

# Quelques résultats sur la percolation d'information dans les marchés OTC

## Mémoire

Sophia Bayade

Directeur

**Alain Bélanger**

Co-Directeur

**Gaston Giroux**

29 mai 2014

*M.Sc.Finance*

Faculté d'administration



UNIVERSITÉ DE  
**SHERBROOKE**

## Abstract

Over-the-counter (OTC) markets have the main characteristic that they do not use a centralized trading mechanism (such as auctions, specialist, or limit-order book) to aggregate bids and offers and to allocate trades. The buyers and sellers have often a limited knowledge of trades recently negotiated elsewhere in the market. They are also negotiating in potential ignorance of the prices currently available from other counterparties. This is the reason why OTC markets are said to be relatively opaque and are qualified as «Dark Markets» by [Duffie \(2012\)](#) in his recent monograph to reflect the fact that investors are somewhat in the dark about the most attractive available deals and about whom to contact. In this work, we are particularly interested in the evolution over time of the distribution across investors of information learned from private trade negotiations. Specifically, we aim to establish the asymptotic stability of equilibrium dynamics of information sharing in a large interaction set. An agent's optimal current effort to search for information sharing opportunities depends on that agent's current level of information and on the cross-sectional distribution of information quality and search efforts of other agents. Under the [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#) framework, in equilibrium, agents search maximally until their information quality reaches a trigger level and then search minimally. In the context of percolation of information between agents, the information can be transmitted directly or indirectly. The first studies of such a problem were made by [Duffie-Manso \(2007\)](#) and then by [Duffie-Giroux-Manso \(2010\)](#). In that second study the case of the percolation of information by groups of more than 2 investors was addressed and solved for a perfect information transmission kernel. That last study has led [Bélanger-Giroux \(2013\)](#) to the problem of extending the Wild sums for a general interacting kernel (not only for the kernel which adds the information). On the other hand, in [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#), the authors explain that, for the information sharing in a large population, each agent is endowed with signals regarding the likely outcome of a random variable of common concern, like the price of an asset of common interest. Such a setting leads to nonlinear systems of evolution equations. The agents' goal is to obtain an equilibrium policy specified by a set of parameters of a trigger policy; more specifically the minimal search effort trigger policies. We concentrate our

study on those trigger policies in order to provide more intuitive and practical results. Doing so, we are able to obtain the existence of the steady state even when the intensity function is not a product. And in our framework, we are even able to show the asymptotic stability starting with any initial law. This can be done because we are able to show that, by a change of kernels, the systems of ODE's, which are expressed by a set of kernels (one 1-airy and one 2-airy) are equivalent to systems expressed with a single 2-airy kernel even with a constant intensity equal to one (by a change of time). We show also that starting from any distribution, the solution converges to the limit proportions. Furthermore, we are able to show the exponential stability using the Routh-Hurwitz criterion for an example of a finite system of differential equations. The solution of such a system of equations describes the cross distribution of types in the market.

## Résumé

La principale caractéristique des marchés OTC (*Over-The-Counter*) est l'absence d'un mécanisme de négociation centralisée (comme des ventes aux enchères, des spécialistes ou des *limit-order books*). Les acheteurs et les vendeurs sont donc souvent dans l'ignorance des prix actuellement disponibles auprès d'autres contreparties potentielles et ont une connaissance limitée de l'amplitude des transactions récemment négociées ailleurs sur le marché. C'est la raison pour laquelle les marchés OTC sont qualifiés de relativement opaques et nommés «*Dark Markets*» par [Duffie \(2012\)](#) dans sa récente monographie afin de refléter le fait que les investisseurs sont en quelque sorte dans le noir au sujet du meilleur prix disponible et de la personne à contacter pour faire la meilleure transaction. Dans ce travail, nous sommes particulièrement intéressés à l'évolution temporelle de la transmission de l'information au cours des séances de négociation. Plus précisément, nous cherchons à établir la stabilité asymptotique de la dynamique de partage de l'information au sein d'une large population d'investisseurs caractérisés par la fréquence/intensité des rencontres entre investisseurs. L'effort optimal déployé par un agent en recherche d'information dépend de son niveau actuel d'information et de la distribution transversale des efforts de recherche des autres agents. Dans le cadre défini par [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#), à l'équilibre, les agents recherchent au maximum jusqu'à ce que la qualité de leur information atteigne un certain niveau, déclenchant une nouvelle phase de recherche minimale. Dans le contexte de percolation d'information entre agents, l'information peut être transmise parfaitement ou imparfaitement. La première étude de ce problème de percolation a été faite par [Duffie-Manso \(2007\)](#), puis par [Duffie-Giroux-Manso \(2010\)](#). Dans cette deuxième étude, le cas de la percolation de l'information par des groupes de plus de deux investisseurs a été abordé et résolu. Cette dernière étude a conduit au problème de l'extension des sommes de Wild dans [Bélanger-Giroux \(2013\)](#). D'autre part, dans [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#), chaque agent est doté de signaux quant à l'issue probable d'une variable aléatoire d'intérêt commun dans l'optique de transmission d'information dans une large population d'agents. Un tel contexte conduit à des systèmes d'équations non linéaires d'évolution. Leur objectif est d'obtenir une politique d'équilibre déterminée par un ensemble de

paramètres d'une politique de cible traduisant le fait que l'effort de recherche qui doit être minimal lorsqu'un agent possède suffisamment d'information. Dans ce travail, nous sommes en mesure d'obtenir l'existence de l'état d'équilibre, même lorsque la fonction d'intensité n'est pas un produit. De plus, nous sommes également en mesure de montrer la stabilité asymptotique pour toute loi initiale par un changement de noyaux. Enfin, nous élargissons les hypothèses de [Bélanger-Giroux \(2012\)](#) pour montrer la stabilité exponentielle par le critère de Routh-Hurwitz pour un autre exemple de système à un nombre fini d'équations.

## **Remerciements**

Je désire tout d'abord remercier mon directeur de stage, Alain Bélanger, de m'avoir donné l'opportunité de faire ce mémoire, ainsi que pour son excellent encadrement, sa disponibilité, sa grande gentillesse, son soutien et l'enseignement qu'il m'a transmis.

Je désire aussi remercier Gaston Giroux pour le temps qu'il a pris à m'expliquer les concepts mathématiques, pour son soutien, sa grande gentillesse, ses conseils et recommandations, ainsi que sa grande disponibilité.

De plus, je désire remercier le lecteur, Guy Bellemare, pour avoir pris le temps de lire mon mémoire et d'assister à ma présentation.

Enfin, j'aimerai également remercier l'Université de Sherbrooke et la faculté d'administration de m'avoir donné l'opportunité de faire cette maîtrise et pour l'excellence de son corps professoral.

# Table des matières

I.	Introduction .....	8
II.	Revue de littérature .....	11
III.	Cadre théorique .....	18
A.	Introduction aux chaînes de Markov .....	18
B.	Cadre théorique du mémoire .....	24
IV.	Percolation d'information avec sortie d'agents .....	32
A.	Existence de la loi invariante ou <i>steady state</i> .....	36
B.	Stabilité exponentielle .....	42
V.	Minimal Search Effort .....	49
A.	Cas $m=2$ .....	50
B.	Cas $m=3$ .....	55
C.	Cas général .....	57
VI.	Avenues de recherche .....	59
VII.	Conclusion .....	60
VIII.	Références .....	61
IX.	Annexes.....	64
Annexe A :	Quelques définitions .....	64
1.	Noyaux de probabilité .....	64
2.	Produit de Convolution .....	64
3.	Stabilité asymptotique et exponentielle.....	65
Annexe B.....		68
Annexe C.....		69
Annexe D.....		72
Annexe E.....		74
Annexe F.....		77
Annexe G.....		81

## I. Introduction

Un très grand nombre d'actifs financiers se transigent sur les marchés décentralisés, tels que la plupart des produits dérivés, les obligations adossées à des actifs (*collateralized debt obligations, mortgage backed securities, etc.*), et les *repurchase agreements*. Ils ont reçu une attention considérable au cours de la récente crise financière. Plutôt que d'être échangé via une institution centralisée comme une bourse, les transactions de gré à gré sont négociées en privé entre les participants du marché qui ne sont pas nécessairement conscients des prix qui sont actuellement disponibles ailleurs sur le marché. Sur ces marchés relativement opaques, aussi appelés marchés Hors-Bourse ou *Over-the-Counter* (OTC), les investisseurs peuvent être dans l'ignorance du meilleur prix et de l'identité de celui qui pourrait leur offrir ce prix. Cette opacité a aggravé la crise financière parce que les régulateurs et les acteurs du marché ont été incapables d'évaluer rapidement les prix de ces instruments et la magnitude des positions prises sur ces instruments.

Ce mémoire est relié à plusieurs volets de la littérature concernant la percolation d'information. Le terme « percolation » vient du latin *percolatio* qui signifie filtration. C'est un processus décrivant le passage d'un état à un autre pour un système donné. [Duffie-Manso \(2007\)](#) sont les premiers, au meilleur de notre connaissance, à utiliser le terme de « percolation » en finance. Ils ont emprunté ce terme de la physique et de la chimie, où il s'applique aux mouvement et filtrage de fluides à travers des matériaux poreux. En économie et en finance, la théorie de la percolation est utilisée pour décrire l'évolution de systèmes hétérogènes et désordonnés tels que la propagation d'une information (rumeur, technologie, prix, opinion...) sur une structure aléatoire et hétérogène formée par un ensemble d'éléments tels que des agents, des entreprises, une population, etc.

Dans le cadre des marchés décentralisés, leur opacité donne lieu au problème de la percolation de l'information. La première étude de ce problème a été faite par [Duffie-Manso \(2007\)](#), puis par [Duffie-Giroux-Manso \(2010\)](#). Dans cette deuxième étude, une dynamique de percolation de l'information par des groupes de plus de 2 investisseurs a été abordée et résolue. Cette dernière étude a conduit [Bélanger-Giroux \(2013\)](#) à

généraliser le cas particulier de noyau de transmission parfaite d'information à plusieurs (les encans spécialisés par exemple). Pour cela, [Bélanger-Giroux \(2013\)](#) ont obtenu l'extension des sommes de Wild pour un noyau d'interaction général et des interactions à plus de deux investisseurs, permettant ainsi la possibilité de transmission partielle d'information, par opposition à [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#) où cette information est partagée en totalité. Dans notre mémoire, nous permettons que l'information soit partagée partiellement.

Notre travail s'inspire de [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#), où chaque agent de la population est doté de signaux informatifs sur l'issue probable d'une variable aléatoire gaussienne d'intérêt commun. Les individus recherchent d'autres agents dont ils pourraient recueillir des informations supplémentaires sur cette variable. Lorsque  $m$  agents se rencontrent,  $m \geq 2$ , ils partagent leurs informations. L'information recueillie est aussi partagée lors des réunions suivantes et ainsi de suite (percolation). Dans [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#), les individus choisissent l'effort avec lequel ils recherchent d'autres agents dont ils peuvent recueillir des informations supplémentaires. Les agents recherchent de l'information au maximum jusqu'à ce qu'ils acquièrent suffisamment de précision et recherchent ensuite avec un effort minimal, atteignant ainsi un état d'équilibre. Pour un agent, l'effort optimal de recherche d'informations dépend de son niveau d'information recueillie et de la distribution transversale de la qualité d'information et des efforts de recherche d'autres agents. Plus spécifiquement, [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#) supposent que l'intensité des rencontres (c'est-à-dire leur fréquence) augmente proportionnellement à l'effort actuel de l'agent, étant donné les efforts de recherche des autres agents. L'opacité du marché est ici contrôlée par cette mesure d'intensité, inverse de la friction. Les agents se rencontrent donc aléatoirement selon une intensité sous forme de produit et [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#) montrent l'existence de l'état d'équilibre dans ce contexte. Dans notre étude, nous élargissons ce contexte et nous sommes en mesure d'obtenir l'existence de l'état d'équilibre sous l'hypothèse que l'intensité est bornée, pourvu qu'il y ait uniformité en temps. De plus, dans notre cadre, nous sommes en mesure de montrer la stabilité asymptotique pour toute loi initiale, grâce à des changements de noyaux. Enfin, en nous inspirant de [Bélanger-](#)

[Giroux \(2012\)](#), nous élargissons les hypothèses des auteurs à un autre cas particulier, mais comprenant plusieurs exemples de systèmes à nombre fini d'équations et nous montrons l'existence de la loi invariante et la stabilité asymptotique.

Notre travail est structuré comme suit : dans la deuxième section, nous faisons une revue de la littérature reliée à la percolation d'information. Ensuite, dans une troisième section, nous énonçons le cadre théorique de notre mémoire. Dans une quatrième partie, nous traitons de la percolation d'information avec sortie d'agents. La cinquième partie traite de l'équilibre lorsque les agents adoptent une politique de recherche d'information optimale. Enfin, dans la sixième partie, nous présentons notre conclusion ainsi que des avenues de recherches futures.

## II. Revue de littérature

La question de l'agrégation de l'information a été au centre de plusieurs études économiques depuis longtemps. Une abondante littérature a mis l'accent sur l'agrégation de l'information par les prix. Par exemple, [Grossman \(1981\)](#) a proposé le concept d'équilibre des anticipations rationnelles (*rational-expectations equilibrium*) pour capturer l'idée que les prix agrègent l'information qui est initialement dispersée à travers les investisseurs.

[Wilson \(1985\)](#), [Milgrom \(1981\)](#), [Pesendorfer-Swinkels \(1997\)](#) et [Reny-Perry \(2006\)](#) ont fourni les fondements théoriques pour le concept d'équilibre des anticipations rationnelles sur les marchés centralisés. Dans de nombreux cas, cependant, l'agrégation de l'information se fait par des interactions locales plutôt que par l'observation commune des prix du marché. Ainsi, sur les marchés décentralisés (incluant les marchés de l'immobilier), les agents sont informés par le biais d'offres d'autres agents lors de vente aux enchères privées ou de séances de négociation. [Wolinsky \(1990\)](#) et [Blouin-Serrano \(2001\)](#) ont étudié la percolation de l'information sur les marchés décentralisés. Dans la littérature sur l'apprentissage social (*social learning*), les agents communiquent entre eux et agissent en fonction de l'information reçue des autres. [Banerjee-Fudenberg \(2004\)](#), par exemple, ont étudié l'agrégation de l'information dans ce contexte.

Dans sa monographie *Dark Markets*, [Duffie \(2012\)](#) offre une introduction concise aux marchés décentralisés en expliquant les principaux problèmes conceptuels et techniques de modélisation, et en offrant aux lecteurs les fondements de sujets plus avancés dans ce domaine. [Duffie \(2012\)](#) énonce les méthodes de base de modélisation et d'appariement aléatoire d'agents économiques. Il donne un aperçu de l'évaluation des prix des actifs sur les marchés décentralisés, montrant comment l'information percole à travers ces marchés alors que les investisseurs se rencontrent au fil du temps. [Duffie \(2012\)](#) a été un contributeur clé à ce nouveau domaine de recherche prometteur qui cherche à comprendre le comportement de ces marchés dits « opaques ». [Duffie \(2012\)](#) décrit dans son livre différents modèles d'évolution de marchés décentralisés, certains concernant le portefeuille d'un investisseur, d'autres son information. Nous nous intéressons surtout au

chapitre 5 de son livre où l'auteur étudie la percolation d'information dans des marchés décentralisés.

Plusieurs auteurs se sont penchés sur la question de la percolation d'information dans différents marchés. Ainsi, [Duffie et Manso \(2007\)](#), [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#), [Duffie-Malamud-Manso \(2010 b\)](#), et [Duffie-Malamud-Manso \(2010a\)](#) mettent l'accent sur un cadre de marché décentralisé, alors qu'[Andrei-Cujean \(2013\)](#) se concentrent sur le cas des marchés centralisés.

[Duffie-Giroux-Manso \(2010\)](#) définissent une variable aléatoire  $X$  pouvant prendre les valeurs H (« high ») avec probabilité  $p$  et L (« low ») avec probabilité  $1-p$ . Chaque agent possède initialement une séquence de signaux  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  détenant de l'information au sujet de  $X$ . Conditionnellement à  $X$ , ces signaux sont indépendants et suivent une loi de Bernoulli. Les auteurs supposent que :

$$P(s_i = 1|H) \geq P(s_i = 1|L)$$

De plus, un signal est informatif si :

$$P(s_i = 1|H) > P(s_i = 1|L)$$

Ils définissent également le « type » de la séquence de signaux avec :

$$\theta = \sum_{i=1}^n \log \frac{P(s_i|H)}{P(s_i|L)}$$

Plus le type est élevé, plus le ratio de vraisemblance entre l'état H et l'état L est élevé et plus la probabilité à posteriori que  $X$  est H est élevée. Considérant une population de  $N$  agents, chaque agent rencontre aléatoirement  $m$  autres agents parmi les  $N-1$  restants selon un processus de Poisson d'intensité constante  $\lambda$ . Notons que le nombre d'agents,  $m$ , participant à chaque rencontre est un paramètre du modèle de percolation d'information. Les temps des rencontres et les contreparties d'un agent sont indépendants de ceux d'un autre agent. Dans le cas binaire ( $m=2$ ), quand un agent de type T1 rencontre un agent de

type T2, ils s'échangent totalement leur information pour atteindre le type T1+ T2. Dans le cas de rencontre impliquant  $m \geq 2$  agents, ils échangent tous leurs informations pour atteindre le type  $T1 + \dots + Tm$ . Soit  $\mu_0$  la distribution initiale de types induite par une allocation initiale de signaux aux agents et  $\mu_t$  la distribution transversale à posteriori des types au temps  $t$ . Les auteurs définissent l'équation de percolation d'information sous la forme différentielle suivante :

- pour le cas binaire

$$\frac{d\mu_t}{dt} = \lambda(\mu_t * \mu_t - \mu_t)$$

Ici,  $*$  dénote le produit de convolution discret (voir [Annexe A.2](#)), alors que  $\mu_t$  représente la répartition en coupe transversale de l'ensemble des signaux. Le terme de convolution  $\mu_t * \mu_t(j) = \sum_{i=1}^j \mu_t(i) \mu_t(j-i)$  représente ainsi le taux brut auquel de nouveaux agents d'un type donné sont créés lorsqu'un agent de type  $i$  rencontre un agent de type  $j-i$ , et devient ainsi un agent de type  $j$  (transmission parfaite d'information). Le deuxième terme de  $-\mu_t$  capte le taux de remplacement d'agents d'un type donné avec ceux de certains nouveaux types.

- de manière similaire, pour le cas de rencontres impliquant  $m \geq 2$  agents, on a :

$$\frac{d\mu_t}{dt} = \lambda(\mu_t^{*m} - \mu_t)$$

avec  $\mu_t^{*m}$  le produit de convolution sur  $\mathbb{N}^*$  de  $\mu_t$ ,  $m$  fois (voir [Annexe A.2](#) pour la définition). Avec cette définition, on peut facilement voir que l'évolution entraîne l'addition d'information.

[Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#) étudie la percolation d'information dans des marchés décentralisés. Ils analysent des marchés dans lesquels les rencontres d'agents se font par groupe de deux et au cours desquelles les deux agents révèlent à chacun tous les renseignements pertinents qu'ils ont recueillis dans leurs rencontres précédentes. Leur modèle est lié à ceux de [Duffie-Manso \(2007\)](#) et [Duffie-Giroux-Manso \(2010\)](#), qui fournissent une solution explicite pour l'évolution des croyances a posteriori des agents,

lorsque ces derniers sont appariés au hasard dans le temps, échangeant toutes leurs informations à chaque rencontre. L'étude de [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#) se distingue, entre autres, de ces travaux antérieurs par l'introduction d'une fonction d'intensité non constante dépendant du type de l'agent, afin d'exprimer l'intensité de l'activité de recherche de chaque agent. Dans ce mémoire nous allons montrer que leurs systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) peuvent être ramenés à des systèmes à intensité constante, par des changements de noyaux équivalents aux noyaux originaux. Dans l'étude réalisée par [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#), les agents sont donc initialement dotés de signaux concernant une variable aléatoire  $Y$  d'intérêt commun. Conditionnellement à  $Y$ , ces signaux sont Gaussiens et indépendants les uns des autres. Sans perte de généralité et en raison de leurs rôles purement informatifs, [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#) suppose qu' $Y$  et tous les signaux ont une moyenne nulle et une variance unitaire. La variance conditionnelle de  $Y$  sachant  $n$  signaux est :

$$v(n) = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2(n - 1)}$$

avec  $\rho$  la corrélation entre  $Y$  et n'importe quel signal. La variance de  $Y$  diminue lorsque la corrélation entre  $\rho$  et  $Y$  augmente. Pour un  $\rho$  donné, la variance de  $Y$  diminue avec le nombre de signaux.

Lors d'une rencontre au temps  $t$ , un agent  $i$  partagera avec sa contrepartie  $j$  sa moyenne conditionnelle  $X_{it}$  de  $Y$  et le nombre total (ou partiel)  $N_{it}$  de signaux qui ont permis à l'agent  $i$  de calculer la valeur de  $X_{it}$ . Ce nombre de signaux est initialement distribué selon une loi de probabilité  $\pi$  indépendante de  $i$ . L'agent  $i$  possède alors initialement un nombre  $N_{i0}$  de signaux indépendants de  $Y$  qui s'incrémentera à chaque rencontre par le nombre  $N_{jt}$  de signaux provenant de sa contrepartie  $j$ . Pour chaque paire d'agents  $(i, j)$ ,  $N_{i0}$  et  $N_{j0}$  sont indépendants et leurs ensembles de signaux sont initialement disjoints. Quand le nombre d'investisseurs dans la population  $N$  tend vers l'infini, la probabilité que  $i$  et  $j$  se rencontre une deuxième fois à un autre moment tend vers zéro. De la même manière, l'ensemble d'agents préalablement rencontrés par  $i$  a, à la limite, une probabilité nulle de chevaucher l'ensemble d'agents préalablement rencontrés par  $j$ .

La distribution transversale  $\mu_t$  de la précision d'information au temps  $t$  est définie, pour tout entier positif  $n$ , comme la fraction d'agent avec un degré de précision  $n$  :

$$\mu_t(n) = \frac{\#\{i: N_{it} = n\}}{q_t}$$

avec  $\#\{i: N_{it} = n\}$  le nombre d'agents avec la précision  $n$  et  $q_t$  la quantité totale d'agents dans le marché au temps  $t$ .

À chaque instant  $t$ , chaque agent choisit son niveau d'effort de recherche  $C$  dans un intervalle  $[c_L, c_H] \subset \mathbb{R}^+$ . Les agents recherchent au maximum jusqu'à ce que la qualité de l'information atteigne un certain seuil, puis recherchent minimalement. En supposant que cette politique est utilisée par tous les agents, [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#) introduisent le niveau d'effort de recherche  $C$  et arrivent au type d'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \mu_t(n) = \eta(\pi(n) - \mu_t(n)) + (\mu_t^C * \mu_t^C)(n) - \mu_t^C(n) \mu_t^C(\mathbb{N})$$

Avec :

- $\pi(n)$  est une distribution donnée indépendante des paires d'agents
- $\mu_t^C(n) = C(n)\mu(t, n)$  est la mesure pondérée par l'effort telle que  $C(n)$  est la fonction traduisant la politique d'effort de recherche.
- $\mu_t^C(\mathbb{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mu_t(n)$  est la distribution transversale moyenne des efforts de recherche.

Dans cette équation, le terme linéaire,  $\eta(\pi(n) - \mu_t(n))$ , représente le remplacement d'agents par de nouveaux agents qui rentrent dans le marché avec information/type suivant la loi  $\pi$ . Le terme  $(\mu_t^C * \mu_t^C)(n)$  est l'opérateur de gain. Au fil des rencontres et des partages d'information, ce terme de convolution représente le taux de création d'un nouvel agent avec une précision donnée. Enfin, le dernier terme  $\mu_t^C(n) \mu_t^C(\mathbb{N})$  est un opérateur de perte qui capture le taux de remplacement d'agents de précision  $n$  par ceux possédant une nouvelle précision obtenue à travers des rencontres et partage d'information.

Duffie-Malamud-Manso (2009) s'intéressent ensuite à la question d'existence et de stabilité de la loi invariante ou *steady state*. Commençons tout d'abord par définir le concept de *steady state*. Considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = f_1(X_1, \dots, X_N, \lambda, \mu) \\ \frac{dX_2}{dt} = f_2(X_1, \dots, X_N, \lambda, \mu) \\ \dots \\ \frac{dX_N}{dt} = f_N(X_1, \dots, X_N, \lambda, \mu) \end{cases}$$

où  $X_1, \dots, X_N$  sont  $N$  variables et  $\lambda, \mu$  des paramètres.

On peut réécrire ce système sous la forme compacte suivante :

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i(X_1, \dots, X_N, \lambda, \mu) \text{ , avec } i = 1, \dots, N$$

ou sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$$

Si on a :

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = 0 \\ \frac{dX_2}{dt} = 0 \\ \dots \\ \frac{dX_N}{dt} = 0 \end{cases}$$

alors  $X_1, \dots, X_N$  n'évoluent plus et deviennent constantes par rapport au temps  $t$ . La solution de ce système si elle existe est un *steady state*. Donc, par définition, le *steady state*  $\mathbf{X}_S$  doit satisfaire :

$$\left( \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_S} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_S) = 0$$

La loi invariante du système introduit par Duffie-Malamud-Manso (2009) satisfait :

$$0 = \eta(\pi - \mu) + \mu^c * \mu^c - \mu^c \mu^c(N)$$

En supposant qu'il existe un entier  $N$  tel que  $C(n) = C(N)$ , pour  $n \geq N$ , [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#) obtiennent la stabilité pour la condition suivante :

$$\eta \geq c_H C(N)$$

Plus tard, [Bélanger-Giroux \(2011\)](#) généralisent l'étude de la dynamique des marchés décentralisés comme grands ensembles interactifs où les interactions se produisent à  $m$  agents avec nombre d'agents  $m \geq 2$  quelconque. Dans le même contexte, [Bélanger et Giroux \(2012\)](#) étendent ensuite les résultats d'existence et d'unicité d'une loi stable du modèle d'échange d'information binaire de [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#) au cas d'échange d'information impliquant plus de deux investisseurs. Ils illustrent également l'utilité de leur résultat par rapport à l'existence d'une solution globale du problème de Cauchy pour une grande classe d'équations différentielles non linéaires, en obtenant la stabilité asymptotique de cas particuliers de systèmes d'un nombre fini d'équations.

### III. Cadre théorique

Avant de présenter le cadre théorique de notre mémoire, nous allons tout d'abord faire un rappel sur les chaînes de Markov, ainsi que des propriétés et théorèmes nécessaires pour cette étude.

#### A. Introduction aux chaînes de Markov

Dans cette introduction aux chaînes de Markov, nous allons commencer par présenter quelques exemples de chaînes de Markov, puis nous aborderons les définitions plus formelles par la suite.

Les chaînes de Markov peuvent être considérées en temps discret :

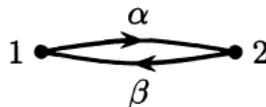
$$n \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$$

ou en temps continu :

$$t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$$

Les chaînes de Markov sont souvent mieux décrites par des diagrammes traduisant les probabilités de passage d'un état vers un ou plusieurs autres états. Ci-dessous, nous présentons quelques exemples de diagrammes et nous donnons une description de la chaîne en termes de passage d'un état à un autre :

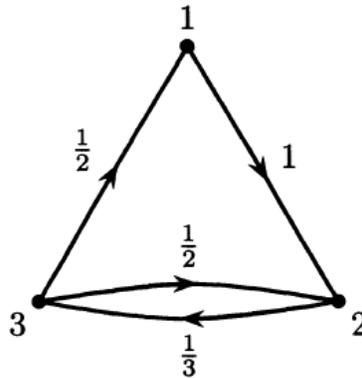
(i) (Temps discret)



Ici, on passe de l'état 1 à l'état 2 avec une probabilité  $\alpha$ , et de l'état 2 à l'état 1 avec probabilité  $\beta$ . En partant de l'état 1, on y reste avec probabilité  $1 - \alpha$ ; en partant de l'état 2, on y reste avec probabilité  $1 - \beta$ . Comme toutes les probabilités de sorties d'un

état doivent sommées à 1, on omet dans le diagramme de préciser les probabilités de rester dans un état, car celles-ci peuvent se déduire du diagramme.

(ii) (Temps discret)



Ici, on passe de l'état 1 à l'état 2 avec une probabilité de 1. À partir de l'état 3, on peut passer à l'état 1 ou à l'état 2 avec la même probabilité  $\frac{1}{2}$ . En partant de l'état 2, on passe à l'état 3 avec probabilité  $\frac{1}{3}$  ou bien on reste à l'état 2.

(iii) (Temps continu)



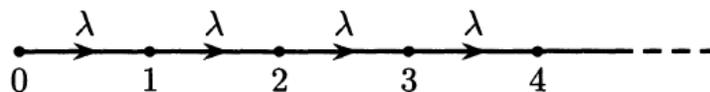
À partir de l'état 0, on attend pendant une période de temps aléatoire avec distribution exponentielle de paramètre  $\lambda \in (0, \infty)$ , puis on passe l'état 1.

La fonction de densité du temps d'attente T est donc donnée par :

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{pour } t \geq 0$$

Pour simplifier on dira que  $T \sim E(\lambda)$ .

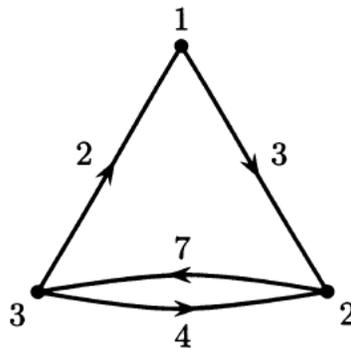
(iv) (Temps continu)



Ici, on commence l'état 0 et on passe à l'état 1 après un temps exponentiel de paramètre  $\lambda \in (0, \infty)$ . Une fois arrivé à l'état 1, on ne s'arrête pas et on passe à l'état 2

après une autre période de temps exponentielle de paramètre  $\lambda \in (0, \infty)$ , et ainsi de suite. Cette chaîne est appelée processus de Poisson de paramètre  $\lambda \in (0, \infty)$ .

(v) (Temps continu)



À l'état 3, on peut avoir deux temps exponentiels indépendants  $T_1 \sim E(2)$  et  $T_2 \sim E(4)$ ; si  $T_1$  est inférieur à  $T_2$ , alors on passe à l'état 1 après une période de temps de  $T_1$ , sinon on passe à l'état 2 après une période de temps  $T_2$ .

Rappelons que si  $T_1$  et  $T_2$  sont deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  alors :

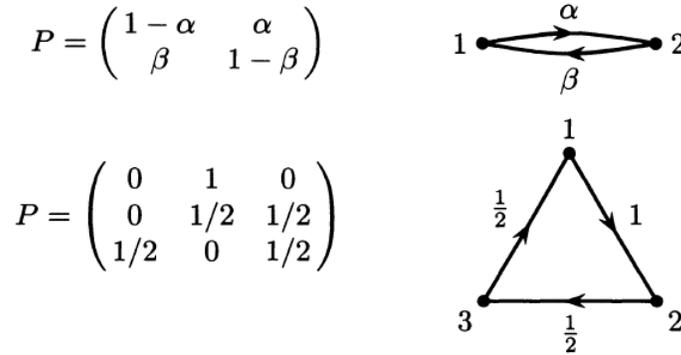
$$\min\{T_1, T_2\} \sim E(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Le temps passé à l'état 3 est donc exponentiel de paramètre  $2+4=6$  et la probabilité de passer de l'état 3 à l'état 1 est de  $\frac{2}{2+4} = \frac{1}{3}$ .

Nous allons maintenant introduire des définitions plus formelles. En se référant à [Norris \(1998\)](#), rappelons la définition d'une chaîne de Markov. Pour cela, définissons d'abord quelques concepts. Soit  $I$  un ensemble dénombrable. On dit que chaque  $i \in I$  est un état et que  $I$  est l'espace des états. On dit que  $\lambda = (\lambda_i; i \in I)$  est une mesure sur  $I$  si  $0 \leq \lambda_i < \infty$  pour tout  $i$ . De plus, si la masse totale  $\sum_{i \in I} \lambda_i$  est égale à 1, alors on dit que  $\lambda$  est une loi de probabilité. On dit que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov de loi initiale  $\lambda$  et de

matrice de transition  $P = (p_{i,j}; i, j \in I)$  si : (i)  $\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$ , c'est-à-dire que  $X_0$  suit la distribution  $\lambda$  ; (ii)  $\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$ .

Nous pouvons relier les types de diagrammes introduits précédemment avec les matrices de transition. Par exemple :



Il est possible de diviser une chaîne de Markov en classes de communication. On dit que l'état  $i$  mène à l'état  $j$  si  $\mathbb{P}_i(X_n = j \text{ pour un certain } n \geq 0) > 0$ . On dit que l'état  $i$  communique avec l'état  $j$  si l'état  $i$  mène à l'état  $j$  et l'état  $j$  mène à l'état  $i$ . On dit qu'une classe  $C$  est fermée si tout élément  $i$  de  $C$  menant à  $j$  implique que  $j$  est également un élément de  $C$ . Une classe fermée est donc une classe dont on ne peut pas sortir. Une chaîne de Markov est dite irréductible si tous les états communiquent entre eux, c'est à dire, s'il n'existe qu'une seule classe de communication. Introduisons à présent le concept de loi invariante qui joue un rôle important dans l'étude des chaînes de Markov à temps continu. Afin de comprendre le passage du temps discret au temps continu, on peut voir l'espace discret  $\{0, 1, 2, \dots\}$  comme intégré dans l'espace continu  $[0; \infty)$ . Pour  $p \in (0; \infty)$  une manière naturelle d'interpoler la séquence discrète  $(p^n; n = 0, 1, 2, \dots)$  est d'utiliser la fonction  $(e^{tq}; t \geq 0)$ , où  $q = \log(p)$ . Considérons à présent un ensemble  $I$  fini et une matrice  $P = (p_{i,j}; i, j \in I)$ . Supposons qu'on puisse trouver une matrice telle que  $e^Q = P$ . Alors  $e^{nQ} = (e^Q)^n = P^n$ , et donc  $(e^{tq}; t \geq 0)$  remplis les trous de la séquence discrète.

Rappelons qu'une matrice-Q sur I est une matrice  $Q = (q_{ij}: i, j \in I)$  satisfaisant les conditions suivantes :

- (i)  $0 \leq -q_{ii} < \infty$  pour tout i;
- (ii)  $q_{ij} \geq 0$  pour tout  $i \neq j$ ;
- (iii)  $\sum_{j \in I} q_{ij} = 0$  pour tout i.

D'après le théorème 2.1.2 de Norris (1998), une matrice Q sur un ensemble fini I est une matrice-Q si et seulement si  $P(t) = e^{tQ}$  est une matrice stochastique pour tout t, c'est-à-dire si toutes ses lignes  $(p_{ij}: j \in I)$  sont des distributions.

On dit que la mesure  $\lambda$  est invariante si :  $\lambda Q = 0$ .

D'après le théorème 2.1.1 de Norris (1998), si Q est une matrice sur un ensemble fini et si  $P(t) = e^{tQ}$ , alors  $(P(t): t \geq 0)$  a les propriétés suivantes :

- (i)  $P(s + t) = P(s)P(t)$  pour tout s,t (*propriété de semi-groupe*);
- (ii)  $(P(t): t \geq 0)$  est l'unique solution de l'équation *forward*

$$P'(t) = P(t)Q \text{ avec } P(0) = I;$$
- (iii)  $(P(t): t \geq 0)$  est l'unique solution de l'équation *backward*

$$P'(t) = QP(t) \text{ avec } P(0) = I;$$
- (iv) Pour  $k=0,1,2,\dots$ , on a :

$$P^{(k)}(0) = Q^k \text{ avec } P(0) = I.$$

En temps continu, la chaîne de Markov  $(X_t)_{t \geq 0}$  est caractérisée par une loi initiale  $\lambda$  et une matrice-Q  $Q = (q_{i,j}: i, j \in I)$ . La distribution initiale  $\lambda$  donne la loi de  $X_0$ , alors que la matrice Q, appelée générateur, détermine l'évolution du processus à partir de l'état initial. En se référant à la notation utilisée par Norris (1998), on dira alors que  $(X_t)_{t \geq 0}$  est Markov( $\lambda, Q$ ).

Dans ce travail, nous nous intéressons à déterminer si la solution de notre système d'équations différentielles est asymptotiquement stable, c'est-à-dire si toute autre solution, commençant suffisamment près de notre solution à  $t=0$ , reste près de notre solution pour tous les temps futurs,  $t \geq 0$  (voir [Annexe A.3](#) pour les définitions formelles de la stabilité asymptotique et exponentielle). Afin de montrer la stabilité asymptotique, il nous reste à définir le concept de récurrence. On dit que l'état  $i$  est récurrent s'il est certain que la chaîne repasse de nouveau par cet état après un nombre de pas fini. On dit que l'état  $i$  est transitoire si la probabilité de retour après un nombre de pas fini est égale à zéro. Une chaîne de Markov est dite récurrente si elle se compose d'une seule classe de communication d'états récurrents. D'après le théorème 1.5.6 de [Norris \(1998\)](#), toute classe finie et fermée est récurrente.

## B. Cadre théorique du mémoire

Nous allons maintenant présenter le cadre théorique du mémoire et nous allons décrire la dynamique d'évolution de la distribution transversale du type d'agent à l'aide de la théorie des chaînes de Markov. Soit  $N$  le nombre d'investisseurs dans le marché, et  $m$  ( $2 \leq m \leq N$ ) le nombre d'agents à chaque rencontre. Soit  $\lambda$  l'intensité des rencontres, qui est inversement proportionnelle à la friction de recherche (c'est-à-dire, plus  $\lambda$  est petite, plus les frictions dans le marché sont élevées). Soit  $\mu_t(k)$  la fraction de la population de type  $k$  au temps  $t$ . Dans notre mémoire, nous nous plaçons dans le cadre suivant :

1. Les rencontres se font par groupe de  $m$  agents ( $m \geq 2$ )
2. L'information peut être révélée partiellement grâce à un noyau de probabilité symétrique arbitraire
3. Il n'y a qu'un nombre fini de types d'agents (correspondant aux différents niveaux d'information). Cet ensemble est noté  $E$ .
4. On suppose que la convergence en temps est uniforme.

Notre équation d'évolution limite, pour des rencontres impliquant 3 investisseurs ( $m=3$ ), est alors de la forme :

$$\mu_t(k) = \mu_0(k) + \int_0^t (\mu_s^{03}(k) - \mu_s(k)) ds$$

Avec :

$$\mu_s^{03}(k) = \sum_{l_1, l_2} \sum_{i_1, i_2, i_3} \mu_s(i_1) \mu_s(i_2) \mu_s(i_3) K(i_1, i_2, i_3; k, l_1, l_2)$$

D'où l'équation d'évolution (1) suivante:

$$\mu_t(k) = \mu_0(k) + \int_0^t \left( \sum_{l_1, l_2} \sum_{i_1, i_2, i_3} \mu_s(i_1) \mu_s(i_2) \mu_s(i_3) K(i_1, i_2, i_3; k, l_1, l_2) - \mu_s(k) \right) ds \quad (1)$$

où  $K$  est un noyau de probabilité sur  $E \times E \times E$ , avec  $E$  l'ensemble fini des types d'investisseurs. On notera que dans cette partie spécifique du texte, on s'intéresse principalement aux interactions et au noyau. On omet donc volontairement le facteur  $\eta$  représentant le taux de remplacement d'agent.

Ici, le type d'un agent suit un processus de Markov non linéaire. Maintenant pour  $N$  fixé, considérons  $N$  investisseurs  $(X^1, X^2, \dots, X^N)$ . Prenons le cas  $m=2$  (pour simplifier), afin de décrire la chaîne de Markov linéaire avec état initial:

$$\mu_0 = (X^1(0), X^2(0), \dots, X^N(0))$$

Au moment du premier saut, deux agents choisis au hasard vont changer d'états selon le noyau d'interaction  $Q$ .

Nous construisons ainsi une chaîne de Markov à valeurs dans  $E^N$ , dont l'état au temps  $t$  correspond à l'état du marché au temps  $t$  décrit par :

$$\mu_t = (X^1(t), X^2(t), \dots, X^N(t))$$

À chaque saut, suivant un processus de Poisson de paramètre  $\lambda \frac{N}{m}$ , un ensemble de  $m$  investisseurs parmi les  $N$  investisseurs présents dans le marché se rencontrent et interagissent suivant un noyau de probabilité  $Q$ . Nous obtenons ainsi une séquence de processus pour chaque valeur de  $N$ .

Chacun de ces processus est une chaîne de Markov classique.

Dans ce contexte, quand  $Q$  est irréductible et récurrent, nous montrons que nous avons stabilité asymptotique. Pour cela, nous utilisons la théorie des chaînes de Markov classiques pour obtenir des résultats sur la chaîne non linéaire  $P_{\mu_0}$ . Cela est possible grâce aux récents résultats de [Ferland-Giroux \(2008\)](#) et [Bélanger-Giroux \(2013\)](#). Pour tout  $N$ , nous avons à considérer la suite des processus de Markov de sauts purs  $P_{\mu_0^{\otimes N}}^N$  où  $P_{\mu_0^{\otimes N}}^N$  est sur les trajectoires de sauts à valeurs dans  $E^N$  et le processus non linéaire  $P_{\mu_0}$  défini par l'équation d'évolution (1).

Nous nous intéressons à présent au comportement de la chaîne limite lorsque  $t$  tend vers l'infini. Pour chaque  $N$ , nous sommes dans un contexte de chaîne de Markov linéaire irréductible sur un nombre fini d'états. Pour montrer la convergence lorsque  $t$  tend vers l'infini, nous avons utilisé les théorèmes 3.5.2 et 3.6.3 de [Norris \(1998\)](#) énoncés ci-dessous :

**Théorème 3.5.2 de [Norris \(1998\)](#)** : Supposons que  $Q = (q_{ij} : i, j \in I)$  est une  $q$ -matrice irréductible et récurrente. Alors  $Q$  possède une mesure invariante qui est unique.

**Théorème 3.6.3. de [Norris \(1998\)](#)** : Supposons que  $Q = (q_{ij} : i, j \in I)$  est une  $q$ -matrice irréductible et soit  $\nu$  une distribution quelconque. Supposons que  $(X_t)_{t \geq 0}$  est Markov( $\nu, Q$ ). Alors :

$$\mathbb{P}(X_t = j) \rightarrow \frac{1}{(q_j m_j)} \quad \text{quand } t \rightarrow \infty \text{ pour tout } j \in I$$

avec  $m_j$  le temps espéré de retour à l'état  $j$  et  $q_j = -q_{jj}$ .

N.B. : Ne pas confondre le noyau  $Q$  avec la matrice des intensités  $Q$  de [Norris \(1998\)](#).

Comme les investisseurs vont changer d'état, les proportions dans l'équation (1) vont changer. De plus, en partant de n'importe quelles proportions, il y a convergence vers les proportions limites. En effet, d'après le [théorème 3.5.2 de Norris \(1998\)](#), comme  $Q$  est irréductible et récurrent et que nous sommes en présence d'une chaîne de Markov sur un nombre fini d'états, il existe une unique loi invariante,  $\gamma^N$ . En partant de n'importe quelle loi initiale, le [théorème 3.6.3](#) nous montre la convergence vers les proportions limites.

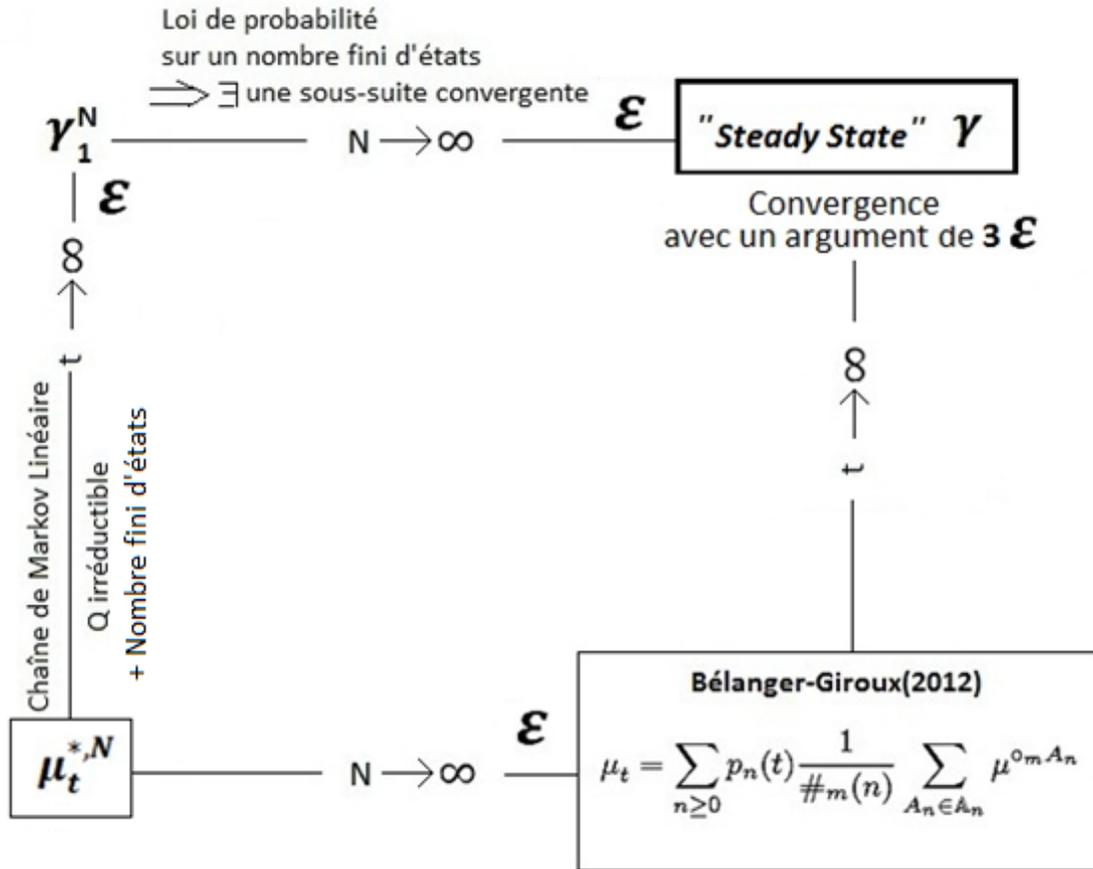
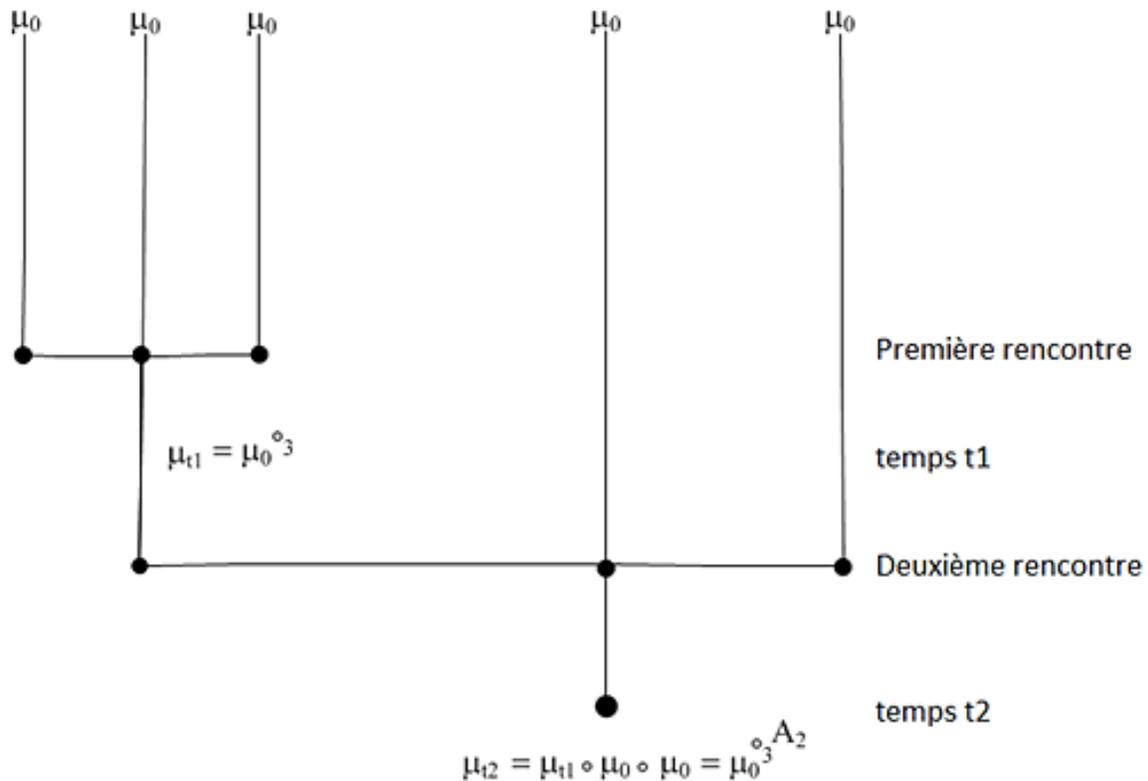


Figure 1.

La convergence vers le steady state est ensuite obtenue par un argument de  $3\epsilon$ . La [figure 1](#) ci-dessus illustre la convergence vers le *steady state* en décomposant le comportement limite en deux dimensions : lorsque  $t$  tend vers l'infini et lorsque  $N$  tend vers l'infini. Notons  $\mu_t^{*,N}$  une loi de probabilité qui évolue selon notre système d'équations différentielles linéaires et dépendant du nombre  $N$  d'investisseurs et du temps. Commençons par nous placer en bas à gauche du diagramme. Nous sommes dans un contexte de chaînes de Markov linéaires avec  $Q$  irréductible et  $\mu_t^{*,N}$  tend vers  $\gamma_1^N$  (la première marginale de  $\gamma^N$ ) lorsque  $t$  tend vers l'infini, ce qui nous donne notre premier  $\epsilon$ . Partant du point haut droit du diagramme de la [figure 1](#), nous sommes à présent dans le cadre de lois de probabilité sur un nombre fini d'états donc il existe une sous-suite convergente et ceci nous permet d'affirmer que  $\gamma_1^N$  converge vers un état

limite  $\gamma$  quand  $N$  tend vers l'infini. Cela représente le deuxième  $\varepsilon$ . Enfin le troisième  $\varepsilon$  est obtenu en repartant du point en bas à gauche du diagramme et faisant à présent tendre  $N$  vers l'infini. Ici, on pose l'hypothèse de la convergence uniforme en  $t$ . Nous nous retrouvons dans le cadre des sommes de Wild de [Bélanger et Giroux \(2012\)](#), où  $\mu_t^{*,N}$  tend vers  $\mu_t = \sum_{n \geq 0} p_n(t) \frac{1}{\#m(n)} \sum_{A_n \in \mathbb{A}_n} \mu^{0m A_n}$ , qui est la solution de l'équation d'évolution. Ici, la loi de probabilité  $\mu^{0m}$  est la loi d'un investisseur après interaction avec  $m$  investisseurs i.i.d. de loi  $\mu$ . Considérons un arbre  $A_n$  possédant  $n$  nœuds (représentant les  $n$  interactions) et chaque nœud possédant  $m$  branches (représentant le nombre d'investisseurs à chaque rencontre). Alors  $\mu^{0m A_n}$  représente la loi obtenue par itération de  $\mu^{0m}$  à travers les nœuds successifs de l'arbre lorsqu'on place la loi  $\mu$  à chaque feuille de l'arbre  $A_n$  (voir [figure 2](#)). De plus on a  $\#_m(n) = \prod_{k=1}^{n-1} ((m-1)k + 1)$  correspondant au nombre d'arbres à  $N$  nœuds et  $p_n(t)$  correspondant à la probabilité d'avoir  $n$  branchements jusqu'au temps  $t$ .



Arbre d'interaction simple avec seulement 2 rencontres et  $m=3$

Figure 2.

L'unicité de la solution de l'équation d'évolution nous permet de montrer qu'il n'y a qu'une seule limite aux marginales des mesures invariantes. En utilisant un argument de  $3\varepsilon$ , on obtient finalement que  $\mu_t \rightarrow \gamma$  quand  $t \rightarrow \infty$  et nous allons montrer que cet état limite  $\gamma$  est le *steady state*.

Pour chaque  $t$ , on définit,  $\Gamma_t$ , la fonction continue qui transforme une loi initiale en sa somme de Wild étendue :

$$\Gamma_t(\mu) = \mu_t$$

Si on commence avec  $\mu = \gamma$ , on a :

$$\Gamma_t(\gamma) = \gamma_t \rightarrow \gamma \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty$$

De manière similaire, si on fixe  $t_0$  et on commence avec  $\mu = \gamma_{t_0}$ , on a :

$$\Gamma_t(\gamma_{t_0}) \rightarrow \gamma \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty$$

Enfin, par continuité de  $\Gamma_t$ , on a :

$$\Gamma_t(\gamma_{t_0}) = \Gamma_{t_0} \circ \Gamma_t(\gamma) = \Gamma_{t_0}(\gamma) = \gamma_{t_0}.$$

D'où :

$$\gamma_t = \gamma \text{ pour tout } t$$

**Théorème** : Soit un grand ensemble d'investisseurs qui peuvent prendre un nombre fini d'états. Supposons que la convergence en temps est uniforme. Si les interactions à  $m$  investisseurs sont décrites par un noyau de probabilité symétrique et irréductible, alors le système possède un *steady state* et il est asymptotiquement stable.

Il est souvent plus naturel de décrire les interactions à l'aide de plusieurs noyaux. Nous allons maintenant montrer qu'on peut décrire de façon équivalente une interaction à plusieurs noyaux à l'aide d'un seul et ainsi généraliser le résultat. Soit  $J$  fonctions d'intensité bornées  $k_1, \dots, k_j$  et  $J$  noyaux de probabilité  $K_1, \dots, K_j$ . Nous pouvons alors construire le premier noyau :

$$K^C = \sum_j \frac{k_j}{k_1 + \dots + k_j} K_j$$

et ensuite en déduire le système équivalent avec  $(k_1 + \dots + k_j)K^C$ .

En s'inspirant de [Sznitman \(1984\)](#), nous fixons une borne supérieure  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , de  $k_1 + \dots + k_j$ . Remplaçons la fonction bornée par sa borne supérieure  $\alpha$  et  $K$  par :

$$K' = \frac{k}{\alpha} K + \left(1 - \frac{k}{\alpha}\right) I$$

pour définir le noyau de probabilité :

$$K' = \frac{k_1 + \dots + k_j}{\alpha} K^C + \left(1 - \frac{k_1 + \dots + k_j}{\alpha}\right) I$$

Enfin, par un changement de temps, on remplace  $\alpha K'$  par le noyau  $K$ .

**Théorème général**: Soit un grand ensemble d'investisseurs qui peuvent prendre un nombre fini d'états. Si les interactions à  $m$  investisseurs sont décrites par un noyau de probabilité irréductible, et que la convergence en temps est uniforme, alors le système possède un *steady state*.

Notons que le modèle de [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#) sans remplacement d'agent n'a pas de *steady state* car l'hypothèse de récurrence n'est pas satisfaite. Par contre, dans notre cas, l'hypothèse de récurrence est satisfaite, car les entrées et sorties d'agents sont permises. L'hypothèse d'irréductibilité est quant à elle satisfaite par le fait que les marchés sont non segmentés. Nous ne savons cependant pas si l'hypothèse de

convergence uniforme en temps est vérifiée dans le cas d'exemples financiers, mais cela est vrai (mais très difficile à montrer) pour des exemples classiques de la physique. Cela représente néanmoins une hypothèse raisonnable (comme l'irréductibilité, et le nombre fini d'états), mais cela laisse la question générale de l'existence d'un *steady state* non résolue.

Nous allons obtenir l'existence d'un *steady state* et la stabilité asymptotique (en fait, nous allons montrer la propriété plus forte qui est la stabilité exponentielle) pour certains cas particuliers de modèles de percolation d'information où les noyaux d'interaction sont irréductibles et les états des investisseurs sont finis. Notre approche sur ces cas particuliers nous permettra, de plus, d'être un peu plus descriptifs lors de l'obtention du *steady state*.

## IV. Percolation d'information avec sortie d'agents

Dans [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#), les auteurs ont obtenu des résultats intéressants pour des modèles binaires d'échange d'information impliquant de grands ensembles où les agents ont un mouvement autonome qui leur fait quitter le marché afin d'être remplacé par un nouvel agent dont le degré de précision suit une loi de probabilité donnée.

Dans le contexte de rencontres à 2 agents et à transmission parfaite de l'information, l'évolution de la loi de l'agent est approximée par la solution d'un système quadratique qui s'écrit :

$$\frac{d\mu_t(n)}{dt} = \eta[\pi(n) - \mu_t(n)] + \sum_{l=1}^{n-1} h(l, n-l)\mu_t(l)\mu_t(n-l) - \sum_{l \geq 1} h(n, l)\mu_t(n)\mu_t(l) \quad (2)$$

où  $\pi$  est une loi de probabilité donnée.

Il est important de noter que le dernier terme de cette équation est linéaire en  $\mu_t(l)$  puisque c'est cela qui permet à [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#) d'obtenir la stabilité de ce genre de système en prenant :

$$h(n, l) = c(n)c(l)$$

L'étude de [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#) peut être généralisée à des rencontres impliquant plus que 2 agents et en relâchant l'hypothèse de transmission d'information parfaite.

Dans le cas de transmission parfaite avec  $m$  agents, le noyau de transmission peut s'écrire ainsi :

$$K(n_1, n_2, \dots, n_m; l_1, l_2, \dots, l_m) = \delta_{n_1+n_2+\dots+n_m}(l_1)\delta_{n_1+n_2+\dots+n_m}(l_2) \dots \delta_{n_1+n_2+\dots+n_m}(l_m)$$

Ici,  $\delta$  est la fonction de Dirac définie comme suit :

$$\delta_{n_1+n_2+\dots+n_m}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } n_1 + n_2 + \dots + n_m = x \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant faire le lien entre l'équation (1) et l'équation (2) en utilisant le noyau ci-dessus. Pour le cas impliquant des rencontres à 2 investisseurs ( $m=2$ ) on a :

$$K(i_1, i_2; k, l) = \delta_{i_1+i_2}(k)\delta_{i_1+i_2}(l)$$

On a :

$$\begin{aligned} \mu_t(k) &= \mu_0(k) + \int_0^t \left( \sum_l \sum_{i_1, i_2} \mu_s(i_1) \mu_s(i_2) K(i_1, i_2; k, l) - \mu_s(k) \right) ds \quad (1) \\ \Rightarrow \mu_t(k) &= \mu_0(k) + \int_0^t \left( \sum_l \sum_{i_1, i_2} \mu_s(i_1) \mu_s(i_2) \delta_{i_1+i_2}(k) \delta_{i_1+i_2}(l) - \mu_s(k) \right) ds \quad (1) \\ \Rightarrow \frac{d\mu_t(k)}{dt} &= \sum_l \sum_{i_1, i_2} \mu_t(i_1) \mu_t(i_2) \delta_{i_1+i_2}(k) \delta_{i_1+i_2}(l) - \mu_t(k) \end{aligned}$$

Posons maintenant  $h=1$  et  $\eta=0$ . L'équation (2) devient :

$$\frac{d\mu_t(k)}{dt} = \sum_{l=1}^{k-1} \mu_t(l) \mu_t(k-l) - \sum_{l \geq 1} \mu_t(k) \mu_t(l) = \sum_{l=1}^{k-1} \mu_t(l) \mu_t(k-l) - \mu_t(k) \sum_{l \geq 1} \mu_t(l)$$

Or :

$$\sum_{l \geq 1} \mu_t(l) = 1$$

D'où :

$$\frac{d\mu_t(k)}{dt} = \sum_{l=1}^{k-1} \mu_t(l)\mu_t(k-l) - \mu_t(k)$$

Montrons que :

$$\sum_{l=1}^{n-1} \mu_t(l)\mu_t(k-l) - \mu_t(k) = \sum_l \sum_{i_1, i_2} \mu_t(i_1)\mu_t(i_2)\delta_{i_1+i_2}(k)\delta_{i_1+i_2}(l) - \mu_t(k)$$

En utilisant :

$$\sum_l \delta_{i_1+i_2}(l) = 1$$

le membre de droite devient :

$$\sum_{i_1, i_2} \mu_t(i_1)\mu_t(i_2)\delta_{i_1+i_2}(k) - \mu_t(k)$$

Or :

$$\mu^{*2}(n) = \sum_{l=1}^{n-1} [\mu(l)\mu(n-l)] = \sum_{i_1, i_2} \mu_t(i_1)\mu_t(i_2)\delta_{i_1+i_2}(k)$$

car

$$\delta_{i_1+i_2}(k) = 1 \quad \text{si, et seulement si} \quad i_1 + i_2 = k$$

Le membre de droite est alors égal au membre de gauche.

Si on considère les cas de transmission d'information imparfaite, ce noyau doit être remplacé par un noyau de probabilité KS symétrique arbitraire. Par exemple, on peut choisir un noyau symétrique tel que :  $KS(i, j) = KS(i - j) = KS(j - i) = KS(j, i)$ . La

chaîne est alors une marche aléatoire avec  $KS(i, j) = \frac{1}{2}\delta_{i-1}(j) + \frac{1}{2}\delta_{i+1}(j)$ , c'est-à-dire qu'on passe de  $i$  à  $j=i-1$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$  et de  $i$  à  $j=i+1$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$ .

Dans le cadre des modèles financiers l'hypothèse que  $h(n, l) = 0$  dès que  $\min(n, l) \geq N$  pour un  $N$  donné, est raisonnable, car les agents du marché limiteront naturellement leurs efforts de recherche une fois qu'ils auront acquis suffisamment d'information. On se retrouve ainsi dans le cadre d'un système à un nombre fini d'équations.

[Bélanger-Giroux \(2012\)](#) étudient des systèmes apparentés à [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#), et obtiennent des résultats analogues dans un contexte où les rencontres se font par groupe de  $m$  agents et que l'information peut être partiellement échangée. Dans leur article, tout comme dans [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#), les agents ont un mouvement autonome qui les fait quitter le marché afin d'être remplacé par un nouvel agent dont le degré de précision suit une loi de probabilité donnée  $\pi$ . Par contre, les systèmes de [Bélanger-Giroux\(2012\)](#) se distinguent par le fait que les rencontres se font par groupe de  $m$  agents et que la transmission d'information n'est pas nécessairement parfaite.

## A. Existence de la loi invariante ou *steady state*

Bélanger-Giroux (2012) montrent l'existence de la solution globale du problème de Cauchy suivant en faisant l'hypothèse que  $h$  est bornée :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_t(n)}{dt} = & \eta[\pi(n) - \mu_t(n)] \\ & + \sum_{n_1, \dots, n_m} \mu_t(n_1) \dots \mu_t(n_m) h(n_1, \dots, n_m) [\bar{K}(n_1, \dots, n_m; n) - 1_n] \end{aligned}$$

Où :

$$\bar{K}(n_1, \dots, n_m; n) = \sum_{i_2, \dots, i_m} K(n_1, \dots, n_m; n, i_2, \dots, i_m)$$

Dans le cas de transmission parfaite pour  $m$  agents, le système peut se réécrire.

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_t(n)}{dt} = & \eta[\pi(n) - \mu_t(n)] + \sum_{n_1 + \dots + n_m = n} \mu_t(n_1) \dots \mu_t(n_m) h(n_1, \dots, n_m) \\ & - \sum_{n_2, \dots, n_m} \mu_t(n) \dots \mu_t(n_m) h(n, n_2, \dots, n_m) \end{aligned}$$

On remarquera que si pour un  $N$ ,  $h(n_1, \dots, n_m) = 0$ , dès que  $\min(n_1, \dots, n_m) \geq N$ , le système est alors réduit à un nombre fini d'équations. Bélanger-Giroux (2012) montre l'existence d'une loi invariante et la stabilité asymptotique pour un exemple de systèmes à nombre fini d'équations.

Dans leur exemple, les hypothèses suivantes sont faites :

$$\begin{cases} h(1, 1, \dots, 1) = a \geq 0 \\ h(m, 1, \dots, 1) = \dots = h(1, 1, \dots, m) = b \geq 0 \\ \text{toutes les autres valeurs sont nulles} \end{cases}$$

Sachant que  $\pi$  une loi de probabilité sur les entiers  $\{1 + k(m - 1)\}_{k \geq 0}$ , ils font l'hypothèse suivante :

$$\pi(1) + \pi(m) + \pi(2m - 1) = 1$$

et posent :

$$\begin{cases} \mu_t(1) = x \\ \mu_t(m) = y \\ \mu_t(2m - 1) = z \end{cases}$$

Ils obtiennent alors le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta[\pi(1) - x] - a x^m - (m - 1)b x^{m-1}y \\ \frac{dy}{dt} = \eta[\pi(m) - y] + a x^m - b x^{m-1}y \\ \frac{dz}{dt} = \eta[\pi(2m - 1) - z] - m b x^{m-1}y \end{cases}$$

Ils montrent ensuite l'existence d'une loi invariante et la stabilité asymptotique pour ce système.

Dans ce mémoire, nous montrons, l'existence de la loi invariante pour le cas suivant :

$$\begin{cases} h(1,1, \dots, 1) = a \geq 0 \\ h(m, 1, \dots, 1) = \dots = h(1,1, \dots, m) = b \geq 0 \\ h(m, m, \dots, 1) = \dots = h(1,1, \dots, m, m) = c \geq 0 \\ \text{toutes les autres valeurs sont nulles} \end{cases}$$

avec

$$\pi(1) + \pi(m) + \pi(2m - 1) + \pi(3m - 2) = 1$$

On pose alors :

$$\begin{cases} \mu_t(1) = x \\ \mu_t(m) = y \\ \mu_t(2m-1) = z \\ \mu_t(3m-2) = w \end{cases}$$

Et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta[\pi(1) - x] - a x^m - (m-1)b x^{m-1}y - (C_2^{m-1})c x^{m-2}y^2 \\ \frac{dy}{dt} = \eta[\pi(m) - y] + a x^m - b x^{m-1}y - c(m-1) x^{m-2}y^2 \\ \frac{dz}{dt} = \eta[\pi(2m-1) - z] + m b x^{m-1}y \\ \frac{dw}{dt} = \eta[\pi(3m-2) - w] + (C_2^m) c x^{m-2}y^2 \end{cases}$$

où  $C_n^m = \binom{m}{n}$  est la combinaison de m parmi n.

Notre but est d'obtenir la loi invariante.

La solution invariante de ce système doit nécessairement satisfaire :

$$\begin{cases} 0 = \eta[\pi(1) - x] - a x^m - (m-1)b x^{m-1}y - (C_2^{m-1})c x^{m-2}y^2 \\ 0 = \eta[\pi(m) - y] + a x^m - b x^{m-1}y - c(m-1) x^{m-2}y^2 \\ 0 = \eta[\pi(2m-1) - z] + m b x^{m-1}y \end{cases}$$

[Bélanger-Giroux\(2012\)](#) s'inspirent de [Duffie-Malamud-Manso\(2009\)](#) pour montrer l'existence de la loi invariante.

Pour  $C \geq 0$ , soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(C) = \frac{\eta\pi(1)}{\eta + C} \geq 0 \quad (1) \\ y(C) = \frac{\eta\pi(m) + a x(C)^m}{\eta + b x(C)^{m-1} + c (m-1) x(C)^{m-2} y(C)} \geq 0 \quad (2) \\ z(C) = \frac{\eta\pi(2m-1) + m b x(C)^{m-1} y(C)}{\eta} \geq 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

Considérons l'expression suivante :

$$C - a x(C)^{m-1} - (m-1)b x(C)^{m-2} y(C) - (C_2^{m-1})c x(C)^{m-3} y(C)^2$$

Cette expression est négative lorsque  $C=0$ . D'autre part, on note également que  $x$  est une fonction décroissante de  $C$  et elle tend vers 0. Cette expression est donc positive à partir d'une certaine valeur de  $C$ .

Il existe donc  $C^* \geq 0$  tel que

$$C^* x(C^*) = a x(C^*)^m + (m-1)b x(C^*)^{m-1} y(C^*) + (C_2^{m-1})c x(C^*)^{m-2} y(C^*)^2$$

Substituons cette valeur dans (1), (2) et (3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(C^*)[\eta + C^*] = \eta\pi(1) \quad (1) \\ y(C^*)[\eta + b x(C^*)^{m-1} + c (m-1) x(C^*)^{m-2} y(C^*)] = \eta\pi(m) + a x(C^*)^m \quad (2) \\ z(C^*)\eta = \eta\pi(2m-1) + m b x(C^*)^{m-1} y(C^*) \quad (3) \end{array} \right.$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta x(C^*) = \eta\pi(1) - C^* x(C^*) \quad (1) \\ \eta y(C^*) = \eta\pi(m) + a x(C^*)^m - y(C^*)[b x(C^*)^{m-1} + c (m-1) x(C^*)^{m-2} y(C^*)] \quad (2) \\ \eta z(C^*) = \eta\pi(2m-1) + m b x(C^*)^{m-1} y(C^*) \quad (3) \end{array} \right.$$

De plus si on pose :

$$w(C^*)\eta = \eta\pi(3m-2) + (C_2^m) c x(C^*)^{m-2} y(C^*)^2$$

Alors  $(x(C^*), y(C^*), z(C^*), w(C^*))$  est une solution invariante et

$$\begin{aligned}
& \eta x(C^*) + \eta y(C^*) + \eta z(C^*) + \eta w(C^*) \\
&= \eta\pi(1) + \eta\pi(m) + \eta\pi(2m - 1) + \eta\pi(3m - 2) - C^*x(C^*) + a x(C^*)^m \\
&\quad - y(C^*)[b x(C^*)^{m-1} + c (m - 1) x(C^*)^{m-2}y(C^*)] \\
&\quad + m b x(C^*)^{m-1}y(C^*) + (C_2^m) c x(C^*)^{m-2}y(C^*)^2 \\
&= \eta\pi(1) + \eta\pi(m) + \eta\pi(2m - 1) + \eta\pi(3m - 2) \\
&\quad - a x(C^*)^m - (m - 1)b x(C^*)^{m-1}y(C^*) - (C_2^{m-1})c x(C^*)^{m-2}y(C^*)^2 + a x(C^*)^m \\
&\quad - y(C^*)[b x(C^*)^{m-1} + c (m - 1) x(C^*)^{m-2}y(C^*)] \\
&\quad + m b x(C^*)^{m-1}y(C^*) + (C_2^m) c x(C^*)^{m-2}y(C^*)^2 \\
&= \eta\pi(1) + \eta\pi(m) + \eta\pi(2m - 1) + \eta\pi(3m - 2) \\
&\quad - a x(C^*)^m + a x(C^*)^m \\
&\quad + b x(C^*)^{m-1}y(C^*)[m - (m - 1) - 1 \\
&\quad + c x(C^*)^{m-2} y(C^*)\{(C_2^m) - (C_2^{m-1}) - (m - 1)\}] \\
&= \eta\pi(1) + \eta\pi(m) + \eta\pi(2m - 1) + \eta\pi(3m - 2) \\
&\quad + b x(C^*)^{m-1}y(C^*) \left[ c x(C^*)^{m-2} y(C^*) \left\{ \frac{m(m-1)}{2} - \frac{(m-2)(m-1)}{2} - (m-1) \right\} \right] \\
&= \eta\pi(1) + \eta\pi(m) + \eta\pi(2m - 1) + \eta\pi(3m - 2) \\
&\quad + b x(C^*)^{m-1}y(C^*) \left[ c x(C^*)^{m-2} y(C^*) (m-1) \left\{ \frac{m}{2} - \frac{(m-2)}{2} - 1 \right\} \right] \\
&= \eta\pi(1) + \eta\pi(m) + \eta\pi(2m - 1) + \eta\pi(3m - 2) \\
&\quad + b x(C^*)^{m-1}y(C^*) \left[ c x(C^*)^{m-2} y(C^*) (m-1) \left\{ \frac{m}{2} - \frac{m}{2} + 1 - 1 \right\} \right] \\
&= \eta\pi(1) + \eta\pi(m) + \eta\pi(2m - 1) + \eta\pi(3m - 2)
\end{aligned}$$

$$= \eta[\pi(1) + \pi(m) + \pi(2m - 1) + \pi(3m - 2)] = \eta$$

Donc :

$$x(C^*) + y(C^*) + z(C^*) + w(C^*) = 1$$

La solution obtenue est donc bien une loi de probabilité. Nous avons donc obtenu la structure de la loi invariante à une constante près.

## B. Stabilité exponentielle

La stabilité exponentielle est un concept plus fort que la stabilité asymptotique, car elle implique un taux de convergence exponentiel (Voir [Annexe A.3](#) pour les définitions formelles de la stabilité asymptotique et exponentielle). Afin de montrer la stabilité exponentielle de notre système, nous suivons la même démarche que celle proposée par [Bélanger et Giroux \(2012\)](#).

Afin de montrer la stabilité asymptotique de notre système, nous allons utiliser le critère de [Routh Hurwitz](#). Considérons le Jacobien suivant :

$$J = \left( \frac{df}{dX} \right)_{X=X_S}$$

c'est-à-dire, la matrice NxN suivante :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial X_1} & \frac{\partial f_N}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial X_N} \end{pmatrix}_{X=X_S}$$

Les valeurs propres sont obtenues par la résolution de l'équation suivante :

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

Nous obtenons alors le polynôme caractéristique de degrés N suivant :

$$\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + a_2 \lambda^{N-2} + \cdots + a_N = 0$$

[Bélanger et Giroux \(2012\)](#) obtiennent un polynôme caractéristique de degrés 2 (N=2), qui est une équation quadratique facile à résoudre.

Par contre, pour  $N > 2$ , il est de plus en plus difficile (voire même impossible) de trouver toutes les racines du polynôme caractéristique. Cependant, on s'intéresse à la stabilité du *steady state*, et pour ce faire, il suffit d'établir le signe de la partie réelle des racines. Supposons que  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  soient les valeurs propres du système suivant :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{J} \mathbf{X}$$

La solution de cette équation peut s'écrire <sup>1</sup>:

$$X_i = X_{iS} + \bar{x}_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{x}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \bar{x}_N e^{\lambda_N t}$$

Si l'une des valeurs propres  $\lambda_i$  est à partie réelle strictement positive, alors la perturbation risque éventuellement d'augmenter et le *steady state* deviendra instable. Le taux de convergence exponentiel est une perturbation à la baisse de la valeur absolue de la plus petite partie réelle des valeurs propres du Jacobien.

Afin de vérifier si les valeurs propres sont à parties réelles négatives, nous pouvons utiliser le critère de [Routh-Hurwitz](#). Définissons les  $N$  matrices de Hurwitz suivantes :

$$\mathbf{H}_1 = (a_1), \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \dots$$

$$\mathbf{H}_j = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & \dots & a_{2j-4} \end{pmatrix}, \dots, \quad \mathbf{H}_N = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_N \end{pmatrix}$$

où l'élément  $(l,m)$  de la matrice  $\mathbf{H}_j$  est :

$$\begin{cases} a_{2l-m} & \text{pour } 0 < 2l - m < k \\ 1 & \text{pour } 2l = m \\ 0 & \text{si } 2l < m \text{ ou } 2l > k + m \end{cases}$$

<sup>1</sup> *Theory of non-linear dynamical systems*. D. Gonze & M. Kaufman. November 8, 2012, page 33 (nous utilisons cette référence pour illustrer l'impact d'une perturbation sur le système en terme de stabilité).

Donc, toutes les valeurs propres seront à partie réelle négative (*steady state stable*) si et seulement si les déterminants de toutes les matrices de Hurwitz  $H_j$  sont positifs :

$$\det(H_j) > 0 \quad \forall j$$

Robert May (1973) a résumé ce critère de stabilité pour les cas N=2,3,4 ainsi :

N	Conditions de stabilité
2	$a_1 > 0$ , $a_2 > 0$
3	$a_1 > 0$ , $a_3 > 0$ , $a_1 a_2 > a_3$
4	$a_1 > 0$ , $a_1 a_2 > a_3$ , $a_4 > 0$ , $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$

Bien entendu, au fur et à mesure que N augmente, les conditions deviennent plus laborieuses à vérifier et il devient difficile de montrer la stabilité pour le cas général à N équations. Dans le cadre de notre mémoire, nous montrons la stabilité asymptotique pour le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta[\pi(1) - x] - a x^m - (m-1)b x^{m-1}y - (C_2^{m-1})c x^{m-2}y^2 \\ \frac{dy}{dt} = \eta[\pi(m) - y] + a x^m - b x^{m-1}y - c(m-1) x^{m-2}y^2 \\ \frac{dz}{dt} = \eta[\pi(2m-1) - z] + m b x^{m-1}y \\ \frac{dw}{dt} = \eta[\pi(3m-2) - w] + (C_2^m) c x^{m-2}y^2 \end{cases}$$

En se restreignant au cas m=3, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta[\pi(1) - x] - a x^3 - 2b x^2y - c x y^2 \\ \frac{dy}{dt} = \eta[\pi(3) - y] + a x^3 - b x^2y - 2c x y^2 \\ \frac{dz}{dt} = \eta[\pi(5) - z] + 3 b x^2y \\ \frac{dw}{dt} = \eta[\pi(7) - w] + 3 c x y^2 \end{cases}$$

Comme nous nous intéressons *au steady state*, les dérivés sont nulles et les 4 équations somment à zéro.

Nous avons donc besoin que de trois équations :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta[\pi(1) - x] - a x^3 - 2b x^2 y - c x y^2 \\ \frac{dy}{dt} = \eta[\pi(3) - y] + a x^3 - b x^2 y - 2c x y^2 \\ \frac{dz}{dt} = \eta[\pi(5) - z] + 3b x^2 y \end{cases}$$

Le Jacobien est :

$$J = \begin{bmatrix} -\eta - 3a x^2 - 4bxy - c y^2 & -2b x^2 - 2c xy & 0 \\ 3a x^2 - 2b xy - 2c y^2 & -\eta - b x^2 - 4c xy & 0 \\ 6b xy & \eta + 3b x^2 & -\eta \end{bmatrix}$$

$$(J - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\eta - 3a x^2 - 4bxy - c y^2 - \lambda & -2b x^2 - 2c xy & 0 \\ 3a x^2 - 2b xy - 2c y^2 & -\eta - b x^2 - 4c xy - \lambda & 0 \\ 6b xy & \eta + 3b x^2 & -\eta - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I) = (-\eta - \lambda) \begin{vmatrix} -\eta - 3a x^2 - 4bxy - c y^2 - \lambda & -2b x^2 - 2c xy \\ 3a x^2 - 2b xy - 2c y^2 & -\eta - b x^2 - 4c xy - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\eta - \lambda)[(-\eta - 3a x^2 - 4bxy - c y^2 - \lambda)(-\eta - b x^2 - 4c xy - \lambda) - (3a x^2 - 2b xy - 2c y^2)(-2b x^2 - 2c xy)]$$

$$= (-\eta - \lambda)[(\lambda^2 + \lambda(\eta + 3a x^2 + 4bxy + c y^2 + \eta + b x^2 + 4c xy) + (\eta + 3a x^2 + 4bxy + c y^2)(\eta + b x^2 + 4c xy) + (3a x^2 - 2b xy - 2c y^2)(2b x^2 + 2c xy)]$$

$$\begin{aligned}
&= -(\eta + \lambda) \left[ (\lambda^2 + \lambda(\eta + 3a x^2 + 4bxy + c y^2 + \eta + b x^2 + 4c x y) \right. \\
&\quad + (\eta + 3a x^2 + 4bxy + c y^2)(\eta + b x^2 + 4c x y)) \\
&\quad + (3a x^2 - 2b xy - 2c y^2)(2b x^2 + 2c xy) \left. \right] \\
&\quad + \left( \eta((\eta + 3a x^2 + 4bxy + c y^2)(\eta + b x^2 + 4c x y) \right. \\
&\quad \left. + (3a x^2 - 2b xy - 2c y^2)(2b x^2 + 2c xy)) \right) \\
&= \lambda^3 + \lambda^2(\eta + \eta + 3a x^2 + 4bxy + c y^2 + \eta + b x^2 + 4c x y) \\
&\quad + \lambda(\eta(\eta + 3a x^2 + 4bxy + c y^2 + \eta + b x^2 + 4c x y) \\
&\quad + (\eta + 3a x^2 + 4bxy + c y^2)(\eta + b x^2 + 4c x y) \\
&\quad + (3a x^2 - 2b xy - 2c y^2)(2b x^2 + 2c xy)) \\
&\quad + \eta((\eta + 3a x^2 + 4bxy + c y^2)(\eta + b x^2 + 4c x y) \\
&\quad + (3a x^2 - 2b xy - 2c y^2)(2b x^2 + 2c xy))
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors le polynôme caractéristique de degrés 3 de la forme suivante :

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_1 = 0$$

avec :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \eta + \eta + 3a x^2 + 4bxy + c y^2 + \eta + b x^2 + 4c x y \\
&= 3\eta + (3a + b)x^2 + 4xy(b + c) + c y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \eta(\eta + 3a x^2 + 4bxy + c y^2 + \eta + b x^2 + 4c x y) \\
&\quad + (\eta + 3a x^2 + 4bxy + c y^2)(\eta + b x^2 + 4c x y) \\
&\quad + (3a x^2 - 2b xy - 2c y^2)(2b x^2 + 2c xy) \\
&= \eta^2 + 3\eta a x^2 + 4\eta bxy + \eta c y^2 + \eta^2 + \eta b x^2 + 4\eta c x y + \eta^2 + \eta b x^2 \\
&\quad + 4\eta c x y + 3\eta a x^2 + 3a b x^4 + 3a c y x^3 + 4\eta bxy + 8 b c x^2 y^2 \\
&\quad + \eta c y^2 + bc x^2 y^2 + 6a b x^4 + 6a c yx^3
\end{aligned}$$

$$= \eta x^2(2b + 6a + 3\eta^2 b) + 8\eta xy(b + c) + 2\eta c y^2 + 9b c x^2 y^2 + 9a b x^4 + 9a c yx^3$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \eta((\eta + 3a x^2 + 4bxy + c y^2)(\eta + b x^2 + 4c x y) \\ &\quad + (3a x^2 - 2b xy - 2c y^2)(2b x^2 + 2c xy)) \\ &= \eta(\eta^2 + \eta b x^2 + 4\eta c x y + 3\eta a x^2 + 3a b x^4 + 3a c y x^3 + 4\eta bxy + 8b c x^2 y^2 \\ &\quad + \eta c y^2 + bc x^2 y^2 + 6a b x^4 + 6a c yx^3) > \\ &= (\eta^3 + \eta^2 x^2(b + 3a) + 4\eta^2 x y(b + c) + 9\eta b c x^2 y^2 + \eta^2 c y^2 + 9\eta a b x^4 \\ &\quad + 9\eta a c yx^3) \end{aligned}$$

On doit vérifier les trois conditions suivantes :

**Condition 1 :  $a_1 > 0$**

$$a_1 = 3\eta + (3a + b)x^2 + 4xy(b + c) + c y^2 > 0$$

Donc la condition 1 est vérifiée.

**Condition 2 :  $a_3 > 0$**

$$\begin{aligned} a_3 &= (\eta^3 + \eta^2 x^2(b + 3a) + 4\eta^2 x y(b + c) + 9\eta b c x^2 y^2 + \eta^2 c y^2 + 9\eta a b x^4 \\ &\quad + 9\eta a c yx^3) > 0 \end{aligned}$$

Donc la condition 2 est vérifiée.

**Condition 3 :  $a_1 a_2 - a_3 > 0$**

Comme les expressions deviennent de plus en plus laborieuses à développer, nous avons eu recours à *Mathematica* pour vérifier que les trois conditions sont vérifiées. On a ainsi obtenu la stabilité asymptotique de ce système grâce au critère de [Routh-Hurwitz](#) (voir [Annexe B](#)).

Bien entendu, pour le cas général  $m > 3$ , le nombre de conditions à vérifier augmente et la longueur des expressions également. Par exemple, avec  $m=4$ , on doit vérifier les conditions :

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 > a_3, \quad a_4 > 0, \quad a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$$

Ce qui devient vite difficile à vérifier même numériquement. Il faudrait donc trouver un autre critère de stabilité pour résoudre le cas général  $m > 3$ .

## V. Minimal Search Effort

Rappelons que dans [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#), les auteurs expliquent que, pour le partage de l'information dans une grande population, chaque agent est doté de signaux concernant le résultat probable d'une variable aléatoire d'intérêt commun. Un tel contexte conduit à des systèmes d'équations non linéaires d'évolution. Leur objectif est d'obtenir une politique d'équilibre spécifiée par un ensemble de paramètres d'une politique cible qui minimise les efforts de recherche.

Soient deux constantes strictement positives  $\eta$  et  $\lambda$ , représentant respectivement le taux de sortie des agents et l'intensité des rencontres. Soit  $m$  un entier  $\geq 2$  représentant le nombre d'agents interagissant à chaque rencontre et soit  $\pi$  une loi de probabilité sur les entiers  $\{1 + k(m - 1)\}_{k \geq 0}$ . Nous considérons alors la dynamique décrite par :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_t}{dt}(j) = \eta [\pi(j) - \mu_t(j)] + \lambda [\mu_t^{*m}(j) - \mu_t(j)] \\ \mu_0 = \mu \quad (\text{une loi de probabilité donnée}) \end{cases}$$

Ici  $\mu_t^{*m}$  est la convolution de  $\mu_t$   $m$  fois avec elle-même (voir définition à l'[Annexe A.2](#)).

Cette dynamique n'a pas toujours une loi de probabilité stationnaire, mais elle a toujours une mesure stationnaire de masse plus petite ou égale à un. Nous allons maintenant déterminer la condition pour que cette masse soit égale à un.

Afin de montrer la stabilité asymptotique de cette dynamique, la première étape consiste à identifier la mesure stationnaire. La seconde étape est de donner une condition nécessaire pour que cette mesure soit une mesure de probabilité.

Ici, nous considérons le cas dit du « *minimal search effort* ». C'est-à-dire nous nous restreignons aux entiers  $k \leq N$ .

## A. Cas m=2

Pour 2 constantes strictement positives  $\eta$  et  $\lambda$ , et  $\pi$  est une loi de probabilités sur les entiers strictement positifs, considérons le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \frac{d\mu_t}{dt}(j) = \eta [\pi(j) - \mu_t(j)] + \lambda [\mu_t * \mu_t(j) - \mu_t(j)] \\ \mu_0 = \mu \quad (\text{une loi de probabilité donnée}) \end{cases}$$

Les trois premières équations de cette suite d'équations différentielles linéaires non homogènes sont donc :

$$\frac{d\mu_t}{dt}(1) = -[\eta + \lambda]\mu_t(1) + \eta\pi(1)$$

$$\frac{d\mu_t}{dt}(2) = -[\eta + \lambda]\mu_t(2) + \eta\pi(2) + \lambda\mu_t(1)^2$$

$$\frac{d\mu_t}{dt}(3) = -[\eta + \lambda]\mu_t(3) + \eta\pi(3) + 2\lambda\mu_t(1)\mu_t(2)$$

La solution de la première équation  $\frac{d\mu_t(1)}{dt} = -(\eta + \lambda)\mu_t(1) + \eta\pi(1)$  est :

(Annexe C)

$$\mu_t(1) = \frac{\eta}{\eta + \lambda}\pi(1) + \left( \mu(1) - \frac{\eta}{\eta + \lambda}\pi(1) \right) e^{-(\eta + \lambda)t}$$

Ayant résolu cette première équation, nous pouvons substituer sa solution dans la seconde, qui à son tour devient une équation linéaire non homogène. Substituant les solutions des deux premières équations dans la troisième, nous nous retrouvons à nouveau avec une équation linéaire non homogène que nous savons résoudre. Procédant de proche en proche nous obtenons la solution du système. Mais bien sûr à mesure que nous progressons la solution est de plus en plus élaborée. Comme nous nous intéressons au « steady state » nous pouvons simplifier notre travail en ne retenant que les termes constants puisque les autres tendent vers 0 avec t. Ayant obtenu ce « steady state » il ne nous reste plus qu'à vérifier que c'est bien une mesure de probabilité. Cependant, cette approche est laborieuse, car le nombre de termes augmente rapidement. Vu que nous nous intéressons aux limites des solutions, on remarque que l'on peut trouver la limite sans expliciter les solutions grâce à la deuxième partie du lemme B.2 page 1538 de [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#).

Dans ce lemme, les auteurs supposent que si f est la solution de :

$$f' = -a(t)f + b(t),$$

$$\text{avec } a(t) \geq \varepsilon > 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b(t)}{a(t)} = c$$

Alors :

$$f(t) = e^{-\int_0^t a(s)ds} \int_0^t e^{\int_0^s a(u)du} b(s)ds + f_0 e^{-\int_0^t a(s)ds}$$

$$\text{et } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c$$

Rappelons que l'équation différentielle pour j :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_t}{dt}(j) = \eta [\pi(j) - \mu_t(j)] + \lambda [\mu_t * \mu_t(j) - \mu_t(j)] \\ \mu_0 = \mu \quad (\text{une loi de probabilité donnée}) \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{d\mu_t}{dt}(j) = \eta [\pi(j) - \mu_t(j)] + \lambda \left[ \sum_{i=1}^{j-1} [\mu_t(i)\mu_t(j-i)] - \mu_t(j) \right]$$

D'où :

$$\frac{d\mu_t}{dt}(j) = -[\eta + \lambda] \mu_t(j) + \eta \pi(j) + \lambda \sum_{i=1}^{j-1} [\mu_t(i)\mu_t(j-i)]$$

Nous avons donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b(t)}{a(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta \pi(j) + \lambda \sum_{i=1}^{j-1} [\mu_t(i)\mu_t(j-i)]}{[\eta + \lambda]}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) = \frac{\eta \pi(j)}{[\eta + \lambda]} + \frac{\lambda}{[\eta + \lambda]} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{j-1} [\mu_t(i)\mu_t(j-i)]$$

Montrons par induction que la suite d'équations différentielles converge vers le *steady state*.

On a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(1) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(1)$$

donc l'étape d'initialisation est vérifiée.

Supposons maintenant que l'égalité ci-dessus est vraie pour  $j-1, j-2, \dots, j=1$ . Montrons alors qu'elle est vraie pour  $j$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) = \frac{\eta \pi(j)}{[\eta + \lambda]} + \frac{\lambda}{[\eta + \lambda]} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{j-1} [\mu_t(i) \mu_t(j-i)]$$

Or, par hypothèse, on a pour tout  $k < j$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(k) = \gamma(k)$$

D'où :

$$\gamma(j) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(j) + \frac{\lambda}{\eta + \lambda} \sum_{i=1}^{j-1} \gamma(i) \gamma(j-i)$$

Cependant, rien ne nous assure qu'il n'y a pas eu de perte de masse par le passage à la limite. On doit donc s'assurer des conditions nécessaires pour avoir une mesure de probabilité.

Notons donc  $M$  cette masse limite.

Comme

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i=1}^{j-1} \gamma(i) \gamma(j-i) = \sum_{i_1, i_2} \gamma(i_1) \gamma(i_2) = M^2$$

On a, à la limite :

$$M = \frac{\eta}{\eta + \lambda} + \frac{\lambda}{\eta + \lambda} M^2$$

On doit donc analyser le polynôme suivant :

$$P(M) = \lambda M^2 - (\eta + \lambda)M + \eta$$

Sa dérivée est :

$$\Delta = (\eta + \lambda)^2 - 4\lambda\eta$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{(\eta + \lambda) \pm \sqrt{(\eta + \lambda)^2 - 4\lambda\eta}}{2\lambda} = \frac{(\eta + \lambda) \pm \sqrt{\eta^2 + 2\eta\lambda + \lambda^2 - 4\lambda\eta}}{2\lambda} \\ &= \frac{(\eta + \lambda) \pm \sqrt{\eta^2 - 2\eta\lambda + \lambda^2}}{2\lambda} = \frac{(\eta + \lambda) \pm \sqrt{(\eta - \lambda)^2}}{2\lambda} \\ &= \frac{(\eta + \lambda) \pm (\eta - \lambda)}{2\lambda} = \frac{\eta + \lambda + \eta - \lambda}{2\lambda} \text{ ou } \frac{\eta + \lambda - \eta + \lambda}{2\lambda} = \frac{\eta}{\lambda} \text{ ou } 1 \end{aligned}$$

Nous constatons en analysant sa dérivée que pour  $\eta \geq \lambda$ , son plus petit zéro est  $M=1$ . Dans ce cas nous n'avons pas de perte de masse.

Pour le cas pour  $\eta < \lambda$ , le plus petit zéro est à  $M = \frac{\eta}{\lambda}$ .

Numériquement, on voit qu'il y a perte de masse pour,  $\eta < \lambda$  car la somme des  $\gamma(j)$  ne dépasse pas  $\frac{\eta}{\lambda}$ .

Ayant résolu le cas  $m=2$ , nous tenterons maintenant de résoudre le cas  $m=3$  puis le cas général  $m \geq 2$ .

## B. Cas m=3

On reprend la même démarche pour le cas des rencontres à 3 agents.

C'est-à-dire pour le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_t}{dt}(j) = \eta [\pi(j) - \mu_t(j)] + \lambda [\mu_t^{*3}(j) - \mu_t(j)] \\ \mu_0 = \mu \quad (\text{une loi de probabilité donnée}) \end{cases}$$

où nous supposons que la loi  $\pi$  est portée par les entiers  $\{1 + k(m-1)\}_{k \geq 0} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ , ce qui correspond à la suite des entiers impairs dans le cas m=3.

Par exemple pour  $i = 1$  nous avons encore la même équation

$$\frac{d\mu_t}{dt}(1) = -[\eta + \lambda]\mu_t(1) + \eta\pi(1)$$

Et nous savons déjà que la solution est

$$\mu_t(1) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(1) + (\mu(1) - \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(1)) e^{-(\eta + \lambda)t}.$$

Par contre pour  $i = 3$  nous avons

$$\frac{d\mu_t}{dt}(3) = -[\eta + \lambda]\mu_t(3) + \eta\pi(3) + \lambda\mu_t(1)^3$$

Nous nous retrouvons encore avec une suite d'équations différentielles linéaires non homogènes que nous savons résoudre de la même manière que pour le cas m=2.

Vu que nous nous intéressons toujours aux limites des solutions, on peut trouver la limite sans expliciter les solutions grâce à la deuxième partie du lemme B.2 de [Duffie-Malamud-Manso\(2009\)](#) de la même manière que pour le cas m=2

On montre dans l'[Annexe D](#) que la solution est :

$$\gamma(j) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(j) + \frac{\lambda}{\eta + \lambda} \gamma^{*3}(j)$$

Pour  $j=1$  et  $2$  on obtient :

$$\gamma(1) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(1)$$

$$\begin{aligned} \gamma(2) &= \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(2) + \frac{\lambda}{\eta + \lambda} \gamma^{*3}(2) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(2) + \frac{\lambda}{\eta + \lambda} (\gamma(1)^3) \\ &= \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(2) + \frac{\lambda}{\eta + \lambda} \left( \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(1) \right)^3 \end{aligned}$$

Une fois de plus, rien ne nous assure qu'il n'y a pas eu de perte de masse par le passage à la limite.

Numériquement, on voit qu'il y a perte de masse pour  $\eta \leq 2\lambda$  ([Annexe E](#)).

Ayant résolu les cas  $m=2$  et  $m=3$ , nous tenterons de résoudre le cas général  $m>3$ .

## C. Cas général

On reprend la même démarche pour le cas des rencontres à m agents.

C'est-à-dire pour le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_t}{dt}(j) = \eta [\pi(j) - \mu_t(j)] + \lambda [\mu_t^{*m}(j) - \mu_t(j)] \\ \mu_0 = \mu \quad (\text{une loi de probabilité donnée}) \end{cases}$$

où nous supposons que la loi  $\pi$  est portée par les entiers  $\{1 + k(m-1)\}_{k \geq 0} = \{1, m, (2m-1), (3m-2), \dots\}$ .

Par exemple pour  $i = 1$  nous avons encore la même équation

$$\frac{d\mu_t}{dt}(1) = -[\eta + \lambda]\mu_t(1) + \eta\pi(1)$$

Et nous savons déjà que la solution est

$$\mu_t(1) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(1) + (\mu(1) - \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(1)) e^{-(\eta + \lambda)t}.$$

Par contre pour  $i = m$  nous avons

$$\frac{d\mu_t}{dt}(m) = -[\eta + \lambda]\mu_t(m) + \eta\pi(m) + \lambda\mu_t^{*m}(m)$$

Nous nous retrouvons encore avec une suite d'équations différentielles linéaires non homogènes que nous savons résoudre de la même manière que pour le cas  $m=2$  et  $3$ .

Vu que nous nous intéressons toujours aux limites des solutions, on peut trouver la limite sans expliciter les solutions grâce à la deuxième partie du lemme B.2 de [Duffie-Malamud-Manso\(2009\)](#) de la même manière que pour le cas  $m=2$  et  $3$ .

On montre dans l'[Annexe F](#) que la solution est :

$$\gamma(j) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(j) + \frac{\lambda}{\eta + \lambda} \gamma^{*m}(j)$$

Cependant, rien ne nous assure qu'il n'y a pas eu de perte de masse par le passage à la limite. On doit donc s'assurer des conditions nécessaires pour avoir une mesure de probabilité.

Les conditions pour ne pas avoir de perte de masse sont cependant difficiles à obtenir pour le cas général, car nous obtenons un polynôme en  $M^m$  ([Annexe G](#)).

## VI. Avenues de recherche

Concernant les futurs axes de recherche possibles, il serait intéressant de continuer d'élargir les hypothèses de Duffie-Malamud-Manso (2009) et de Bélanger-Giroux (2012). En particulier, une contribution peut être obtenue en définissant les conditions pour lesquelles on a perte de masse pour le cas général de rencontre à  $m$  agents et en montrant la stabilité asymptotique pour des systèmes plus larges à nombre fini d'équations avec sortie d'agents. De plus, il serait utile de trouver un autre critère que celui de Routh-Hurwitz pour montrer la stabilité exponentielle, car ce dernier s'avère très gourmand en temps et ressources et devient difficile à exploiter au fur et à mesure que le nombre d'équations augmente. Ce critère nous donne la stabilité exponentielle alors que nous pourrions utiliser une méthode plus simple pour obtenir la stabilité asymptotique, comme dans les cas traités dans [Bélanger-Giroux \(2012\)](#) et dans [Bélanger-Giroux-Moisan \(2013\)](#). Enfin, nous avons vu que le problème de l'existence et de la stabilité d'un *steady state* reste ouvert, même lorsqu'on suppose un nombre fini d'états. En particulier, l'hypothèse de convergence uniforme en temps reste à être démontrée dans notre cas d'exemples financiers.

## VII. Conclusion

La récente crise financière a fait surgir de nouveaux défis et questionnements en raison de la difficulté d'évaluation rapide des positions prises sur certains produits transigés dans les marchés de gré à gré, aussi connus sous le nom de *Dark Markets*. D'autres questions au sujet de la transmission de l'information entre les agents et l'opacité entourant les rencontres sont également regardées avec plus d'attention maintenant. Dans ce travail, nous faisons ainsi face au problème de la percolation de l'information dans ces *Dark Markets* et notre démarche s'inspire principalement de celle suivie par [Duffie-Malamud-Manso \(2009\)](#), où chaque agent de la population est doté de signaux informatifs sur l'issue probable d'une variable aléatoire gaussienne d'intérêt commun et où les individus recherchent d'autres agents dont ils pourraient recueillir des informations supplémentaires sur cette variable. Lorsque deux agents se rencontrent, ils partagent leurs informations et cette information recueillie est par la suite partagée lors des réunions suivantes. Nos hypothèses diffèrent cependant de la littérature sur certains points : les rencontres se font par groupe de  $m$  agents ( $m \geq 2$ ) et l'information peut être révélée partiellement grâce à un noyau de probabilité symétrique arbitraire. De plus, il n'y a qu'un nombre fini de types d'agents (correspondant aux différents niveaux d'information). Nous obtenons l'existence de l'état d'équilibre, sans avoir à faire d'hypothèse sur la fonction d'intensité et nous montrons la stabilité asymptotique pour toute loi initiale, grâce à des changements de noyaux. De plus, nous avons convergence vers les proportions limites en partant de n'importe quelle loi initiale. Enfin, nous élargissons les hypothèses de [Bélanger- Giroux \(2012\)](#) à un autre cas particulier de système à nombre fini d'équations et nous montrons l'existence de la loi invariante et la stabilité asymptotique.

## VIII. Références

Andrei, D., & Cujean, J. (2013). Information Percolation in Centralized Markets, *Available at SSRN 1699173*.

Banerjee, A., & Fudenberg, D. (2004). Word-of-mouth learning. *Games and Economic Behavior*, 46(1), 1-22.

Bélanger, A., & Giroux, G. (2012). Interacting sets of investors with exits. *Cahier de recherche GRÉFA, Université de Sherbrooke*.

Bélanger, A., & Giroux, G. (2011). Extended Kac Walks and an Application in Econophysics. *Cahier de recherche GRÉFA, Université de Sherbrooke*.

Bélanger, A. and Giroux, G. (2013). Some new results on information percolation. *Stochastic Systems* 3 1-10.

Bélanger, A., Giroux, G., & Moisan-Poisson, M. (2013). Over-the-counter market models with several assets. *Cahier de recherche GRÉFA, Université de Sherbrooke*.

Blouin, M. R., & Serrano, R. (2001). A decentralized market with common values uncertainty: Non-steady states. *The Review of Economic Studies*, 68, 323-346.

Braun, M. (1993). *Differential Equations and Their Applications*, 4 ed. Springer-Verlag.

R. Dorf, R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, Pearson, 2011.

Duffie, D. (2012). *Dark markets: Asset pricing and information transmission in over-the-counter markets*. Princeton University Press.

Duffie, D., Giroux, G., & Manso, G. (2010). Information percolation. *American Economic Journal: Microeconomics*, 2(1), 100-111.

Duffie, D., Malamud, S., & Manso, G. (2009). Information percolation with equilibrium search dynamics. *Econometrica*, 77(5), 1513-1574.

Duffie, D., S. Malamud, and G. Manso (2010a, March). Information percolation in segmented markets. Swiss Finance Institute Research Paper Series 10-09, Swiss Finance Institute.

Duffie, D., S. Malamud, and G. Manso (2010b, July). The relative contributions of private information sharing and public information releases to information aggregation. *Journal of Economic Theory* 145 (4), 1574–1601.

Duffie, D., & Manso, G. (2007). Information percolation in large markets. *The American economic review*, 97(2), 203-209.

Ferland, R. and Giroux, G. (2008). Law of large numbers for dynamic bargaining markets. *Journal of Applied Probability* 45 45-54.

Grossman, S. J. (1981). An introduction to the theory of rational expectations under asymmetric information. *The Review of Economic Studies*, 48(4), 541-559.

R.M. May (1973), Stability and complexity in model ecosystems, *Princeton University Press*.

Milgrom, P. (1981). Rational Expectations, Information Acquisition, and Competitive Bidding. *Econometrica*, 49, 921-944.

Norris, J. R. (1998). *Markov chains* (No. 2008). Cambridge university press.

Pesendorfer, W., & Swinkels, J. M. (1997). The loser's curse and information aggregation in common value auctions. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1247-1281.

Reny, P. J., & Perry, M. (2006). Toward a strategic foundation for rational expectations equilibrium. *Econometrica*, 74(5), 1231-1269.

Hurwitz, A. (1895). "Über die Bedingungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt". *Math. Ann.* 46, 273-284 (English translation "On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts" by H. G. Bergmann in *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory* R. Bellman and R. Kalaba Eds. New York: Dover, 1964 pp. 70-82.).

Routh, E. J. (1877). *Stability of a given state of motion*, London

Sznitman, A. S. (1984). Équations de type Boltzmann spatialement homogènes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* 66 209-244.

Wilson, R. (1985). Incentive efficiency of double auctions. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1101-1115.

Wolinsky, A. (1990). Information revelation in a market with pairwise meetings. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1-23.

## IX. Annexes

### Annexe A : Quelques définitions

#### 1. Noyaux de probabilité

Soient  $(\mathbf{E}, \mathcal{E})$  et  $(\mathbf{F}, \mathcal{F})$  deux espaces de probabilité.

On appelle noyau de transition de  $(\mathbf{E}, \mathcal{E})$  vers  $(\mathbf{F}, \mathcal{F})$  toute application  $Q$  de  $\mathbf{E} \times \mathcal{F}$  dans  $[0, 1]$  telle que :

- i)  $\forall k \in \mathbf{E}$ , l'application partielle  $Q(k, \cdot)$  définit une loi de probabilité sur  $(\mathbf{F}, \mathcal{F})$
- ii)  $\forall A \in \mathcal{F}$ ,  $Q(\cdot, A)$  est une fonction  $\mathcal{E}$ -mesurable

#### 2. Produit de Convolution

Rappelons que la convolution de deux mesures de probabilités sur les entiers strictement positifs  $i = 1, 2, 3, \dots$  s'écrit

$$(\mu * \nu)(j) = \sum_{\substack{i_1 > 0, i_2 > 0, \\ i_1 + i_2 = j}} \mu(i_1) \nu(i_2) = \sum_{i=1}^{j-1} \mu(i) \nu(j-i)$$

Comme par convention une somme vide vaut 0, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu * \nu)(1) = 0 \\ (\mu * \nu)(2) = \mu(1)\nu(1) \\ (\mu * \nu)(3) = \mu(1)\nu(2) + \mu(2)\nu(1) \\ (\mu * \nu)(4) = \mu(1)\nu(3) + \mu(2)\nu(2) + \mu(3)\nu(1) \\ \text{etc} \end{array} \right.$$

Ainsi pour  $m=3$  :

$$\mu^{*3}(j) = \sum_{i=1}^{j-1} \left[ \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} [\mu(k)\mu(i-k)] \right\} \mu(j-i) \right]$$

Enfin, pour le cas général, on a :

$$\mu^{*m}(j) = \sum_{i_{m-1}=1}^{j-1} \left[ \left\{ \dots \left[ \left\{ \sum_{i_2=1}^{i_3-1} \left[ \left\{ \sum_{i_1=1}^{i_2-1} [\mu(i_1)\mu(i_2 - i_1)] \right\} \mu(i_3 - i_2) \right\} \dots \right] \right\} \mu(j - i_{m-1}) \right]$$

### 3. Stabilité asymptotique et exponentielle

Dans cette section, nous considérons la question de la stabilité des solutions d'équations différentielles autonomes. Commençons par rappeler la définition de la stabilité asymptotique et exponentielle en se référant à [Braun \(1993\)](#).

Dans son livre *Differential equations and their applications*, [Braun \(1993\)](#) donne les définitions et conditions de stabilité asymptotique d'un système d'équations différentielles.

#### *Stabilité asymptotique*

Soit  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$  une solution de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

Nous nous intéressons à déterminer si la solution  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  est stable ou instable. Nous cherchons ainsi à déterminer si toute solution  $\boldsymbol{\psi}(t)$  de (1), commençant suffisamment près de  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  à  $t=0$ , reste près de  $\boldsymbol{\psi}(t)$  pour tous les temps futurs,  $t \geq 0$ .

Formellement, nous avons la définition suivante.

#### **Définition 1.**

**a)** Une solution  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$  de (1) est stable si pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , il existe  $\delta = \delta(\varepsilon)$  tel que :

$$|\boldsymbol{\psi}_j(t) - \boldsymbol{\varphi}_j(t)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } t \quad \text{si} \quad |\boldsymbol{\psi}_j(0) - \boldsymbol{\varphi}_j(0)| < \delta(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, n$$

pour toute solution  $\boldsymbol{\psi}(t)$  de (1).

b) Une solution  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$  de (1) est instable si il existe une solution  $\boldsymbol{\psi}(t)$  telle que :

$$|\boldsymbol{\psi}_j(t) - \boldsymbol{\varphi}_j(t)| > \varepsilon \text{ pour tout } t \text{ si } |\boldsymbol{\psi}_j(0) - \boldsymbol{\varphi}_j(0)| < \delta(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, n$$

Sous forme matricielle, l'équation différentielle (1) peut s'écrire :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (2)$$

Si toutes les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  sont à partie réelle positive, alors toute solution  $\mathbf{x}(t)$  de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$  approche zéro quand  $t$  tend vers l'infini. Ce type de stabilité forte est appelée *stabilité asymptotique*.

**Définition 2.** Une solution  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$  de (1) est asymptotiquement stable si elle est stable, et si toute solution  $\boldsymbol{\psi}(t)$  qui commence suffisamment proche de  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  approche  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  quand  $t$  tend vers l'infini.

### *Stabilité exponentielle*

Rappelons à présent la définition de la stabilité exponentielle en se référant encore une fois à [Braun \(1993\)](#). Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Si toutes les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  sont à partie réelle négative, alors toutes les solutions  $\mathbf{x}(t)$  de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$  approchent zéro quand  $t$  tend vers l'infini. On peut alors trouver des constantes positives  $K$  et  $\alpha$  telles que :

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq K e^{-\alpha t} \|\mathbf{x}(0)\|$$

On dit alors que la convergence est exponentielle.

De manière similaire, dans [Duffie-Giroux-Manso \(2010\)](#), les auteurs définissent une convergence d'exponentielle au taux  $\alpha$  de la proportion  $\pi_t$  vers une proportion limite  $\pi_\infty$  si, pour tout  $b \in [0,1]$ , il existe deux constantes  $k_0$  et  $k_1$  telles que :

$$e^{-\alpha t} k_0 \leq |\pi_t(0, b) - \pi_\infty(0, b)| \leq e^{-\alpha t} k_1$$

Dans notre contexte, nous montrons la stabilité par le critère de Routh Hurwitz (voir [Dorf \(2011\)](#)). Ces noms se réfèrent à [E.J.Routh \(1877\)](#) et [A.Hurwitz \(1895\)](#), qui ont contribué à la formulation de ce critère. En 1875, le mathématicien anglais Routh a développé un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines se situant dans la partie gauche du plan complexe (Gantmacher, 1964). En 1895, un autre mathématicien allemand, Hurwitz, a vérifié le critère basé sur le déterminant pour déterminer les racines se situant dans la partie gauche du plan complexe. Si les racines du polynôme caractéristique se situent dans la partie gauche du plan complexe, alors toute solution du système d'équations linéaires homogène converge vers zéro. Ce critère est plus fort que la stabilité asymptotique, car la convergence se fait à un taux exponentiel, ce qui caractérise la contribution de ce travail par rapport au contexte théorique où la stabilité asymptotique est démontrée.

## Annexe B

```
In[28]:= M = {{-n-3*a*x^2-4*b*x*y-c*y^2-1, -2*b*x^2-2*c*x*y, 0},
              {3*a*x^2-2*b*x*y-2*c*y^2, -n-b*x^2-4*c*x*y-1, 0},
              {6*b*x*y, 3*b*x^2, -n-1}};
MatrixForm[%]
P = -Det[M]
Collect[P, 1]
```

Out[29]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1-n-3ax^2-4bxy-cy^2 & -2bx^2-2cxy & 0 \\ 3ax^2-2bxy-2cy^2 & -1-n-bx^2-4cxy & 0 \\ 6bxy & 3bx^2 & -1-n \end{pmatrix}$$

Out[30]=  $-(-1-n) (1^2 + 2ln + n^2 + 3alx^2 + blx^2 + 3anx^2 + bnx^2 + 9abx^4 + 4blxy + 4clxy + 4bnxy + 4cnxy + 18acx^3y + cly^2 + cny^2 + 9bcx^2y^2)$

Out[31]=  $l^3 + n^3 + 3an^2x^2 + bn^2x^2 + 9abnx^4 + 4bn^2xy + 4cn^2xy + 18acnx^3y + cn^2y^2 + 9bcnx^2y^2 - l^2(-3n - 3ax^2 - bx^2 - 4bxy - 4cxy - cy^2) - l(-3n^2 - 6anx^2 - 2bnx^2 - 9abx^4 - 8bnxy - 8cnxy - 18acx^3y - 2cny^2 - 9bcx^2y^2)$

```
In[32]:= a1 = -(-3n-3ax^2-bx^2-4bxy-4cxy-cy^2);
a2 = -(-3n^2-6anx^2-2bnx^2-9abx^4-8bnxy-8cnxy-18acx^3y-2cny^2-9bcx^2y^2);
a3 = n^3+3an^2x^2+bn^2x^2+9abnx^4+4bn^2xy+4cn^2xy+18acnx^3y+cn^2y^2+9bcnx^2y^2;
a1*a2-a3
Expand[%];
Simplify[%]
```

Out[35]=  $-n^3 - 3an^2x^2 - bn^2x^2 - 9abnx^4 - 4bn^2xy - 4cn^2xy - 18acnx^3y - cn^2y^2 - 9bcnx^2y^2 + (3n + 3ax^2 + bx^2 + 4bxy + 4cxy + cy^2)(3n^2 + 6anx^2 + 2bnx^2 + 9abx^4 + 8bnxy + 8cnxy + 18acx^3y + 2cny^2 + 9bcx^2y^2)$

Out[37]=  $8n^3 + 8n^2(3ax^2 + cy(4x+y) + bx(x+4y)) + 9x^2(3a^2x^3(bx+2cy) + bcy^2(cy(4x+y) + bx(x+4y)) + ax(2c^2y^2(4x+y) + 6bcxy(x+2y) + b^2x^2(x+4y))) + 2n(9a^2x^4 + c^2y^2(4x+y)^2 + b^2x^2(x+4y)^2 + bcxy(8x^2 + 43xy + 8y^2) + 3ax^2(2cy(7x+y) + bx(5x+8y)))$

## Annexe C

Les trois premières équations de cette suite d'équations différentielles linéaires non homogènes sont donc :

$$\frac{d\mu_t}{dt}(1) = -[\eta + \lambda]\mu_t(1) + \eta\pi(1)$$

$$\frac{d\mu_t}{dt}(2) = -[\eta + \lambda]\mu_t(2) + \eta\pi(2) + \lambda\mu_t(1)^2$$

$$\frac{d\mu_t}{dt}(3) = -[\eta + \lambda]\mu_t(3) + \eta\pi(3) + 2\lambda\mu_t(1)\mu_t(2)$$

Pour résoudre ces équations non homogènes, nous utilisons le lemme B.2 page 1538 de DMM :

### **Lemme B.2 page 1538 de DMM :**

Supposons que  $f$  est solution de :

$$f' = -a(t)f + b(t),$$

$$\text{avec } a(t) \geq \varepsilon > 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b(t)}{a(t)} = c$$

Alors :

$$f(t) = e^{-\int_0^t a(s)ds} \int_0^t e^{\int_0^s a(u)du} b(s)ds + f_0 e^{-\int_0^t a(s)ds}$$

$$\text{et } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c$$

La solution de la première équation  $\frac{d\mu_t(1)}{dt} = -(\eta + \lambda)\mu_t(1) + \eta\pi(1)$  est donc :

$$\mu_t(1) = \frac{\eta}{\eta + \lambda}\pi(1) + \left( \mu(1) - \frac{\eta}{\eta + \lambda}\pi(1) \right) e^{-(\eta + \lambda)t}$$

La seconde équation est :

$$\frac{d\mu_t}{dt}(2) = -[\eta + \lambda]\mu_t(2) + \eta\pi(2) + \lambda\mu_t(1)^2$$

Sa solution est :

$$\begin{aligned} \mu_t(2) = & e^{-\int_0^t [\eta + \lambda] ds} \int_0^t e^{\int_0^s [\eta + \lambda] du} \left( \eta\pi(2) \right. \\ & \left. + \lambda \left[ \frac{\eta}{\eta + \lambda}\pi(1) + \left( \mu(1) - \frac{\eta}{\eta + \lambda}\pi(1) \right) e^{-(\eta + \lambda)t} \right]^2 \right) ds \\ & + \mu(2) e^{-\int_0^t [\eta + \lambda] ds} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mu_t(2) = & e^{-[\eta + \lambda]t} \int_0^t e^{[\eta + \lambda]t} \left( \eta\pi(2) \right. \\ & \left. + \lambda \left[ \frac{\eta}{\eta + \lambda}\pi(1) + \left( \mu(1) - \frac{\eta}{\eta + \lambda}\pi(1) \right) e^{-(\eta + \lambda)t} \right]^2 \right) ds + \mu(2) e^{-[\eta + \lambda]t} \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\mu_t(2) = e^{-[\eta+\lambda]t} \int_0^t e^{[\eta+\lambda]s} \left( \eta\pi(2) + \lambda \left[ \frac{\eta}{[\eta+\lambda]} \pi(1) \right]^2 + 2 \frac{\eta}{\eta+\lambda} \pi(1) \left( \mu(1) - \frac{\eta}{\eta+\lambda} \pi(1) \right) e^{-(\eta+\lambda)t} + \left[ \left( \mu(1) - \frac{\eta}{\eta+\lambda} \pi(1) \right) e^{-(\eta+\lambda)t} \right]^2 \right) ds + \mu(2)e^{-[\eta+\lambda]t}$$

D'où :

$$\mu_t(2) = e^{-[\eta+\lambda]t} \int_0^t \left( \left[ \eta\pi(2) + \lambda \left[ \frac{\eta}{[\eta+\lambda]} \pi(1) \right]^2 \right] e^{[\eta+\lambda]s} + 2\lambda \frac{\eta}{\eta+\lambda} \pi(1) \left( \mu(1) - \frac{\eta}{\eta+\lambda} \pi(1) \right) + \left[ \mu(1) - \frac{\eta}{\eta+\lambda} \pi(1) \right]^2 e^{-(\eta+\lambda)t} \right) ds + \mu(2)e^{-[\eta+\lambda]t}$$

Donc :

$$\mu_t(2) = e^{-[\eta+\lambda]t} \left( \left[ \eta\pi(2) + \lambda \left[ \frac{\eta}{[\eta+\lambda]} \pi(1) \right]^2 \right] \frac{e^{[\eta+\lambda]t} - 1}{[\eta+\lambda]} + 2\lambda \frac{\eta}{\eta+\lambda} \pi(1) \left( \mu(1) - \frac{\eta}{\eta+\lambda} \pi(1) \right) t + \left[ \mu(1) - \frac{\eta}{\eta+\lambda} \pi(1) \right]^2 \frac{e^{-[\eta+\lambda]t} - 1}{-[\eta+\lambda]} \right) + \mu(2)e^{-[\eta+\lambda]t}$$

D'où :

$$\mu_t(2) = e^{-[\eta+\lambda]t} \left( \left[ \eta\pi(2) + \lambda \left[ \frac{\eta}{[\eta+\lambda]} \pi(1) \right]^2 \right] \frac{e^{[\eta+\lambda]t} - 1}{[\eta+\lambda]} + 2\lambda \frac{\eta}{\eta+\lambda} \pi(1) \left( \mu(1) - \frac{\eta}{\eta+\lambda} \pi(1) \right) t + \left[ \mu(1) - \frac{\eta}{\eta+\lambda} \pi(1) \right]^2 \frac{e^{-[\eta+\lambda]t} - 1}{-[\eta+\lambda]} + \mu(2) \right)$$

La troisième équation est :

$$\frac{d\mu_t}{dt}(3) = -[\eta + \lambda] \mu_t(3) + \eta\pi(3) + 2\lambda \mu_t(1)\mu_t(2)$$

Comme les équations deviennent de plus en plus élaborées et que nous nous intéressons au « steady state », nous simplifierons notre travail en ne retenant que les termes constants puisque les autres tendent vers 0 avec t.

## Annexe D

Rappelons que l'équation différentielle pour  $j$  :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_t}{dt}(j) = \eta [\pi(j) - \mu_t(j)] + \lambda [\mu_t^{*3}(j) - \mu_t(j)] \\ \mu_0 = \mu \quad (\text{une loi de probabilité donnée}) \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{d\mu_t}{dt}(j) = \eta [\pi(j) - \mu_t(j)] + \lambda \left( \sum_{i=1}^{j-1} \left[ \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} [\mu_t(k)\mu_t(i-k)] \right\} \mu_t(j-i) \right] - \mu_t(j) \right)$$

D'où :

$$\frac{d\mu_t}{dt}(j) = -[\eta + \lambda]\mu_t(j) + \eta \pi(j) + \lambda \sum_{i=1}^{j-1} \left[ \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} [\mu_t(k)\mu_t(i-k)] \right\} \mu_t(j-i) \right]$$

Nous avons donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b(t)}{a(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta \pi(j) + \lambda \sum_{i=1}^{j-1} \left[ \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} [\mu_t(k)\mu_t(i-k)] \right\} \mu_t(j-i) \right]}{[\eta + \lambda]}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) = \frac{\eta \pi(j)}{[\eta + \lambda]} + \frac{\lambda}{[\eta + \lambda]} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{j-1} \left[ \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} [\mu_t(k)\mu_t(i-k)] \right\} \mu_t(j-i) \right]$$

Qui par induction vaut :

$$\gamma(j) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(j) + \frac{\lambda}{\eta + \lambda} \sum_{i=1}^{j-1} \left[ \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} [\gamma(k)\gamma(i-k)] \right\} \gamma(j-i) \right]$$

Puisque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(1)$$

Preuve :

On

a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(1)$$

donc l'étape d'initialisation est vérifiée.

Rappelons que la loi  $\pi$  est portée par les entiers  $\{1 + k(m - 1)\}_{k \geq 0} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ , ce qui correspond à la suite des entiers impairs dans le cas  $m=3$ .

Supposons maintenant que l'égalité ci-dessus est vraie pour  $j-2, j-4, \dots, j=1$ . Montrons alors qu'elle est vraie pour  $j$  (impair).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) = \frac{\eta \pi(j)}{[\eta + \lambda]} + \frac{\lambda}{[\eta + \lambda]} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{j-1} \left[ \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} [\mu_t(k) \mu_t(i - k)] \right\} \mu_t(j - i) \right]$$

Or, par hypothèse, on a pour tout  $k < j$ ,  $k$  et  $j$  impairs :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(k) = \gamma(k)$$

D'où :

$$\gamma(j) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(j) + \frac{\lambda}{\eta + \lambda} \sum_{i=1}^{j-1} \left[ \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} [\gamma(k) \gamma(i - k)] \right\} \gamma(j - i) \right]$$

C'est-à-dire que :

$$\gamma(j) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(j) + \frac{\lambda}{\eta + \lambda} \gamma^{*3}(j)$$

Nous avons donc montré la convergence vers le *steady state* pour le cas  $m=3$ .

## Annexe E

Notons donc  $M$  cette masse limite.

Comme

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i=1}^{j-1} \left[ \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} [\gamma(k)\gamma(i-k)] \right\} \gamma(j-i) \right] = \sum_{i_1, i_2, i_3} \left( \sum_{i_1, i_2} \gamma(i_1)\gamma(i_2) \right) \gamma(i_3) = M^3$$

On a, à la limite :

$$M = \frac{\eta}{\eta + \lambda} + \frac{\lambda}{\eta + \lambda} M^3$$

On doit donc analyser le polynôme suivant :

$$P(M) = \lambda M^3 - (\eta + \lambda)M + \eta$$

Nous constatons, grâce à MATLAB, que les racines de ce polynôme sont :

$$1, -\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda\eta}}{2\lambda}, -\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda\eta}}{2\lambda}$$

On ne s'occupe pas de la racine négative, car on est dans le cas  $M > 0$ .

Il nous reste :

$$1, -\frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{4\eta}{\lambda}} \right]$$

Pour que la deuxième racine soit positive, il faudrait que  $\left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\eta}{\lambda}}\right]$  soit négatif, c'est-à-dire que  $\sqrt{1 + \frac{4\eta}{\lambda}} > 1$ , donc  $1 + \frac{4\eta}{\lambda} > 1$ , c'est-à-dire  $\frac{4\eta}{\lambda} > 0$ , ce qui est toujours vrai, car  $\eta$  et  $\lambda$  sont du même signe (positif).

La deuxième racine est supérieure à 1 si  $\eta \geq 2\lambda$  et inférieure à 1 si  $\eta \leq 2\lambda$ .

Donc quand  $\eta \geq 2\lambda$ , le plus petit zéro est 1 et on n'a donc pas de perte de masse.

Par contre, pour  $\eta \leq 2\lambda$ , le plus petit zéro est inférieur à 1 et on voit numériquement qu'on a une perte de masse.

% Ce script permet de vérifier s'il y a eu une perte de masse lors du  
% passage à la limite

j=1000;% Nombre de points à sommer

lambda=0.9;

eta=3\*lambda;

Pi=zeros(j,1);

Pi(1)=1;

Gamma=zeros(j,1);

Gamma(1)=(eta/(eta+lambda))\*Pi(1);

for k=2:j

    Somme=0;

    for i=1:k-1

        Somme2=0;

        for h=1:i-1

            Somme2=Somme2+Gamma(h)\*Gamma(i-h);

        end

Somme=Somme+ Somme2\*Gamma(k-i);

end

Gamma(k)=(eta/(eta+lambda))\*Pi(k)+(lambda/(eta+lambda))\*Somme;

end

Masse=sum(Gamma)

Racine=-0.5\*(1-sqrt(1+4\*eta/lambda))

## Annexe F

On reprend la même démarche pour le cas des rencontres à m agents.

C'est-à-dire pour le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d\mu_t}{dt}(j) = \eta [\pi(j) - \mu_t(j)] + \lambda [\mu_t^{*m}(j) - \mu_t(j)] \\ \mu_0 = \mu \quad (\text{une loi de probabilité donnée}) \end{cases}$$

où nous supposons que la loi  $\pi$  est portée par les entiers  $\{1 + k(m-1)\}_{k \geq 0} = \{1, m, (2m-1), (3m-2), \dots\}$ .

Or :

$$\mu_t^{*m}(j) = \sum_{i_{m-1}=1}^{j-1} \left[ \left\{ \dots \left[ \left\{ \sum_{i_2=1}^{i_3-1} \left[ \sum_{i_1=1}^{i_2-1} [\mu_t(i_1) \mu_t(i_2 - i_1)] \right] \right\} \mu_t(i_3 - i_2) \right] \right\} \dots \right] \mu_t(j - i_{m-1})$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_t}{dt}(j) &= \eta [\pi(j) - \mu_t(j)] \\ &+ \lambda \left( \sum_{i_{m-1}=1}^{j-1} \left[ \left\{ \dots \left[ \left\{ \sum_{i_2=1}^{i_3-1} \left[ \sum_{i_1=1}^{i_2-1} [\mu_t(i_1) \mu_t(i_2 - i_1)] \right] \right\} \mu_t(i_3 - i_2) \right] \right\} \dots \right] \mu_t(j - i_{m-1}) \right] \\ &\quad \left. - \mu_t(j) \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{d\mu_t}{dt}(j) = -[\eta + \lambda] \mu_t(j) + \eta \pi(j)$$

$$+ \lambda \sum_{i_{m-1}=1}^{j-1} \left[ \left\{ \dots \left[ \left\{ \sum_{i_2=1}^{i_3-1} \left[ \left\{ \sum_{i_1=1}^{i_2-1} [\mu_t(i_1) \mu_t(i_2 - i_1)] \right\} \mu_t(i_3 - i_2) \right\} \dots \right] \right\} \mu_t(j - i_{m-1}) \right]$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b(t)}{a(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta \pi(j) + \lambda \sum_{i_{m-1}=1}^{j-1} \left[ \left\{ \dots \left[ \left\{ \sum_{i_2=1}^{i_3-1} \left[ \left\{ \sum_{i_1=1}^{i_2-1} [\mu_t(i_1) \mu_t(i_2 - i_1)] \right\} \mu_t(i_3 - i_2) \right\} \dots \right] \right\} \right] \mu_t(j - i_{m-1}) \right]}{[\eta + \lambda]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) &= \frac{\eta \pi(j)}{[\eta + \lambda]} + \frac{\lambda}{[\eta + \lambda]} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i_{m-1}=1}^{j-1} \left[ \left\{ \dots \left[ \left\{ \sum_{i_2=1}^{i_3-1} \left[ \left\{ \sum_{i_1=1}^{i_2-1} [\mu_t(i_1) \mu_t(i_2 - i_1)] \right\} \mu_t(i_3 - i_2) \right\} \dots \right] \right\} \right] \mu_t(j - i_{m-1}) \right] \end{aligned}$$

Qui par induction vaut :

$$\begin{aligned} \gamma(j) &= \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(j) \\ &+ \frac{\lambda}{\eta + \lambda} \sum_{i_{m-1}=1}^{j-1} \left[ \left\{ \dots \left[ \left\{ \sum_{i_2=1}^{i_3-1} \left[ \left\{ \sum_{i_1=1}^{i_2-1} [\gamma(i_1) \gamma(i_2 - i_1)] \right\} \gamma(i_3 - i_2) \right\} \dots \right] \right\} \right] \gamma(j - i_{m-1}) \right] \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(1)$$

Preuve :

On

a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(1)$$

donc l'étape d'initialisation est vérifiée.

Rappelons que la loi  $\pi$  est portée par les entiers  $\{1 + k(m - 1)\}_{k \geq 0} = \{1, m, (2m - 1), (3m - 2), \dots\}$ .

Supposons maintenant que l'égalité ci-dessus est vraie pour  $j-2, j-4, \dots, j=1$ . Montrons alors qu'elle est vraie pour  $j$  porté par les entiers  $\{1 + k(m - 1)\}_{k \geq 0} = \{1, m, (2m - 1), (3m - 2), \dots\}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(j) = & \frac{\eta \pi(j)}{[\eta + \lambda]} + \frac{\lambda}{[\eta + \lambda]} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i_{m-1}=1}^{j-1} \left[ \left\{ \dots \left[ \left\{ \sum_{i_2=1}^{i_3-1} \left[ \sum_{i_1=1}^{i_2-1} [\mu_t(i_1) \mu_t(i_2 - i_1)] \right] \right\} \mu_t(i_3 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - i_2) \right] \right\} \dots \right] \left. \right] \mu_t(j - i_{m-1}) \right] \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, on a pour tout  $k < j$ ,  $k$  et  $j$  porté par les entiers  $\{1 + k(m - 1)\}_{k \geq 0} = \{1, m, (2m - 1), (3m - 2), \dots\}$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(k) = \gamma(k)$$

D'où :

$$\gamma(j) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(j) + \frac{\lambda}{\eta + \lambda} \sum_{i_{m-1}=1}^{j-1} \left[ \left\{ \dots \left[ \left\{ \sum_{i_2=1}^{i_3-1} \left[ \sum_{i_1=1}^{i_2-1} [\gamma(i_1)\gamma(i_2 - i_1)] \right] \right\} \gamma(i_3 - i_2) \right] \right\} \dots \right] \gamma(j - i_{m-1})$$

C'est-à-dire que :

$$\gamma(j) = \frac{\eta}{\eta + \lambda} \pi(j) + \frac{\lambda}{\eta + \lambda} \gamma^{*m}(j)$$

Nous avons donc montré la convergence vers le *steady state* pour le cas général.

