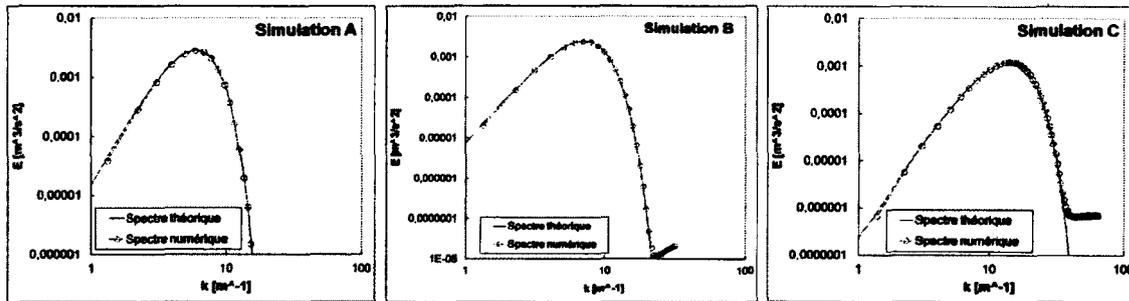


Figure 4.9 Comparaison des spectres théoriques initiaux de Passot-Pouquet avec les spectres numériques.

concordance entre les courbes analytiques et celles obtenues à partir du champ de vitesse discret. Chacun des points représente la moyenne de l'énergie de turbulence contenue dans la largeur de bande δk portée par la taille d'un volume de contrôle. On observe également que pour les simulations B et C, les champs de vitesse discrets ne permettent plus de capturer adéquatement l'énergie contenue dans les nombres d'onde les plus élevés. Étant donné la nature du spectre de Passot-Pouquet, la quantité d'énergie de turbulence devient si faible pour les valeurs de k élevées, que la précision numérique de la méthode ne permet plus de suivre le spectre analytique. Face à cette situation, on observe que la méthode

permet de conserver l'énergie de turbulence essentiellement constante jusqu'à l'échelle de Kolmogorov, ce qui évite de contaminer le champ de vitesse initial.

La figure 4.10 compare les spectres théoriques de von Karman-Pao des simulations D à F avec les spectres numériques obtenus à partir des champs vitesses. On remarque que

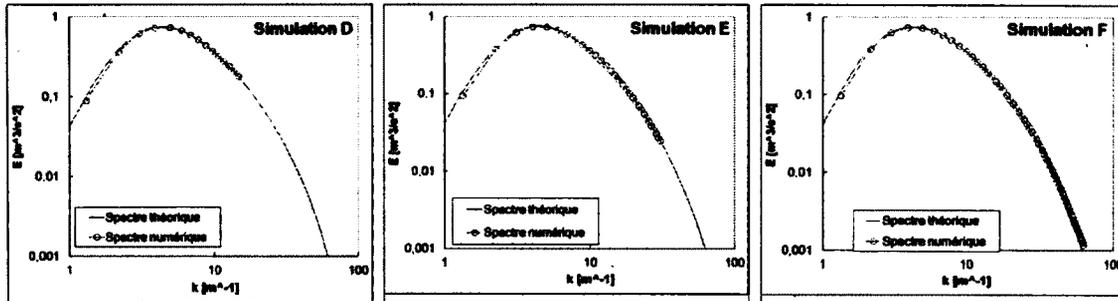


Figure 4.10 Comparaison des spectres théoriques initiaux de von Karman-Pao avec les spectres numériques.

la formulation de von Karman-Pao permet de distribuer plus adéquatement l'énergie de turbulence sur la plage de nombres d'onde. En conséquence, la méthode d'initialisation permet de générer un champ de vitesse qui suit le spectre analytique sur tout l'intervalle de nombres d'onde pouvant être capturé par le maillage.

4.4.4 Visualisation des champs de vitesse initiaux

Cette section présente l'allure des champs de vitesse initiaux calculés avec le spectre de Passot-Pouquet et de von Karman-Pao. La figure 4.11 compare les champs de vitesse des simulations B et E. Les paramètres utilisés pour définir les spectres sont présentés aux tableaux 5.1 et 4.2. La différence entre les vitesses turbulentes U_p des deux simulations correspond à une quantité initiale d'énergie cinétique turbulente k_0 presque 500 fois plus grande pour le cas E (spectre de von Karman-Pao) que pour le cas B (spectre de Passot-Pouquet). Cette différence importante dans la valeur de k_0 explique les écarts importants que l'on observe dans les plages de vitesse entre les deux spectres.

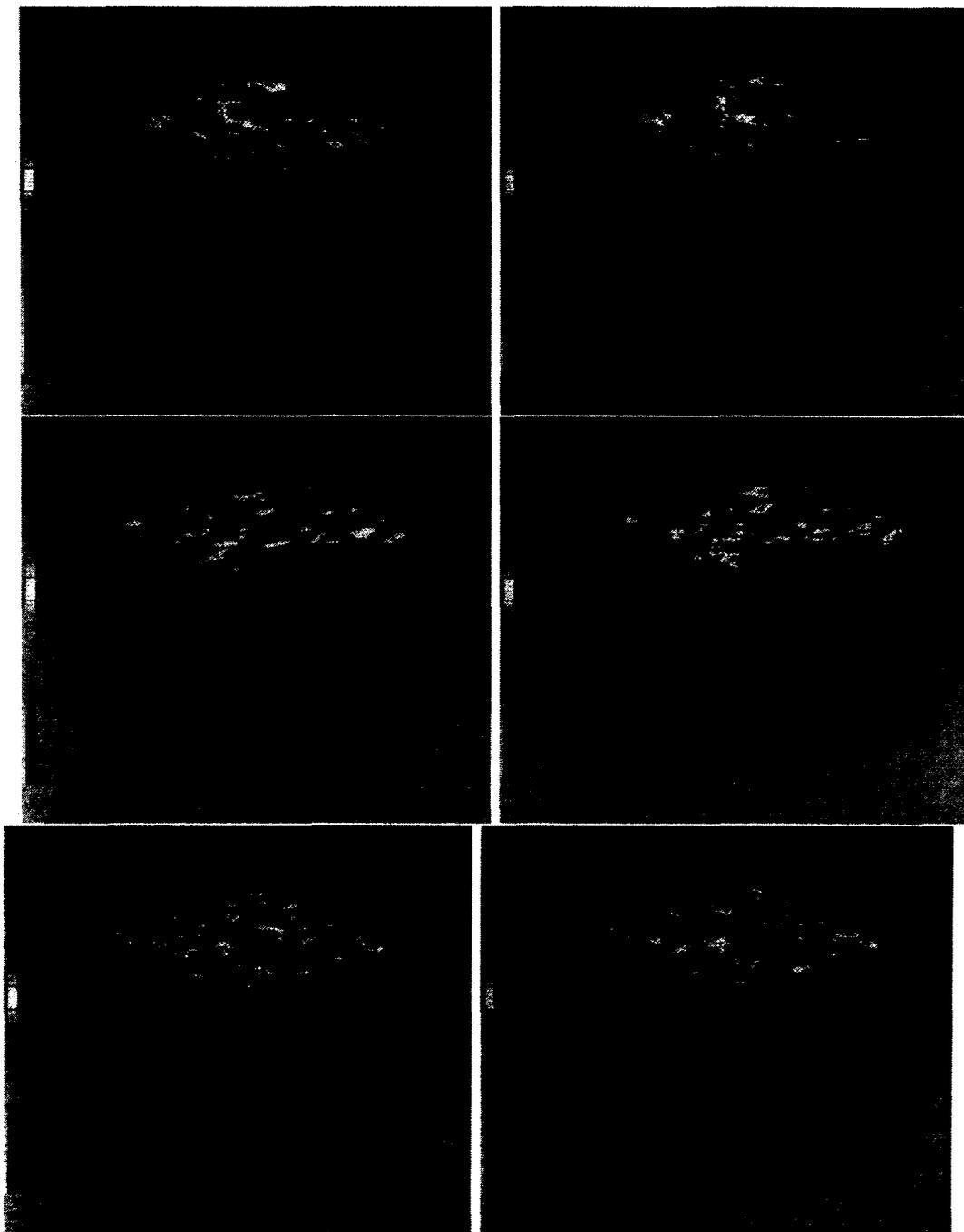


Figure 4.11 Champ de vitesse initial - Spectre de Passot-Pouquet à gauche, spectre de von Karman-Pao à droite. En haut : la composant u' , au milieu : la composante v' , en bas : la composante w'

En conclusion, l'analyse des échelles intégrales de corrélation et des courbes des coefficients de corrélation a permis de confirmer que la méthode d'initialisation génère une turbulence possédant des caractéristiques proche d'une turbulence isotrope. La comparaison des spectres d'énergie théoriques avec ceux calculés à partir du champ de vitesse discret nous assure que ce dernier possède les caractéristiques de la formulation analytique du spectre d'énergie utilisée.

Maintenant que cette étape de validation est complétée, la prochaine section traite de la décroissance proprement dite de cette turbulence isotrope.

4.5 Résultats de la décroissance

Cette section s'intéresse à la décroissance de l'énergie cinétique d'une turbulence isotrope. Un certain nombre d'analyses [Kolmogorov, 1941; Saffman, 1967b; von Karman et Howarth, 1938] ont permis de déterminer que cette décroissance devait suivre une loi exponentielle de la forme :

$$k = k_0 \left[1 + \left(\frac{\epsilon_0 t}{k_0 n} \right) \right]^{-n} \quad (4.46)$$

où k_0 correspond à la quantité d'énergie cinétique initiale dans le domaine et ϵ_0 correspond au taux de dissipation initial. La valeur de l'exposant n dépend essentiellement de deux paramètres : la forme du spectre d'énergie lorsque $k \rightarrow 0$ [Saffman, 1967a] et le nombre de Reynolds turbulent $Re_t = \frac{k^2}{\epsilon \nu}$ de la simulation. [Perot et De Bruyn Kops, 2006] expliquent en détail les différentes valeurs que l'exposant n peut prendre en fonction de la forme du spectre :

Tableau 4.7 Valeurs de l'exposant n en fonction de la forme du spectre.

Forme du spectre lorsque $k \rightarrow 0$	Re_t élevé	Re_t faible
k^2 (vKP)	6/5	3/2
k^4 (PP)	10/7	5/2

L'intervalle de temps correspondant à la décroissance d'une turbulence est exprimé en fonction d'une échelle de temps caractéristique τ_ϵ appelée temps de retournement du tourbillon. Pour les grandes échelles turbulentes, cet intervalle est défini par : $\tau_\epsilon = \frac{k}{\epsilon}$. Cet intervalle de temps correspond à la durée d'une révolution des plus grandes structures turbulentes dans l'écoulement.

4.5.1 Résultats sans modèle de turbulence

La première étape consiste à analyser les courbes de décroissance sans l'introduction de modèles de sous-maille. Pour ce faire, on utilisera les simulations A à C du spectre de Passot-Pouquet, où la totalité des échelles de turbulence sont capturées par le maillage. La décroissance de l'énergie cinétique est calculée à chaque pas de temps au cours de la simulation à partir des valeurs du champ de vitesse $k = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle$.

Le tableau 4.8 compile les caractéristiques des simulations avec les spectres de Passot-Pouquet et présente les valeurs de l'exposant n qui ont été utilisées pour tracer les courbes théoriques de décroissance. La figure 4.12 compare les courbes de décroissance de l'énergie

Tableau 4.8 *Caractéristiques des simulations avec les spectres de Passot-Pouquet*

Simulation	$\epsilon_0 [m^2/s^3]$	$k_0 [m^2/s^2]$	$\nu [m^2/s]$	Re_t	$\tau_\epsilon [s]$	$\Delta t [s]$	n
A	0.064	0.015	0.0475	0.074	0.234	0.01	2.3
B	0.025	0.015	0.0135	0.672	0.605	0.02	2.25
C	0.049	0.015	0.0067	0.692	0.307	0.03	2.25

cinétique en fonction du temps sans modèle de sous-maille. Ces courbes ont été obtenues sur un intervalle de temps correspondant à quelques temps de retournement. Le pas de temps Δt utilisé pour chacun de ces calculs est inclus dans le tableau 4.8. On observe un bon accord entre les courbes théoriques et les résultats numériques, tout particulièrement pour les grilles de 64^3 noeuds et 128^3 noeuds.

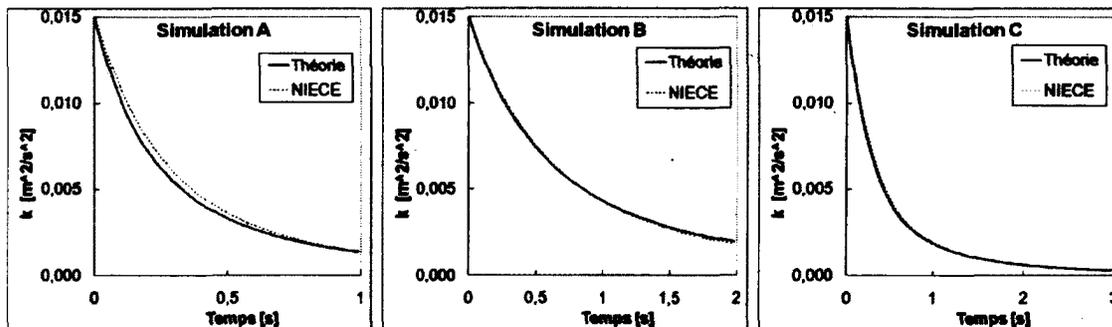


Figure 4.12 *Décroissance de l'énergie cinétique turbulente sans modèle de sous-maille.*

La figure 4.13 illustre la décroissance des spectres d'énergie en fonction du temps. Ces courbes sont obtenues en appliquant la procédure permettant de récupérer le spectre d'énergie à partir du champ de vitesse à la fin de chaque itération. On note une décroissance

assez régulière des spectres à l'exception des régions où les nombres d'onde sont élevés. Cette observation vient confirmer que l'énergie de turbulence contenue dans les nombres d'onde élevés ne vient pas contaminer l'évolution de l'énergie cinétique dans le reste du spectre. Les résultats de cette décroissance sans modèle de sous-maille avec le spectre de

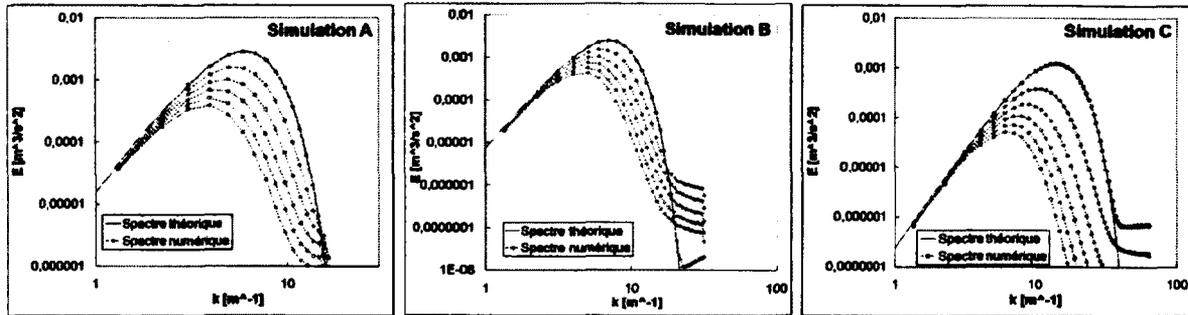


Figure 4.13 *Décroissance des spectres de Passot-Pouquet sans modèle de sous-maille. Les courbes sont espacées d'un intervalle de : 0.2 sec. à gauche, 0.4 sec. au milieu et 0.6 sec. à droite.*

Passot-Pouquet permettent maintenant de considérer la décroissance du spectre de von Karman-Pao. Ce spectre permet de capturer plus adéquatement la portion inertielle du spectre d'énergie et consitue un candidat idéal pour introduire les modèles de sous-maille et évaluer leur influence sur la décroissance de l'énergie de turbulence.

4.5.2 Comparaison des modèles de sous-maille

Cette section présente la comparaison de la décroissance de l'énergie de turbulence des simulations D à F du spectre de von Karman-Pao. L'objectif consiste à évaluer l'influence des modèles de sous-maille suivant sur les courbes de décroissance : le modèle de Smagorinsky classique, le modèle de WALE et le modèle de Vreman. On souhaite également déterminer l'impact des modèles de sous-maille par rapport à la solution sans modèle de turbulence.

Le tableau 4.9 présente les caractéristiques principales des simulations réalisées avec le spectre de von Karman-Pao. Le pas de temps de chacune des simulations est ajusté de façon à obtenir un $CFL = 0.5$. De plus, l'échelle spatiale de Kolmogorov est ajustée à $\eta_k = 0.0118$ m, alors que la taille des éléments Δx des trois maillages utilisés est significativement plus grande. En conséquence, l'effet dissipatif des plus petites échelles de la turbulence devra être modélisé à l'aide des modèles de sous-maille.

L'énergie de sous-maille

Tableau 4.9 *Caractéristiques des simulations avec le spectre de von Karman-Pao*

Simulation	ϵ_0 [m ² /s ³]	k_0 [m ² /s ²]	ν [m ² /s]	Re_t	Δt [s]	n	Δx [m]
D	17.4	7.39	0.007	6.65	0.008	2.1	0.20
E	17.4	7.39	0.007	6.65	0.004	2.1	0.10
F	17.4	7.39	0.007	6.65	0.002	2.1	0.05

Afin de quantifier la contribution des modèles de sous-maille, on calcule l'énergie de sous-maille k_{sgs} à l'aide de la méthode d'Yoshizawa [Sagaut, 2005]. Cette méthode s'appuie sur une simple analyse dimensionnelle et requiert les mêmes paramètres que les modèles algébriques de Smagorinsky.

$$k_{sgs}^2 = 2C_I \Delta^2 |S|^2 \quad (4.47)$$

La valeur de la constante est rapportée à $C_I = 1/\pi^2$ dans [Fureby *et al.*, 1997] et $C_I = 0.01$ dans [Moin *et al.*, 1991].

Les résultats de la contribution de l'énergie de sous-maille présentés dans la section suivante ont été calibrés avec une constante $C_I = 0.05$. Cette calibration a été obtenue en utilisant les résultats de la décroissance d'une turbulence homogène isotrope sur un cube de 32^3 noeuds avec le modèle de Smagorinsky.

Résultats de la décroissance de l'énergie de turbulence

La figure 4.14 compare la décroissance de l'énergie de turbulence des différents modèles de sous-maille et des différents maillages utilisés. Les valeurs d'énergie cinétique sont adimensionnées avec la valeur théorique d'énergie de turbulence initiale k_0 que l'on retrouve au tableau 4.9 et les valeurs de temps sont quant à elle adimensionnalisées avec le temps total de la simulation $t_0 = 2$ s afin de faciliter la comparaison de la contribution de l'énergie de sous-maille versus l'énergie résolue entre les différents modèles et les différents maillages.

L'énergie cinétique totale est définie comme la somme de l'énergie cinétique résolue et l'énergie de sous-maille.

$$k_{total} = \bar{k} + k_{sgs} \quad (4.48)$$

Les courbes de décroissance théoriques ont été obtenues avec les valeurs de ϵ_0 , k_0 et n compilées dans le tableau 4.9. Étant donné le grand nombre de paramètres pouvant être ajustés d'une simulation à l'autre afin de calibrer les courbes numériques sur les courbes théoriques, l'analyse est réalisée de façon relative d'un modèle ou d'un maillage à l'autre, plutôt que de façon absolue. Cette calibration initiale explique les écarts observés entre les courbes théoriques et les courbes d'énergie totale.

Les courbes théoriques sont présentées à titre indicatif.

On note sur la figure 4.14 que la contribution initiale (i) de l'énergie de sous-maille est à peu près identique d'un modèle de turbulence à l'autre. En revanche, la contribution finale (f) de l'énergie de sous-maille varie davantage d'un modèle de sous-maille à l'autre. On remarque également que la contribution relative de l'énergie de sous-maille diminue au fur et à mesure que le maillage utilisé est raffiné. Cette observation confirme que l'effet dissipatif des échelles de sous-maille est modélisé de façon adéquate. Le tableau 4.10 compare ces valeurs.

Tableau 4.10 Contribution de l'énergie de sous-maille.

	32 ³ noeuds		64 ³ noeuds		128 ³ noeuds	
	$\left(\frac{k_{sgs}}{k_{total}}\right)_i$	$\left(\frac{k_{sgs}}{k_{total}}\right)_f$	$\left(\frac{k_{sgs}}{k_{total}}\right)_i$	$\left(\frac{k_{sgs}}{k_{total}}\right)_f$	$\left(\frac{k_{sgs}}{k_{total}}\right)_i$	$\left(\frac{k_{sgs}}{k_{total}}\right)_f$
Smagorinsky	14.5%	32.2%	11.1%	27.7%	7.8%	19.9%
WALE	14.5%	36.6%	11.1%	27.3%	7.8%	19.6%
Vreman	14.9%	11.0%	11.1%	28.1%	7.8%	20.1%

Résultats de la décroissance des spectres d'énergie

Afin d'étayer davantage les observations faites à partir des courbes de décroissance de l'énergie de turbulence, on s'intéresse maintenant à la décroissance des spectres d'énergie. La figure 4.15 compare la décroissance des spectres de turbulence obtenue avec les différents modèles de sous-maille sur les grilles 32³, 64³ et 128³ noeuds. On retrouve également les résultats obtenus avec la solution sans modèle de sous-maille.

La comparaison des différents modèles de sous-maille avec la simulation sans modèle pour le cube à 32³ noeuds (simulation D) permet de mettre en évidence l'impact des modèles de sous-maille sur la dissipation des petites échelles. Pour la simulation sans modèle de turbulence à 32³ noeuds, les nombres d'onde élevés ne peuvent être dissipés adéquatement et viennent contaminer le reste de la solution. On observe un phénomène similaire pour les simulations sans modèle de sous-maille à 64³ et 128³ noeuds, mais on note que la résolution d'échelles de plus en plus petites permet de mieux capturer le phénomène de la cascade d'énergie de Kolmogorov.

En revanche, les courbes de décroissance des spectres d'énergie de la figure 4.15 avec les modèles de sous-maille de Smagorinsky, WALE et Vreman viennent démontrer que ces derniers sont en mesure d'adéquatement dissiper l'énergie de turbulence contenue dans les plus petites échelles non résolues de l'écoulement.

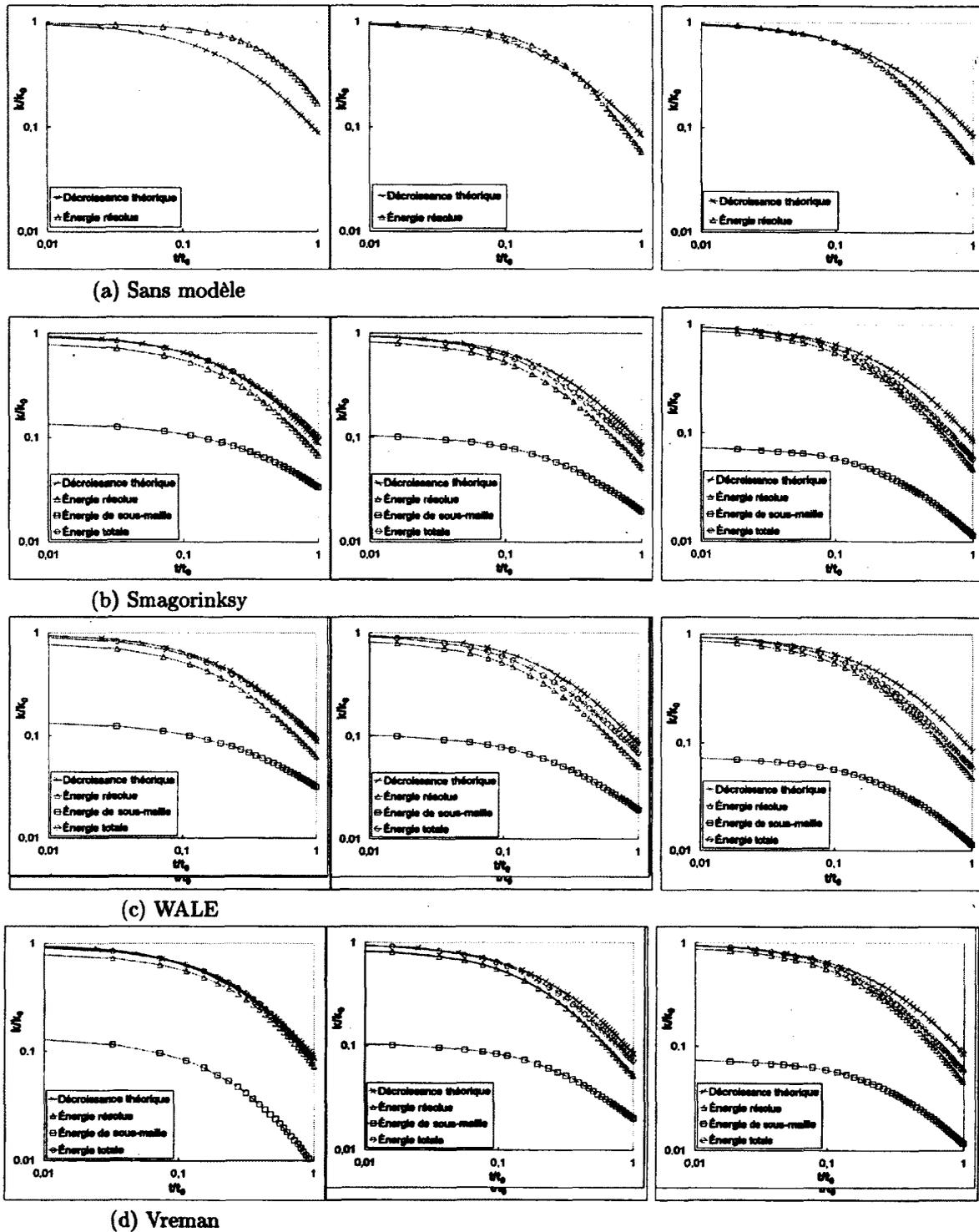


Figure 4.14 Comparaison de la décroissance de l'énergie cinétique turbulente des différents modèles de sous-maille. Colonne de gauche 32^3 noeuds, colonne du milieu 64^3 noeuds, colonne de droite 128^3 noeuds.

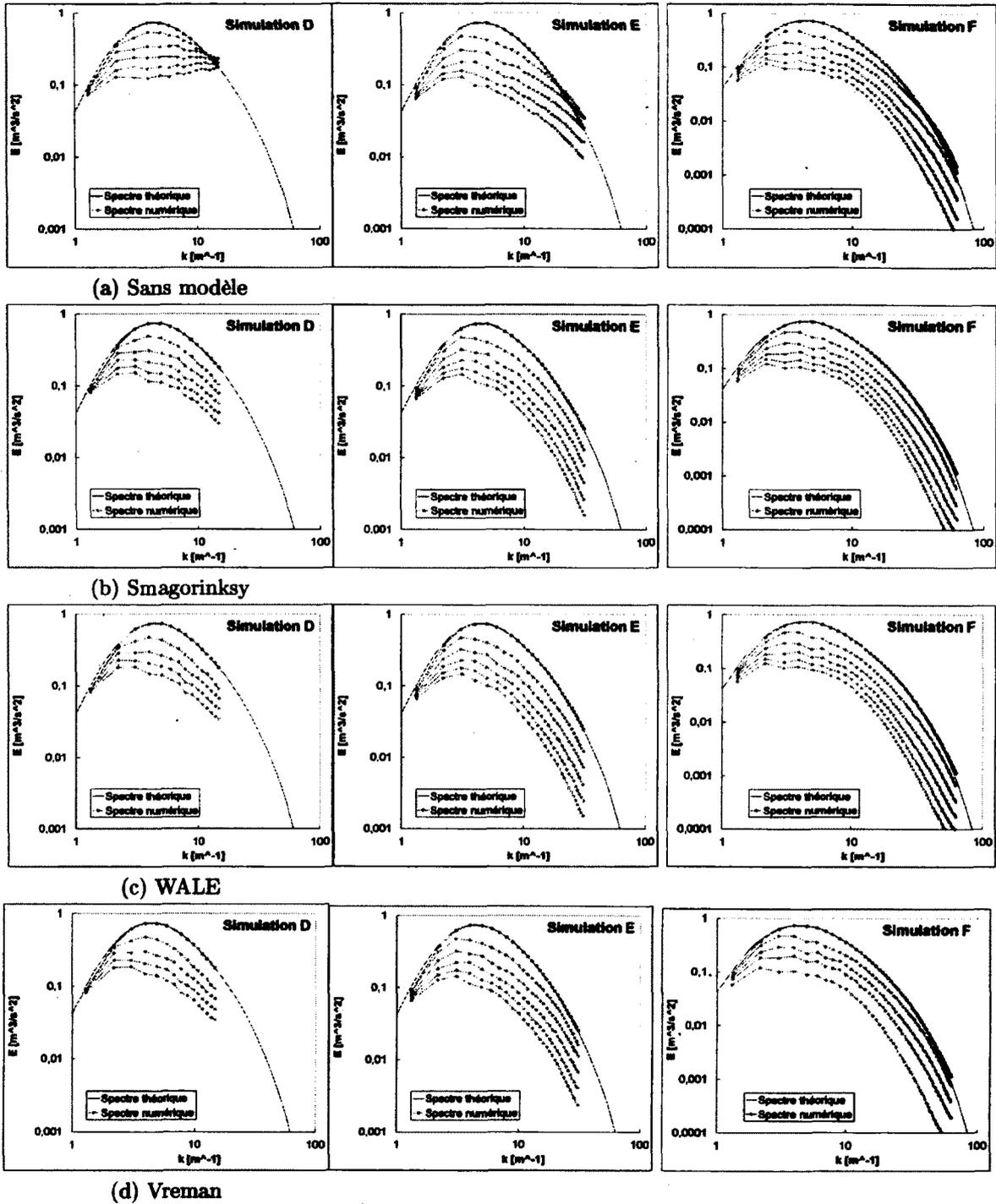


Figure 4.15 Décroissance du spectre de von Karman-Pao avec les différents modèles de sous-maille. Les courbes sont espacées d'un intervalle de 0.2 sec.

Les résultats de ce chapitre démontrent l'implémentation adéquate des modèles de turbulence dans NIECE ainsi que la capacité du code à simuler adéquatement la décroissance d'une turbulence isotrope avec le schéma de Crank-Nicolson en temps et un schéma centré en espace. L'algorithme permettant d'initialiser une turbulence isotrope sur un domaine en trois dimensions a été détaillé et les étapes ayant permis sa validation ont également été présentés.

Avant de s'intéresser à la simulation d'une turbulence anisotrope, traité au chapitre 6, il convient présenter le travail réalisé sur une méthode d'injection de turbulence. La représentation de l'écoulement à l'entrée du domaine de calcul fait parti des éléments essentiels à mettre en place dans le cadre de l'implémentation de la technique de simulation des grandes échelles. Le prochain chapitre présente donc la théorie et les étapes de validation ayant servi à implémenter la méthode retenue.

CHAPITRE 5

CHOIX ET VALIDATION DE LA MÉTHODE D'INJECTION DE TURBULENCE

L'approche retenue est la méthode des tourbillons synthétiques [Jarrin, 2008]. Cette méthode est basée sur une modélisation de la turbulence comme une superposition de structures cohérentes. Ces structures cohérentes sont générées sur un plan d'injection et sont portées par une fonction de forme qui englobe leurs caractéristiques spatiales et temporelles. L'idée consiste à construire un signal synthétique pour les trois composantes de la vitesse comme une somme d'un nombre fini de tourbillons dont l'intensité et la position varie de façon aléatoire.

Cette approche est particulièrement attrayante à implémenter, car elle permet de produire des champs de vitesse qui sont à la fois cohérents dans l'espace et dans le temps sans effectuer d'opérations nécessitant des transformées de Fourier. En conséquence, la méthode est relativement simple à mettre en oeuvre dans un code parallèle et requiert un temps de calcul raisonnable pour le type d'applications visé. La section suivante détaille l'implémentation de la méthode.

5.1 Présentation de la méthode des tourbillons synthétiques

Considérons la distribution d'un nombre fini de noeuds sur le plan $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ sur lequel on vient générer le signal synthétique correspondant aux fluctuations de vitesse. $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ correspondent aux coordonnées 3-D dans l'espace de chacun des noeuds situés sur le plan d'injection. La méthode suppose que les composantes moyennes de la vitesse U, V, W , les composantes du tenseur de Reynolds $\rho u'_i u'_j$ et l'échelle de turbulence caractéristique de l'écoulement sont connues pour l'ensemble des noeuds situés sur le plan d'injection. La première étape consiste à générer un domaine virtuel B dans lequel on viendra générer les tourbillons synthétiques. Ce domaine virtuel est défini comme :

$$B = \{(x_1, x_2, x_3)\} \in \mathbb{R}^3 : x_{i,min} < x_i < x_{i,max}, i = \{1, 2, 3\} \quad (5.1)$$

où :

$$x_{i,min} = \min_{\mathbf{x} \in S} (x_i - \sigma(\mathbf{x})) \text{ et } x_{i,max} = \max_{\mathbf{x} \in S} (x_i + \sigma(\mathbf{x})) \quad (5.2)$$

Le volume de la boîte virtuelle contenant les tourbillons est noté V_B . La figure 5.1 est une représentation de ce domaine virtuel qui englobe le plan d'injection 2-D où les fluctuations de vitesse seront calculées. Dans la méthode des tourbillons synthétiques, le champ de

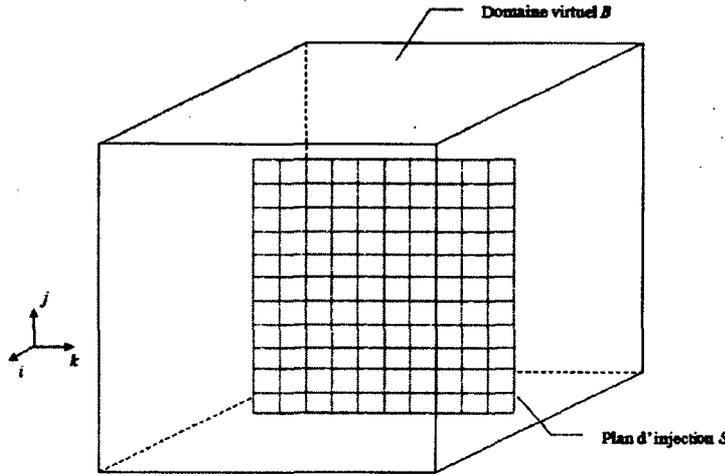


Figure 5.1 *Domaine virtuel qui englobe le plan d'injection.*

vitesse généré par N tourbillons prend la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \mathbf{c}^k f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad (5.3)$$

où \mathbf{x}_k correspond à la position des tourbillons et \mathbf{c}^k correspond à leur intensité respective. $f_{\sigma(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$ représente la distribution de vitesse du tourbillon situé à la position \mathbf{x}_k . La méthode suppose que les différences dans les distributions de vitesse entre les tourbillons dépendent uniquement d'une longueur caractéristique σ et la fonction f_{σ} définie comme :

$$f_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = \sqrt{V_B} \sigma^{-3/2} f\left(\frac{x - x_k}{\sigma}\right) f\left(\frac{y - y_k}{\sigma}\right) f\left(\frac{z - z_k}{\sigma}\right) \quad (5.4)$$

où la fonction de forme f est commune à tous les tourbillons. f est définie non nulle sur le support $[-\sigma, \sigma]$ et satisfait la normalisation :

$$\int_{-\sigma}^{+\sigma} f^2(\xi) d\xi = 1 \quad (5.5)$$

La position des tourbillons \mathbf{x}_k est déterminée aléatoirement à partir d'une distribution uniforme sur le domaine virtuel B . Les amplitudes \mathbf{c}^k sont données par :

$$c_i^k = a_{ij}\epsilon_j^k \quad (5.6)$$

où a_{ij} correspond à la décomposition de Cholesky du tenseur de Reynolds et ϵ_j^k est une variable aléatoire indépendante prise d'une distribution dont la moyenne est zéro et la variance vaut un. [Jarrin *et al.*, 2006] propose dans son article la distribution $\epsilon_j^k \in [-1 \text{ ou } 1]$ avec une probabilité égale pour chacune des valeurs.

Les tourbillons sont convectés dans le domaine virtuel avec une vitesse constante \mathbf{U}_c , caractéristique de l'écoulement. La méthode a été implémentée en considérant \mathbf{U}_c comme l'intégrale surfacique de la vitesse moyenne sur l'ensemble des noeuds définis sur le plan d'injection S .

$$\mathbf{U}_c = \frac{1}{A} \int_S \mathbf{U}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.7)$$

où A correspond à l'aire du plan d'injection.

À chaque itération, la nouvelle position du tourbillon k est donnée par :

$$\mathbf{x}^k(t + dt) = \mathbf{x}^k(t) + \mathbf{U}_c dt \quad (5.8)$$

où dt est le pas de temps de la simulation.

5.2 Simulation d'une turbulence isotrope

Afin de vérifier la validité de la méthode, les résultats de la génération d'une turbulence isotrope sont reproduits à partir de l'expérience numérique présentée dans [Jarrin, 2008]. Les fluctuations de vitesse isotropes sont générées sur le plan (O_{yz}) de dimensions $2\pi \times 2\pi$ [m²]. On impose une vitesse moyenne $U_0 = 10$ m/s dans la direction perpendiculaire au plan d'injection. L'énergie cinétique turbulente injectée sur le plan est $k = 1.5$ m²/s². L'hypothèse d'isotropie impose que les composantes du tenseur de Reynolds sont $\rho u'u' = \rho v'v' = \rho w'w' = 1$ m²/s² et que les composantes hors diagonales du tenseur sont nulles.

Les fluctuations de vitesse générées par chacun des tourbillons sont décrites par la fonction de forme f_σ :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}}(1 - |x|) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.9)$$

Le rayon de chaque tourbillon est défini constant à $\sigma = 0.5$ m et le nombre de tourbillons est choisi à $N = 1000$. Les fluctuations de vitesse générées sont évaluées sur un maillage contenant 128 noeuds dans chaque direction ($\Delta y = \Delta z \approx 0.1\sigma$) à chaque intervalle de temps $dt = 0.1\sigma/U_0$.

La figure 5.2 montre l'évolution temporelle de la vitesse moyenne et des composantes spatiales du tenseur de Reynolds. Les graphiques de convergence ont été obtenus en réalisant la moyenne spatiale des différentes quantités sur le plan d'injection. La figure 5.2 dé-

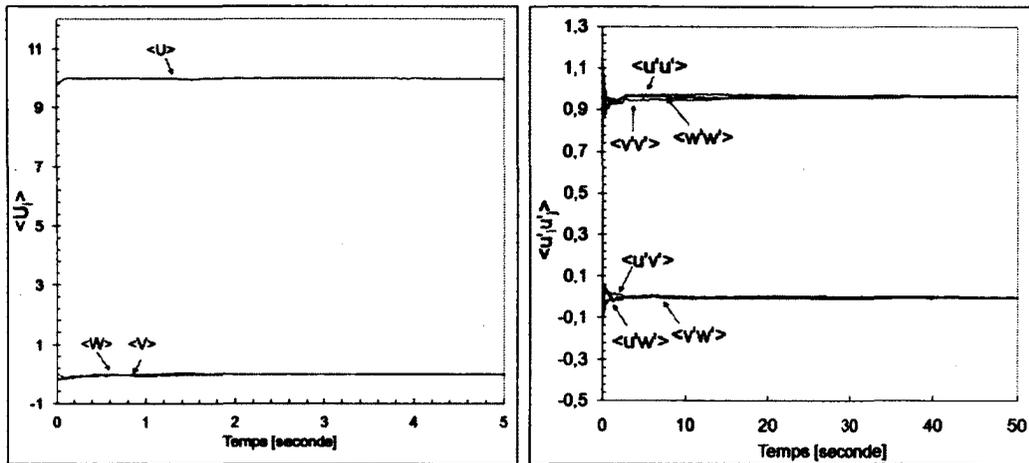


Figure 5.2 Évolution temporelle de la vitesse moyenne et des composantes du tenseur de Reynolds. Les échelles de temps sont différentes pour les deux graphiques.

montre que la méthode est en mesure de reproduire adéquatement une turbulence dont les composantes du tenseur de Reynolds correspondent aux quantités spécifiées. On note également que l'approche permet de récupérer en quelques itérations les valeurs moyennes des trois composantes de la vitesse. La figure 5.3 montre l'historique du signal u , v and w calculé sur le noeud situé à la position $(y, z) = (\pi, \pi)$ sur le plan d'injection, ainsi que les contours instantanés de u , v et w après 1000 itérations. Un exemple de contours instantanés des champs de vitesse sur le plan d'injection est également donné. On remarque que ces fluctuations varient d'une amplitude allant d'environ $[-2 \text{ m/s}, 2 \text{ m/s}]$, ce qui est en accord avec la distribution de probabilité de la composante v' des fluctuations de vitesse $F(v')$, donnée à la figure 5.4 : la probabilité d'obtenir une fluctuation dont l'amplitude est supérieure à 2 m/s est quasi nulle.

Finalement, il est intéressant de calculer la corrélation en deux points pour les trois composantes de la vitesse sur le plan d'injection. Ces graphiques permettent d'associer le paramètre physique σ correspondant à la taille des tourbillons, à la corrélation des si-

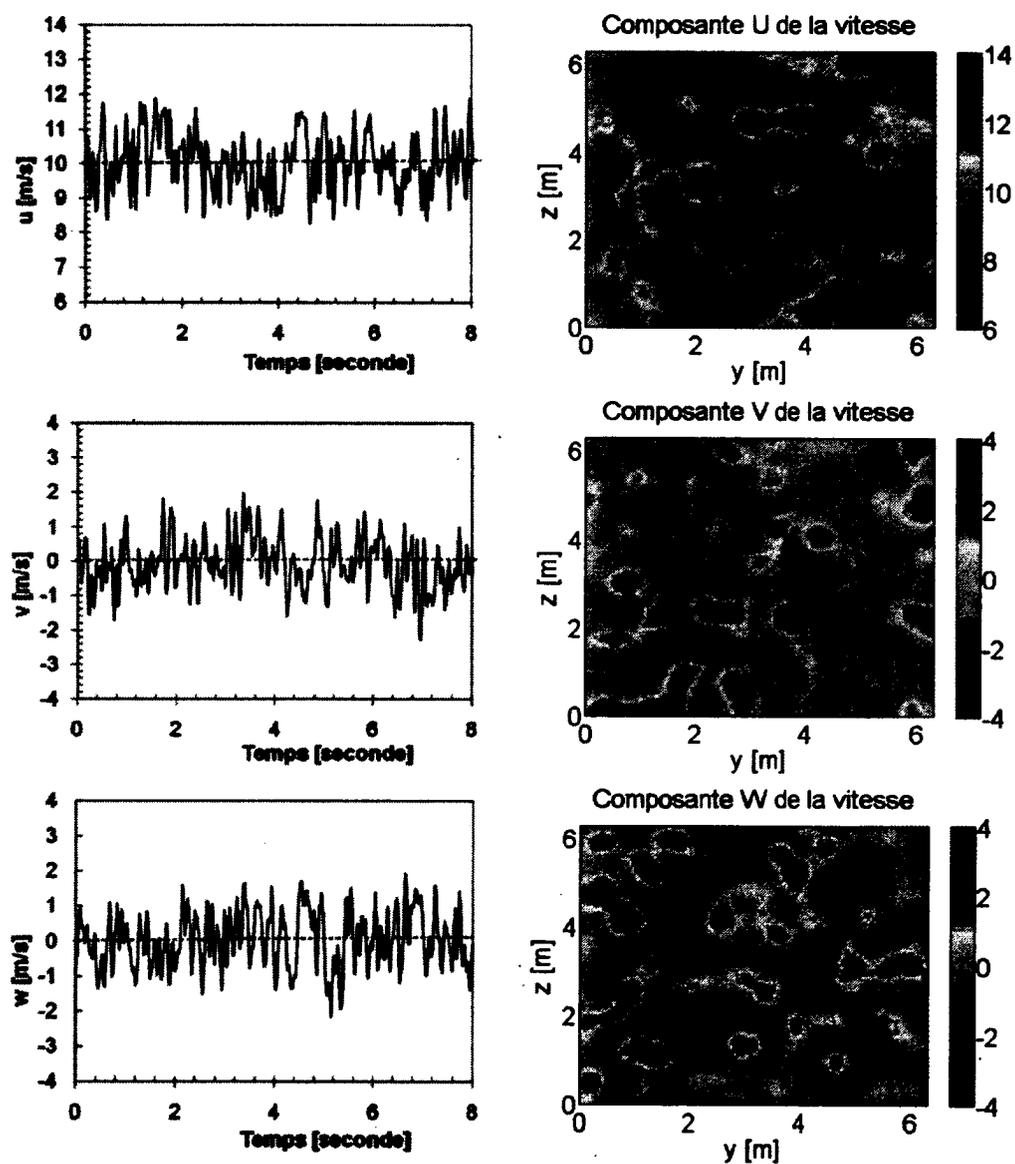


Figure 5.3 Historique des signaux de u , v , w et contours instantannés de la vitesse sur le plan d'injection.

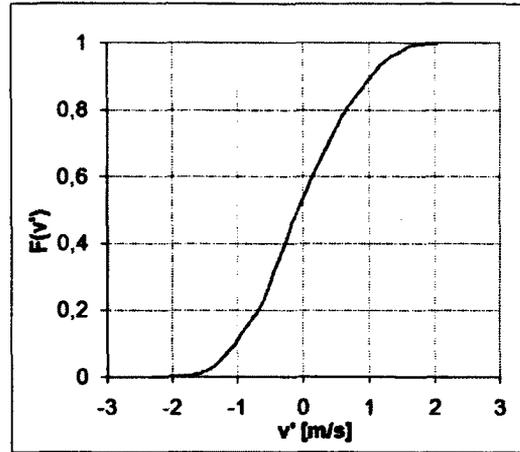


Figure 5.4 Distribution de probabilité de la composante v'

gnaux de vitesse générés par la méthode. La figure 5.5 compare ces corrélations en deux points. La courbe théorique, dérivée dans [Jarrin, 2008] pour une turbulence isotrope, est donnée par :

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = R_{ij} \cdot \prod_{l=1}^3 [f_{\sigma} * f_{\sigma}]\left(\frac{r_l}{\sigma}\right) \quad (5.10)$$

où le symbole $*$ correspond à l'opération de convolution. On remarque que la fonction de corrélation approche zéro à une distance qui en accord avec la taille du paramètre σ . La corrélation spatiale du champ de vitesse calculée à la figure 5.5 met en évidence l'intérêt principal de la méthode, c'est-à-dire obtenir un champ vitesse cohérent à l'entrée du domaine de calcul.

5.3 Influence des paramètres numériques

On s'intéresse maintenant à l'influence des paramètres numériques σ et N qui doivent être fournis ou calculés avant la simulation. Cette étape servira plus tard à la dérivation d'un critère de sélection automatique assurant l'obtention d'un signal représentatif d'une turbulence réelle. La table 5.1 présente le détail des différentes simulations qui ont été réalisées pour cette analyse. On étudiera d'abord l'influence de la quantité de tourbillons initiale sur la topologie du champ de fluctuations de vitesse. La configuration de l'expérience numérique présentée à la section précédente est reproduite avec $N = 10$ (simulation A), $N = 100$ (simulation B), $N = 1000$ (simulation C), $N = 10000$ (simulation D).

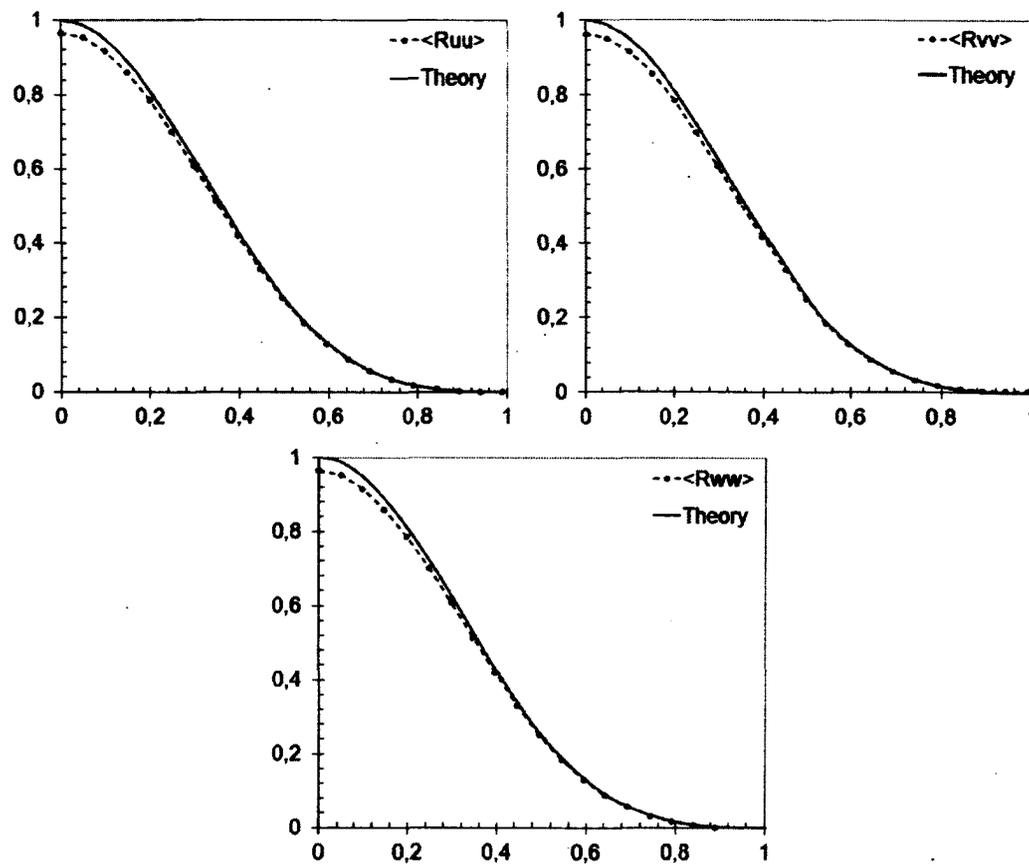


Figure 5.5 Corrélation en deux points

Tableau 5.1 Configuration des simulations ayant servi à évaluer l'influence des paramètres numériques σ et N .

Simulation	U_0 [m/s]	u'_0 [m/s]	N	σ [m]
A	10	1	10	0.5
B	10	1	100	0.5
C	10	1	1000	0.5
D	10	1	10000	0.5
E	10	1	1000	0.25
F	10	1	1000	1.0

Les résultats de la figure 5.6 illustrent l'influence du nombre de tourbillons N sur la solution. La colonne de gauche présente les historiques du signal au centre du plan d'injection. On note qu'il est nécessaire d'utiliser un minimum de tourbillon afin que sa concentration dans le domaine virtuel permette d'obtenir un signal dont l'amplitude maximale converge vers une valeur indépendante du nombre de tourbillons. La colonne du centre compare la densité de probabilité du champ de vitesse injectée, à la densité de probabilité théorique.

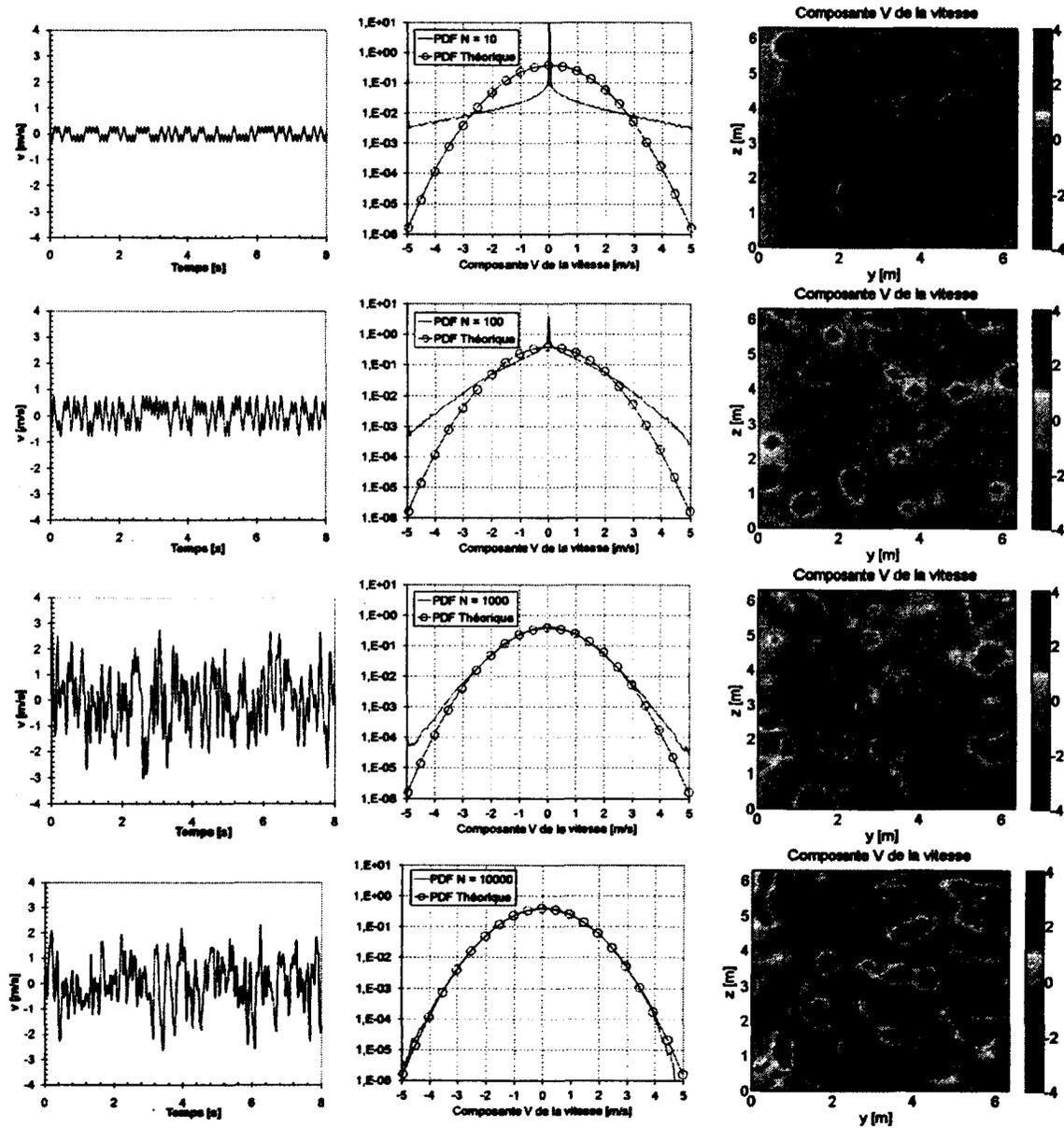


Figure 5.6 Simulations d'une turbulence isotrope en variant le nombre de tourbillons. De haut en bas : $N = 10$, $N = 100$, $N = 1000$, $N = 10000$

On remarque que plus le nombre de vortex augmente, plus la densité de probabilité tend vers une distribution normale comme l'a démontré [Jarrin, 2008]. La colonne de droite montre la topologie du champ de vitesse dans le plan d'injection à un instant donné. Une fois de plus, on note qualitativement qu'en augmentant le nombre de tourbillons, la turbulence injectée présente un caractère davantage cohérent et physique.

Les résultats de la figure 5.7 présentent l'influence de la taille des tourbillons σ sur la turbulence injectée. La configuration de l'expérience numérique présentée à la section précédente est reproduite avec $\sigma = 0.25$ m (simulation E), $\sigma = 0.5$ m (simulation C), $\sigma = 1.0$ m (simulation F). Les mêmes critères d'évaluation que la figure précédente sont présentés.

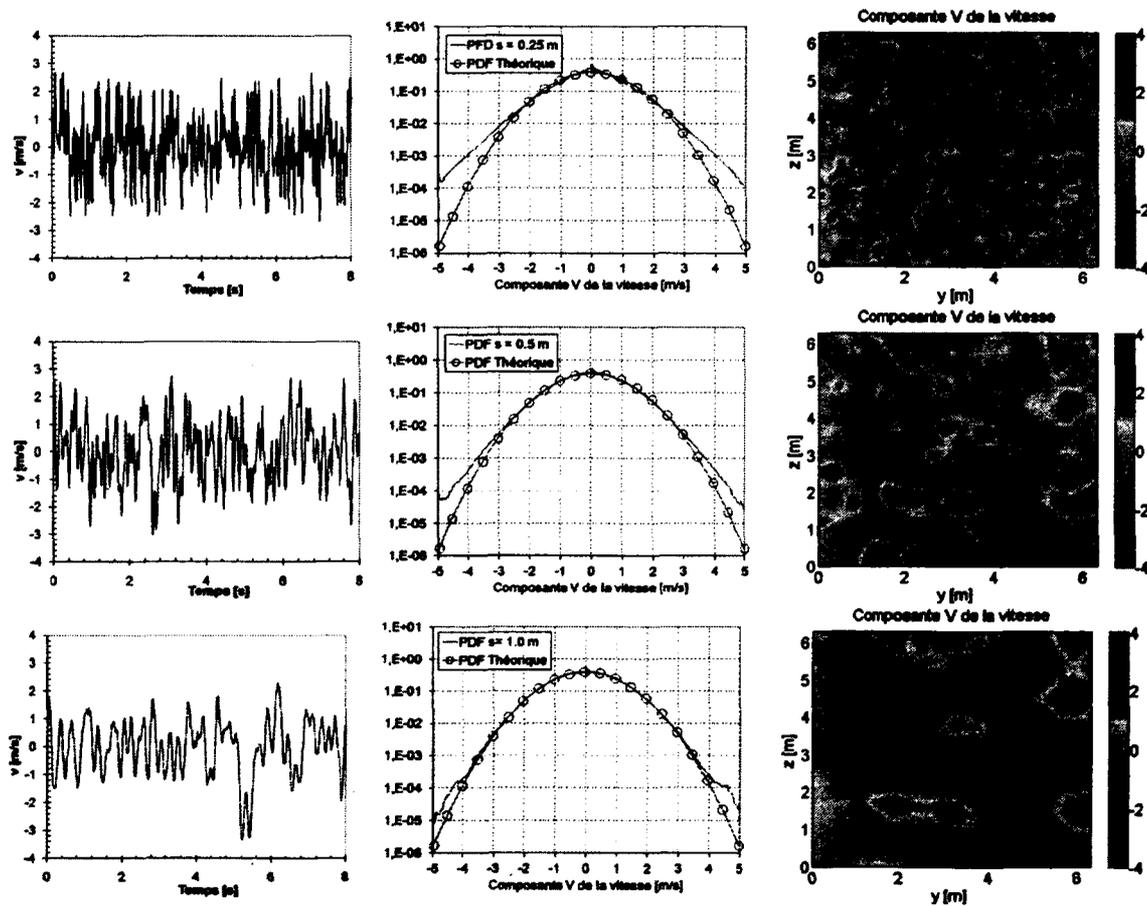


Figure 5.7 Simulations d'une turbulence isotrope en variant la taille des tourbillons. De haut en bas : $\sigma = 0.25$ m, $\sigma = 0.5$ m, $\sigma = 1.0$ m

On note que l'influence de σ se repercute directement sur la topologie de l'écoulement. Ce paramètre est donc critique pour représenter une turbulence réaliste et est directement relié à la taille des plus gros tourbillons dans l'écoulement. On remarque aussi, sur la colonne de gauche, que la taille de σ impacte directement la fréquence du signal du champ de vitesse en un point donné, ce qui est représentatif d'une turbulence réelle. Finalement, on note que la densité de probabilité est mieux représentée avec des tourbillons dont longueur de turbulence caractéristique σ est plus large. En effet, la taille de σ correspond au rayon d'influence maximal d'un tourbillon sur la génération de la vitesse pour une coordonnée spatiale donnée, définie sur le plan d'injection. Plus ce rayon d'influence est grand, plus le nombre de tourbillons servant à définir la vitesse à point donné sera important et meilleur sera la densité de probabilité.

5.3.1 Critères de sélection des paramètres σ et N

L'évaluation des paramètres numériques σ et N dans la méthode des tourbillons synthétiques s'avère cruciale pour l'obtention d'un signal représentatif de la physique de l'écoulement. Ces valeurs sont largement dépendantes de la nature du problème et peuvent être difficiles à évaluer pour l'utilisateur. Cette section décrit l'approche présentée dans [Jarrin, 2008], permettant d'évaluer automatiquement ces paramètres à partir des valeurs k et ϵ définies sur le plan d'injection.

L'estimation de la longueur caractéristique des tourbillons σ est particulièrement problématique. En effet, il peut exister une large plage de taille de tourbillons dans l'écoulement qui ne peuvent être représentées par une seule longueur caractéristique.

Par analyse dimensionnelle, [Taylor, 1935] a démontré que cette longueur caractéristique ou longueur intégrale peut s'écrire :

$$L = \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \quad (5.11)$$

L'interface utilisateur du solveur NIECE permet seulement de spécifier des valeurs de k et de ϵ constantes à la condition d'entrée (ce qui correspond à l'injection d'une turbulence homogène isotrope). En revanche, il est possible de limiter la taille de σ en utilisant comme critère les dimensions locales du maillage sur le plan d'injection sur la base que le raffinement du maillage dans une simulation LES est conditionné par la taille des structures

turbulentes près des murs. Dans ce cas, un critère automatique pour définir σ_i peut s'écrire :

$$\sigma_i = \max \left(\frac{k^{3/2}}{\epsilon}, \sqrt{A_i} \right) \quad (5.12)$$

où k et ϵ sont définis pour l'utilisateur comme caractéristiques de la turbulence à l'entrée et A_i correspond à l'aire locale de l'élément sur le plan d'injection.

Le nombre de tourbillons initialisés dans le domaine virtuel est spécifié à partir de l'expression suivante :

$$N = C \max \left(\frac{\sqrt[3]{V_B}}{\sigma_i} \right) \quad (5.13)$$

Cette expression revient à définir une concentration minimale de vortex dans le domaine virtuel. La constante adimensionnelle C est calibrée à partir des résultats de la section 5.3. Le tableau 5.2 compile la valeur des constantes C des simulations A à D réalisées précédemment pour évaluer l'influence de N sur la topologie de la turbulence injectée. L'erreur entre la densité de probabilité du champ vitesse injecté $f_c(v)$ et la densité de probabilité théorique $f_t(v)$ correspondant à un nombre infini de tourbillons sert de critère pour déterminer la constante C . Cette erreur est définie à l'équation 5.14.

$$\text{Erreur} = \frac{\int_{-v_0}^{+v_0} |f_c(v) - f_t(v)| dv}{\int_{-v_0}^{+v_0} f_t(v) dv} \quad (5.14)$$

La sélection de la constante C est un compromis entre la qualité de la turbulence injectée

Tableau 5.2 Constantes C des simulations A à D .

Simulation	C	Erreur
A	3	166.4 %
B	30	46.3 %
C	300	4.2 %
D	3000	0.9 %

et le temps de calcul. La valeur de $C = 200$ a été choisie pour l'implémentation finale de la condition d'entrée dans NIECE.

5.4 Convection d'une turbulence isotrope dans un domaine périodique

Le second cas de validation investigué est le transport d'une turbulence isotrope dans un domaine périodique. L'objectif de ce problème est de valider l'intégration adéquate de la méthode dans le solveur et démontrer la capacité de la méthode à générer des structures turbulentes qui demeurent cohérentes dans un domaine 3-D. Le problème consiste à générer un domaine rectangulaire dont les dimensions font $2\pi \times 2\pi \times 2\pi \text{ m}^3$. On impose un écoulement moyen positif dans la direction x du modèle et des conditions de périodicité sont utilisées sur les faces transverses du domaine. À cette écoulement moyen, on vient superposer une turbulence isotrope qu'on injecte à l'entrée du domaine. La figure 5.8 schématise le problème à modéliser. Le travail de validation consiste à mesurer la décrois-

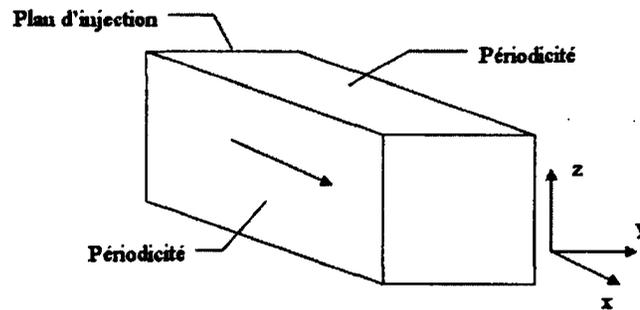


Figure 5.8 Convection d'une turbulence isotrope

sance moyenne de l'énergie cinétique turbulente en fonction de la direction principale de l'écoulement. On souhaite comparer cette décroissance en générant la turbulence à l'entrée du domaine avec la méthode des tourbillons synthétiques et avec une méthode purement aléatoire. Le détail de l'implémentation de la méthode aléatoire est présentée à la section 2.3.2. On souhaite ainsi s'assurer que la méthode des tourbillons synthétiques génère un signal qui se dissipe beaucoup moins rapidement que la méthode aléatoire.

La figure 5.9 présente l'évolution des contours de vitesse dans le plan de symétrie du domaine à trois instants. Les paramètres de calcul définissant le cadre de la simulation sont : la viscosité $\nu = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, l'énergie cinétique turbulente à l'entrée $k = 3/2 \text{ m}^2/\text{s}^2$, la taille des tourbillons $\sigma = 0.5 \text{ m}$, un nombre de tourbillons $N = 1000$ et une vitesse de convection $U = U_c = 10 \text{ m/s}$. La figure 5.9 illustre la portion transitoire de la simulation avant que la turbulence injectée en entrée n'ait eu le temps de compléter un cycle de convection. On remarque que les fluctuations de vitesse sont adéquatement transportées dans le domaine périodique.

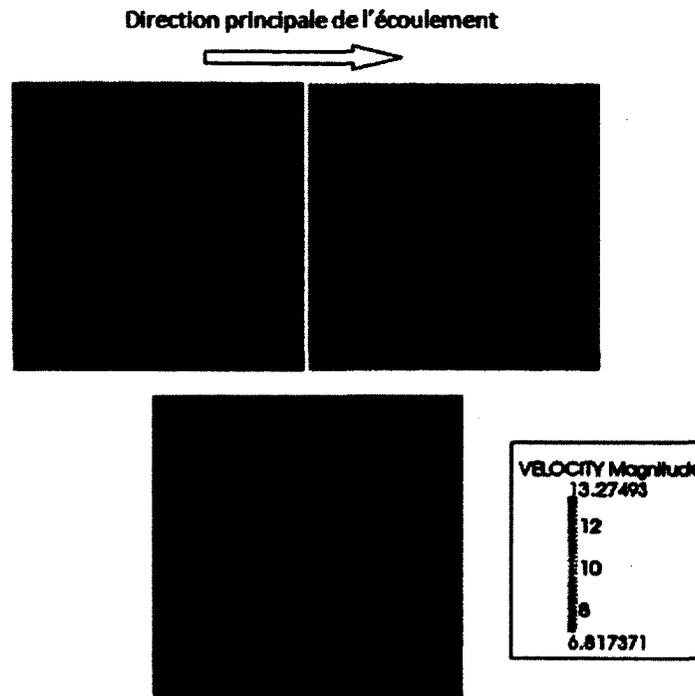


Figure 5.9 Contours de vitesse dans le plan symétrie du domaine à trois instants. En haut à droite : 0.3 s, en haut à gauche 1.2 s, en bas : 2.1 s

La figure 5.10 compare la décroissance spatiale de l'énergie cinétique turbulente entre la méthode des tourbillons et la méthode d'injection aléatoire. L'énergie cinétique est moyennée dans l'espace et dans le temps dans chaque plan perpendiculaire à l'écoulement principal une fois que l'écoulement moyen a atteint son régime permanent. Le temps de simulation total correspond à 10 cycles de convection et la moyenne temporelle est faite sur les trois derniers cycles. On note que l'énergie cinétique turbulente de la simulation avec la méthode des tourbillons synthétiques se dissipe significativement moins rapidement qu'avec la méthode aléatoire où les fluctuations de vitesse disparaissent presque entièrement après deux ou trois volumes de contrôle en aval du plan d'injection.

La transition abrupte que l'on observe près du plan d'injection avec la méthode des vortex est également observée dans [Jarrin *et al.*, 2006]. La chute abrupte de k à la sortie du domaine s'explique par l'utilisation d'une condition limite de sortie peu adaptée à la simulation des grandes échelles. Cette condition limite de sortie correspond à une condition de Dirichlet sur la pression et à une condition de Neumann sur la vitesse $\frac{\partial u_i}{\partial n} = 0$. Cette condition de sortie a pour effet d'empêcher les plus gros tourbillons dans l'écoulement de se convecter adéquatement hors du domaine. La figure 5.11 compare la décroissance du signal RMS de la pression dans l'espace. La moyenne spatiale et temporelle de la pression

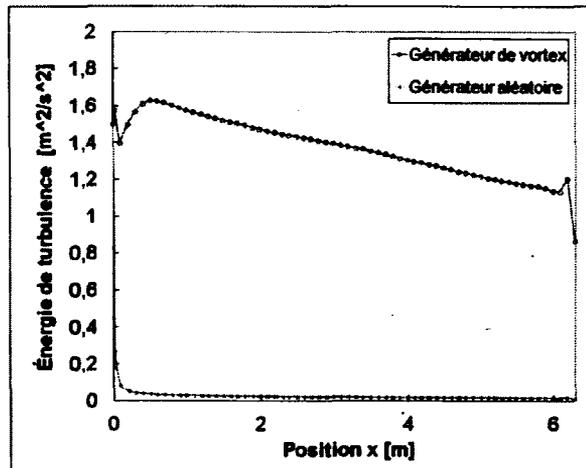


Figure 5.10 Comparaison de la décroissance spatiale de l'énergie cinétique turbulente.

est réalisée de façon analogue à l'énergie cinétique turbulente. La différence des amplitudes de la variation spatiale de la pression vient confirmer la meilleure cohérence du champ de vitesse obtenu avec la méthode des tourbillons qu'avec la méthode aléatoire. Les résultats

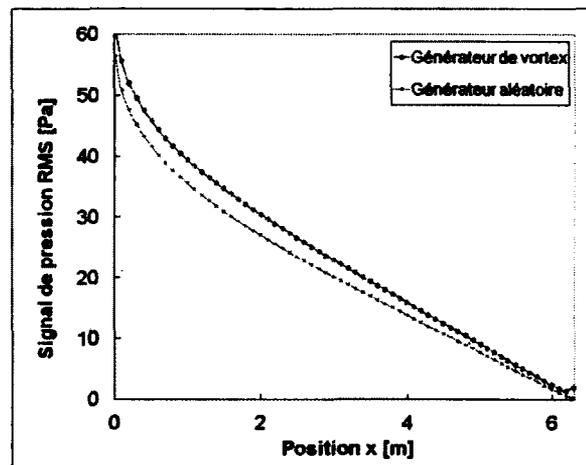


Figure 5.11 Comparaison de distribution spatiale du signal RMS de la pression.

de ce chapitre ont permis de démontrer l'implémentation adéquate de la méthode d'injection de turbulence des tourbillons synthétiques. Cette méthode est en mesure de générer une turbulence cohérente sur n'importe quel maillage 2-D non-structuré, sans passer par le calcul d'une transformée de Fourier. L'étude de l'influence des paramètres σ et N sur la densité de probabilité du champ de vitesse a permis de dériver un critère de sélection automatique de ces paramètres à partir des quantités k et ϵ . La méthode a été implémentée et testée avec succès dans le code NIECE et adaptée au calcul parallèle.

Le prochain chapitre s'intéresse à la simulation d'un écoulement turbulent confiné entre deux plaques planes. Ce cas de validation sert à valider les capacités de modélisation d'une turbulence anisotrope avec les différents modèles de sous-maille.

CHAPITRE 6

LE CANAL PLAN PÉRIODIQUE

Le canal plan périodique constitue un cas de validation largement répandu en simulation des grandes échelles. L'objectif est de simuler l'écoulement entre deux plaques parallèles infinies. Le canal plan représente une des configurations les plus simples à réaliser outre le cas de la turbulence homogène isotrope. Les conditions limites intervenant pour ce cas test sont relativement simples à mettre en œuvre. Ce cas de validation sert à investiguer les propriétés d'une turbulence cisailée confinée entre des parois solides. La première simulation des grandes échelles de ce modèle de validation ayant réussi à résoudre la dynamique de l'écoulement près de la paroi a été réalisée par [Moin et Kim, 1982]. Les caractéristiques principales de cette simulation sont présentées dans les références suivantes : [Kravchenko *et al.*, 1996; Moin et Kim, 1982; Piomelli, 1993].

6.1 Configuration géométrique

La configuration géométrique de base pour cette simulation est présentée à la figure 6.1. La demi-hauteur du canal est notée par h . Les dimensions du domaine dans les directions x et z sont de tailles suffisantes pour permettre aux structures générant la turbulence de se développer. Les rapports de longueurs du domaine utilisés sont rapportés dans plusieurs exemples de simulation similaires [Jarrin, 2008; Majander et Siikonen, 2002; Moser *et al.*, 1999; Sergent, 2002].

6.2 Conditions limites

Le caractère infini des plaques peut être modélisé en appliquant des conditions limites de périodicité dans les directions x et z de l'espace. Une condition de non-glissement est appliquée sur les faces normales à l'axe y . Puisque la pression n'est pas périodique, on doit ajouter un terme source dans les équations de quantité de mouvement correspondant au gradient de pression moyen qui devrait normalement apparaître entre l'entrée et la sortie du domaine. Si l'écoulement est pleinement développé ce gradient de pression est

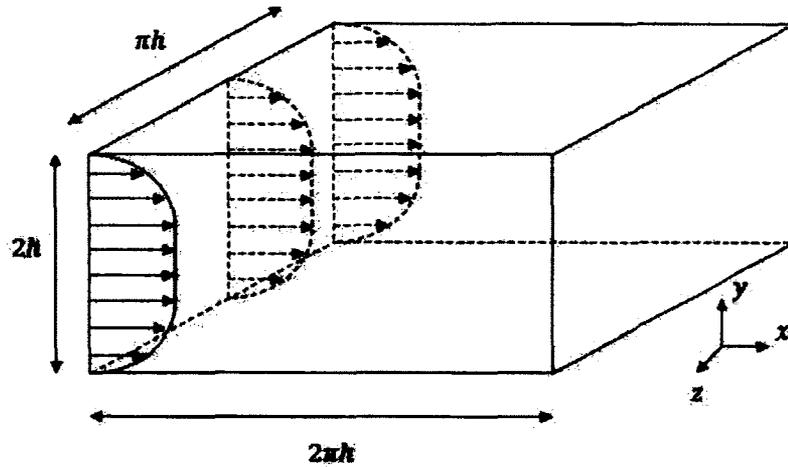


Figure 6.1 Géométrie du canal plan

directement relié à vitesse de friction $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$, [Pope, 2000] :

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\rho u_\tau^2}{h} \quad (6.1)$$

Ce terme source compense les pertes d'énergie dans le canal. Dans toutes les simulations, ce gradient de pression est introduit sous forme de terme source volumique constant en tout point du domaine. La vitesse de friction est calculé à partir de la définition de Re_τ :

$$Re_\tau = \frac{hu_\tau}{\nu} \quad (6.2)$$

La simulation du canal à un nombre de Reynolds $Re_\tau = 395$ a été investiguée. Cette valeur de Re_τ a été choisie, car ce nombre de Reynolds turbulent correspond à une turbulence pleinement développée. Les simulations à un nombre de Reynolds plus faible (typiquement $Re_\tau = 180$) présente une portion logarithmique de leur profil de vitesse assez réduite, sinon inexistante qui rend ce cas moins adéquat comme modèle de validation.

Les modèles de sous-maille de Smagorinsky classique, de WALE et de Vreman seront comparés à la solution sans modèle de sous-maille. Pour toutes les simulations, le pas de temps Δt est ajusté de sorte que le nombre de CFL demeure autour de 0.5. Les configurations de calcul et du maillage sont présentées à la section 6.4.

6.3 Condition initiale

La condition initiale joue un rôle important pour permettre la déstabilisation de l'écoulement et donc l'apparition de la turbulence. Cette condition sert à produire beaucoup de vorticité dans le champ de vitesse initial, ce qui provoque une transition plus rapide vers le régime turbulent et réduit le temps total de la simulation.

L'approche utilisée pour définir la condition initiale consiste à généraliser la méthode d'injection de turbulence de [Jarrin *et al.*, 2006] à un domaine 3-D. En modifiant le domaine virtuel afin d'encapsuler le canal en entier, il a été possible de générer un champ de vitesse à trois dimensions au moment de l'initialisation. Afin d'accélérer davantage la transition vers le régime turbulent, la solution de Poiseuille pour un canal laminaire pleinement développé est superposée aux fluctuations générées par la méthode des tourbillons synthétiques.

6.4 Configurations de calcul et stratégie de maillage

Les modèles de sous-maille algébriques actuels ne sont pas en mesure de représenter adéquatement le transfert d'énergie des structures turbulentes dans la région près de la paroi, [Sagaut, 2005]. En conséquence, la grille près des parois doit être suffisamment raffinée de sorte que le transfert d'énergie par les termes du tenseur de Reynolds soit résolu directement par le maillage. Afin d'évaluer la dépendance de la solution sur le maillage, trois grilles (48^3 , 64^3 , 80^3 noeuds) seront investiguées pour chacun des modèles de sous-maille.

Le raffinement du maillage dans un écoulement cisailé s'exprime en unité de longueur adimensionnelle. Pour le problème du canal turbulent, la résolution minimale requise dans les différentes directions de l'espace dépend des méthodes numériques ainsi que du modèle de sous-maille utilisés. Tel que mentionné au chapitre 2, la hauteur des éléments près des parois doit être de l'ordre de $\Delta y^+ \cong 1$. Pour ce qui est des longueurs transversales, les méthodes spectrales sont en mesure de reproduire adéquatement les différents structures turbulentes à partir de raffinement de l'ordre de $\Delta x^+ = 100$ et $\Delta z^+ = 30$, [Piomelli, 1993]. En revanche, une méthode de discrétisation d'ordre deux par différences finies requiert cet espacement d'être réduit à $\Delta x^+ = 50$ et $\Delta z^+ = 15$ pour obtenir le même niveau de précision, [Lund et H.J., 1995]. Finalement, à titre de comparaison, la DNS de [Moser *et al.*, 1999] qui servira de référence pour évaluer la précision des résultats obtenus, utilise une grille de $256 \times 193 \times 192$ noeuds sur un domaine identique dont l'espacement correspond aux valeurs suivantes : $\Delta x^+ = 10$, $\Delta y_{min}^+ = 0.3$, $\Delta y_{max}^+ = 6.5$ et $\Delta z^+ = 6.5$.

Le tableau 6.1 compare le raffinement des trois grilles utilisées. Chacun des modèles de

Tableau 6.1 *Configurations des maillages utilisés pour le canal turbulent.*

Re_τ	$N_x \times N_y \times N_z$	$\Delta x+$	$\Delta y+_{min}$	$\Delta y+_{max}$	$\Delta z+$
395	48 × 48 × 48	51.7	1.8	56.1	25.9
395	64 × 64 × 64	38.8	2.0	37.7	19.4
395	80 × 80 × 80	31.0	1.9	28.0	15.5

sous-maille ainsi que la configuration sans modèle sont testés sur les trois maillages pour un total de 12 simulations.

6.4.1 Le calcul des statistiques

Puisque la turbulence est un phénomène stochastique, un traitement statistique des différentes quantités doit être réalisé au cours de la simulation afin d'extraire les valeurs moyennes. Ce traitement statistique possède deux volets séparés : le calcul des moyennes spatiales réalisé dans les directions d'homogénéité du domaine et le calcul des moyennes temporelles au cours de la simulation.

Dans le cas du canal plan périodique, les champs instantanés sont moyennés dans les directions transverses et longitudinales à chaque pas de temps. Ces moyennes spatiales sont ensuite stockées dans un vecteur sur un intervalle de temps correspondant à dix cycles de convection complet. La moyenne de ce vecteur est réalisée de façon dynamique au cours de la simulation et exportée sous format texte.

Pour une quantité f , la fluctuation moyenne au carré qui lui est associé est :

$$\overline{f'^2} = \overline{(\overline{f} - \langle f \rangle)^2} \quad (6.3)$$

où le symbole $\langle . \rangle$ représente la moyenne spatiale et $\overline{.}$ représente la moyenne temporelle.

6.5 Résultats statistiques

Cette section présente les résultats statistiques obtenus avec les différents modèle de sous-maille et les compare avec les résultats de la DNS de [Moser *et al.*, 1999]. On discutera d'abord du profil moyen du champ de vitesse, puis on présentera les résultats des fluctuations turbulentes et on terminera par la contribution relative de l'énergie de sous-maille. À titre indicatif, les solutions sans modèle de sous-maille sont également présentées.

6.5.1 Profil de vitesse moyen

Les résultats du profil de vitesse moyenne sont adimensionnés par la vitesse de friction, définie à la section 6.2.

La figure 6.2 présente le profil moyen adimensionné de la composante longitudinale de l'écoulement calculé avec les différents modèles LES ainsi que celui obtenu sans modèle de sous-maille. On remarque une bonne approximation de la sous-couche laminaire (entre

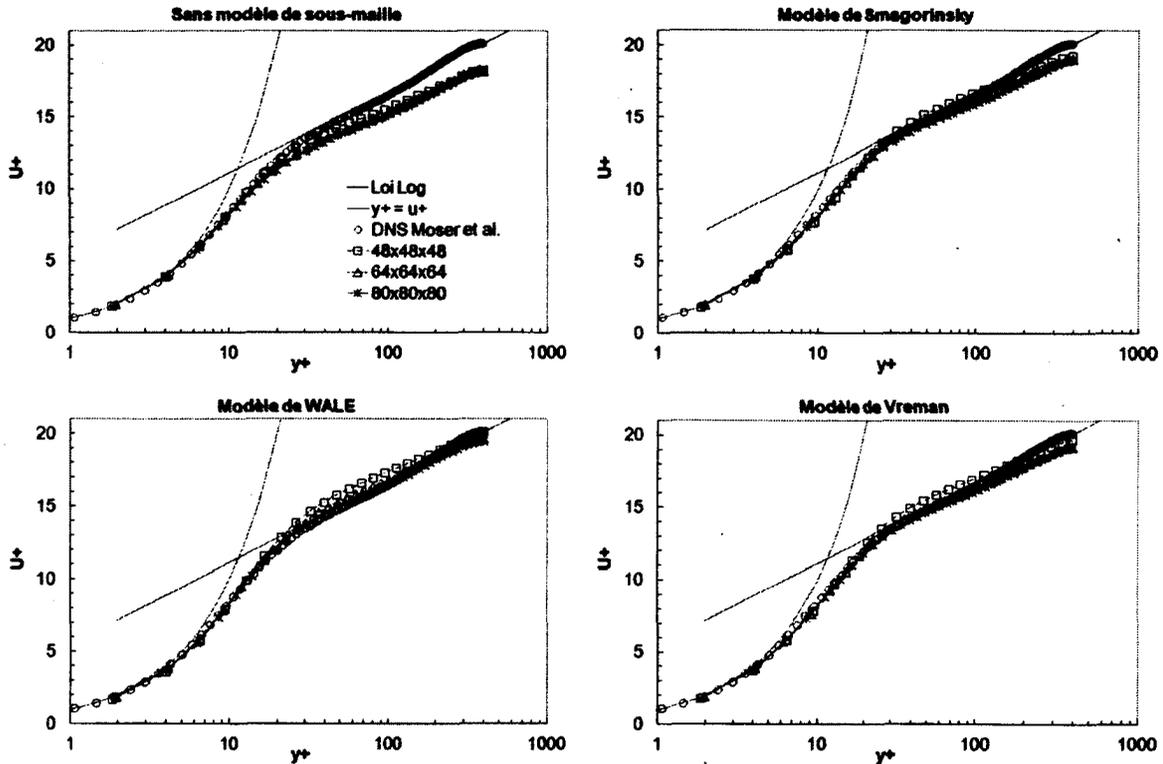


Figure 6.2 *Comparaison des profils de vitesse moyen. Canal plan $Re_\tau = 395$.*

$y^+ = 2$ et $y^+ = 5$) pour l'ensemble des simulations et des maillages. On note également une bonne zone de transition entre la sous-couche laminaire et le profil logarithmique. Le tableau 6.2 compile la hauteur dans le canal à partir de laquelle les résultats de la simulation diverge de plus 2% de la DNS de [Moser *et al.*, 1999]. On remarque dans le tableau que seules les simulations sans modèle de sous-maille ne voient pas leur hauteur de divergence augmenter avec le raffinement du maillage à l'exception du modèle de Smagorinsky entre la simulation à 48^3 noeuds et celle à 64^3 noeud. La vitesse maximale au centre du canal est significativement sous-estimée pour l'ensemble des simulations à 80^3 noeuds par rapport à la valeur de référence de $U_{+max} = 20.1$ pour la DNS. Le tableau 6.3 compile les valeurs de U_{+max} pour l'ensemble des modèles de turbulence. Cependant, on

Tableau 6.2 *Hauteur approximative dans le canal où les résultats de la simulation divergent de plus 2% de la DNS de [Moser et al., 1999].*

Simulation	y^+	Simulation	y^+
Sans modèle 48 ³	32.3	Smagorinsky 48 ³	32.3
Sans modèle 64 ³	18.6	Smagorinsky 64 ³	125.7
Sans modèle 80 ³	13.8	Smagorinsky 80 ³	66.2
WALE 48 ³	16.6	Vreman 48 ³	21.1
WALE 64 ³	15.1	Vreman 64 ³	140.2
WALE 80 ³	216.7	Vreman 80 ³	140.2

remarque qualitativement que la zone logarithmique est mieux définie au fur et à mesure que l'on raffine le maillage, malgré que cette dernière se décale verticalement par rapport à la courbe semi-empirique. Ces écarts observés entre les profils de vitesse obtenus

Tableau 6.3 *Comparaison des valeurs de U_{max}^+ pour les simulations à 80³ noeuds.*

Simulation	U_{max}^+	Simulation	U_{max}^+
Sans modèle	18.3	Smagorinsky	19.0
WALE	19.5	Vreman	19.1

numériquement et ceux de la DNS de [Moser et al., 1999] pourraient s'expliquer par l'utilisation d'une formulation différent du schéma de convection centré. L'implémentation de ce schéma dans NIECE s'est faite sans l'intégration d'un limiteur sur sa composante explicite ce qui pourrait contribuer à générer des oscillations non-physiques dans la solution venant se superposer aux profils des composantes du tenseur de Reynolds et venant perturber les profils de vitesse. Il est également possible que la formulation utilisée pour imposer un gradient pression sous la forme d'un terme source volumique soit en cause. La modification de cette formulation pour imposer un débit massique entre l'entrée et la sortie du canal constitue une autre approche qui pourrait possiblement améliorer ces résultats. Finalement, le tableau 6.4 compare les valeurs moyennes du cisaillement à la paroi $\tau_w = \overline{\mu \partial U / \partial y}$ des différents simulations par rapport à la valeur analytique $\tau_w \cong 3.40 \times 10^{-3}$ Pa. Ce tableau met en évidence de faibles écarts entre le cisaillement à la paroi analytique et celui obtenu par simulation ce qui confirme l'implémentation adéquate de la formulation utilisée pour définir le terme source volumique. Les meilleurs résultats comparant la valeur analytique aux résultats numériques dans le tableau 6.4 ont été obtenus sans modèle de sous-maille. Cette observation s'explique par le fait que l'écoulement près de la paroi, qui régit la valeur τ_w , possède un nombre de Reynolds local très faible. Les premiers noeuds du maillage près de la paroi se trouvent dans la sous-couche laminaire où la viscosité turbulente doit

Tableau 6.4 *Comparaison du cisaillement à la paroi des différents simulations. L'erreur par rapport à la valeur analytique est mise entre parenthèses.*

Simulation	$\tau_w \cdot 10^3$ [Pa]	Simulation	$\tau_w \cdot 10^3$ [Pa]
Sans modèle 48 ³	3.36(-1.2%)	Smagorinsky 48 ³	3.27(-4.0%)
Sans modèle 64 ³	3.41(+0.1%)	Smagorinsky 64 ³	3.33(-2.1%)
Sans modèle 80 ³	3.42(+0.5%)	Smagorinsky 80 ³	3.35(-1.4%)
WALE 48 ³	3.07 (-9.9%)	Vreman 48 ³	3.20 (-6.0%)
WALE 64 ³	3.19 (-6.3%)	Vreman 64 ³	3.24 (-4.8%)
WALE 80 ³	3.20 (-6.0%)	Vreman 80 ³	3.28 (-3.7%)

être nulle et où la contribution des modèles de sous-maille peut venir parasiter la solution numérique si le maillage n'est pas suffisamment serré.

6.5.2 Profils des composantes du tenseur de Reynolds

Cette section s'intéresse aux profils des composantes du tenseur de Reynolds. Les résultats sans modèle de sous-maille sont analysés séparément puisqu'on observe une tendance différente des résultats avec modèle de sous-maille. Ces courbes sont adimensionnées par la vitesse de friction au carré. Les résultats sont présentés uniquement sur la moitié inférieure du canal, car les profils moyennés sont symétriques par rapport au plan médian du domaine.

Avec modèle de sous-maille

Les figures 6.3 à 6.5 présentent les profils de la diagonale du tenseur de Reynolds résolu \overline{uu} , \overline{vv} , \overline{ww} , ainsi que le terme croisé \overline{uv} des simulations du canal avec modèle de sous-maille.

Pour les trois modèles de turbulence, on observe que les fluctuations de vitesse de la composante longitudinale sont surestimées par rapport aux résultats de la DNS. Bien que ce comportement pour \overline{uu} est fréquemment rencontré lors de simulations LES d'un canal plan turbulent, il n'existe pas d'explication largement acceptée [Jarrin, 2008]. On note que les modèles de Smagorinsky et Vreman surestiment le moins la production de \overline{uu} , tout particulièrement pour les maillages de 64³ noeuds et 80³ noeuds. En revanche, tous les modèles de sous-maille convergent vers la solution DNS vers le centre du canal.

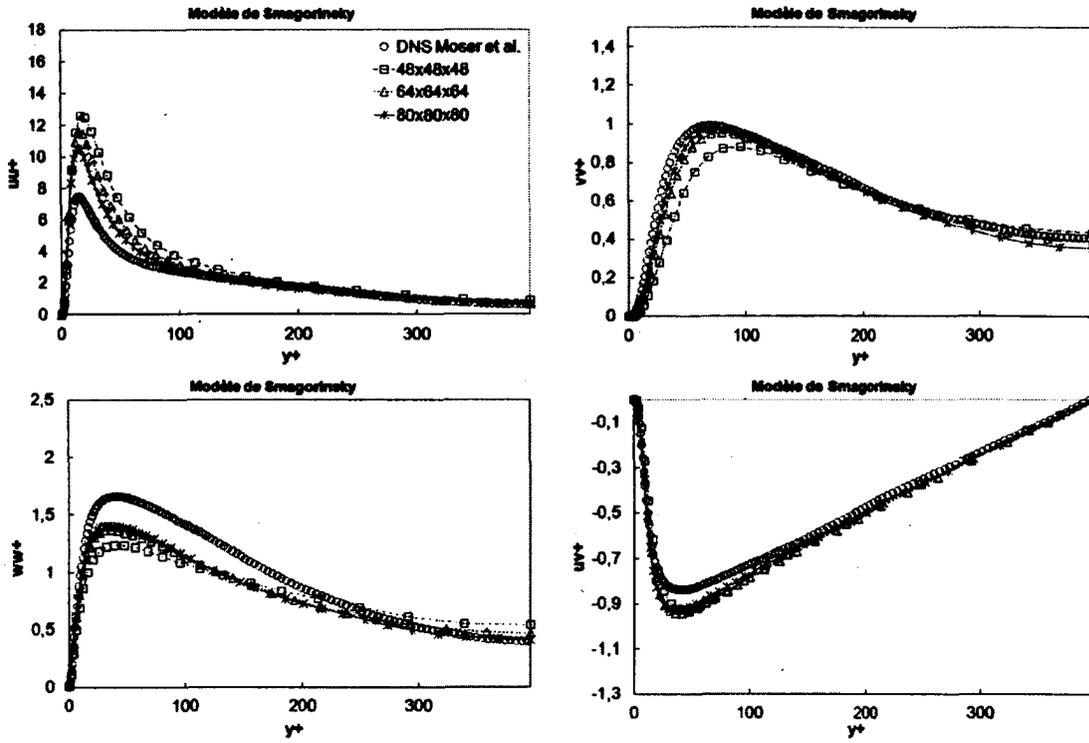


Figure 6.3 Profils du tenseur de Reynolds. Modèle de Smagorinsky.

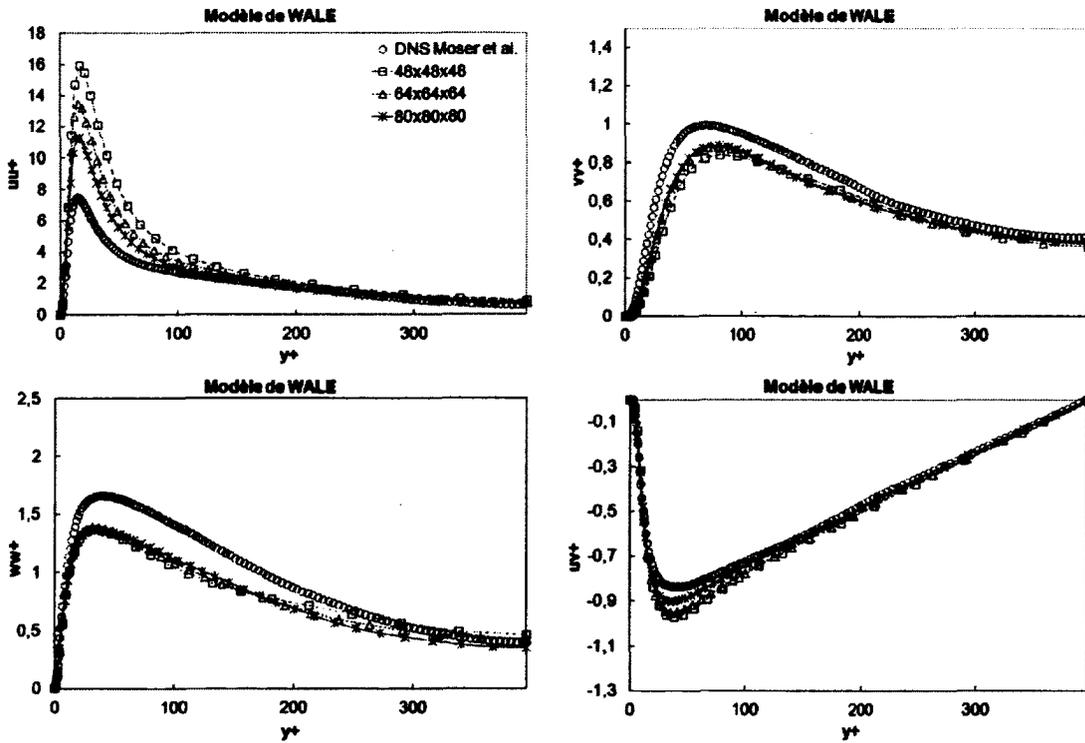


Figure 6.4 Profils du tenseur de Reynolds. Modèle de WALE.

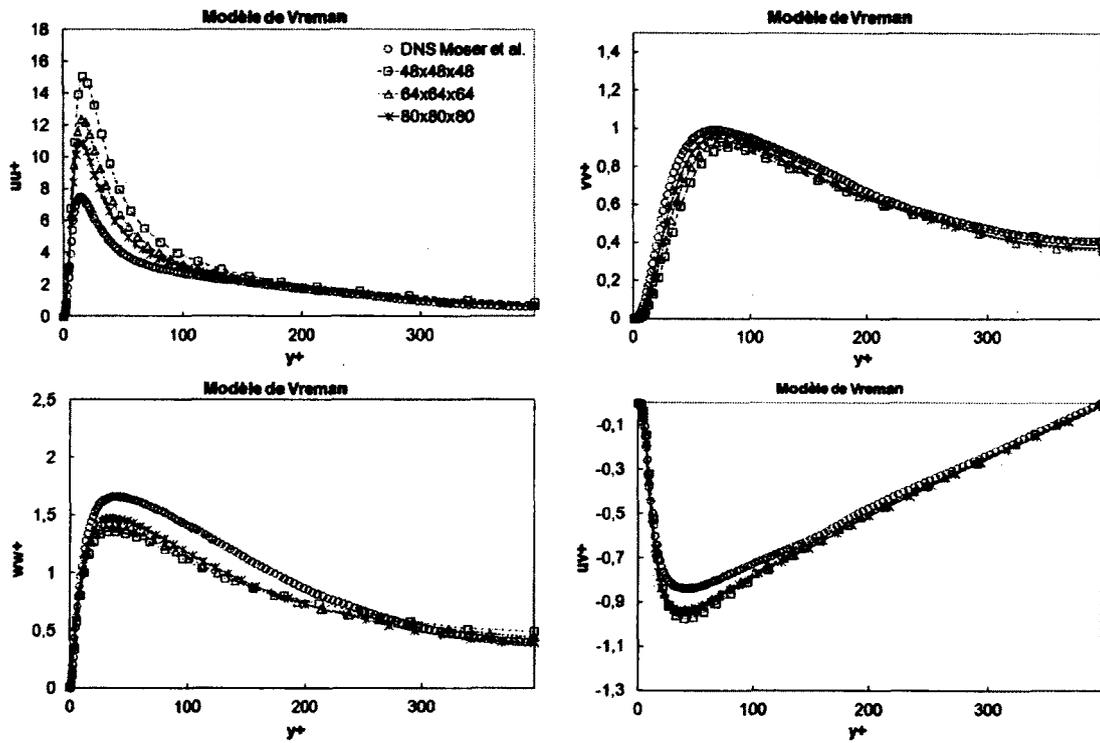


Figure 6.5 *Profils du tenseur de Reynolds. Modèle de Vreman.*

Par opposition à la composante \overline{uu} , les fluctuations de vitesse des composantes transverses \overline{vv} , \overline{ww} sont sous-estimées par le calcul LES. Ceci indique que les structures turbulentes près des parois ne sont pas correctement résolues. Ce comportement est typique de simulations LES sous-résolues [Celik *et al.*, 2005] et s'observe pour l'ensemble des modèles de sous-maille.

Finalement, comme attendu, on note que les écarts entre les résultats LES et DNS diminuent plus le maillage utilisé est raffiné.

Sans modèle de sous-maille

La figure 6.6 présente les profils de la diagonale du tenseur de Reynolds résolu \overline{uu} , \overline{vv} , \overline{ww} , ainsi que le terme croisé \overline{uv} sans modèle de sous-maille.

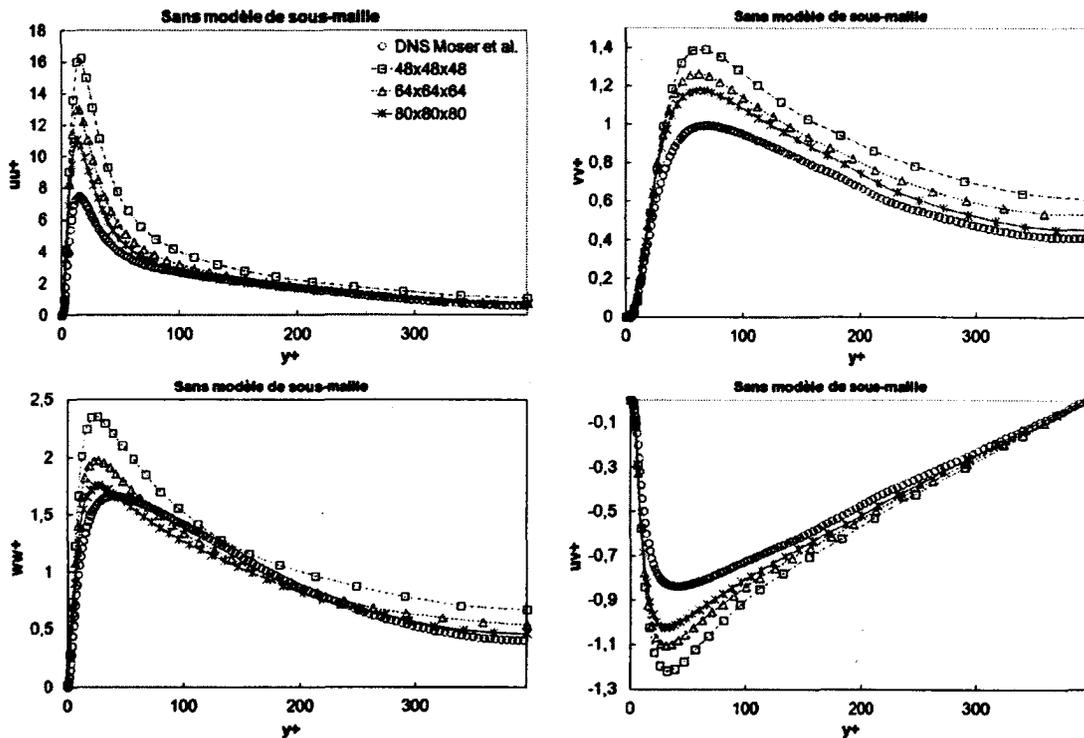


Figure 6.6 Profils du tenseur de Reynolds. Sans modèle de sous-maille.

Dans le cas sans modèle de sous-maille, on observe une surestimation des fluctuations de vitesse de la composante longitudinale, comme dans le cas avec modèle de sous-maille. En revanche, on note aussi une surestimation des composantes transverses \overline{vv} , \overline{ww} , par opposition aux résultats typiques rapportés dans la littérature. Cette observation vient renforcer l'hypothèse que des oscillations non-physiques, générées par l'absence de limiteur

sur le terme de convection, viennent se superposer aux composantes du tenseur de Reynolds et gonflent artificiellement la production de turbulence.

6.5.3 Contribution des modèles de sous-maille

Le calcul de la contribution de l'énergie de sous-maille suit la méthodologie présentée dans [Vreman, 2004]. Dans son papier, ce dernier propose d'évaluer k_{sgs} selon :

$$k_{sgs} = 2\nu_t|S| \quad (6.4)$$

Cette formulation est identique est identique à l'approche d'Yoshizawa présentée à la section 4.5.2, mais réécrite en utilisant l'expression de de la viscosité turbulente. La figure 6.7 compare la contribution de l'énergie cinétique résolue (à gauche) à la contribution de l'énergie de sous-maille (à droite). Les échelles pour les deux quantités sont différentes, en revanche les profils sont adimensionnés de façon identique.

Tel que l'on s'y attendait, la contribution de l'énergie de sous-maille diminue au fur et à mesure que l'on raffine le maillage. On note aussi que l'écart entre l'énergie cinétique résolue des simulations LES et de la DNS diminue avec le raffinement du maillage. Le modèle de Smagorinsky présente la plus forte contribution d'énergie de sous-maille pour les maillages de 48^3 et 64^3 noeuds, alors que les modèles de WALE et Vreman génère des amplitudes similaires pour ces deux maillages. En revanche, la contribution de l'énergie de sous-maille converge vers approximativement les mêmes amplitudes avec la grille de 80^3 noeuds pour tous les modèles.

Ce chapitre s'est intéressé aux résultats du canal plan périodique à un nombre de Reynolds $Re_\tau = 395$. Ce cas de validation a permis d'investiguer la capacité du code NIECE et des modèles de sous-maille à simuler les propriétés d'une turbulence cisailée. La comparaison des statistiques de premier ordre (profil de vitesse moyen) avec la DNS de [Moser *et al.*, 1999] a mis en évidence la difficulté du code à capturer adéquatement la vitesse maximale de l'écoulement au centre du canal. La comparaison des statistiques de second ordre (profils du tenseur de Reynolds) a permis d'identifier l'effet dissipatif des modèles de sous-maille sur la production de turbulence près des parois. Finalement, les graphiques comparant la production d'énergie de sous-maille k_{sgs} des différents modèles a montré que les profils d'énergie convergeaient vers des courbes identiques pour tous les modèles en raffinant le maillage.

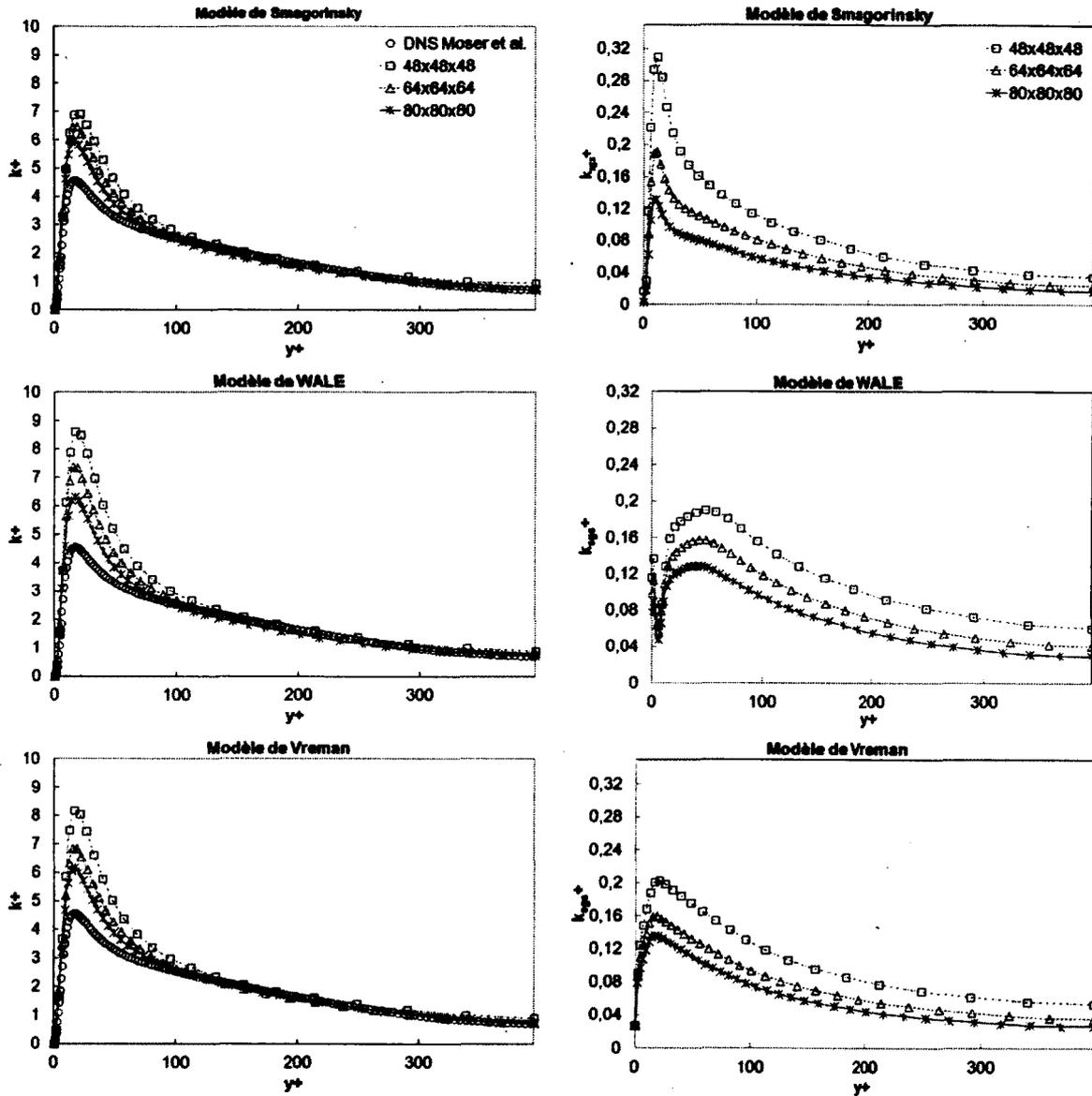


Figure 6.7 Comparaison de l'énergie cinétique résolue et de l'énergie de sous-maille.

CHAPITRE 7

CONCLUSION

Ce mémoire de maîtrise, réalisé en milieu industriel en collaboration avec Maya Heat Transfer Technologies, détaille les étapes ayant permis d'implémenter la technique de la simulation des grandes échelles dans le solveur de dynamique des fluides numériques NIECE. Les modèles de sous-maille de Smagorinsky, de WALE et de Vreman ont été mis en place et validés.

L'analyse de nouveaux schémas de discrétisation spatiaux et temporels et de ceux déjà existants dans le code a permis d'identifier que le schéma centré de second ordre en espace, couplé au schéma de Crank-Nicolson en temps constituaient un compromis adéquat pour réaliser la simulation des grandes échelles dans un contexte d'applications industrielles. Cette analyse a été réalisée sous la forme d'une étude comparative de stabilité, de diffusion et de dispersion numérique des schémas afin de quantifier les gains réalisés en utilisant ces nouveaux schémas de discrétisation. Leur implémentation et leur formulation particulière dans un algorithme prédicteur-correcteur de résolution des équations de Navier-Stokes par une approche mixte volume éléments finis sur maillage non structuré est également détaillée.

La simulation de la décroissance d'une turbulence homogène isotrope a permis de démontrer l'effet dissipatif des modèles de sous-maille sur les plus petites échelles de la turbulence. Les graphiques de décroissance des spectres d'énergie sont présentés pour chacun des modèles de sous-maille, puis comparés à la solution sans modèle. L'effet du raffinement du maillage sur les proportions d'énergie cinétique résolue et d'énergie de sous-maille modélisée est investigué sur des grilles de 32^3 , 64^3 et 128^3 noeuds. L'algorithme permettant d'initialiser une turbulence isotrope incompressible sur un volume cubique est présenté, puis validé en comparant les propriétés analytiques et numériques de la turbulence générée. Une discussion sur les avantages et les inconvénients des formulations analytiques des spectres d'énergie de Passot-Pouquet et de von Karman-Paso est finalement présentée.

Le problème de la représentation de l'écoulement à l'entrée du domaine de calcul est ensuite abordé. Ce volet détaille la méthode de génération de turbulence, appelée méthode des tourbillons synthétiques. Cette méthode permet de générer un champ de vitesse cohérent et représentatif d'une turbulence réelle, qu'on peut ensuite injecter sous forme de condition

limite à l'entrée de notre domaine. Le cas académique de la génération d'une turbulence isotrope permet d'investiguer les propriétés du champs du vitesse obtenu avec l'approche retenue. Une étude de l'influence des paramètres numériques σ et N permet de dériver un critère automatique de sélection pour l'utilisateur à partir des quantités k et ϵ . Finalement, une étude comparative d'une méthode d'injection aléatoire à la méthode des tourbillons synthétiques démontre l'avantage de cette dernière pour la génération d'un signal turbulent cohérent et représentatif.

Le cas de validation du canal plan périodique constitue le dernier volet de ce mémoire et permet d'investiguer la capacité du code à simuler les propriétés d'une turbulence cisailée, confinée entre deux parois solides. Les résultats des modèles de sous-maille sont comparés au cas sans modèle de turbulence. L'effet du raffinement du maillage est étudié sur des grilles de 48^3 , 64^3 et 80^3 noeuds. Les profils de vitesse moyenne et les profils des composantes du tenseur de Reynolds sont détaillés et analysés. Finalement, la contribution de l'énergie cinétique résolue et de l'énergie de sous-maille permet de quantifier la contribution des modèles de turbulence sur la solution en fonction de la position sur la hauteur du canal.

Ce projet de maîtrise aura des bénéfices directs pour les besoins de modélisation et de la simulation d'écoulements de fluide dans les domaines de l'aéronautique, de l'hydrodynamique, des procédés et de l'aéroacoustique, pour n'en nommer que quelques-uns. Une comparaison des modèles de sous-maille dans le contexte d'un solveur numérique parallèle commercial constitue une contribution importante au domaine de la recherche en simulation aux grandes échelles.

Les problèmes de la décroissance d'une turbulence homogène isotrope et du canal plan périodique constituent deux cas de validation essentiels à mettre en oeuvre dans le cadre du projet d'implémentation de la technique de la simulation des grandes échelles. De nouvelles simulations mieux résolues du canal plan ou à un nombre de Reynolds plus élevé permettraient d'investiguer plus en détail les capacités parallèles du code. Il serait également intéressant d'approcher des problèmes plus complexes, à caractère industriel. Finalement, l'équipe de développeurs de NIECE ont récemment pris la décision d'implémenter une nouvelle approche entièrement implicite de résolution des équations de Navier-Stokes. Il serait donc intéressant d'adapter la formulation prédicteur-correcteur des modèles de sous-maille à cette nouvelle approche, afin de comparer les performances des modèles de sous-maille sur les mêmes cas de validation précédemment réalisés.

ANNEXE A

LA MÉTHODE DES VOLUMES ÉLÉMENTS FINIS

Cette annexe détaille l'approche colocalisée des volumes éléments finis utilisée dans NIECE. On y détaille le concept des fonctions de forme et des métriques d'un élément, le calcul du vecteur surfacique $(\Delta n_j)_{ip}$ et l'évaluation des gradients. On détaillera uniquement l'élément 3-D hexaédrique, mais les concepts présentés dans cette annexe s'applique à n'importe quel type d'élément.

A.1 Les fonctions de formes et leurs dérivées

La figure A.1 présente la structure d'un élément de référence hexaédrique et sa terminologie. Chacune des arêtes de cet élément hexaédrique est de longueur unitaire.

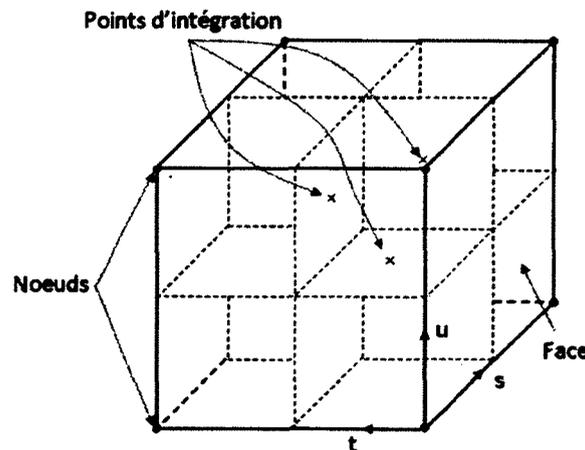


Figure A.1 Structure d'un élément et sa terminologie

Les fonctions de forme $N(s, t, u)_n$ sont des fonctions d'interpolation servant à obtenir les valeurs d'un champ ϕ et ses dérivées à l'intérieur d'un élément en connaissant uniquement les valeurs de ce champ aux noeuds. Prenons l'exemple d'un champ $\phi(s, t, u)$ défini sur un élément hexaédrique de référence, où les valeurs de ce champ aux noeuds ϕ_n sont connues. Dans ce cas, la valeur de ce champ à n'importe quelles coordonnées s, t, u dans l'élément est définie comme :

$$\phi(s, t, u) = \sum_{n=1}^M N(s, t, u)_n \phi_n \quad (\text{A.1})$$

où M correspond au nombre de noeuds dans l'élément.

On définit une fonction de forme par noeud contenu dans l'élément considéré. L'élément hexaédrique défini à la figure A.1 possède donc huit fonctions de forme. La construction des fonctions de forme d'un élément est réalisée en satisfaisant simultanément les deux conditions suivantes :

- La fonction N_i est définie comme valant 1 au noeud i et 0 sur les autres noeuds ;
- La somme des fonctions de forme d'un élément vaut 1, $\sum_{i=1}^M N_i = 1$ (normalisation) ;

Pour l'élément hexaédrique de la figure A.1, ces deux conditions mènent à la liste de fonctions de forme suivante :

$$N_1 = (1 - s)(1 - t)(1 - u) \quad (\text{A.2}) \quad N_2 = s(1 - t)(1 - u) \quad (\text{A.3})$$

$$N_3 = (1 - s)t(1 - u) \quad (\text{A.4}) \quad N_4 = st(1 - u) \quad (\text{A.5})$$

$$N_5 = (1 - s)(1 - t)u \quad (\text{A.6}) \quad N_6 = s(1 - t)u \quad (\text{A.7})$$

$$N_7 = (1 - s)tu \quad (\text{A.8}) \quad N_8 = stu \quad (\text{A.9})$$

Les dérivées des fonctions de forme sont calculées en dérivant ces dernières par rapport aux coordonnées de l'élément de référence.

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial N_n}{\partial s} \phi_n \quad (\text{A.10}) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial N_n}{\partial t} \phi_n \quad (\text{A.11}) \quad \frac{\partial \phi}{\partial u} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial N_n}{\partial u} \phi_n \quad (\text{A.12})$$

Ces fonctions de forme sont définies pour l'élément de référence de la figure A.1. Dans le cas d'un problème typique, les éléments du maillage ne sont pas tous identiques. Certains sont déformés et leur taille varie d'une discrétisation à l'autre. Le formalisme des fonctions de forme qui a été introduit pour un champ scalaire ϕ peut être étendu au concept d'élément de référence et d'élément local. La figure A.2 schématise ce concept.

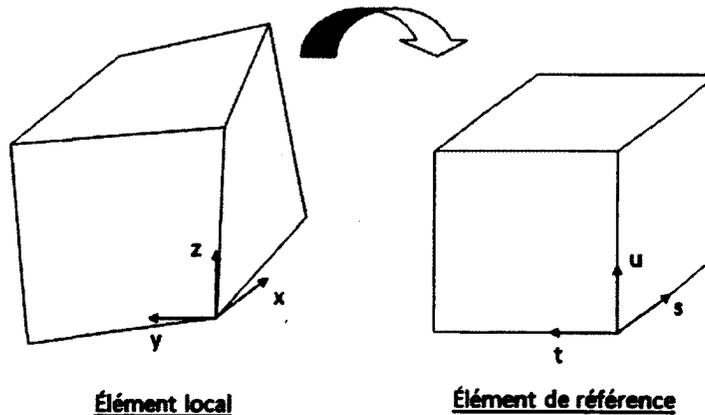


Figure A.2 Concept d'élément de référence et d'élément local

Les équations permettant de passer des coordonnées locales (x, y, z) d'un élément vers les coordonnées (s, t, u) de son élément de référence sont données par :

$$x(s, t, u) = \sum_{n=1}^M N_n x_n \quad (A.13)$$

$$y(s, t, u) = \sum_{n=1}^M N_n y_n \quad (A.14)$$

$$z(s, t, u) = \sum_{n=1}^M N_n z_n \quad (A.15)$$

Les coefficients correspondant aux dérivées dans les trois directions cartésiennes de l'espace des coordonnées de l'élément de référence vers l'élément local sont appelées les métriques. On en déduit donc que les métriques sont données par :

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial N_n}{\partial s} x_n \quad (A.16)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial N_n}{\partial t} x_n \quad (A.17)$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial N_n}{\partial u} x_n \quad (A.18)$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial N_n}{\partial s} y_n \quad (A.19)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial N_n}{\partial t} y_n \quad (A.20)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial N_n}{\partial u} y_n \quad (A.21)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial N_n}{\partial s} z_n \quad (A.22)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial N_n}{\partial t} z_n \quad (A.23)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial N_n}{\partial u} z_n \quad (A.24)$$

Le calcul de ces métriques pour chacun des éléments du maillage est réalisé au moment de l'initialisation, lors de la lecture du maillage. Ces coefficients sont ensuite mis sous forme matricielle, puis inversés afin d'obtenir la matrice de passage (le jacobien) permettant d'évaluer les dérivés des fonctions de forme dans l'élément local.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial s} \\ \frac{\partial N}{\partial t} \\ \frac{\partial N}{\partial u} \end{pmatrix} \quad (A.25)$$

A.2 Le calcul du vecteur normal surfacique $(\Delta n_j)_{ip}$

La dérivée du vecteur normal surfacique d'une surface arbitraire s'obtient en considérant le vecteur position \vec{r} d'un point sur la surface :

$$\vec{r} = x \vec{e}_i + y \vec{e}_j + z \vec{e}_k \quad (A.26)$$

Si on considère le déplacement $d\vec{r}$ à partir de la position \vec{r} , on forme une région trapézoïdale qu'on peut exprimer en fonction du changement de nouvelles coordonnées paramétriques s' et t' :

$$d\vec{r} = dx \vec{e}_i + dy \vec{e}_j + dz \vec{e}_k = ds' \vec{e}_i + dt' \vec{e}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s'} ds' + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} dt' \quad (A.27)$$

Un élément infinitésimal du vecteur surfacique, dont les côtés sont portés par le couple $d\vec{s}'$, $d\vec{t}'$ s'exprime comme le produit vectoriel de ces deux vecteurs :

$$d\vec{n} = d\vec{s}' \wedge d\vec{t}' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s'} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} ds' dt' \quad (\text{A.28})$$

L'aire de la surface portée par $d\vec{n}$ est calculée en intégrant ce vecteur :

$$\Delta \vec{n} = \int_{s'} \int_{t'} d\vec{n} \quad (\text{A.29})$$

Les coordonnées (s, t, u) de l'élément de référence peuvent être exprimées comme une fonction de coordonnées paramétriques de surface (s', t') .

$$s = f(s', t') \quad (\text{A.30}) \quad t = g(s', t') \quad (\text{A.31}) \quad u = h(s', t') \quad (\text{A.32})$$

La forme des fonctions f , g , h est détaillée plus loin pour l'élément hexaédrique. En utilisant la règle de dérivation en chaîne, on peut écrire :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial s'} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s'} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s'} \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t'} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t'} \quad (\text{A.34})$$

Le produit vectoriel des deux vecteurs précédents peut être écrit comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial s'} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial s'} \frac{\partial t}{\partial t'} - \frac{\partial t}{\partial s'} \frac{\partial s}{\partial t'} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial t}{\partial s'} \frac{\partial u}{\partial t'} - \frac{\partial u}{\partial s'} \frac{\partial t}{\partial t'} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial s'} \frac{\partial s}{\partial t'} - \frac{\partial s}{\partial s'} \frac{\partial u}{\partial t'} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

En utilisant la règle de dérivation en chaîne et la définition du vecteur \vec{r} à l'équation (A.26), on peut exprimer la dérivée du vecteur \vec{r} en fonction des coordonnées de l'élément de référence :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \vec{e}_i + \frac{\partial y}{\partial s} \vec{e}_j + \frac{\partial z}{\partial s} \vec{e}_k \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \vec{e}_i + \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_j + \frac{\partial z}{\partial t} \vec{e}_k \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \vec{e}_i + \frac{\partial y}{\partial u} \vec{e}_j + \frac{\partial z}{\partial u} \vec{e}_k \quad (\text{A.38})$$

Le produit vectoriel de ces expressions doit être réalisé afin de remplacer le résultat dans l'expression de la dérivée du vecteur surfacique $d\vec{n}$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \vec{e}_i - \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} \right) \vec{e}_j + \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} \right) \vec{e}_k \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{e}_i - \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \vec{e}_j + \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \vec{e}_k \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \vec{e}_i - \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \vec{e}_j + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \vec{e}_k \quad (\text{A.41})$$

En remplaçant l'expression de ces trois produits vectoriels dans la relation de $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s'} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'}$, puis en substituant ce résultat dans l'équation (A.28), on obtient la relation pour la dérivée du vecteur surfacique $d\vec{n}$:

$$\begin{aligned} d\vec{n} = & \left[\left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \vec{e}_i - \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \vec{e}_j + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \vec{e}_k \right] \left(\frac{\partial s}{\partial s'} \frac{\partial t}{\partial t'} - \frac{\partial t}{\partial s'} \frac{\partial s}{\partial t'} \right) \\ & + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{e}_i - \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \vec{e}_j + \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \vec{e}_k \right] \left(\frac{\partial t}{\partial s'} \frac{\partial u}{\partial t'} - \frac{\partial u}{\partial s'} \frac{\partial t}{\partial t'} \right) \quad (\text{A.42}) \\ & + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \vec{e}_i - \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \vec{e}_j + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \vec{e}_k \right] \left(\frac{\partial u}{\partial s'} \frac{\partial s}{\partial t'} - \frac{\partial s}{\partial s'} \frac{\partial u}{\partial t'} \right) ds' dt' \end{aligned}$$

Le vecteur surfacique d'un point d'intégration $\vec{\Delta n}_{ip}$ est défini comme un vecteur dont l'amplitude est égale à surface portée par ce point d'intégration, dont la direction est normale à cette surface. Ce vecteur surfacique est calculé en intégrant l'expression précédente selon les coordonnées (s', t') . On obtient alors :

$$\vec{\Delta n}_{ip} = \int_{s'} \int_{t'} d\vec{n} = \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial s'} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} \right]_{(s', t')_{ip}} \Delta s' \Delta t' \quad (\text{A.43})$$

Le formalisme permettant de déterminer le vecteur surfacique porté par un point d'intégration présenté ci-dessus s'applique à n'importe quel type d'élément. Considérons maintenant

le cas particulier du calcul de $\vec{\Delta}n_{ip}$ pour un élément hexaédrique. La figure A.3 présente la position des points d'intégration intérieurs de l'élément de référence hexaédrique.

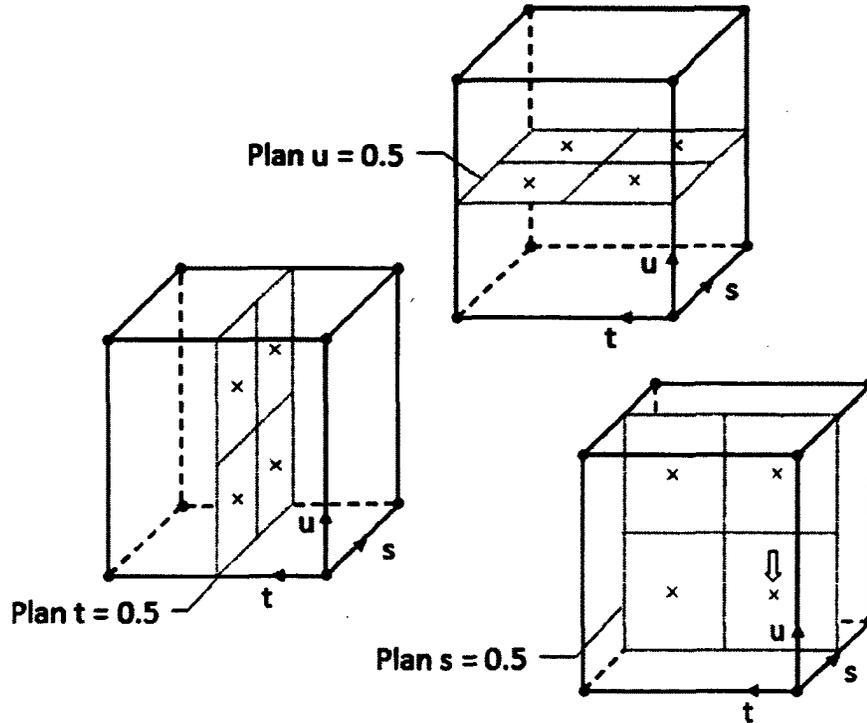


Figure A.3 Position des points d'intégration dans un élément hexaédrique

On observe que chacune des 12 surfaces portées par un point d'intégration représentent un quadrilatère. Les coordonnées (s_n, t_n, u_n) de chacun des coins de ces quadrilatères peuvent être facilement établies. La figure A.4 illustre un de ces quadrilatères avec son système de coordonnées (s', t') . Ce quadrilatère représente la surface d'intégration inférieure droite, portée par le plan $s = 0.5$. Cette surface est marquée par une flèche sur la figure A.3. On se référera dorénavant à cette surface d'intégration comme la surface d'intégration 1.

Les coordonnées (s, t, u) de l'élément de référence peuvent être exprimées à partir des fonctions de forme du quadrilatère :

$$s = f(s', t') = \sum_{n=1}^4 N_q(s', t')_n s_n t = g(s', t') = \sum_{n=1}^4 N_q(s', t')_n t_n u = h(s', t') = \sum_{n=1}^4 N_q(s', t')_n u_n \quad (\text{A.44})$$

$$(\text{A.45})$$

$$(\text{A.46})$$

où l'exposant q signifie quadrilatère et où les fonctions de forme sont données par :

$$N_1^q = \frac{1}{4}(1 - s')(1 - t') \quad (\text{A.47})$$

$$N_2^q = \frac{1}{4}(1 + s')(1 - t') \quad (\text{A.48})$$

$$N_3^q = \frac{1}{4}(1 + s')(1 + t') \quad (\text{A.49})$$

$$N_4^q = \frac{1}{4}(1 - s')(1 + t') \quad (\text{A.50})$$

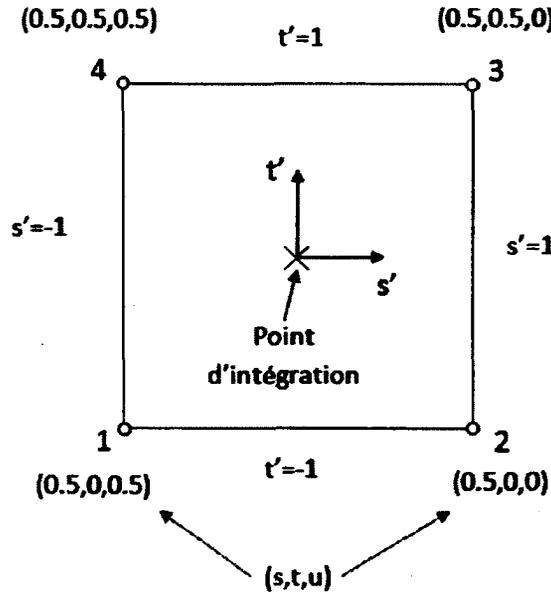


Figure A.4 Surface d'intégration 1 de l'élément hexaédrique

Les dérivées des coordonnées de l'élément de référence par rapport aux coordonnées des surfaces d'intégration sont obtenues en utilisant les dérivées des fonctions de forme des surfaces d'intégration :

$$\frac{\partial s}{\partial s'} = \sum_{n=1}^4 \frac{\partial N_n^q}{\partial s'} s_n \quad (\text{A.51}) \quad \frac{\partial s}{\partial t'} = \sum_{n=1}^4 \frac{\partial N_n^q}{\partial t'} s_n \quad (\text{A.52}) \quad \frac{\partial t}{\partial s'} = \sum_{n=1}^4 \frac{\partial N_n^q}{\partial s'} t_n \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = \sum_{n=1}^4 \frac{\partial N_n^q}{\partial t'} t_n \quad (\text{A.54}) \quad \frac{\partial u}{\partial s'} = \sum_{n=1}^4 \frac{\partial N_n^q}{\partial s'} u_n \quad (\text{A.55}) \quad \frac{\partial u}{\partial t'} = \sum_{n=1}^4 \frac{\partial N_n^q}{\partial t'} u_n \quad (\text{A.56})$$

En appliquant les équations ci-dessus pour la surface d'intégration 1 de la figure A.4, on obtient :

$$\frac{\partial s}{\partial s'} = 0 \quad (\text{A.57}) \quad \frac{\partial s}{\partial t'} = 0 \quad (\text{A.58}) \quad \frac{\partial t}{\partial s'} = 0 \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{1}{4} \quad (\text{A.60}) \quad \frac{\partial u}{\partial s'} = -\frac{1}{4} \quad (\text{A.61}) \quad \frac{\partial u}{\partial t'} = 0 \quad (\text{A.62})$$

Il est également possible de dériver directement ces résultats à partir des coordonnées géométriques de la figure A.4, en considérant une variation linéaire de (s, t, u) sur la surface d'intégration 1.

En remplaçant ces résultats dans l'équation (A.42) et en réalisant l'intégration par rapport à s' et t' , l'équation (A.43) se simplifie à :

$$\vec{\Delta}n_1 = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right]_{(s=\frac{1}{2}, t=\frac{1}{4}, u=\frac{1}{4})} \quad (\text{A.63})$$

Les 11 autres surfaces d'intégration sont calculées de façon analogue, mais le résultat n'est pas détaillé ici.

A.3 Le calcul des gradients

La dérivée d'un scalaire ϕ définie sur un élément local par rapport aux coordonnées (s, t, u) de l'élément de référence s'écrit en utilisant la règle de dérivation en chaîne :

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \quad (\text{A.64})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (\text{A.65})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \quad (\text{A.66})$$

Les équations (A.64) à (A.66) forment un système d'équations pouvant se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial s} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial s} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (\text{A.67})$$

Ce système d'équations doit être résolu pour les termes $\partial \phi / \partial x_i$ en fonction des termes connus $\partial x_i / \partial s_j$. En utilisant la règle de Cramer, on résout le système matriciel et on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] / DET \quad (\text{A.68})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \left[-\frac{\partial \phi}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial u} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right] / DET \quad (\text{A.69})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right] / DET \quad (\text{A.70})$$

où :

$$DET = \frac{\partial x}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u} \right) - \frac{\partial y}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \quad (\text{A.71})$$

LISTE DES RÉFÉRENCES

- Addad, Y., Prosser, R., Laurence, D., Moreau, S. et Mendonca, F. (2008). On the use of embedded meshes in the LES of external flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, volume 80, numéro 3, p. 393–403.
- Bailly, C. et Comte-Bellot, G. (2003). *Turbulence*. Sciences et techniques de l'ingénieur, CNRS Editions, Paris, 392 p.
- Batten, P., Goldberg, U. et Chakravarthy, S. (2004). Interfacing statistical turbulence closures with large-eddy simulation. *AIAA Journal*, volume 42, numéro 3, p. 485–492.
- Bhushan, S. et Warsi, Z. (2005). Large eddy simulation of turbulent channel flow using an algebraic model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, volume 49, numéro 5, p. 489–519.
- Boughanem, H. et Trouvé, A. (1996). *Validation du code de simulation directe NTMIX3D pour le calcul des écoulements turbulents réactifs* (Rapport technique). Centre de recherche sur la combustion turbulente.
- Celik, I., Cehreli, Z. et Yavuz, I. (2005). Index of resolution quality for large eddy simulations. *Journal of Fluids Engineering*, volume 127, p. 949–958.
- CFX (2009). *ANSYS CFX-Solver Theory Guide*.
- CFX-TASC (2002). *CFX-TASC flow Computational Fluid Dynamics Software. Theory Documentation*.
- Chaouat, B. et Schiestel, R. (2009). Progress in subgrid-scale transport modelling for continuous hybrid non-zonal RANS/LES simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, volume 30, numéro 4, p. 602–616.
- Comte-Bellot, G. et Corrsin, S. (1971). Simple Eulerian time correlation of full - and narrow-band velocity signals in grid-generated 'isotropic' turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 48, p. 273–337.
- Dejoan, A. et Leschziner, M. (2004). Large eddy simulation of periodically perturbed separated flow over a backward-facing step. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, volume 25, numéro 4, p. 581–592.
- Ferziger, J. et Peric, M. (1996). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Germany, 356 p.
- FLUENT (2009). *ANSYS FLUENT 12.0 Theory Guide*.
- Fureby, C., Tabor, G., H.G., W. et Gosman, A. (1997). A comparative study of subgrid scale models in homogeneous isotropic turbulence. *Physics Fluids*, volume 9, numéro 5, p. 1416–1429.

- Germano, M. (1992). Turbulence : the filtering approach. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 238, p. 325–336.
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. et Cabot, W. (1991). A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A (Fluid Dynamics)*, volume 3, numéro 7, p. 1760–1765.
- Grinstein, R., Gutmark, E., Parr, T., Hanson-Parr, D. et Obeysekare, U. (1996). Streamwise and spanwise vortex interaction in an axisymmetric jet. A computational and experimental study. *Physics of Fluids*, volume 8, numéro 6, p. 1515–1524.
- Hartel, C., Kleiser, L., Unger, F. et Friedrich, R. (1994). Subgrid-scale energy transfer in the near-wall region of turbulent flows. *Physics of Fluids*, volume 6, numéro 9, p. 3130–3143.
- Hinze, J. (1975). *Turbulence (McGraw-Hill Mechanical Engineering)*. McGraw-hill Companies, 790 p.
- Hirsch, C. (1988). *Numerical computation of internal and external flows : Fundamentals of numerical discretization, volume 1*. John Wiley & Sons, New York, 515 p.
- Jarrin, N. (2008). *Synthetic inflow boundary conditions for the numerical simulation of turbulence*. Thèse de doctorat, University of Manchester, Manchester, United Kingdom.
- Jarrin, N., Benhamadouche, S., Laurence, D. et Prosser, R. (2006). A synthetic-eddy method for generating inflow conditions for large-eddy simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, volume 27, numéro 4, p. 585–593.
- Jarrin, N., Prosser, R., Uribe, J.-C., Benhamadouche, S. et Laurence, D. (2009). Reconstruction of turbulent fluctuations for hybrid RANS/LES simulations using a synthetic-eddy method. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, volume 30, numéro 3, p. 435–442.
- Jiang, X. et Lai, C. (2009). *Numerical techniques for direct and large-eddy simulations*. CRC Press/Taylor & Francis, London, 264 p.
- Juneja, A. et Brasseur, J. (1999). Characteristics of subgrid-resolved-scale dynamics in anisotropic turbulence, with application to rough-wall boundary layers. *Physics of Fluids*, volume 11, numéro 10, p. 3054–3068.
- Kang, H., Chester, S. et Meneveau, C. (2003). Decaying turbulence in an active-grid-generated flow and comparisons with large-eddy simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 480, p. 129–160.
- Klein, M., Sadiki, A. et Janicka, J. (2003). A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations. *Journal of Computational Physics*, volume 186, numéro 2, p. 652–665.
- Kolmogorov, A. (1941). On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 31, numéro 6, p. 538–541.

- Kravchenko, A., Moin, P. et Moser, R. (1996). Zonal embedded grids for numerical simulations of wall-bounded turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, volume 127, numéro 2, p. 412–423.
- Labourasse, E. et Sagaut, P. (2002). Reconstruction of turbulent fluctuations using a hybrid RANS/LES approach. *Journal of Computational Physics*, volume 182, p. 301–336.
- Lamarque, N. (2007). *Schémas numériques et conditions limites pour la simulation aux grandes échelles de la combustion diphasique dans les foyers d'hélicoptère*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- Lee, S., Lele, S. et Moin, P. (1992). Simulation of spatially evolving turbulence and the applicability of Taylor's hypothesis in compressible flow. *Physics of Fluids A (Fluid Dynamics)*, volume 4, numéro 7, p. 1521–1530.
- Lilly, D. (1992). A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids A (Fluid Dynamics)*, volume 4, numéro 3, p. 633–5.
- Lin, C.-L. (1999). Near-grid-scale energy transfer and coherent structures in the convective planetary boundary layer. *Physics of Fluids*, volume 11, numéro 11, p. 3482–3494.
- Lund, T. et H.J., K. (1995). Experiments with explicit filtering with LES using a finite difference method. *CTR Annual Research Briefs, Stanford Univ.*, p. 91–105.
- Lund, T., Wu, X. et Squires, K. (1998). Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. *Journal of Computational Physics*, volume 140, numéro 2, p. 233–258.
- Mahesh, K., Constantinescu, G. et Moin, P. (2004). A numerical method for large-eddy simulation in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, volume 197, numéro 1, p. 215–240.
- Majander, P. et Siikonen, T. (2002). Evaluation of Smagorinsky-based subgrid-scale models in a finite-volume computation. *International journal for numerical methods in fluids*, volume 40, p. 735–774.
- Mansour, N. et Wray, A. (1994). Decay of isotropic turbulence at low Reynolds number. *Physics of Fluids*, volume 6, numéro 2, p. 808–814.
- Moin, P. et Jimenez, J. (1993). Large eddy simulation of complex flows. Dans *24th AIAA Fluid Dynamics Conference*.
- Moin, P. et Kim, J. (1982). Numerical investigation of turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 118, p. 341–377.
- Moin, P., Squires, K., Cabot, W. et Lee, S. (1991). A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport. *Physics of Fluids A*, volume 3, numéro 11, p. 2746–2757.
- Moser, R., Kim, J. et N.N., M. (1999). Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Physics of Fluids*, volume 11, numéro 4, p. 943–945.

- Nicoud, F. et Ducros, F. (1999). Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbulence and Combustion*, volume 62, numéro 3, p. 183–200.
- Okong'o, N., D., K. et Zhou, G. (2000). Large eddy simulation using an unstructured grid compressible Navier-Stokes algorithm. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, volume 13, numéro 4, p. 303–326.
- Park, N., Lee, S., Lee, J. et Choi, H. (2006). A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model with a global model coefficient. *Physics of Fluids*, volume 18, numéro 12, p. 1–24.
- Passot, T. et Pouquet, A. (1987). Numerical simulation of compressible homogeneous flows in the turbulent regime. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 181, p. 441–466.
- Payre, G. (2010). *Note de cours GMC-710 Méthodes numériques de calcul en génie*.
- Perot, J. et De Bruyn Kops, B. (2006). Modeling turbulent dissipation at low and moderate Reynolds numbers. *Journal of Turbulence*, volume 7, numéro 69, p. 1–14.
- Piomelli, U. (1993). High Reynolds number calculations using the dynamic subgrid-scale stress model. *Physics of Fluids A Fluid Dynamics*, volume 5, numéro 6, p. 1484–1490.
- Piomelli, U., Yu, Y. et Adrian, R. (1996). Subgrid-scale energy transfer and near-wall turbulence structure. *Physics of Fluids*, volume 8, numéro 1, p. 215–224.
- Pope, S. (2000). *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 773 p.
- Rai, M. et Moin, P. (1993). Direct numerical simulation of transition and turbulence in a spatially evolving boundary layer. *Journal of Computational Physics*, volume 109, numéro 2, p. 169–192.
- Rundström, D. et Moshfegh, B. (2009). Large-eddy simulation of an impinging jet in a cross-flow on heated wall-mounted cube. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, volume 52, numéro 3-4, p. 921–931.
- Saffman, P. (1967a). Large-scale structure of homogeneous turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 27, p. 581–593.
- Saffman, P. (1967b). Note on decay of homogeneous turbulence. *Physics of Fluids*, volume 10, p. 13–49.
- Sagaut, P. (2005). *Large eddy simulation for incompressible flows*, 2^e édition. Springer, 556 p.
- Schlichting, H. (1992). *Boundary-layer theory*. McGraw-Hill.
- Schneider, G. et Raw, M. (1987a). Control volume finite-element method for heat transfer and fluid flow using collocated variables - 1. Computational procedure. *Numerical heat transfer*, volume 11, numéro 4, p. 363–390.
- Schneider, G. et Raw, M. (1987b). Control volume finite-element method for heat transfer and fluid flow using collocated variables - 2. Application and validation. *Numerical heat transfer*, volume 11, numéro 4, p. 391–400.

- Sergent, E. (2002). *Vers une méthodologie de couplage entre la simulation des grandes échelles et les modèles statistiques*. Thèse de doctorat, L'École Centrale de Lyon, Lyon, France.
- Smagorinsky, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, volume 91, p. 99–164.
- Smirnov, A., Shi, S. et Celik, I. (2001). Random flow generation technique for large eddy simulations and particle-dynamics modeling. *Journal of Fluid Engineering*, volume 123, numéro 2, p. 359–371.
- Taylor, G. (1935). Statistical theory of turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London*, , numéro 151, p. 421–444.
- Tennekes, H. et Lumley, J. (1972). *A first course in turbulence*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 300 p.
- Thorner, B., Mosedale, A. et Drikakis, D. (2007). On the implicit large eddy simulations of homogeneous decaying turbulence. *Journal of Computational Physics*, volume 226, numéro 2, p. 1902–1929.
- UNCLE (1995). *UNCLE Code Documentation, version 1.4*.
- Van Driest, E. (1956). On turbulent flow near wall. *Journal of the Aeronautical Sciences*, volume 23, numéro 11, p. 1007–1011.
- Van Kalmthout, E. (1995). *Turbulence 2D Théorie et Simulations Directes* (Rapport technique).
- Versteeg, H. et Malalasekera, W. (1995). *An introduction to computational fluid dynamics The finite volume method*. Longman Scientific & Technical, London, 257 p.
- Voke, P. et Yang, Z. (1995). Numerical study of bypass transition. *Physics of Fluids*, volume 7, numéro 9, p. 2256–2264.
- von Karman, T. et Howarth, L. (1938). On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proceeding of the Royal Society of London, Series A*, p. 164–192.
- Vreman, A. (2004). An eddy-viscosity subgrid-scale model for turbulent shear flow : Algebraic theory and applications. *Physics of Fluids*, volume 16, numéro 10, p. 3670–3681.
- Wilcox, D. (1993). *Turbulence modeling for CFD*. DCW industries, La Cañada, California, 460 p.
- You, D. et Moin, P. (2007). A dynamic global-coefficient subgrid-scale eddy-viscosity model for large-eddy simulation in complex geometries. *Physics of Fluids*, volume 19, numéro 6, p. 65110–65118.
- Zhang, S. et Rutland, C. (1995). Premixed flame effects on turbulence and pressure related terms. *Combustion and Flame*, volume 102, p. 447–461.

