

Mesure et rétroaction sur un qubit multi-niveaux en électrodynamique quantique en circuit non linéaire

par

Maxime Boissonneault

thèse présentée au département de physique
en vue de l'obtention du grade de docteur ès sciences (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 19 décembre 2011



Library and Archives
Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-83276-9

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-83276-9

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

Le 22 décembre 2011

*le jury a accepté la thèse de Monsieur Maxime Boissonneault
dans sa version finale.*

Membres du jury

Professeur Alexandre Blais
Directeur de recherche
Département de physique

Professeur Patrick Fournier
Membre
Département de physique

Monsieur Steven M. Girvin
Membre externe
Université Yale, USA

Professeur René Côté
Président rapporteur
Département de physique

À mes parents, Yvon et Denise qui m'ont toujours encouragé.

*À mon frère Patrice, ma belle-soeur Josée,
mon neveu Liam, ma nièce Olivia,
ma filleule Maëva.*

À mon copain Joannick.

Sommaire

L'électrodynamique quantique en circuit est une architecture prometteuse pour le calcul quantique ainsi que pour étudier l'optique quantique. Dans cette architecture, on couple un ou plusieurs qubits supraconducteurs jouant le rôle d'atomes à un ou plusieurs résonateurs jouant le rôle de cavités optiques. Dans cette thèse, j'étudie l'interaction entre un seul qubit supraconducteur et un seul résonateur, en permettant cependant au qubit d'avoir plus de deux niveaux et au résonateur d'avoir une non-linéarité Kerr. Je m'intéresse particulièrement à la lecture de l'état du qubit et à son amélioration, à la rétroaction du processus de mesure sur le qubit de même qu'à l'étude des propriétés quantiques du résonateur à l'aide du qubit. J'utilise pour ce faire un modèle analytique réduit que je développe à partir de la description complète du système en utilisant principalement des transformations unitaires et une élimination adiabatique. J'utilise aussi une librairie de calcul numérique maison permettant de simuler efficacement l'évolution du système complet.

Je compare les prédictions du modèle analytique réduit et les résultats de simulations numériques à des résultats expérimentaux obtenus par l'équipe de qnantronique du CEA-Saclay. Ces résultats sont ceux d'une spectroscopie d'un qubit supraconducteur couplé à un résonateur non linéaire excité. Dans un régime de faible puissance de spectroscopie le modèle réduit prédit correctement la position et la largeur de la raie. La position de la raie subit les décalages de Lamb et de Stark, et sa largeur est dominée par un déphasage induit par le processus de mesure. Je montre que, pour les paramètres typiques de l'électrodynamique quantique en circuit, un accord quantitatif requiert un modèle en réponse non linéaire du champ intra-résonateur, tel que celui développé. Dans un régime de forte puissance de spectroscopie, des bandes latérales apparaissent et sont causées par les fluctuations quantiques du champ électromagnétique intra-résonateur autour de sa valeur d'équilibre. Ces fluctuations sont causées par la compression du champ électromagnétique due à la non-linéarité du résonateur, et l'observation de leur effet via la

spectroscopie d'un qubit constitue une première.

Suite aux succès quantitatifs du modèle réduit, je montre que deux régimes de paramètres améliorent marginalement la mesure dispersive d'un qubit avec un résonateur linéaire, et significativement une mesure par bifurcation avec un résonateur non linéaire. J'explique le fonctionnement d'une mesure de qubit dans un résonateur linéaire développée par une équipe expérimentale de l'Université de Yale. Cette mesure, qui utilise les non-linéarités induites par le qubit, a une haute fidélité, mais utilise une très haute puissance et est destructrice. Dans tous ces cas, la structure multi-niveaux du qubit s'avère cruciale pour la mesure.

En suggérant des façons d'améliorer la mesure de qubits supraconducteurs, et en décrivant quantitativement la physique d'un système à plusieurs niveaux couplé à un résonateur non linéaire excité, les résultats présentés dans cette thèse sont pertinents autant pour l'utilisation de l'architecture d'électrodynamique quantique en circuit pour l'informatique quantique que pour l'optique quantique.

Mots-clés: électrodynamique quantique en circuit, informatique quantique, mesure, qubit supraconducteur, transmon, non-linéarité Kerr

Remerciements

Merci tout d'abord à Alexandre. J'ai beaucoup apprécié étudier sous ta supervision. Ta grande ouverture d'esprit et ton style d'encadrement ouvert, avec la possibilité de donner des charges d'exercices et de travaux pratiques, et de suivre des cours externes, ont été appréciés. Merci aussi à l'équipe de Saclay, Patrice, Florian, Denis, Daniel et les autres. Vous m'avez posé une colle il y a de cela quelques années et, avec les nombreuses heures à faire et refaire des calculs, ça a fini par porter fruit et donner de superbes résultats. Thanks also to Andrew, for your always enlightening point of view, and to Jay, on which I could always count to challenge my ideas and make me go further.

Merci aussi à mon comité de suivi, René, Patrick et Christian, pour vos commentaires toujours pertinents. Merci aussi à tous les autres professeurs du département et en particulier ceux de l'ÉPIQ, David, Michel, Bertrand. Un grand merci aussi à André-Marie, sans l'appel de qui, je ne serais peut-être pas atterri à Sherbrooke il y a 9 ans. A special thank also to Prof. Steve Girvin. It is an honor to have you as external advisor.

Merci aussi à tous les membres de notre groupe de recherche, actuel ou passés, Jérôme, Kevin, Félix, Adam, Gabrielle, Samuel, Marcus, Andy, Clemens, ainsi que le reste de la gang du bureau, Olivier, Guillaume, Émilie, pour toutes les discussions toujours enrichissantes. Merci à Steve et aux autres analystes du Centre de calcul scientifique, les simulations numériques n'auraient pas été possibles sans vous. Merci aussi à Patrick Vachon, pour le support informatique. Merci à tout le reste du département, techniciens, employés de soutien, étudiants.

Merci à mes amis physiciens en particulier Phi, Alex et Simon pour les merveilleuses années passées ensemble. Merci aussi aux non-physiciens, entre autres toute la gang du RECSUS. Merci à ma famille, mes parents Yvon et Denise, mon frère Patrice, ma belle-soeur Josée, mon neveu Liam, ma nièce Olivia et ma filleule Maëva.

Merci aussi à Joannick, mon amour, qui a bien voulu m'attendre toutes ces longues années à distance.

Table des matières

Sommaire	iv
Table des matières	viii
Liste des tableaux	xii
Liste des figures	xiii
Liste des définitions	xvi
Liste des codes	xvii
Introduction	1
1 Information et électrodynamique quantiques en cavité	4
1.1 Information et calcul quantique	4
1.1.1 Qubit	5
1.1.2 Mesure	7
1.1.3 Calcul quantique	10
1.1.4 Architectures	13
1.2 Électrodynamique quantique en cavité	15
1.2.1 Champ électromagnétique	16
1.2.2 Atomes et interaction lumière-matière	22
2 Système physique et problématique	26
2.1 Résonateurs coplanaires	27
2.1.1 Résonateurs non linéaires	28

2.2	Qubits supraconducteurs	31
2.2.1	Boîte de Cooper et transmon	32
2.3	Électrodynamique quantique en circuit	34
2.3.1	Régime dispersif	37
2.3.2	Réalisations récentes	39
2.4	Mesure	42
2.4.1	Mesures homodyne et hétérodyne	42
2.4.2	Amplification et limite quantique standard	44
2.4.3	Limite quantique sur la rétroaction	45
2.4.4	Mesure dispersive	46
2.4.5	Mesure par bifurcation	48
2.5	Problématique	50
3	Méthodes analytiques	52
3.1	Transformations unitaires	53
3.1.1	Généralités et dépendance temporelle	54
3.1.2	Déplacement	57
3.1.3	Polaron	59
3.1.4	Dispersive	60
3.1.5	Squeezon	63
3.2	Élimination adiabatique	65
3.2.1	Exemple : couplage dépendant du temps	69
3.3	Théorème de régression quantique	71
4	<i>SQUACK— Sherbrooke QUantum pACKage</i>	73
4.1	Simulations typiques	74
4.2	Généralités	77
4.2.1	Structure de la librairie	77
4.2.2	Outils et bibliothèques dont <i>SQUACK</i> dépend	79
4.3	Modules	80
4.3.1	Matrices	80
4.3.2	Manufacture de systèmes	82

4.3.3	Utilitaires	83
4.4	Exemples de simulations	85
4.4.1	Calcul de l'état stationnaire	85
4.4.2	Évolution temporelle de l'équation maîtresse	86
4.4.3	Diagonalisation	89
4.4.4	Calcul de fonctions de corrélation à deux temps	89
4.4.5	Calcul de fonction Q et de Wigner	90
5	Modèle réduit	91
5.1	Modèle initial	92
5.2	Ordre des transformations	94
5.3	Décalage de Stark et champ de pompe	97
5.3.1	Transformation de polaron	97
5.3.2	Réécriture des hamiltoniens	99
5.3.3	Transformation dispersive classique et choix de polaron	101
5.3.4	Résumé	106
5.4	Décalage de Lamb et effet Purcell	107
5.5	Projection dans le sous-espace à deux niveaux	109
5.6	Squeezon et bandes latérales	111
5.7	Élimination adiabatique du résonateur	114
5.8	Spectre analytique du qubit	116
6	Sonde du résonateur par le qubit	119
6.1	Description de l'expérience de Saclay	119
6.2	Faible amplitude de spectroscopie	121
6.2.1	Spectres expérimentaux et analytiques	121
6.2.2	Position de la raie de spectroscopie	125
6.2.3	Largeur de la raie de spectroscopie	127
6.2.4	Limites de la réponse linéaire	132
6.3	Forte amplitude de spectroscopie	135
6.3.1	Spectres expérimentaux et analytiques	136
6.3.2	Analyse des bandes latérales	138
6.4	Retour sur le modèle réduit	143

7 Lecture de l'état du qubit par le résonateur	145
7.1 Importance de la structure à plusieurs niveaux	146
7.2 Régime de faible puissance	147
7.2.1 Système à deux niveaux	148
7.2.2 Système à plusieurs niveaux	149
7.3 Régime de forte puissance : mesure par avalanche	152
7.3.1 Approche auto-cohérente	153
7.3.2 Approche semi-classique et trajectoires quantiques	156
7.3.3 Une mesure destructrice	158
7.4 Mesure par bifurcation dans le régime de chevauchement	160
7.4.1 Régime de chevauchement	161
7.4.2 Simulations numériques de la mesure par bifurcation	164
7.4.3 Avantages et inconvénients	167
7.5 Résumé des résultats	169
Conclusion	171
A Approximation séculaire	174
B Obtention de l'équation maîtresse	176
B.1 Dérivation générale	176
B.1.1 Passage dans la représentation d'interaction	177
B.1.2 Intégration de l'équation du mouvement	177
B.1.3 Trace sur les états du réservoir	178
B.2 Application à l'électrodynamique quantique	179
C Dépendance temporelle d'une transformation unitaire	183
D Exemple d'un code avec <i>SQUACK</i>	186
Index	189
Bibliographie	192

Liste des tableaux

4.1	Contenu du répertoire racine de <i>SQUACK</i>	78
-----	---	----

Liste des figures

1.1	Sphère de Bloch.	6
1.2	Diagramme de Venn représentant les types de mesures quantiques.	9
1.3	Quantification du champ dans une cavité électromagnétique	16
1.4	Exemples de fonctions Q	22
1.5	Représentation schématique de l'électrodynamique quantique en cavité.	23
2.1	Schéma d'un résonateur coplanaire.	27
2.2	Résonateur coplanaire non linéaire ajustable.	29
2.3	Diagramme de stabilité d'un amplificateur Josephson.	31
2.4	Schémas et spectres d'énergie d'une boîte de Cooper, d'une boîte de Cooper shuntée et d'un transmon.	32
	(a) Boîte de Cooper	32
	(b) Boîte de Cooper shuntée	32
	(c) Transmon	32
	(d) Spectre de la boîte de Cooper	32
	(e) Spectre de la boîte de Cooper shuntée	32
	(f) Spectre du transmon	32
2.5	Schéma d'un résonateur non linéaire couplé à un transmon.	35
2.6	Échelles d'énergie de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings	37
	(a) Cas résonant	37
	(b) Cas dispersif	37
2.7	Résolution du clivage de nombre dans la fréquence du qubit.	39
2.8	Fonctions de Wigner d'états arbitraires.	40
2.9	Représentation schématique d'un circuit de mesure.	43

2.10	Spectroscopie du qubit lorsqu'il est couplé à un résonateur linéaire peuplé avec des états cohérents	45
2.11	Réponse d'un résonateur pour une mesure dispersive.	47
2.12	Diagramme de stabilité d'une mesure par bifurcation de l'état d'un qubit.	48
2.13	Forme temporelle d'un signal de mesure de type échantillonneur-bloqueur.	49
3.1	Représentation graphique, dans l'espace de phase, des transformations de déplacement et de polaron.	58
	(a) Transformation de déplacement	58
	(b) Transformation de polaron	58
3.2	Illustration de l'effet de la transformation de squeezeon.	64
4.1	Structure d'héritage du module <i>Matrix</i>	81
4.2	Arbre d'héritage du module <i>System Factories</i>	82
4.3	Résultat de l'évolution temporelle telle que calculée par le code de démonstration de l'annexe D.	87
5.1	Représentation schématique du modèle.	95
6.1	Représentation schématique de l'expérience du groupe de Saclay	120
6.2	Spectroscopie du qubit dans le régime de faible spectroscopie.	122
	(a) Diagramme de stabilité de l'oscillateur non linéaire	122
	(b) Spectres expérimentaux et analytiques	122
6.3	Position de la raie de spectroscopie décalée par les effets Stark et Lamb.	125
6.4	Distance entre les états pointeurs α_1 et α_0	129
6.5	Largeur de la raie de spectroscopie	130
6.6	Position des champs $\alpha_{0,p}$ et $\alpha_{1,p}$ dans le plan complexe en réponse linéaire versus non linéaire.	132
6.7	Couplage dispersif maximal pour lequel la réponse linéaire est valide	135
6.8	Spectre du qubit pour une forte amplitude de spectroscopie, en fonction de la puissance de pompe.	137
6.9	Spectres du qubit pour une forte amplitude de spectroscopie, pour quatre puissances de pompe.	138

6.10	Espacement (a), amplitude (b) et largeur (c) des pics du triplet de spectroscopie.	140
6.11	Ratio de l'amplitude $A_b/A_r \times w_r/w_b$ des bandes latérales.	143
7.1	Résultats analytiques et numériques pour les décalages dispersifs linéaire et quadratique en fonction de la fréquence du résonateur.	150
7.2	Décalage dispersif (a) et rapport signal-sur-bruit (b)–(d) d'une mesure dispersive en fonction du nombre de photons de mesure.	151
7.3	Résultats expérimentaux de la mesure par avalanche.	152
7.4	Fréquence effective ω_{ri} (a)–(c) et nombre moyen de photons n_i (d)–(f) en fonction de l'amplitude de mesure ϵ	155
7.5	Nombre de photons moyen n_i pour les états $i = 0$ (a) et $i = 1$ (b) du qubit en fonction de la fréquence et de la puissance de mesure.	156
7.6	Taux de relaxation et de fuite des états habillés dus à la perte de photons (a) et à la relaxation intrinsèque du qubit (b).	159
7.7	Énergies de transition du qubit (a) et leurs positions relatives à la fréquence du résonateur hors (b) et à l'intérieur (c) du régime de chevauchement.	161
7.8	Décalages dispersifs dans le régime de chevauchement.	163
7.9	Nombre moyen de photons n_i calculé numériquement pour un qubit initialement dans l'état $ i\rangle$ dans le régime de chevauchement.	165
7.10	Probabilité d'erreur d'une mesure par bifurcation en fonction du temps d'échantillonnage t_s	166
7.11	Taux de relaxation Purcell $\gamma_{\kappa,i}$ en fonction de la fréquence du résonateur dans le régime de chevauchement.	168

Liste des définitions

Définition 1	qubit	5
Définition 2	qubit, implémentation	6
Définition 3	mesure quantique	7
Définition 4	mesure projective	8
Définition 5	mesure forte	8
Définition 6	mesure faible	9
Définition 7	mesure QND	9
Définition 8	mesure monofrappe	9
Définition 9	porte logique quantique	10
Définition 10	porte à un qubit	11
Définition 11	porte à deux qubits	11
Définition 12	état de Fock	18
Définition 13	état cohérent	19
Définition 14	état comprimé	19
Définition 15	super-opérateur	25
Définition 16	détecteur échantillonneur bloqueur	30
Définition 17	régime dispersif	37
Définition 18	décalage dispersif	38
Définition 19	décalage de Stark	38
Définition 20	décalage de Lamb	38
Définition 21	mesure homodyne	43
Définition 22	mesure hétérodyne	43
Définition 23	test unitaire	78

Liste des codes

4.1	Exemple d'initialisation de matrices - demo/demo_exe_simple.cpp	83
4.2	Exemple de lecture de fichier de paramètres - demo/demo_exe_simple.cpp	84
4.3	Exemple de fichier de paramètres - demo/param_simple.dat	84
4.4	Exemple de calcul d'état stationnaire - demo/demo_exe_simple.cpp	86
4.5	Exemple d'évolution temporelle - demo/demo_exe_simple.cpp	86
4.6	Exemple de diagonalisation - demo/demo_exe_simple.cpp	89
4.7	Exemple de calcul de fonction de corrélation - demo/demo_exe_simple.cpp	90
4.8	Exemple de calcul de fonction Q et de Wigner - demo/demo_exe_simple.cpp	90
D.1	demo/demo_exe_simple.cpp	186

Introduction

Information is physical.

— Rolf Landauer [1]

Par cette phrase toute simple, Landauer exprime une idée fondamentale qui est au cœur de l'information quantique. Qu'il s'agisse de papyrus, de papier, de transistors, de domaines magnétiques ou d'acide désoxyribonucléique, l'information, quelle qu'elle soit, est stockée sur des supports physiques. Cette information est donc soumise aux mêmes règles que ces supports. Si ce support est quantique, l'information acquiert alors de toutes nouvelles propriétés qui, telle la mécanique quantique, défient l'intuition. Ainsi, alors que l'information classique est en principe déterministe et qu'elle peut être mesurée avec une précision arbitraire ou copiée, l'information quantique a une nature intrinsèquement probabiliste, et la mécanique quantique impose des limites à la précision avec laquelle on peut mesurer de l'information quantique, et en interdit sa copie parfaite.

Le rêve de la réalisation d'un ordinateur qui fonctionnerait selon les principes de la mécanique quantique est probablement l'un des grands moteurs qui motive et permet le financement d'une grande branche de la recherche fondamentale depuis la fin des années 1990. Alors même que les « processeurs quantiques » les plus avancés actuellement ne comportent que quelques « qubits » ou « bits quantiques » (l'équivalent quantique des bits d'information classique), les promesses d'un tel ordinateur sont telles que l'outil de recensement de brevets *Google Patents* dénombre déjà près de 5 000 brevets délivrés et 5 000 autres demandes de brevet reliés à l'information quantique. Du même coup, la recherche de pointe visant d'abord la création d'un ordinateur quantique a aussi mené à des innovations qui permettent de repousser les frontières de notre compréhension de cette théorie contre-intuitive qu'est la mécanique quantique.

C'est dans ce paradigme que s'inscrit ma recherche, à la croisée de l'information et de la mécanique quantique. Dans le domaine que j'ai étudié, appelé l'électrodynamique quantique en cavité ou en circuit, un atome — réel ou artificiel — interagit avec un champ électromagnétique confiné. En termes d'informatique quantique, l'atome joue alors le rôle d'un bit quantique, et le champ électromagnétique permet la transmission d'information entre deux atomes (pour faire un calcul) ou avec le monde extérieur (pour lire le résultat). En termes physiques, il s'agit d'une implémentation qui permet d'étudier l'interaction lumière-matière à l'échelle d'un seul atome et/ou photon.

Plus précisément, je me suis intéressé à la mesure d'un qubit supraconducteur à l'aide du champ électromagnétique du résonateur. Il s'agit d'un sujet très similaire à mon sujet de maîtrise [2], qui se restreignait cependant à comprendre pourquoi le rapport signal-sur-bruit d'une mesure dispersive d'un qubit à deux niveaux par le champ électromagnétique d'un résonateur linéaire n'atteignait pas expérimentalement une valeur de quelques centaines, tel que prédit initialement [3]. Dans le cadre de cette thèse, je m'attaque à l'amélioration de cette mesure en exploitant l'existence de plus de deux niveaux pour certains qubits supraconducteurs ainsi que la bistabilité d'un résonateur non linéaire. J'étudie aussi la rétroaction de la mesure sur le qubit et comment on peut utiliser cette rétroaction pour extraire des informations sur la nature quantique du champ électromagnétique à l'intérieur du résonateur.

Cette thèse est divisée comme suit. Au chapitre 1, j'introduis certains des concepts fondamentaux de l'information quantique et de l'électrodynamique quantique en cavité. Au chapitre 2, je présente le domaine de l'électrodynamique quantique en circuit et ses réalisations, ainsi que la problématique à laquelle je me suis attaquée. Aux chapitres 3 et 4, je décris respectivement les méthodes analytiques que j'ai utilisées pour m'attaquer à la problématique ainsi que la librairie de calcul numérique que j'ai développée et utilisée pour réaliser les simulations numériques présentées dans cette thèse. Au chapitre 5, j'obtiens, à partir d'un modèle initial complet décrivant un qubit à plusieurs niveaux couplé à un résonateur non linéaire, un modèle réduit qui permet de séparer la description physique du qubit de celle du champ électromagnétique, tout en conservant un maximum d'information sur l'interaction et la rétroaction mutuelle entre les deux systèmes.

Au chapitre 6, je compare ensuite les prédictions de ce modèle réduit analytique à des résultats expérimentaux obtenus par le groupe de quantronique du CEA-Saclay et à des simulations numériques du modèle initial. La comparaison montre un accord quantitatif sans paramètre ajustable pour la majorité des résultats à l'intérieur des limites

des approximations utilisées pour obtenir le modèle. Cet accord permet alors d'utiliser le qubit comme outil de caractérisation des paramètres du résonateur, ainsi que comme sonde du champ électromagnétique intra-résonateur.

Finalement, au chapitre 7. en m'inspirant du modèle réduit. je présente trois cas — l'un d'entre eux ayant déjà été testé expérimentalement — pour lesquels la mesure d'un qubit supraconducteur devrait être améliorée. Le premier cas concerne une mesure dispersive typique de faible puissance qui peut être améliorée marginalement en exploitant la structure à plusieurs niveaux d'un qubit. Le deuxième cas est une mesure que j'appelle « par avalanche », qui fonctionne uniquement pour un qubit à plus de deux niveaux et avec une très haute puissance de mesure. Finalement, le troisième cas concerne une mesure par bifurcation avec un résonateur non linéaire, qui peut aussi être améliorée en exploitant la structure à plusieurs niveaux du qubit.

Chapitre 1

Information et électrodynamique quantiques en cavité

L'information quantique et l'optique quantique sont deux domaines centraux de la recherche présentée dans cette thèse. Alors que l'information quantique est la motivation initiale, l'optique quantique est le domaine de la physique dans lequel s'inscrit le système étudié. Il est donc utile d'introduire ces deux domaines afin de saisir la portée des résultats présentés dans cette thèse. Dans ce chapitre, j'introduis donc brièvement d'abord l'information et le calcul quantique dans la section 1.1, puis l'électrodynamique quantique en cavité dans la section 1.2

1.1 Information et calcul quantique

*Computers are physical objects, and computations are physical processes.
What computers can or cannot compute is determined by the laws of physics
alone, and not by pure mathematics.*

— David Deutsch [4]

Tel que l'indique Deutsch, ce sont « *les lois de la physique qui dictent ce que peut accomplir ou non un ordinateur* ». L'information et la façon dont on peut la traiter est donc caractérisée par le support physique sur lequel elle est traitée. Si ce support est *classique*, c'est-à-dire décrit par la mécanique newtonienne ou les lois de Maxwell par

exemple, l'information est *classique*. Si le support est plutôt décrit par la mécanique quantique, tels les atomes, les spins électroniques ou les photons, l'information est alors *quantique*. L'information acquiert alors des propriétés plutôt contre-intuitives : elle ne peut pas être copiée ni lue sans être détruite [5], et elle peut posséder plusieurs valeurs à la fois. Ce sont ces propriétés toutes particulières qui motivent la recherche sur l'information quantique et qui promettent une révolution comparable à l'avènement du transistor si l'on réussit à les exploiter.

Dans cette section, j'introduis d'abord le bit quantique — ou *qubit* — l'unité fondamentale d'information quantique et la mesure quantique. J'aborde ensuite le calcul quantique et ses promesses, la cryptographie et la communication quantique, pour enfin lister quelques propositions d'architecture pour l'implémentation d'un ordinateur quantique. Loin d'être exhaustive, cette section se veut davantage une introduction et le lecteur intéressé pourra approfondir le sujet avec l'une des références du domaine, par exemple le livre de Nielsen et Chuang [4] ou les notes de cours de John Preskill [6].

1.1.1 Qubit

En informatique classique, le *bit* est l'unité fondamentale d'information. Un bit vaut — par convention — soit 0, soit 1. Il est physiquement représenté, par exemple, par un secteur magnétique sur un disque dur avec l'une ou l'autre de deux aimantations, un courant qui circule ou qui ne circule pas dans un transistor, ou un laser réfléchi ou pas par un point sur un disque compact. Si l'unité physique (le secteur, le transistor ou le point) est suffisamment petit, suffisamment froid ou suffisamment cohérent, la mécanique quantique peut devenir la théorie appropriée pour le décrire. On parle alors d'un bit quantique, ou qubit.

Définition 1 (qubit)

En informatique quantique, un **bit quantique**, ou **qubit**, est l'unité fondamentale d'information.

Un qubit peut avoir deux états, notés par convention $|0\rangle$ et $|1\rangle$ en notation de Dirac [7]. Deux exemples de systèmes physiques qui peuvent implémenter un qubit sont un spin- $\frac{1}{2}$ et la polarisation d'un photon. Non seulement un qubit peut-il être dans l'état $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, mais la mécanique quantique nous enseigne qu'il peut être dans une superposition des deux états *en même temps*. En termes mathématiques, on peut écrire l'état du système

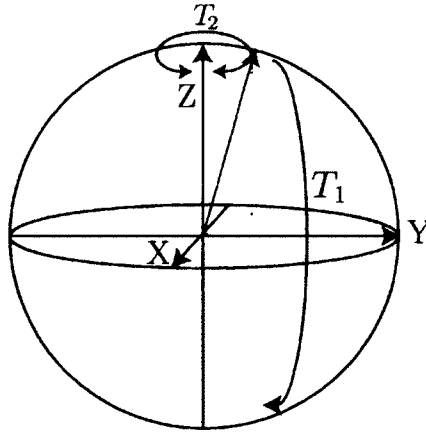


FIGURE 1.1 Sphère de Bloch. Représentation des temps de relaxation longitudinal T_1 et transversal T_2 dans le langage du pseudospin.

comme

$$|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle, \quad (1.1)$$

où a_0, a_1 sont deux nombres scalaires complexes respectant $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$. Tel un pseudo-spin, on peut représenter l'état d'un qubit sur la sphère de Bloch [7] tel qu'illustré à la figure 1.1. Les qubits physiques sont généralement affectés par deux processus qui détruisent l'état quantique. La relaxation est associée à un temps longitudinal T_1 et correspond à une transition de l'état excité $|1\rangle$ vers l'état fondamental $|0\rangle$. L'autre processus, le déphasage, est associé au temps transversal T_2 et correspond à la perte de l'information de phase entre les coefficients de la superposition. Ces deux temps sont représentés schématiquement sur la figure 1.1.

Une autre définition de qubit est aussi utilisée fréquemment.

Définition 2 (qubit, implémentation)

Par abus de langage, on appelle souvent **qubit** le système physique qui sert de support à l'information quantique. On parle par exemple de qubits supraconducteurs ou de qubits de spin.

Alors que dans la définition 1, un qubit a deux et seulement deux états, la définition 2 est plus vaste. En effet, plusieurs des systèmes physiques utilisés comme qubits (au sens de la définition 1) ont en fait plusieurs états et ne sont décrits qu'approximativement par des systèmes à deux niveaux. C'est le cas par exemple des atomes et des qubit

supraconducteurs. Par soucis de concision, j'utiliserai souvent cette deuxième définition dans cette thèse.

1.1.2 Mesure

La mesure d'un système quantique diffère fondamentalement de celle d'un système classique. En effet, alors qu'en mécanique classique, il est possible de mesurer un système sans le perturber, la mécanique quantique nous enseigne que toute mesure doit perturber le système mesuré. Ainsi, sauf lorsque l'état du système est un état propre de l'opérateur de mesure, son état sera changé par la mesure.

Définition 3 (mesure quantique)

On appelle **mesure quantique** un processus par lequel on acquiert de l'information sur un système quantique, tel un qubit.

La mécanique quantique telle qu'enseignée dans les cours de baccalauréat [7] prescrit que cette mesure doit laisser le système mesuré dans l'état propre de l'opérateur de mesure (l'**observable**) qui correspond à la valeur propre mesurée. Ainsi, on apprend que si l'on mesure l'opérateur de Pauli

$$\sigma_z \equiv |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|, \quad (1.2)$$

sur l'état $|\psi\rangle$ défini à l'équation (1.1), on peut obtenir les valeurs 1 (-1) avec les probabilités $P_{|1\rangle} = |a_1|^2$ ($P_{|0\rangle} = |a_0|^2$) et que l'état du qubit après cette mesure est $|1\rangle$ ($|0\rangle$).

Dans l'exemple ci-dessus, l'une des principales différences avec une mesure classique apparaît lorsque l'on mesure un opérateur qui est diagonal dans une base autre que $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Un tel opérateur est l'opérateur

$$\sigma_x \equiv |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|. \quad (1.3)$$

Les états propres de cet opérateur sont

$$|\pm\rangle = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (1.4)$$

Selon la mécanique quantique, une mesure de l'opérateur σ_x sur l'état $|\psi\rangle$ donnerait aussi les valeurs propres ± 1 , mais avec des probabilités

$$P_{|\pm\rangle} = \frac{|a_1 \pm a_0|^2}{2}, \quad (1.5)$$

et non pas

$$P_{|\pm\rangle} \neq \frac{P_{|0\rangle} \pm P_{|1\rangle}}{2} = \frac{|a_0|^2 \pm |a_1|^2}{2}. \quad (1.6)$$

C'est là qu'est toute la différence entre un bit quantique et un bit classique dit *probabiliste*, soit un bit classique auquel on aurait associé un état i avec une probabilité donnée $|a_i|^2$. Cette propriété est l'une de celles qui permettrait d'accélérer certains calculs comme on le verra dans la prochaine section.

Une mesure telle que décrite jusqu'à présent est dite *projective*. C'est la mesure quantique idéale, une mesure que j'appellerais *de banc d'école*.

Définition 4 (mesure projective)

On appelle **mesure projective** une mesure *forte*, *QND* (quantique non-destructrice) et *monofrappe*. Les définitions de ces différentes caractéristiques (*forte*, *QND*, *monofrappe*) sont données ci-dessous. C'est une mesure quantique après laquelle l'état du système mesuré est projeté dans l'état propre de l'opérateur de mesure correspondant à la valeur propre observée.

Une mesure projective est donc la plus restrictive des mesures quantiques, tel qu'illustré sur le diagramme de Venn à la figure 1.2. Une mesure projective parfaite extrait toute l'information théoriquement possible d'extraire à propos du système mesuré. Le résultat d'une mesure à priori projective peut cependant être entachée d'une erreur expérimentale, elle est alors imparfaite et on peut la caractériser par différentes quantités telles la fidélité ou la probabilité d'erreur [4].

De façon plus générale, une mesure n'est pas nécessairement *forte*, *QND* et *monofrappe*. Elle peut avoir indépendamment l'une ou l'autre, ou même aucune de ces caractéristiques. On définit la « force » d'une mesure de façon qualitative.

Définition 5 (mesure forte)

On appelle **mesure forte** une mesure qui extrait une grande fraction de l'information disponible sur le système. Elle n'est pas nécessairement *projective* ou *QND*, mais elle est généralement *monofrappe*.

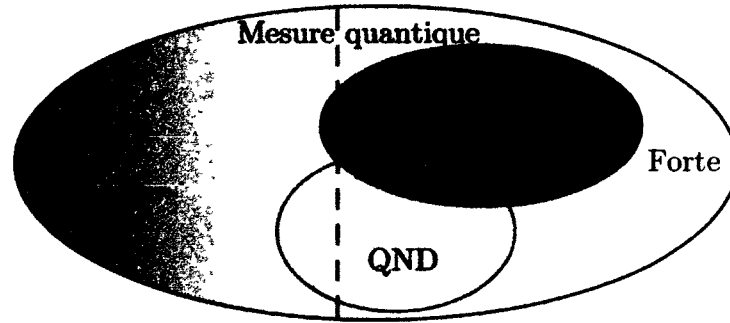


FIGURE 1.2 – Diagramme de Venn représentant les types de mesures quantiques. La gradation de gris représente la définition qualitative de la force de la mesure. Une mesure monofrappe (zone rouge) est généralement forte. Une mesure QND (zone jaune) peut être forte ou faible. L'intersection entre une mesure monofrappe et QND, dans le régime de mesure forte, est une mesure projective.

Définition 6 (mesure faible)

On appelle **mesure faible** une mesure qui extrait une faible fraction de l'information disponible sur le système mesuré. Une mesure faible n'est donc pas *projective*, mais peut être *QND*. Comme la quantité d'information extraite est faible, il est généralement nécessaire de la répéter et elle est rarement *monofrappe*. Le rapport signal-sur-bruit d'une telle mesure est généralement faible.

Une mesure peut aussi être *non-destructrice*.

Définition 7 (mesure QND)

On appelle **mesure quantique non-destructrice** (QND) une mesure qui perturbe l'état du système de façon minimale. Elle a comme propriété intéressante qu'une répétition de la mesure donnera le même résultat.

Finalement, une mesure peut être *monofrappe* ou non.

Définition 8 (mesure monofrappe)

On appelle **mesure monofrappe** (*single-shot measurement* en anglais) une mesure effectuée en un seul coup, c'est-à-dire une mesure non-répétée.

Une mesure monofrappe n'est pas nécessairement QND, mais peut l'être. Un exemple d'une mesure monofrappe, mais destructrice, serait la détection d'un photon par une photo-diode. Dans ce cas, bien que le photon soit détecté d'un seul coup, il est absorbé et donc détruit. On utilise souvent le qualificatif *monofrappe* pour une mesure forte, mais

on pourrait aussi imaginer une mesure faible monofrappe. Dans ce cas, le rapport signal-sur-bruit de la mesure serait faible et la probabilité d'erreur sur le résultat de la mesure serait élevée.

1.1.3 Calcul quantique

Le calcul quantique vise à exploiter les propriétés quantiques des qubits afin de réaliser certaines tâches de façon beaucoup plus efficace que n'importe quel ordinateur classique. Avant de survoler certaines de ces tâches, il est utile de présenter les portes logiques et les critères nécessaires à la réalisation d'un ordinateur quantique. C'est ce que je fais dans les prochaines sous-sections.

Portes logiques

La façon la plus intuitive d'imaginer un calcul est probablement de commencer avec un état initial puis d'effectuer un ensemble d'opérations logiques (mathématiques) afin d'obtenir un résultat. C'est la façon dont fonctionnent les ordinateurs classiques et un ordinateur quantique peut aussi être imaginé de cette façon. C'est ce que l'on appelle le modèle en circuit [4,8], car on peut dessiner un algorithme comme un circuit logique. Bien qu'il existe d'autres modèles de calcul, tels le calcul basé sur la mesure (aussi appelé le calcul quantique à sens unique) [9,10] et le calcul adiabatique [11], l'équivalence de ceux-ci avec le modèle en circuit a été démontrée [9,12]. J'aborderai donc le calcul quantique en ayant le modèle en circuit en tête. Ce modèle est basé sur des portes logiques qui agissent sur des qubits.

Définition 9 (porte logique quantique)

On appelle **porte logique quantique** une opération unitaire qui change l'état d'un ou plusieurs qubits. Par exemple, une porte *NON* inverse l'état d'un qubit, i.e. $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$.

Plusieurs portes logiques classiques sont non-réversibles. C'est le cas par exemple d'une porte *ET*, qui retourne 1 si deux bits valent 1 et 0 sinon. Il y a ainsi deux valeurs de sorties pour quatre combinaisons de valeurs d'entrée, ce qui la rend non-réversible. Au contraire, les portes logiques quantiques étant définies comme des opérations unitaires sont nécessairement réversibles. Cela pourrait sembler une limitation. Il est cependant possible de faire du calcul classique en utilisant uniquement des portes logiques réver-

sibles, et en particulier en utilisant la porte dite de Toffoli, une porte à trois (qu)bits [4]. L'idée est alors d'utiliser un troisième bit connu pour stocker le résultat de la porte, alors que les deux autres bits sont inchangés.

Définition 10 (porte à un qubit)

On appelle **porte à un qubit** une porte logique qui agit sur un seul qubit. Un exemple serait la porte *NON*.

Définition 11 (porte à deux qubits)

On appelle **porte à deux qubits** une porte logique qui agit sur deux qubits. Un exemple classique serait la porte *ET*, qui retourne 1 si les deux bits valent 1, et 0 sinon. Cette porte est cependant non-unitaire. Une façon de la rendre unitaire serait de conserver la valeur de l'un des deux bits.

On pourrait ainsi avoir des portes logiques agissant sur un nombre arbitraire de qubits. Ceci ne serait cependant pas très physiquement réaliste. Heureusement, il est suffisant d'avoir un nombre fini de portes logiques à un qubit ainsi qu'une seule porte logique à deux qubits afin de réaliser un calcul arbitraire sur un nombre arbitraire de qubits avec une précision finie [13].

Critères de DiVincenzo

Les critères énoncés par David DiVincenzo [14] sont au nombre de cinq. Ce sont des critères que toute implémentation physique visant à réaliser un ordinateur quantique doit remplir.

1. Un système physique extensible avec des qubits bien définis
2. La faculté d'initialiser l'état des qubits de façon contrôlée (vers l'état $|0\rangle$ par exemple)
3. Des temps de cohérence longs, beaucoup plus longs que les temps d'opération
4. Un ensemble universel de portes logiques
5. La faculté de mesurer l'état des qubits

Le premier critère exprime simplement que l'on doit avoir un système avec des états quantiques bien définis, et que l'on doit pouvoir implémenter un grand nombre de qubits, c'est-à-dire que créer $N+1$ qubits n'est pas beaucoup plus difficile que d'en créer N . Le deuxième critère spécifie que l'on doit pouvoir créer un état initial. Typiquement,

ce critère est rempli en refroidissant le système et en laissant les qubits relaxer dans leur état fondamental. Le troisième critère implique que l'on doit pouvoir réaliser plusieurs opérations logiques avant que le système perde sa nature quantique à cause de la décohérence.

Le quatrième critère indique qu'il faut pouvoir réaliser un calcul arbitraire. Tel que mentionné à la sous-section précédente, il a été montré [13] qu'il est suffisant d'avoir des portes à un qubit arbitraires ainsi qu'une porte à deux qubits pour réaliser un calcul arbitraire. Il a aussi été montré que s'il est possible d'effectuer des mesures combinées sur deux qubits, il est suffisant d'avoir des portes à un qubit [15]. Finalement, le cinquième critère assure qu'il est possible de lire le résultat d'un calcul. C'est principalement ce critère que j'étudie dans cette thèse dans le cadre de l'architecture d'électrodynamique quantique en circuit.

Il est évidemment essentiel que les critères ci-dessus soient remplis avec un degré de précision élevé. En effet, contrairement à du calcul classique qui est fait sur une base discrète (1 ou 0), le caractère continue de l'information quantique la rend plus sujette à l'accumulation et à l'amplification des erreurs. Si les erreurs sont suffisamment faibles et qu'elles agissent sur un seul ou sur un petit nombre de qubits à la fois, il est possible d'encoder l'information et de créer des codes correcteurs [16]¹. On peut alors définir des seuils de probabilité d'erreur par porte logique en deçà desquels un code correcteur améliore la précision du résultat. Les seuils de précision requis diffèrent selon les algorithmes, les hypothèses sur le système physique et les codes de correction d'erreur considérés. On retrouve ainsi des seuils de probabilité d'erreur par porte variant de 10^{-5} [17] à 10^{-2} [18, 19]. Dans le cadre de cette thèse, on cherchera ainsi à obtenir la probabilité d'erreur la plus faible possible.

Algorithmes et applications

La première application envisagée pour un ordinateur quantique a probablement été celle de la simulation de systèmes physiques quantiques. C'est Feynman, en 1982, qui se questionnait à ce sujet [20]. En rendant possible la simulation de matériaux complexes difficiles à simuler, cette simple réalisation provoquerait probablement en elle-même une accélération substantielle de la recherche en physique fondamentale.

Les promesses de l'ordinateur quantique ne s'arrêtent cependant pas là. Parmi les

¹Pour une introduction à la correction d'erreur, voir le livre de Nielsen et Chuang [4].

exemples les plus célèbres de problèmes qui seraient résolus plus rapidement sur un ordinateur quantique qu'un ordinateur classique, on retrouve la factorisation en facteurs premiers. Cet algorithme, dû à Shor [21], permet de décomposer un nombre en ses facteurs premiers en un temps qui croît polynomialement avec la taille de ce nombre. Il a été réalisé expérimentalement pour la première fois en résonance magnétique nucléaire pour le nombre 15 [22]. En comparaison, le temps requis par le meilleur algorithme classique connu croît plus rapidement que n'importe quel polynôme. L'algorithme de Shor procurerait donc un gain qu'on appelle exponentiel. Ce problème à priori de nature théorique a des impacts très importants au niveau de la sécurité informatique. En effet, la difficulté de factoriser des grands nombres est à la base de l'algorithme de cryptographie RSA [23], l'un des plus utilisés sur Internet. L'avènement d'un ordinateur quantique créerait ainsi une faille de sécurité importante pour beaucoup de communications informatiques.

Un autre algorithme célèbre est celui de Grover [24] pour la recherche dans une base de données désordonnée. Alors que les algorithmes classiques requièrent $\mathcal{O}(N)$ requêtes à une base de données désordonnée contenant N entrées afin de trouver celle recherchée, l'algorithme de Grover permet de la trouver en $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ requêtes. Il offre ainsi un gain quadratique, moins important que l'algorithme de Shor, mais tout de même appréciable lorsque N est grand. Cet algorithme a aussi été réalisé expérimentalement, entre autres avec des qubits supraconducteurs [25].

Ces trois applications ne sont que les plus célèbres de celles qui ont été développées. Pour une liste détaillée d'algorithmes, on peut se référer au site web *Quantum Algorithm Zoo* [26] qui référence plus d'une quarantaine d'algorithmes en date d'août 2011, ou encore à la référence [27].

1.1.4 Architectures

Plusieurs architectures ont été proposées afin de réaliser un ordinateur quantique. Cette section ne se veut pas une revue détaillée de chaque proposition, mais plutôt un survol rapide du fonctionnement de quelques unes d'entre elles. Les trois premières architectures sont décrites en détail dans le livre de Nielsen et Chuang [4].

Optique linéaire

Les photons étant naturellement des systèmes possédant deux états quantiques (deux polarisations par exemple), il est possible de les utiliser comme qubits et d'utiliser l'op-

tique linéaire afin d'implémenter un ordinateur quantique [28]. Les états des qubits sont alors représentés soit par la position, par la présence ou l'absence, ou par la polarisation de photons. Les portes logiques sont effectuées avec des lames séparatrices ou des lames qui changent la phase (lames quart d'onde par exemple). La préparation des états peut être faite par la création de photons uniques et leur détection est aussi possible. Ces qubits ont l'avantage d'être facilement transmissibles. On les appelle ainsi des qubits volants (*flying qubits* en anglais). Le principal désavantage de cette architecture est cependant qu'il est difficile de faire interagir deux photons ensemble. Cette interaction peut être possible en utilisant la non-linéarité des détecteurs [29] ou à l'aide de matériaux non linéaires, mais il est difficile d'atteindre des non-linéarités élevées [4].

Pièges à ions et atomes froids

Comme les atomes ont naturellement un spectre non linéaire qui permet la sélection de deux niveaux isolés des autres, leur utilisation comme qubit est naturelle. Plusieurs degrés de liberté peuvent faire office de qubit tels le spin d'un ion ou encore deux états électroniques d'un atome neutre. Les atomes ou les ions peuvent être piégés grâce à différents pièges électromagnétiques [30] ou à des cristaux optiques formés par des lasers et refroidis optiquement [31,32] et peuvent être manipulés optiquement [33]. Le couplage entre les atomes peut être réalisé via leurs modes de vibration dans le cristal optique, mais demeure un défi [4]. Néanmoins, en date du mois de mai 2011, les pièges à ions détiennent le record du plus grand nombre de qubits enchevêtrés, soit 14 qubits [34].

Résonance magnétique nucléaire

Le calcul quantique par résonance magnétique nucléaire (RMN) utilise des spins nucléaires comme qubits [35]. Les spins sont couplés par les liaisons chimiques au sein d'une même molécule et contrôlés par des pulses du champ magnétique, alors que les états initiaux sont préparés en polarisant les spins. C'est cette implémentation qui a réalisé l'algorithme de factorisation de Shor en premier [22]. Plusieurs problèmes affectent cependant cette architecture. Tout d'abord, l'augmentation du nombre de qubits requiert des molécules de plus en plus complexes et difficiles à contrôler, rendant cette architecture difficilement extensible. Ensuite, les signaux obtenus à partir d'une seule molécule sont faibles et deviennent de plus en plus faibles lorsque le nombre de qubits par molécule augmente. Cela force à utiliser des moyennes d'ensemble sur un grand nombre de

molécules et il a été montré que la quantité d'intrication dans ces systèmes décroît avec l'augmentation du nombre de qubits [36], rendant ces implémentations essentiellement classique. À cause de ces effets, le caractère quantique de la réalisation de l'algorithme de Shor a été remis en doute [37].

Qubits microfabriqués

Une autre voie poursuivie par plusieurs est la réalisation de qubits avec des dispositifs microfabriqués. Parmi les dispositifs considérés, on retrouve les points quantiques [38] et les qubits supraconducteurs [39–41]. Un des principaux avantages de ces architectures est que leur fabrication utilise des techniques perfectionnées depuis le début de l'ère des microprocesseurs et aujourd'hui bien maîtrisées. Ces architectures sont donc en théorie facilement extensibles. Les propriétés des qubits, leurs interactions et leur contrôle étant déterminés par leur design, ces architectures offrent aussi beaucoup de flexibilité. Cependant, étant implémentés dans des systèmes à l'état solide, ils sont affectés facilement par les impuretés et défauts de fabrication. Cela limite leurs temps de relaxation et de cohérence à des valeurs beaucoup plus faibles que les ions, soit de l'ordre de quelques nano-secondes à quelques milli-secondes. C'est aux qubits supraconducteurs que je m'intéresserai particulièrement dans cette thèse.

1.2 Électrodynamique quantique en cavité

[Cavity Quantum Electrodynamics] provides a bridge between the bread-and-butter quantum mechanics that is usually taught to undergraduates and most of the exciting new physics and technology that is being done today.

— Sergio M. Dutra [42]

L'électrodynamique quantique en cavité — aussi appelée optique quantique en cavité — étudie l'interaction entre des atomes uniques et le champ électromagnétique à l'intérieur d'une cavité résonante. Les expériences actuelles atteignent des niveaux où un seul photon interagit avec un seul atome pouvant être considéré comme un système à deux niveaux. On peut citer en exemple le groupe de Jeff Kimble à Caltech qui a réussi à générer des photons uniques à partir d'atomes uniques piégés dans une cavité [43] et à transférer

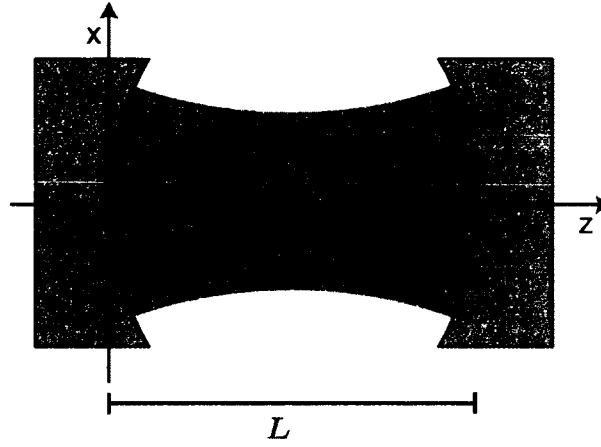


FIGURE 1.3 – Quantification du champ dans une cavité électromagnétique de longueur L avec ses deux premiers modes propres de champs électrique. On suppose des miroirs parfaits, le champ électrique doit donc être nul aux extrémités de la cavité.

de façon cohérente un état quantique entre un champ électromagnétique et un atome unique [44]. On peut aussi citer le groupe de Serge Haroche à Paris qui a réussi à générer des états à deux photons [45] et à observer la relaxation du champ électromagnétique en comptant les photons uniques [46]. Ce degré de contrôle permet à ces expériences d'étudier très précisément les prédictions de la mécanique quantique tout en positionnant le domaine comme une proposition sérieuse pour l'implémentation de l'informatique quantique. Ainsi, tel que l'écrit Dutra, l'électrodynamique quantique en cavité est un réel pont entre la mécanique quantique enseignée dans les cours de baccalauréat et la fine pointe de la recherche et de la technologie en informatique quantique. Puisque ce domaine est en quelque sorte l'ancêtre de l'électrodynamique quantique en circuit discutée au prochain chapitre, j'introduis ici les bases de ce domaine. Pour des revues détaillées du domaine, voir les références [33, 47, 48].

1.2.1 Champ électromagnétique

On considère le champ électromagnétique (EM) dans une cavité (aussi appelée résonateur) telle que représentée à la figure 1.3. On sait que l'hamiltonien classique du champ électromagnétique à l'intérieur de la cavité est donné par [49]

$$H_r = \frac{1}{2} \int_V \left[\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right] dV, \quad (1.7)$$

où V est le volume de la cavité, E et B sont les amplitudes des champs électrique et magnétique respectivement, et ϵ_0 et μ_0 sont la permittivité et la perméabilité du vide. On sait de plus que, les modes électriques et magnétiques étant discrets à cause des conditions frontières, les amplitudes E et B peuvent se décomposer en modes propres orthogonaux q_n et p_n , où $p_n = \dot{q}_n$ est la quantité de mouvement généralisée conjuguée à q_n . On a ainsi les décomposition

$$E_x(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n q_n(t) \sin k_n z \quad B_y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k_n} A_n p_n(t) \cos k_n z, \quad (1.8)$$

où μ_0 et ϵ_0 sont la perméabilité et la permittivité du vide, $A_n = \sqrt{\frac{2\omega_n^2}{V\epsilon_0}}$ est une constante de proportionnalité, et $\omega_n = ck_n = n\pi c/L$ est la fréquence du mode n , k_n est son vecteur d'onde, c est la vitesse de la lumière et L est la longueur de la cavité. Pour simplifier la notation, j'ai supposé une polarisation selon x du champ électrique et obtenu B avec les équations de Maxwell.

En passant de l'intégrale continue à une somme discrète, l'hamiltonien ci-dessus peut alors se réécrire

$$H_r = \sum_n \left[\frac{p_n^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_n^2 q_n^2 \right]. \quad (1.9)$$

Cet hamiltonien étant celui d'un bain d'oscillateurs harmoniques, on peut alors introduire les opérateurs d'échelle $a_n^{(\dagger)}$ pour écrire $p_n = i\sqrt{\omega_n/2}(a_n^\dagger - a_n)$ et $q_n = \sqrt{1/2\omega_n}(a_n^\dagger + a_n)$ en deuxième quantification. On obtient alors ($\hbar = 1$ tout au long de cette thèse)

$$H_r = \sum_n \omega_n \left[a_n^\dagger a_n + \frac{1}{2} \right]. \quad (1.10)$$

Dans le cadre de cette thèse, on s'intéressera au cas où un atome est couplé au champ EM à l'intérieur de la cavité. Afin de simplifier le problème, on suppose que l'atome possède une fréquence de transition près de l'un de ces modes. On laisse alors tomber la somme et on ne considère qu'un seul mode n de la cavité.

Dans les trois sous-sections suivantes, j'introduis d'abord le concept de signal d'excitation, puis trois types d'états ainsi que deux représentations du champ électromagnétique pertinents pour cette thèse.

Excitation du champ électromagnétique

Le champ électromagnétique à l'intérieur de la cavité peut être excité en y envoyant un laser par exemple. Dans une notation hamiltonienne, cela peut être représenté, de façon équivalente, par une position ou une quantité de mouvement oscillante [50]

$$H \propto q \cos(\omega t), \quad (1.11)$$

où q est la position et la constante de proportionnalité dépendra des coefficients de transmission et de réflexion des miroirs. Lorsque l'on passe en deuxième quantification, on a $q \rightarrow (a^\dagger + a)$, et on obtient

$$H_d = \epsilon (a^\dagger + a) \cos(\omega t). \quad (1.12)$$

En général, on supposera que l'on peut laisser tomber les termes contre-rotatifs sous une approximation séculaire (voir l'annexe A), résultant en l'hamiltonien

$$H_d = \epsilon a^\dagger e^{-i\omega t} + \epsilon^* a e^{i\omega t}, \quad (1.13)$$

avec ϵ l'amplitude du signal d'excitation. On note que la phase entre a et a^\dagger peut être variée arbitrairement en ajustant la phase de l'excitation cohérente.

États du champ électromagnétique

Trois types d'états du champ électromagnétique seront pertinents dans le cadre de cette thèse. Tout d'abord, il y a les états de Fock.

Définition 12 (état de Fock)

Un **état de Fock** est un état du champ électromagnétique dans lequel le nombre de photons est déterminé de façon unique. On le note $|n\rangle$. Les opérateurs de création et de destruction agissent sur un état de Fock tels que $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ et $a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$.

Sauf pour l'état fondamental $n = 0$, ce sont des états qui ne minimisent pas le principe d'incertitude d'Heisenberg, i.e. $\langle n | \Delta q \Delta p | n \rangle \propto n > \frac{1}{2}$ (on prend ici $\hbar = 1$). Dans le domaine des micro-ondes, ces états sont non-triviaux à générer puisque les sources classiques génèrent plutôt des états cohérents. À cause du caractère discret du nombre

quantique n et de la facilité à exprimer les opérateurs d'échelle dans cette base, c'est cependant dans la base de Fock que tous les calculs numériques ont été effectués. Expérimentalement, différentes méthodes ont été utilisées pour générer ces états. L'une d'elle utilise le couplage à des systèmes à deux niveaux pour transférer les quanta un à la fois dans le champ électromagnétique. Cette technique a été utilisée à la fois en cavité tridimensionnelle [45, 51] et en circuit [52, 53]. Le groupe d'Haroche a aussi réussi à implanter une boucle de rétroaction afin de stabiliser ces états autrement très fragiles [54].

Les états générés par les sources classiques sont plutôt des états cohérents.

Définition 13 (état cohérent)

Un **état cohérent** est un état classique du champ électromagnétique défini par l'action de l'opérateur unitaire de déplacement $D(\alpha) \equiv e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}$ [50] sur l'état fondamental $|0\rangle$. On le note $|\alpha\rangle \equiv D(\alpha)|0\rangle$, avec α un nombre complexe.

Les états cohérents peuvent se décomposer sur la base des états de Fock de la façon suivante [50]

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.14)$$

L'une des propriétés intéressantes des états cohérents est qu'ils sont des états propres de l'opérateur de destruction a . On a ainsi $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Avec cette propriété, on peut montrer qu'ils minimisent le principe d'incertitude d'Heisenberg avec $\langle \alpha | \Delta q \Delta p | \alpha \rangle = \frac{1}{2}$ pour tout α . Comme les états de Fock, ils forment une base, mais, contrairement aux états de Fock, celle-ci n'est pas orthogonale. Elle est plutôt sur-complète avec comme relation de fermeture

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = 1, \quad (1.15)$$

où l'intégrale est faite sur tout le plan complexe. Bien que deux états $|\alpha\rangle$ et $|\alpha'\rangle$ ne soient pas orthogonaux, on a

$$|\langle \alpha | \alpha' \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \alpha'|^2}, \quad (1.16)$$

et ils s'approchent donc de l'orthogonalité lorsque $|\alpha - \alpha'|$ est suffisamment grand. Ces états sont naturellement générés par une source classique de lumière cohérente tel un laser. On peut aussi caractériser un état cohérent $\alpha = \sqrt{n}e^{i\phi}$ par une amplitude \sqrt{n} correspondant à la racine du nombre de photons, et une phase ϕ .

Finalement, un dernier type d'état qu'il est utile d'introduire est l'état comprimé.

Définition 14 (état comprimé)

Un **état comprimé** est un état cohérent dont l'incertitude a été comprimée dans l'une des quadratures et amplifiée dans l'autre. De tels états peuvent être produits en utilisant des matériaux non linéaires à l'intérieur de la cavité.

Scully et Zubairy [50], de même que beaucoup d'autres références d'optique quantique, définissent l'état comprimé strictement comme le résultat de l'action de l'opérateur unitaire de compression

$$S(r) = e^{\frac{1}{2}r^*a^2 - \frac{1}{2}ra^{\dagger 2}}, \quad (1.17)$$

sur un état cohérent $|\alpha\rangle$. Dans cette expression, on a $r = |r|e^{i\theta}$, où $|r|$ est le coefficient de compression et θ est l'angle de l'axe de compression. Un tel état $|\alpha, r\rangle = S(r)D(\alpha)|0\rangle$ a une incertitude réduite dans la quadrature parallèle à l'axe formant un angle de $\theta/2$ avec l'axe des abscisses et augmentée dans la quadrature perpendiculaire à cet axe. Ces états correspondent donc à la définition 14. Ces états sont générés par exemple lorsqu'un état cohérent passe à travers un matériau non linéaire. Comme l'incertitude dans une quadrature est augmentée du même facteur qu'elle est réduite dans l'autre, ces états minimisent aussi la relation d'incertitude. Dans le cadre de cette thèse, j'appellerai aussi *état comprimé* un état qui présenterait une incertitude réduite dans une direction par rapport à une autre, mais sans imposer que les deux directions soient en quadrature. On pourrait ainsi avoir un état qui aurait une incertitude réduite en nombre de photons mais augmentée en phase.

Représentations du champ électromagnétique

Il est bien sûr possible de représenter l'état du champ EM par un ket et sa décomposition sur une base telle la base de Fock

$$|\psi\rangle = \sum_n \psi_n |n\rangle. \quad (1.18)$$

où les coefficients $\psi_n = \langle n|\psi\rangle$. Ceci n'est cependant pas suffisant pour décrire une incertitude statistique (classique). Pour ce faire, on doit introduire la notion de matrice densité ρ . Pour un état $|\psi\rangle$, la matrice densité peut s'écrire $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, de sorte que

$$\rho = \sum_{n,m} \psi_n \psi_m^* |n\rangle\langle m|. \quad (1.19)$$

La notation de matrice densité permet cependant de représenter des états plus généraux du type

$$\rho = \sum_{n,m} \rho_{n,m} |n\rangle \langle m|, \quad (1.20)$$

où les composantes $\rho_{n,m}$ sont des nombres complexes arbitraires qui permettent de respecter que ρ soit définie positive et $\text{Tr} \{\rho\} = 1$.

On peut aussi représenter le champ électromagnétique de façon plus visuelle en utilisant des représentations d'espace de phase [50]. Il en existe plusieurs (fonction P , fonction de Wigner, etc.) [55] et chacune a différentes propriétés et correspond à différentes valeurs moyennes d'opérateurs d'échelle. On se concentrera ici sur la fonction Q qui est la plus simple à calculer à partir de la matrice densité. La fonction Q est définie comme

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle, \quad (1.21)$$

et possède toutes les propriétés d'une distribution de probabilité, i.e. $Q(\alpha) \geq 0$ et $\int Q(\alpha) d^2\alpha = 1$. La fonction $Q(\alpha)$ correspond ainsi à la probabilité que le système soit dans l'état cohérent $|\alpha\rangle$, avec un nombre de photons $n = |\alpha|^2$ et une phase $\phi = -i \arg(\alpha)$. On peut montrer que cette fonction est reliée à la mesure simultanée, en séparant le signal en deux, des deux quadratures du champ électromagnétique [55].

À la figure 1.4, je trace les fonctions Q (a) du vide $|0\rangle$, (b) de l'état de Fock $|4\rangle$, (c) de l'état cohérent $|\alpha\rangle$ ($\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$), (d) de l'état comprimé $S(0.5e^{i\pi/2})|\alpha\rangle$, (e) d'un état comprimé en nombre $e^{i0.1(a^\dagger a)^2}|\alpha\rangle$ et (f) d'un état chat de Schrödinger $(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)/\sqrt{2}$. On peut ainsi constater visuellement sur ces figures qu'un état cohérent $|\alpha\rangle$ est équivalent à un vide déplacé, puisque la forme est conservée. La même chose n'est pas vraie pour un état de Fock qui, comme on le voit sur le panneau (b), a une distance de l'origine définie avec très peu d'incertitude, mais une phase complètement incertaine. On voit aussi que l'état comprimé en (d) a une incertitude réduite selon l'axe formant un angle de $\pi/4$ avec l'axe des X et une incertitude augmentée selon l'axe perpendiculaire. Bien que l'état comprimé en nombre (e) ressemble à l'état comprimé en (d), on peut constater qu'il a davantage la forme d'une banane et présente une incertitude réduite en nombre, mais augmentée en phase. Finalement, on peut voir que l'état chat de Schrödinger (f) (appelé ainsi car il s'agit d'une superposition d'états classiques potentiellement macroscopiques si $|\alpha|$ est grand) possède une petite probabilité d'occupation entre les deux bosses témoignant de la superposition quantique. D'autres fonctions d'espace de phase, comme

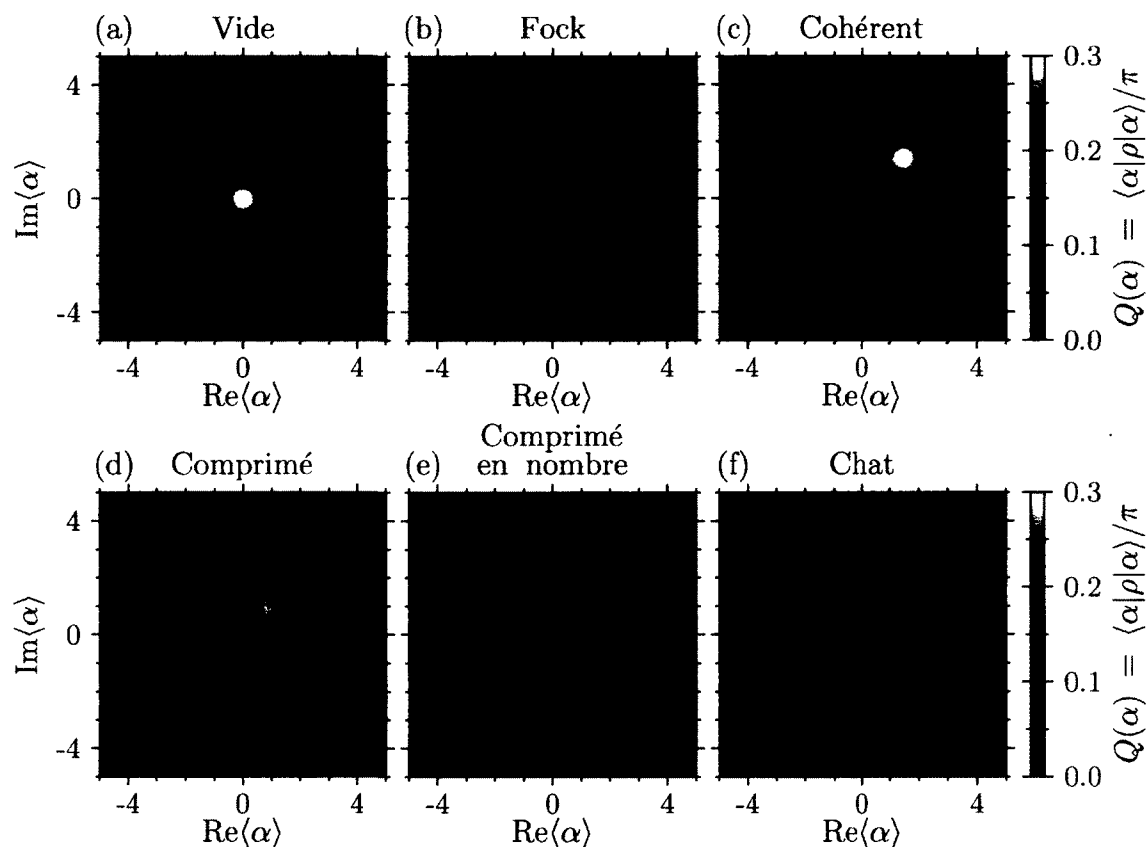


FIGURE 1.4 – Exemples de fonctions Q pour (a) le vide $|0\rangle$, (b) un état de Fock à 4 photons $|4\rangle$, (c) un état cohérent à 4 photons $|\alpha\rangle$ pour $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, (d) un état comprimé $S(0.5e^{i\pi/2})|\alpha\rangle$ avec le même α qu'en (c), (e) un état comprimé en nombre $e^{i0.1(a^\dagger a)^2}|\alpha\rangle$ avec le même α qu'en (c), (f) un état chat de Schrödinger $(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)/\sqrt{2}$ avec le même α qu'en (c).

la fonction de Wigner ou la distribution P [55] montrent des caractéristiques beaucoup moins ambiguës telles que des valeurs négatives ou des singularités pour des états quantiques. Dans cette thèse, je me limiterai néanmoins à l'utilisation de fonctions Q pour des raisons de simplicité et de rapidité des calculs.

1.2.2 Atomes et interaction lumière-matière

En électrodynamique quantique en cavité, on considère l'interaction entre un atome et le champ à l'intérieur de la cavité, tel que représenté schématiquement à la figure 1.5. L'atome est représenté comme un système à deux niveaux. Ses états propres, de valeurs

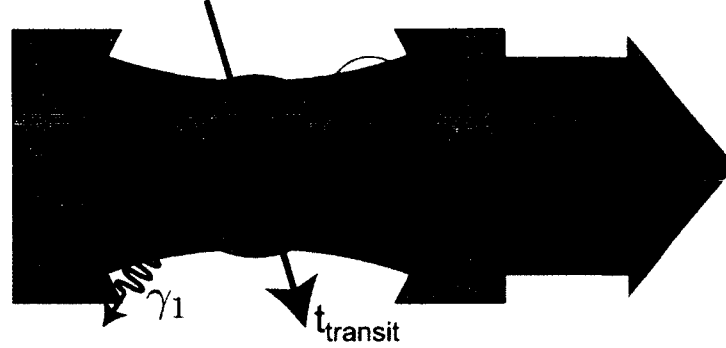


FIGURE 1.5 – Représentation schématique de l'électrodynamique quantique en cavité. Le taux de relaxation γ , le taux de déphasage pur γ_φ et le taux de fuite des photons de la cavité κ sont représentés. L'atome passe un temps t_{transit} dans la cavité et est couplée à celle-ci avec une force de couplage g .

propres ω_0 et ω_1 sont notés $|0\rangle$ et $|1\rangle$, et son hamiltonien s'écrit

$$H_q = \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} \sigma_z \equiv \frac{\omega_{1,0}}{2} \sigma_z, \quad (1.22)$$

où l'on a introduit la matrice de Pauli σ_z [7]. L'état de l'atome peut ainsi être représenté sur la sphère de Bloch [7] tel qu'à la figure 1.1.

On considère ensuite une interaction dipolaire entre l'atome et le champ électromagnétique. On écrit ainsi l'hamiltonien d'interaction comme $H = -\vec{d} \cdot \vec{E}$, où \vec{E} est le champ électromagnétique et \vec{d} est le moment dipolaire. En deuxième quantification, on obtient l'hamiltonien d'interaction [50, 55, 56]

$$H_I = g\sigma_x(a^\dagger + a), \quad (1.23)$$

où g est la constante de couplage qui dépend de l'amplitude du moment dipolaire et de l'amplitude du champ électrique. Pour cette expression, j'ai introduit la matrice de Pauli σ_x et supposé une polarisation du champ électrique selon l'axe des x . L'hamiltonien total du système devient alors

$$\begin{aligned} H_{\text{Rabi}} &= H_r + H_q + H_I, \\ &= \omega_r a^\dagger a + \frac{\omega_{1,0}}{2} \sigma_z + g\sigma_x(a^\dagger + a). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Cet hamiltonien est connu sous le nom d'hamiltonien de Rabi [57, 58] et a été développé

dans le cadre de la résonance magnétique nucléaire. Dans la limite où $g \ll \omega_r + \omega_{1,0}$, qui est normalement très bien respectée dans le domaine optique, on peut faire une approximation séculaire, tel qu'expliqué à l'annexe A, et négliger les termes contre-rotatifs $a\sigma_- + a^\dagger\sigma_+$ qui ne conservent pas l'énergie. Avec cette approximation, on peut simplifier l'équation (1.24) pour obtenir l'hamiltonien de Jaynes-Cummings [59]

$$H_{\text{JC}} = \omega_r a^\dagger a + \frac{\omega_{1,0}}{2} \sigma_z + g(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+), \quad (1.25)$$

où σ_\pm sont les opérateurs d'échelle du système à deux niveaux, avec $\sigma_x = \sigma_+ + \sigma_-$.

L'une des complexités de l'optique quantique est que les atomes se déplacent à l'intérieur de la cavité. Tel qu'illustré à la figure 1.5, ils traversent la cavité en un temps t_{transit} . Comme le champ électromagnétique n'est pas uniforme à l'intérieur de la cavité, cela signifie que le couplage g est en fait une fonction du temps. De plus, cela limite la durée des expériences. Comme on le verra au chapitre suivant, il s'agit d'une difficulté qui n'est pas présente dans l'implémentation en circuit de ce système.

À l'hamiltonien du système $H = H_{\text{Rabi}} + H_d$, on doit ajouter le couplage à l'environnement. Celui-ci donne lieu à différents processus illustrés à la figure 1.5. On obtient ainsi trois processus : la relaxation de l'atome à un taux $\gamma = 1/T_1$, le déphasage de l'atome à un taux $\gamma_\varphi = 1/T_\varphi$ et la perte de photon de la cavité à un taux $\kappa = 2\pi\omega_r/Q$. Dans ces expressions, T_1 est le temps de relaxation longitudinal, Q est le facteur de qualité de la cavité et T_φ est le temps de déphasage pur. Ce dernier est relié au temps de relaxation transversal $T_2 = 1/\gamma_2$ par $\gamma_2 = \gamma_\varphi + \gamma/2$.

En optique quantique, le traitement typique de ces couplages à l'environnement implique de faire une approximation de Born-Markov et de faire la trace partielle sur les états de l'environnement [55, 56, 60]. L'approximation de Born suppose que le couplage à l'environnement est faible de sorte qu'on puisse le traiter en théorie de perturbation au premier ordre. L'approximation de Markov suppose que l'environnement n'a pas de mémoire. En d'autres termes, cela suppose que le spectre du bruit causé par l'environnement est blanc sur une largeur au moins aussi grande que la largeur de raie de la transition. Tel que montré à l'annexe B, ces approximations permettent d'obtenir l'équation maîtresse décrivant l'évolution du système sous la forme [55, 56, 60]

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho \equiv -i[H, \rho] + \kappa\mathcal{D}[a]\rho + \gamma\mathcal{D}[\sigma_-]\rho + \frac{\gamma_\varphi}{2}\mathcal{D}[\sigma_z]\rho, \quad (1.26)$$

où

$$\mathcal{D}[A]\rho = \frac{1}{2}(2A\rho A^\dagger - A^\dagger A\rho - \rho A^\dagger A), \quad (1.27)$$

est un *super-opérateur* connu sous le nom de *dissipateur*. la température est supposée nulle et où \mathcal{L} est un *super-opérateur* appelé le lindbladien et contenant à la fois l'évolution hamiltonienne et l'évolution dissipative du système.

Définition 15 (super-opérateur)

On appelle un **super-opérateur** une application linéaire qui agit à la fois à gauche et à droite de la matrice densité. L'application linéaire de commutation, le dissipateur et le lindbladien sont des exemples de super-opérateurs.

On peut comprendre intuitivement le dissipateur de la façon suivante. Le premier terme correspond à un terme de « saut ». Si, par exemple, A est l'opérateur de destruction du champ a , ce terme détruit un photon dans l'état ρ . Les deux derniers termes peuvent quant à eux se réécrire comme une évolution avec hamiltonien anti-hermitique $-i[H_A, \rho]$, où $H_A = -iA^\dagger A$ et où la règle de commutation imposerait de prendre le conjugué hermitique de H_A pour préserver l'hermiticité du tout — i.e. $[H_A, \rho] \equiv H_A\rho - \rho H_A^\dagger$ — lorsque H_A n'est pas hermitique. Ainsi, on peut voir le deuxième terme du dissipateur comme une évolution avec une fréquence imaginaire. Ce terme correspond donc à une diminution exponentielle de la probabilité de présence d'un photon dans le temps. Ainsi, si un photon sort de la cavité, on peut le mesurer et c'est le premier terme qui agit. Si aucun photon ne sort de la cavité, il faut mettre à jour l'état ρ du système en diminuant la probabilité qu'il y avait un photon au départ. Ce sont alors les deuxièmes et troisièmes termes qui agissent.

Comme on le verra au chapitre suivant, cette équation maîtresse est aussi celle qui décrira l'implémentation en circuit de l'électrodynamique quantique.

Chapitre 2

Systeme physique et problematique

We never experiment with just one electron or atom or (small) molecules. In thought-experiments we sometimes assume that we do ; this invariably entails ridiculous consequences [...]
– Erwin Schrödinger [61]

Comme cette citation l'indique, Schrödinger, comme plusieurs pères fondateurs de la mécanique quantique, était mystifié par certaines des implications de cette théorie. Au cours des dernières décennies, les expériences de pensée des plus grands physiciens du début du vingtième siècle sont progressivement passées de la théorie à la pratique. On a ainsi vu au chapitre précédent que les expériences d'électrodynamique quantique en cavité réussissent maintenant à manipuler des atomes et des photons un à la fois. On verra dans ce chapitre que l'on peut non seulement manipuler des vrais atomes un à la fois, mais recréer l'électrodynamique quantique en cavité avec des atomes artificiels, sur circuit électronique.

En 2004, les groupes de Steve Girvin et de Rob Schoelkopf à Yale ont proposé de coupler un qubit de charge supraconducteur à un résonateur coplanaire. Non seulement ce dispositif qu'ils ont fabriqué permet de réaliser l'électrodynamique quantique en circuit plutôt qu'en cavité, mais il permet, comme on le verra, d'explorer des régimes inaccessibles à la version en cavité. La fabrication de circuits électroniques étant très bien maîtrisée, cette implémentation permet aussi en pratique de créer un atome artificiel avec des paramètres arbitraires et de le fixer à une position précise pour le laisser interagir avec

des photons uniques. Ce faisant, on réalise non seulement une expérience avec un seul atome et un seul photon, mais on contrôle totalement leur interaction et leurs propriétés.

Aux sections 2.1 et 2.2, j'introduirai d'abord les résonateurs coplanaires et les qubits supraconducteurs avant d'introduire l'électrodynamique quantique en circuit à la section 2.3. Puis, à la section 2.4, j'expliquerai sommairement comment se faire la mesure de l'état d'un qubit en électrodynamique quantique en circuit, pour enfin positionner la problématique que j'ai abordée dans cette thèse à la section 2.5.

2.1 Résonateurs coplanaires

Classiquement, on sait qu'un circuit formé d'une inductance et d'une capacité (circuit LC) obéit aux équations d'un oscillateur harmonique. On peut obtenir un oscillateur harmonique quantique si les pertes dues à la résistance interne du circuit et au couplage avec le circuit externe sont faibles et si le circuit LC est refroidit à suffisamment basse température. Cette température doit être beaucoup plus basse que $\hbar\omega_{LC}/k_B$, où \hbar est la constante de Planck réduite, k_B est la constante de Boltzmann et $\omega_{LC} = 1/\sqrt{LC}$ est la fréquence de résonance du circuit d'impédance L et de capacitance C .

Malgré de récents progrès [62–64], il demeure difficile de fabriquer des éléments de circuit discrets tels des capacités et des inductances, car la géométrie et l'espace réduit mène à des inductances et capacités parasites. Il est plus facile en contre-partie de fabriquer des résonateurs coplanaires [65,66] tel qu'illustré à la figure 2.1. Le résonateur, que

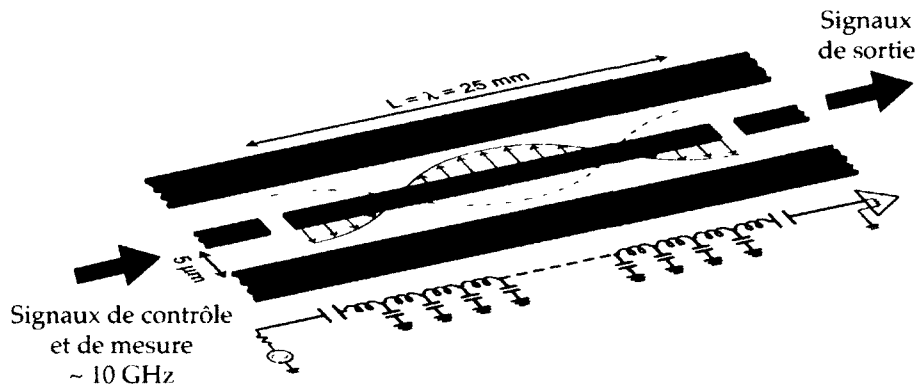


FIGURE 2.1 – Schéma d'un résonateur coplanaire. Les parties bleues pâles sont un supraconducteur tel l'aluminium ou le niobium. La représentation en éléments de circuit discrets est en-dessous.

l'on peut imaginer comme une tranche de câble coaxial, est microfabriqué typiquement en utilisant de l'aluminium ou du niobium comme supraconducteur. Il s'agit de l'équivalent unidimensionnel de la cavité tridimensionnelle utilisée en électrodynamique quantique en cavité. On peut aussi représenter cette ligne à transmission coupée par une série d'inductances et de capacités en parallèle tel qu'illustré au bas de la figure 2.1. Les capacités aux extrémités jouent alors le rôle des miroirs des cavités tridimensionnelles en imposant des conditions frontières pour le champ électromagnétique. Un tel résonateur possède des modes de résonance dont les fréquences sont données par $\omega_n = (n + 1)\pi\bar{c}/L$, où \bar{c} est la vitesse de la lumière dans la ligne à transmission et L est la longueur du résonateur. Avec des longueurs de l'ordre de quelques centimètres, on obtient des fréquences micro-ondes.

Cette version unidimensionnelle de la cavité tridimensionnelle utilisée en optique quantique en cavité partage avec cette dernière le même hamiltonien (1.10) et la même équation maîtresse

$$\dot{\rho} = -i[H_r, \rho] + \kappa\mathcal{D}[a]\rho. \quad (2.1)$$

Cependant, le facteur de qualité (et donc le taux κ) est ici déterminé par la grandeur des capacités aux extrémités du résonateur plutôt que par les coefficients de réflexion et de transmission de miroirs. De plus, le champ EM est ici confiné dans une seule dimension de l'espace, ce qui permet d'atteindre des couplages qubit-résonateur plus élevés [3]. Le contrôle et la mesure du résonateur peuvent être effectués en envoyant des signaux micro-ondes sur le port d'entrée et en mesurant la transmission ou la réflexion de ces signaux.

2.1.1 Résonateurs non linéaires

Un résonateur linéaire tel que présenté à la section précédente est un élément passif. En effet, il n'agit que comme filtre passe bande, en laissant pénétrer un signal résonant et en réfléchissant la majeure partie d'un signal non-résonant. Il est possible de transformer ce résonateur en élément actif en le rendant non linéaire. Cela peut se faire en utilisant des jonctions Josephson [67] ou des SQUIDS (« *superconducting quantum interfering device* » en anglais) [68] qui agissent comme une inductance non linéaire et non-dissipative. Plusieurs designs ont été utilisés expérimentalement pour réaliser un tel résonateur, allant du plus simple avec une seule jonction Josephson interrompant le conducteur central du résonateur [69], à un méta-matériau dans lequel le conducteur central est remplacé par une série de plusieurs centaines de SQUIDS [70–72], en passant par un résonateur interrompu par un seul SQUID [73]. Une version *élément discret* d'un oscillateur non



FIGURE 2.2 - Résonateur coplanaire non linéaire ajustable. Le résonateur devient non linéaire par l'ajout d'une jonction Josephson à même le conducteur central. S'il s'agit plutôt d'un SQUID tel qu'illustré sur cette figure, le résonateur est non linéaire et sa fréquence est ajustable. La flèche double indique que l'ajustement de sa fréquence déforme légèrement les modes de résonance et déplace les noeuds.

linéaire a aussi été réalisée en remplaçant l'inductance d'un circuit LC par une jonction Josephson [74]. Un résonateur coplanaire non linéaire avec un seul SQUID est illustré à la figure 2.2. L'utilisation d'un ou de plusieurs SQUIDS plutôt qu'une unique jonction Josephson permet d'ajuster l'inductance, et donc la fréquence, la non-linéarité et la géométrie des modes de résonance du résonateur en changeant le flux traversant la boucle du SQUID.

La présence de l'élément non linéaire ajoutera un terme de la forme $\cos(\alpha X) \sim \cos(a^\dagger + a)$ (α est une constante qui ajuste les unités) à l'hamiltonien, ajoutant des termes non linéaires de tous les ordres. En développant en série et en faisant une approximation séculaire pour laisser tomber les termes non-diagonaux, on peut ainsi écrire l'hamiltonien sous la forme

$$H_r = \omega_r a^\dagger a + \frac{K}{2} a^\dagger{}^2 a^2 + \frac{K'}{3} a^\dagger{}^3 a^3 + \dots, \quad (2.2)$$

où les constantes Kerr K et K' dépendront de la géométrie du résonateur et des paramètres des éléments Josephson, mais peuvent être calculées analytiquement [75, 76]. On note que selon les détails de l'implémentation, il est possible d'atteindre des non-linéarités très fortes. plaçant ce système dans un régime où le résonateur lui-même peut être considéré comme un qubit [77]. Dans le cadre de cette thèse, je m'intéresserai cependant à des non-linéarités plus faibles, telles que $K \ll \kappa$.

Dans une vision semi-classique, on peut paramétrer le diagramme de stabilité d'un résonateur non linéaire excité par un signal par l'amplitude ϵ_d du signal et par le décalage

réduit $\Omega = 2(\omega_r - \omega_d)/\kappa$, où ω_d est la fréquence du signal [78,79]. On peut alors représenter le champ à l'intérieur du résonateur par un état cohérent $\alpha = \langle a \rangle$ et montrer que la valeur stationnaire de α est donnée par la solution de l'équation [79]

$$i \left(\Omega \frac{\kappa}{2} + K|\alpha|^2 + K'|\alpha|^4 \right) \alpha + \frac{\kappa}{2} \alpha = -i\epsilon_d. \quad (2.3)$$

Ce polynôme d'ordre cinq en α a en général cinq solutions, mais on s'intéressera à des régimes où au maximum trois sont réelles et deux sont stables. On distingue alors deux régimes selon que Ω est plus petit ou plus grand qu'une valeur critique $\Omega_C = \sqrt{3}$.

Lorsque Ω est plus petit que — mais près de — Ω_C , la pente de la réponse de l'oscillateur à un petit changement de Ω diverge. L'oscillateur peut alors être utilisé comme un amplificateur paramétrique pour des signaux faibles [70]. Un amplificateur paramétrique est un oscillateur dont l'un des paramètres (fréquence propre, constante de ressort, dissipation, ...) est modulé. Cette modulation, qui peut être active (due à la modulation d'un flux externe par exemple) ou passive (causée par la génération d'harmoniques grâce à la non-linéarité), permet d'amplifier une oscillation qui serait déjà dans le résonateur. Un tel résonateur a été utilisé récemment pour amplifier des signaux contenant de l'ordre d'un seul photon [80]. Ce régime est identifié par la zone grisée marquée JPA (pour *Josephson parametric amplifier* en anglais) sur la figure 2.3 (b).

Si le décalage réduit est plus grand que Ω_C le résonateur peut alors être bistable si l'amplitude de la pompe est située entre deux amplitudes critiques délimitées par les lignes pointillée verte et pleine rouge sur la figure 2.3 (b). Dans cette zone grisée marquée JBA (pour *Josephson bifurcation amplifier* en anglais), deux états, de faible (L pour *low* en anglais) et de haute (H) amplitudes sont stables et le résonateur est hystérétique. L'amplitude de la réponse (ici par exemple le courant traversant la jonction Josephson) est tracée à la figure 2.3 (a) qui est adaptée de la référence [75]. On note que, dans le régime bistable, il existe une troisième solution pour la réponse du résonateur, indiquée en pointillés, mais celle-ci est instable. Cette bistabilité permet d'utiliser le résonateur dans le régime JBA comme un détecteur de type *échantillonneur bloqueur* (*sample-and-hold* en anglais) pour un qubit, tel que démontré pour plusieurs types de qubits supraconducteurs [81–83] et tel qu'on le verra plus en détail à la section 2.4.5.

Définition 16 (détecteur échantillonneur bloqueur)

On appelle un **détecteur échantillonneur bloqueur** un dispositif de mesure qui,

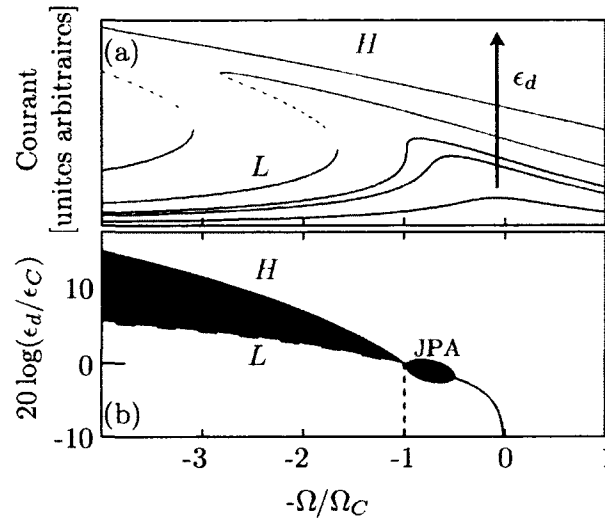


FIGURE 2.3 - Diagramme de stabilité d'un amplificateur Josephson. Figure adaptée de la référence [75]. L et H indiquent respectivement les régions de faible (low) et haute (high) amplitude de réponse. (a) Courant calculé à l'intérieur de la jonction Josephson pour plusieurs valeurs de l'amplitude du signal ϵ_d en fonction du décalage réduit Ω/Ω_C . (b) Diagramme de stabilité de l'amplificateur Josephson. Les régions grisées indiquent le régime d'amplificateur à bifurcation (JBA) et d'amplificateur paramétrique (JPA).

après un temps d'échantillonnage relativement court, se bloque sur un état qui est stable même si le système mesuré change d'état. Il s'agit d'un *sample-and-hold detector* en anglais.

2.2 Qubits supraconducteurs

La première réalisation d'un qubit fabriqué à partir de matériaux supraconducteurs date de 1998. par l'équipe de quantronique du CEA-Saclay [84]. Il s'agissait alors d'une boîte de Cooper, un dispositif formé d'une île supraconductrice isolée d'un côté par une capacité et de l'autre par une jonction Josephson. Les deux états quantiques formant le qubit peuvent alors correspondre à la présence ou l'absence d'une paire de Cooper excédentaire sur l'île supraconductrice ou une superposition de ces états de charge. Depuis, plusieurs autres degrés de liberté quantiques ont été utilisés pour créer divers types de qubits supraconducteurs. On note entre autres la différence de phase supraconductrice à travers la barrière pour les qubits de phase, dont la quantification était testée dès la fin des années 1980 [85], le courant circulant à travers une boucle supraconductrice pour les qubits de flux [86] et des superpositions d'états de charge pour le quantonium [87]. Je me

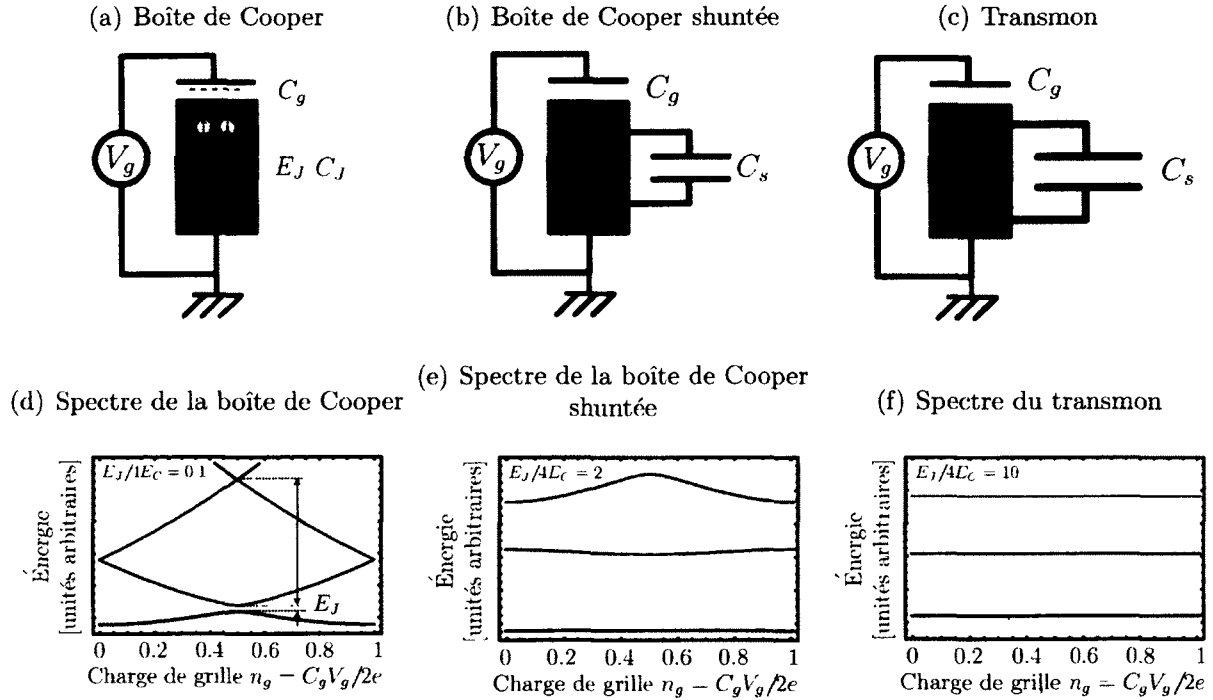


FIGURE 2.4 – Schémas et spectres d'énergie d'une boîte de Cooper, d'une boîte de Cooper shuntée et d'un transmon. En (a), (b) et (c) : représentations schématiques des boîtes de Cooper régulière et shuntée et d'un transmon. En (d), (e) et (f) : spectres d'énergie des qubits illustrés en (a), (b) et (c) respectivement.

concentrerai dans cette section sur les qubits de charge que sont la boîte de Cooper [88] et le transmon [89], mais pour plus de détails, on peut se référer aux articles de revues [39–41].

2.2.1 Boîte de Cooper et transmon

Une boîte de Cooper (*Cooper-pair box*, CPB en anglais) est une île supraconductrice isolée d'une part par une capacité et d'autre part par une jonction tunnel [88], tel qu'illustré à la figure 2.4(a). On peut obtenir la description quantique d'un tel dispositif en appliquant les lois de Kirchhoff pour en déduire les équations du mouvement classique, le lagrangien et finalement l'hamiltonien. Pour la procédure détaillée, voir la référence [90]. Une base appropriée pour écrire l'hamiltonien classique est celle du nombre de paires de Cooper sur l'île supraconductrice $\{|N\rangle\}$. Dans cette base, l'hamiltonien de la boîte de

Cooper s'écrit [3]

$$H_{\text{CPB}} = \sum_N 4E_C(N - n_g)^2 |N\rangle \langle N| - \frac{E_J(\Phi)}{2} (|N\rangle \langle N+1| + \text{c.h.}), \quad (2.4)$$

où c.h. est le conjugué hermitique, $E_C = e^2/2C_\Sigma$ est l'énergie de charge, e est la charge de l'électron, $C_\Sigma = C_J + C_g$ est la capacité totale de la boîte où C_g est la capacité de grille et C_J est la capacité de la jonction Josephson, $E_J(\Phi)$ est l'énergie Josephson de la jonction et $n_g = C_g V_g/2e$ est la charge de grille sans unité qui dépend de la capacité de grille et de la tension de grille V_g . Dans l'expression ci-dessus, on a supposé que l'énergie Josephson pouvait dépendre d'un flux externe Φ . Ce sera le cas si par exemple la jonction est remplacée par un SQUID. Pour un SQUID symétrique dont les deux jonctions ont une énergie Josephson E_J , on obtient alors

$$H'_{\text{CPB}} = \sum_N 4E_C(N - n_g)^2 |N\rangle \langle N| - \frac{E_J}{2} \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) (|N\rangle \langle N+1| + \text{c.h.}), \quad (2.5)$$

où $\Phi_0 = h/2e$ est le quantum de flux.

On peut diagonaliser l'hamiltonien (2.4) et obtenir son spectre en fonction de la charge de grille n_g . Ce spectre est tracé pour la boîte de Cooper à la figure 2.4(d). Comme on peut le voir, la boîte de Cooper, dans le régime $E_J \ll E_C$ est un bon système à deux niveaux, en particulier si on biaise la tension de grille de sorte à avoir $n_g = 0.5$. À ce point, les états quantiques sont les superpositions symétriques et anti-symétriques d'un état à N paires de Cooper et d'un état à $N+1$ paires de Cooper sur l'île supraconductrice. Ainsi, on a $|0\rangle = (|N+1\rangle - |N\rangle)/\sqrt{2}$ et $|1\rangle = (|N+1\rangle + |N\rangle)/\sqrt{2}$. On note que le spectre est périodique en nombres entiers de paires de Cooper. Le principal problème de la boîte de Cooper est qu'elle est très susceptible au bruit dans la tension de grille (ou de façon équivalente dans la charge de grille).

Il est possible de diminuer la sensibilité au bruit de charge de la boîte de Cooper en la shuntant avec une capacité, tel qu'illustré à la figure 2.4(b). Ce faisant, on augmente la capacité et diminue l'énergie de charge E_C , ce qui modifie le spectre d'énergie. Tel qu'illustré au graphique 2.4(e), cela diminue l'anharmonicité du spectre, mais aussi la dépendance des niveaux d'énergie par rapport au bruit de charge. Lorsqu'on augmente davantage la capacité de shunt comme à la figure 2.4(c), de sorte à avoir $E_J \gg E_C$, on entre dans le régime du transmon [89, 91]. À cause de la prédominance du terme

hors-diagonal dans l'hamiltonien (2.4). les états propres dans ce régime ne sont plus des superpositions de N et $N + 1$ paires de Cooper, mais des superpositions d'un grand nombre d'états de paires.

Comme on peut le voir avec le spectre illustré à la figure 2.4(f), les niveaux d'énergie du transmon sont à toutes fins pratiques insensibles au bruit de charge. Cette simple astuce a permis de diminuer la susceptibilité au bruit de charge des qubits de charge par plusieurs ordres de grandeur, faisant ainsi passer le temps de déphasage T_2 de quelques centaines de nano-secondes à quelques micro-secondes [92]. Le prix à payer pour cette insensibilité au bruit de charge est cependant que l'anharmonicité des niveaux est elle aussi grandement réduite. Heureusement, la sensibilité au bruit de charge diminue de façon exponentielle avec le ratio E_J/E_C alors que l'anharmonicité diminue selon une loi polynomiale de faible degré [89]. Cela laisse un régime appréciable de paramètres où l'anharmonicité est de l'ordre de quelques centaines de mega-hertz, suffisante pour utiliser le transmon comme un qubit.

Néanmoins, la structure à plusieurs niveaux du transmon change de façon quantitative et qualitative la physique du système. Dans cette optique, c'est sur la physique d'un système à plusieurs niveaux couplé à un résonateur non linéaire que je me suis concentré dans cette thèse. On note que malgré que le projet de recherche ait été réalisé avec le transmon en tête, les résultats peuvent s'appliquer ou être adaptés à d'autres qubits supraconducteurs à plusieurs niveaux tels que le qubit de flux à basse impédance [93] et le qubit à couplage ajustable (*tunable coupling qubit* ou TCQ en anglais) [94, 95] ainsi qu'aux qubits à deux niveaux qui peuvent être couplés longitudinalement [i.e. $\sigma_x(a^\dagger + a)$] au résonateur tels les qubits de phase [96] ou de flux [77, 97]. Ils ne s'appliquent cependant pas directement à ces mêmes qubits s'ils sont couplés transversalement au résonateur [i.e. $\sigma_z(a^\dagger + a)$].

2.3 Électrodynamique quantique en circuit

L'électrodynamique quantique en cavité est réalisée dans un circuit électrique en couplant capacitivement un qubit supraconducteur, jouant le rôle d'un atome artificiel, à un résonateur coplanaire [3, 98], jouant le rôle de la cavité. Contrairement à la version en cavité de l'électrodynamique quantique où les atomes sont en mouvement, l'atome artificiel est ici fixé. Son couplage au résonateur est donc constant et la durée des expériences n'est pas limitée par le temps de transit de l'atome. Un schéma d'un transmon

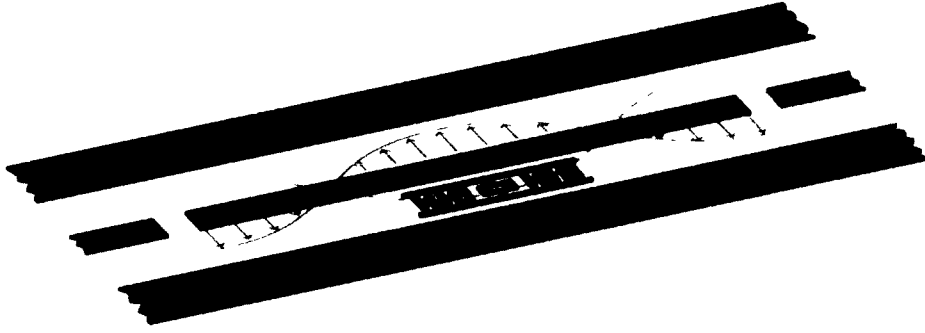


FIGURE 2.5 – Schéma d'un résonateur non linéaire couplé à un transmon. Un transmon composé d'un SQUID et d'une capacité interdigitée (en vert pâle) est couplé capacitivement à un résonateur rendu non linéaire par l'insertion d'une jonction Josephson (vert foncé) dans le conducteur central.

couplé capacitivement à un résonateur rendu non linéaire par l'insertion d'une jonction Josephson dans le conducteur central est présenté à la figure 2.5.

Le couplage entre le transmon et le résonateur est un couplage dipolaire électrique. Classiquement, il est proportionnel au moment dipolaire du transmon — qui origine de la séparation spatiale des charges électriques de chaque côté de l'élément Josephson — et au champ électrique du résonateur. Quantiquement, le moment dipolaire devient proportionnel à l'opérateur de charge N du transmon et le champ électrique est proportionnel à $a^\dagger + a$. La constante de couplage transmon-résonateur, pour la transition entre les états propres $|i\rangle$ et $|j\rangle$ du transmon, est alors donnée par [89]

$$g_{i,j} = 2e \frac{C_g}{C_\Sigma} V_{\text{rms}}^0 \langle i | \hat{N} | j \rangle = g_{j,i}^* \quad (2.6)$$

où $\hat{N} = \sum_N N |N\rangle \langle N|$ est l'opérateur de charge et V_{rms}^0 est la valeur moyenne quadratique (ou *RMS*, *root mean square* en anglais) de la tension moyenne due aux fluctuations du vide à la position du transmon. Cette constante de couplage apparaîtra directement dans l'hamiltonien d'interaction H_I défini ci-dessous. Pour calculer cette constante, le transmon est supposé ponctuel par rapport aux variations spatiales de champ électrique. Typiquement, les constantes devant les éléments de matrice sont difficiles à obtenir avec précision expérimentalement. Le couplage $g_{1,0}$ peut cependant être obtenu par une expérience de spectroscopie dans laquelle la fréquence du qubit est ajustée en résonance avec la fréquence du résonateur en variant le flux Φ . Le couplage entre les deux lève alors la

dégénérescence, tel qu'illustré à la figure 2.6(a), ce qui permet de déterminer la valeur de $g_{1,0}$ [98]. Comme la constante de proportionnalité est la même pour toutes les transitions, il est alors possible de déterminer $g_{i,j}$ à partir des éléments de matrice.

Pour un transmon, les règles de sélection interdisent presque toutes les transitions $|j\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ sauf celles pour lesquelles $j = i \pm 1$. Les éléments de matrice dans la limite du transmon sont ainsi typiquement tels que les couplages $g_{i+2,i}$ sont plusieurs ordres de grandeur plus faibles que $g_{i+1,i}$, et les couplages $g_{i+3,i}$ sont environ 10 fois plus faibles que $g_{i+1,i}$. Dans une très bonne approximation, on peut ainsi supposer que seules les transitions entre deux niveaux adjacents en énergie sont permises par l'échange d'un seul photon avec le résonateur.

On peut diagonaliser exactement l'hamiltonien (2.5) et calculer les constantes de couplage à l'aide des éléments de matrice tel que prescrit par l'équation (2.6). On peut ensuite écrire l'hamiltonien du qubit dans la base de ses états propres

$$H_q = \sum_{i=0}^{M-1} \omega_i \Pi_{i,i} \equiv \Pi_\omega, \quad (2.7)$$

où ω_i est la fréquence correspondant à l'état propre $|i\rangle$ du qubit, $\Pi_{i,j} \equiv |i\rangle \langle j|$ et où j'ai introduit la notation raccourcie

$$\Pi_x \equiv \sum_{i=0}^{M-1} x_i \Pi_{i,i}, \quad (2.8)$$

que j'utiliserai à plusieurs occasions dans cette thèse. Dans ces expressions, M est le nombre de niveaux que l'on considère pour le qubit. On obtient aussi l'hamiltonien d'interaction

$$H_I = \sum_{i=0}^{M-2} g_i (a^\dagger + a) (\Pi_{i,i+1} + \Pi_{i+1,i}), \quad (2.9)$$

où j'ai laissé tombé le deuxième indice de la constante de couplage et défini $g_i \equiv g_{i+1,i}$. L'hamiltonien total décrivant le qubit, le résonateur et leur interaction est alors similaire à l'hamiltonien de Rabi (1.24), mais il est généralisé à plusieurs niveaux et s'écrit

$$\begin{aligned} H_s &= H_r + H_q + H_I + H_d, \\ &= \omega_r a^\dagger a + \frac{K}{2} a^\dagger{}^2 a^2 + \frac{K'}{a^\dagger} a^3 + \Pi_\omega + \sum_{i=0}^{M-2} g_i (a^\dagger + a) (\Pi_{i,i+1} + \Pi_{i+1,i}) \\ &\quad + \sum_d \epsilon_d(t) e^{-i\omega_d t} a^\dagger + \epsilon_d^*(t) e^{i\omega_d t} a \end{aligned} \quad (2.10)$$

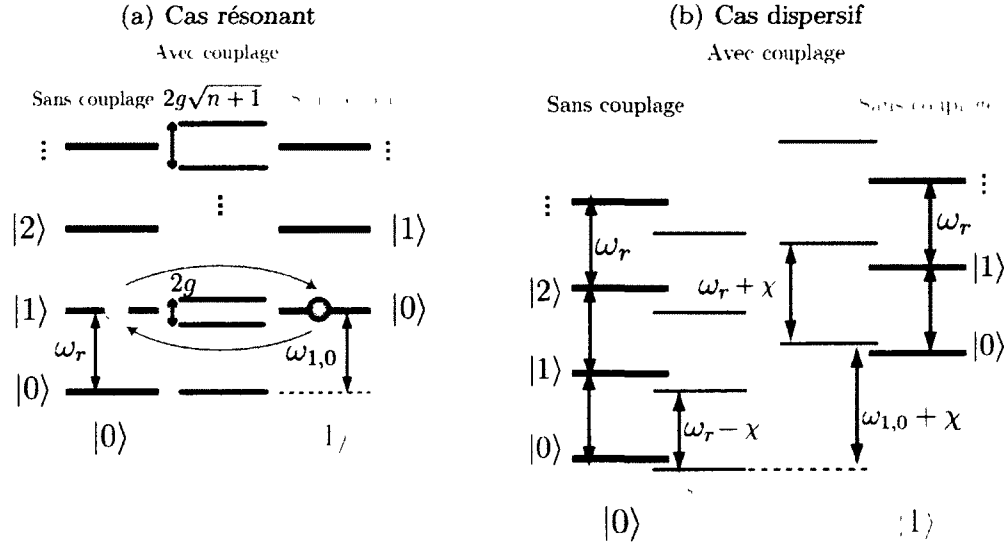


FIGURE 2.6 – Échelles d'énergie de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings (a) Dans le cas résonnant. (b) Dans le cas dispersif. Pour les deux sous-figures, le nombre de photons du résonateur augmente de bas en haut, et l'état fondamental (excité) du qubit est à gauche (à droite). La fréquence $\omega_{i,j}$ est définie comme $\omega_i - \omega_j$.

où H_r est donné à l'équation (2.2) et où

$$H_d = \sum_d \epsilon_d(t) e^{-i\omega_d t} a^\dagger + \epsilon_d^*(t) e^{i\omega_d t} a, \quad (2.11)$$

est l'hamiltonien représentant les différents signaux d'excitation sur le résonateur, d'amplitude ϵ_d et de fréquence ω_d .

2.3.1 Régime dispersif

Le régime dans lequel beaucoup d'expériences d'électrodynamique quantique en circuit sont réalisées est le régime dispersif. C'est aussi le régime dans lequel j'ai obtenu la majeure partie des résultats présentés dans cette thèse.

Définition 17 (régime dispersif)

Le **régime dispersif** est un régime de paramètres pour lequel le couplage entre l'atome artificiel et le résonateur est beaucoup plus petit que leur différence de fréquence, i.e. $g_{i,j} \ll |\omega_{i,j} - \omega_r|$.

Dans ce régime, il n'y a aucun échange réel d'énergie entre le qubit et le résonateur et les états propres du système combiné sont très près des états à couplage nul. Le couplage crée plutôt des décalages de fréquence tels les décalages de Lamb et de Stark pour un atome [7]. On peut ainsi traiter le couplage entre l'atome et le résonateur en théorie de perturbation. Pour un qubit à deux niveaux, on peut montrer que l'hamiltonien approximativement diagonalisé au deuxième ordre en théorie de perturbation devient dans ce régime [3, 50]

$$\begin{aligned} H_{\text{dispersif}} &= (\omega_r + \chi\sigma_z)a^\dagger a + \frac{\omega_{1,0} + \chi}{2}\sigma_z, \\ &= \omega_r a^\dagger a + \frac{\omega_{1,0} + \chi + 2\chi a^\dagger a}{2}\sigma_z, \end{aligned} \quad (2.12)$$

où $\chi = g_{1,0}^2/(\omega_{1,0} - \omega_r)$ est le décalage dispersif. Les différents décalages sont illustrés à la figure 2.6(b).

Pour interpréter l'hamiltonien dispersif, on peut alors prendre deux points de vue correspondant aux deux lignes de l'équation (2.12). À la première ligne, on peut constater que la fréquence du résonateur est décalée de $\pm\chi$ selon l'état du qubit. Peu importe le type de mesure utilisée, c'est ce décalage qui, ultimement, permet de lire l'état d'un qubit via la réponse de la cavité à un signal d'excitation.

Définition 18 (décalage dispersif)

On appelle **décalage dispersif** du résonateur le changement de fréquence du résonateur dépendant de l'état du qubit dans le régime dispersif. En anglais, ce décalage est appelé *cavity pull*.

D'un deuxième point de vue, on peut interpréter ce même décalage dispersif comme un décalage de la fréquence du qubit proportionnel au nombre de photons dans le résonateur, tel qu'écrit à la deuxième ligne. Il s'agit du décalage de Stark [99].

Définition 19 (décalage de Stark)

On appelle le **décalage de Stark** le changement de fréquence des états du qubit dû à une population de photons dans le résonateur.

Finalement, le qubit a aussi un décalage de fréquence constant χ indépendant du nombre de photons dans le résonateur. Il s'agit du décalage de Lamb [100] dû aux fluctuations quantiques du champ électromagnétique à l'intérieur du résonateur.

Définition 20 (décalage de Lamb)

On appelle le **décalage de Lamb** le changement de fréquence des états du qubit indépendant de la population de photons dans le résonateur.

Ces différents décalages peuvent être utilisés pour mesurer l'état de l'atome à partir du champ électromagnétique ou au contraire pour sonder le champ électromagnétique à partir de l'état de l'atome. J'explorerai davantage ces concepts aux chapitres 6 et 7. Dans la prochaine sous-section, je survolerai quelques réalisations expérimentales récentes dans le domaine de l'électrodynamique quantique en circuit.

2.3.2 Réalisations récentes

Afin de mettre en contexte les résultats obtenus dans cette thèse, il est intéressant d'illustrer le potentiel de l'architecture d'électrodynamique quantique en circuit. Ainsi, avant de positionner le problème de la mesure auquel je me suis attaqué dans cette thèse, je survole dans cette sous-section quelques réalisations récentes par différents groupes.

Résolution du clivage de nombre dans la fréquence du qubit

Une expérience qui illustre bien comment le qubit peut être utilisé pour sonder le champ à l'intérieur de la cavité a été réalisée en 2007 par l'équipe expérimentale de l'Université de Yale [101]. Dans la limite où $\chi > \kappa, \gamma, \gamma_\varphi$, selon l'hamiltonien dispersif (2.12), le décalage de la fréquence du qubit dû à chaque photon est plus grand que les largeurs

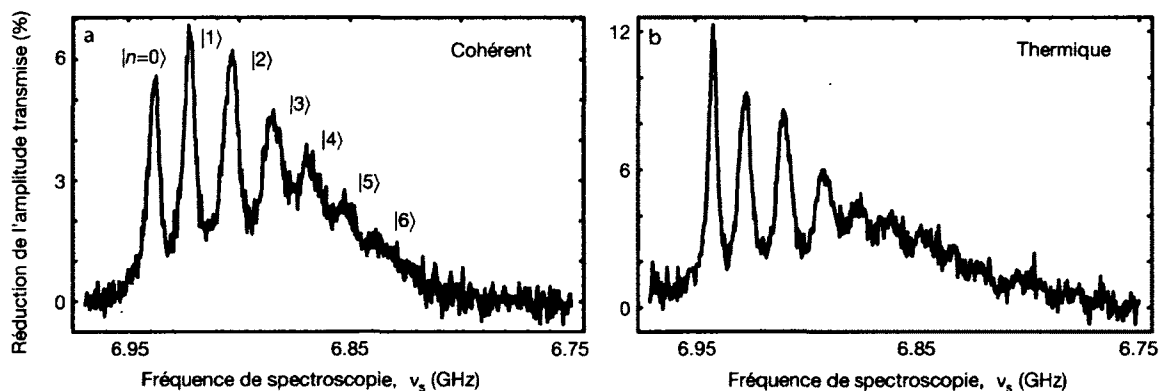


FIGURE 2.7 – Résolution du clivage de nombre dans la fréquence du qubit. (a) Pour un état cohérent avec $\bar{n} = 3$. (b) Pour un état thermique produit par du bruit blanc à l'entrée du résonateur avec le même nombre moyen de photons. J'ai francisé cette figure tirée de [101].

de raie du résonateur et du qubit. Il devrait ainsi être possible de résoudre ces différentes fréquences. C'est ce qu'a réussi l'équipe de Yale. Ainsi, pendant qu'ils envoyaient dans le résonateur soit un signal cohérent, soit du bruit blanc reproduisant un état thermique, ils ont tenté d'exciter le qubit avec un signal de spectroscopie près de la fréquence du qubit. Si le qubit est renversé, le décalage dispersif du résonateur change de signe et une diminution du signal à la sortie du résonateur est observée. Leurs résultats sont présentés à la figure 2.7, pour un signal cohérent en (a) et pour du bruit blanc en (b). Bien que le lien avec la distribution de photon ne soit pas direct, on peut voir une distribution s'approchant d'une poissonnienne $P(n) = e^{-\bar{n}}\bar{n}^n/n!$ pour l'état cohérent et une distribution s'approchant d'une distribution de Bose-Einstein $P(n) = \bar{n}^n/(\bar{n} + 1)^{n+1}$ pour l'état thermique. Dans ces deux expressions, \bar{n} est le nombre moyen de photons (c'est-à-dire trois pour les deux graphiques présentés) et n est le nombre de photons de l'état de Fock pour lequel on exprime la probabilité.

Génération de superpositions arbitraires d'états de Fock

Une expérience qui démontre bien le contrôle qu'il est possible d'atteindre dans le système d'électrodynamique quantique en circuit est la génération de superpositions arbitraires d'états de Fock réalisée par l'équipe de l'université de Californie à Santa Barbara [102]. Dans cette expérience, un qubit à fréquence ajustable est excité, puis mis en

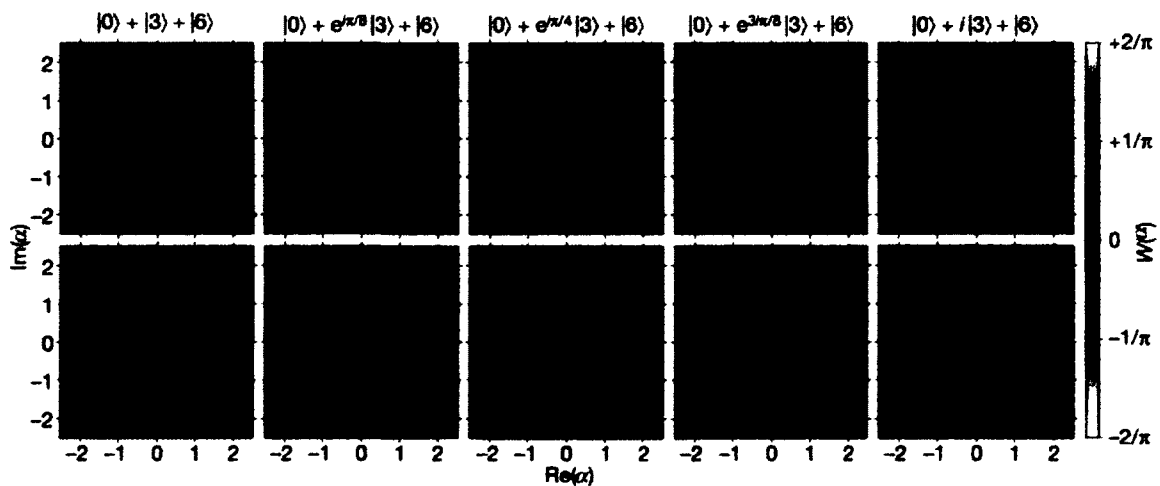


FIGURE 2.8 – Fonctions de Wigner d'états arbitraires. Les panneaux du haut sont les fonctions de Wigner théoriques pour les états indiqués au-dessus. Les panneaux du bas sont les fonctions de Wigner reconstruites expérimentalement. Cette figure est tirée de la référence [102].

résonance avec le résonateur afin de transférer l'excitation vers le résonateur. En répétant cette procédure à plusieurs reprises, cette équipe a réussi à créer des superpositions arbitraires d'états de Fock, un photon à la fois. La phase relative des différents états de Fock peut être ajustée en contrôlant les durées des pulse de contrôle et les temps d'attente. Des états arbitraires jusqu'à un maximum d'environ 10 photons ont été réalisés, ce nombre étant limité par la décohérence. Après la génération des états du champ EM, ils ont reconstruit sa fonction de Wigner, une fonction d'espace de phase similaire à la fonction Q introduite à la section 1.2.1. Ces résultats sont présentés à la figure 2.8 où les fonctions de Wigner expérimentales (panneaux du bas) sont comparées aux fonctions de Wigner théoriques (panneaux du haut).

Vers un processeur quantique supraconducteur à plusieurs qubits

Trois étapes ont été franchies récemment vers la réalisation d'un processeur quantique à plusieurs qubits. Tout d'abord, en 2007, deux équipes, l'une de Yale [103] et l'autre du NIST Boulder [104], ont réussi à coupler deux qubits en utilisant le résonateur comme un bus quantique. En utilisant soit des qubits de phase (NIST) ou des transmons (Yale), les deux équipes ont ainsi réussi à démontrer l'échange d'excitations cohérentes entre les deux qubits.

Plus récemment, l'équipe de Yale a réussi à implémenter deux algorithmes quantiques dans un processeur quantique supraconducteur [25] à deux qubits. Ils ont ainsi réalisé l'algorithme de recherche de Grover [24] discuté à la section 1.1.3, ainsi que l'algorithme de Deutsch-Jozsa [105] qui permet d'évaluer si une fonction $f(x \in \{0, 1\})$ est constante ou balancée (i.e. si elle vaut toujours 1 ou 0 ou bien si elle vaut 0 ou 1 avec des probabilités égales). L'équipe de Saclay a aussi récemment réalisé un processeur à deux transmons chacun doté d'un dispositif de mesure monofrappe [106].

Enfin, un pas vers l'extensibilité de l'architecture d'électrodynamique quantique en circuit a été réalisé par l'équipe de Santa Barbara avec la réalisation de circuits contenant plusieurs résonateurs et plusieurs qubits. Ils ont ainsi réalisé le jeu des coquilles — dans lequel une bille est cachée sous l'une de trois coquilles et il faut déterminer sa position — dans un circuit composé de trois résonateurs et deux qubits. Dans leur expérience, un photon joue le rôle de la bille et les résonateurs jouent le rôle des coquilles [96].

Augmentation des temps de cohérence et de relaxation

L'un des obstacles à la réalisation d'un processeur quantique avec des qubits supraconducteurs est leurs temps de cohérence et de relaxation, limités à quelques micro-secondes. Il faut comparer ces temps de vie aux temps d'opération de quelques unes à quelques centaines de nano-secondes des portes logiques. Un grand pas a été franchi récemment par l'équipe de Yale [107] qui a réalisé, de façon reproductible, des transmons dont les temps de vie et de cohérence sont de l'ordre de quelques dizaines de micro-secondes. Ils ont utilisé pour ce faire une cavité tridimensionnelle machinée plutôt qu'un résonateur coplanaire micro-fabriquée. Puisque le champ électrique est ainsi réduit par l'augmentation du volume, ils ont aussi augmenté le moment dipolaire du qubit en lui attachant des antennes, permettant ainsi de garder un couplage fort entre le qubit et la cavité. Cette augmentation de volume du résonateur et du qubit se traduit par une augmentation du rapport volume sur surface, diminuant ainsi l'effet des défauts sur la surface qui seraient potentiellement un facteur limitant pour les qubits supraconducteurs [108]. Ceci suggère donc une voie à explorer pour améliorer les propriétés des qubits supraconducteurs de façon significative.

2.4 Mesure

Les photons micro-ondes étant environ un demi-million de fois moins énergétiques que les photons optiques, leur détection pose des défis particuliers qui n'apparaissent pas dans le régime optique où un seul photon possède suffisamment d'énergie pour, par exemple, déclencher une diode à avalanche. Ce type de dispositif détectant des photons uniques n'est donc pas disponible dans le domaine des micro-ondes.

2.4.1 Mesures homodyne et hétérodyne

À la figure 2.9, je représente de façon schématique le circuit de mesure pour un dispositif d'électrodynamique quantique en circuit. Le circuit est connecté à l'entrée (à gauche) à une source radio-fréquence (RF), et à la sortie, à un circulateur (symbole circulaire avec trois flèches), puis à un amplificateur. Un circulateur est un dispositif à trois (parfois quatre) ports brisant la symétrie sous inversion du temps et redirigeant le signal d'un port au port suivant, dans le sens indiqué par les flèches. Ainsi, selon le schéma de la figure 2.9, le signal provenant de la source est envoyé à l'entrée du circuit,

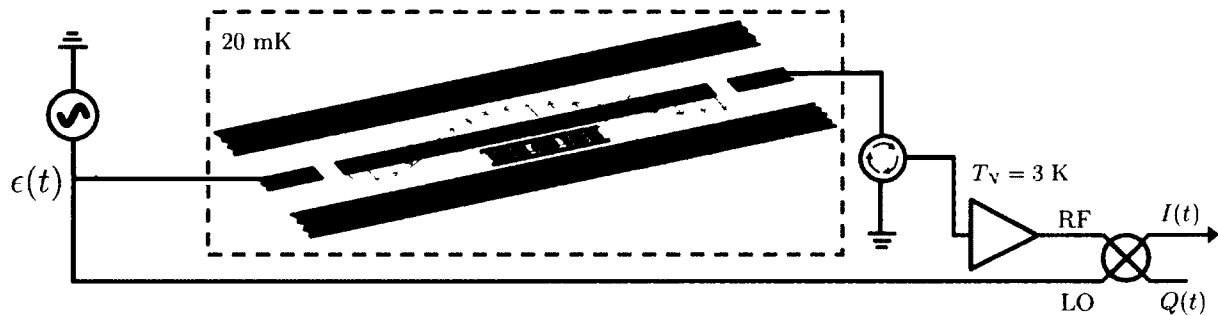


FIGURE 2.9 – Représentation schématique d'un circuit de mesure. Le symbole d'un cercle avec trois flèches est un circulateur, un dispositif à trois (parfois quatre) ports brisant la symétrie sous inversion du temps et qui redirige le signal d'un port au port suivant, dans le sens indiqué par les flèches. Le signal de sorti RF est amplifié par un HEMT (*high electron mobility transistor*) et multiplié par le signal de référence LO. La température de bruit [définie à l'équation Eq. (2.13)] d'un HEMT est typiquement d'environ 3 K.

le signal réfléchi du circuit est envoyé à la masse, et le signal provenant de la masse est envoyé à la source.

Dans la figure 2.9, le signal de la source RF est séparé en deux afin d'avoir une référence (oscillateur local, ou LO en anglais). Le signal transmis à travers le résonateur est amplifié par un amplificateur commercial, typiquement un HEMT (*high electron mobility transistor*) [109] et le signal amplifié est multiplié par le signal de l'oscillateur local. On obtient alors une *mesure homodyne* ou une *mesure hétérodyne* selon que le signal de référence est à la même fréquence ou à une fréquence différente du signal mesuré.

Définition 21 (mesure homodyne)

On appelle une **mesure homodyne** une mesure dans laquelle le signal mesuré est multiplié par un signal de référence à la même fréquence.

Définition 22 (mesure hétérodyne)

On appelle une **mesure hétérodyne** une mesure dans laquelle le signal mesuré est multiplié par un signal de référence à une fréquence différente.

Dans le cas d'une mesure homodyne, le signal après le croisement avec la référence est un signal continu dont l'amplitude correspond à la quadrature du signal RF qui est en phase avec le signal LO. Dans le cas d'une mesure hétérodyne, le signal après le croisement oscille plutôt à la différence de fréquence entre la référence et le signal mesuré, ce qui permet

de s'affranchir d'un éventuel biais continu. Dans les deux cas, les deux quadratures du signal peuvent être mesurées en séparant le signal mesuré puis en croisant chacun des deux signaux avec deux signaux de référence en quadrature. L'amplitude du signal de chaque quadrature est alors divisée par la racine carrée de deux (la puissance, proportionnelle à l'amplitude au carrée, est divisée par deux).

2.4.2 Amplification et limite quantique standard

La mécanique quantique impose certaines limites à l'amplification de signaux. L'une d'elle est qu'un amplificateur conservant la phase — c'est-à-dire que les deux quadratures du signal sont amplifiées de la même façon — doit rajouter au minimum un demi quantum de bruit [110–112]. Cette limitation survient comme une conséquence de la conservation des relations de commutation des modes bosoniques. En effet, supposons qu'un signal d'entrée est représenté par l'opérateur bosonique a_I et qu'il est amplifié vers un signal de sortie représenté par l'opérateur bosonique $b_O = Ga_I$. Dans ce cas, les relations de commutation $[a_I, a_I^\dagger] = [b_O, b_O^\dagger] = 1$ ne peuvent être conservées que si $G = 1$, c'est à dire s'il n'y a pas d'amplification. La seule façon d'avoir amplification tout en conservant les relations de commutation est alors d'ajouter un troisième mode c , qui a au minimum un bruit correspondant aux fluctuations quantiques du vide, soit un demi quantum d'énergie. Cette limite est appelée la limite quantique standard (*standard quantum limit* en anglais). Elle peut être dépassée si l'une des quadratures du signal est amplifiée alors que l'autre est atténuée [112]. Pour une référence plus récente sur ce sujet, on peut se référer à la référence [113].

On peut quantifier le bruit ajouté par un amplificateur par le nombre de quanta d'énergie qu'il ajoute en bruit ou par sa température de bruit T_N . Il existe différentes définitions de la température de bruit selon les auteurs, mais lorsque l'amplificateur est loin de la limite quantique, on a dans tous les cas

$$T_N \approx \frac{A\hbar\omega_I}{k_B}, \quad (2.13)$$

où k_B est la constante de Boltzmann, ω_I est la fréquence du mode d'entrée a_I et $A \geq 1/2$ est le nombre de quanta de bruit ajouté par l'amplificateur. Tel qu'indiqué sur la figure 2.9, la température de bruit typique d'un HEMT est d'environ 3 K, correspondant à un bruit ajouté A de quelques dizaines de quanta d'énergie pour une fréquence d'entrée ω_I de

l'ordre du gigahertz. Les amplificateurs commerciaux sont donc assez loin de la limite quantique. Ainsi, le rapport signal-sur-bruit d'une mesure monofrappe pour un signal de quelques photons est faible. Pour les mesures en électrodynamique quantique en circuit, cela implique que les expériences doivent donc être répétées quelques dizaines à quelques centaines de milliers de fois afin d'améliorer le rapport signal-sur-bruit.

2.4.3 Limite quantique sur la rétroaction

La mécanique quantique impose aussi une limite sur la rétroaction minimale causée par une mesure. En effet, étant donné la relation d'indétermination d'Heisenberg, une mesure d'un système quantique doit nécessairement entraîner une perte d'information sur la quantité conjuguée. Si la mesure n'est pas projective, on peut alors exprimer la relation entre le taux de déphasage induit par la mesure $\Gamma_{\varphi,m}$ et le taux de mesure Γ_m auquel on acquiert l'information par [113]

$$\Gamma_{\varphi,m} \geq \Gamma_m/2. \quad (2.14)$$

Dans le cas d'une mesure de l'état d'un qubit dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, cette rétroaction se traduit par du déphasage, soit la perte de l'information de phase entre ces deux états. Ce déphasage peut être observé expérimentalement en réalisant la spectroscopie du qubit pendant qu'il est soumis au champ électromagnétique de mesure. Le déphasage induit

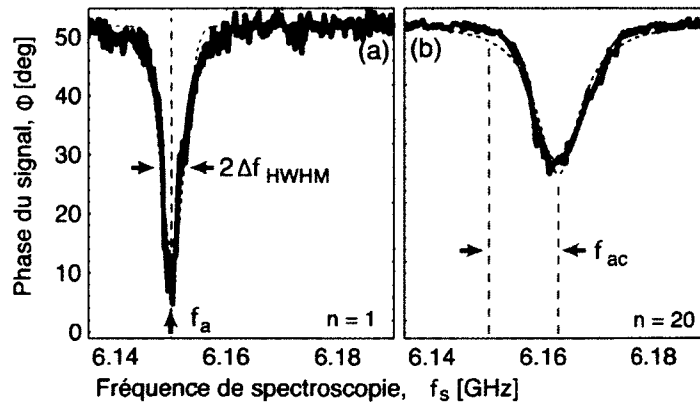


FIGURE 2.10 – Spectroscopie du qubit lorsqu'il est couplé à un résonateur linéaire peuplé avec des états cohérents comportant $\bar{n} = 1$ (a) et $\bar{n} = 20$ photons. J'ai francisé cette figure tirée de [99].

par la mesure sera alors visible comme un élargissement de la raie de spectroscopie. C'est ce qui a été mesuré expérimentalement par Schuster *et al.* [99] pour produire la figure que j'ai francisée et reproduite à la figure 2.10. Cette figure montre le décalage de Stark, mais aussi l'élargissement de la raie de spectroscopie du qubit lorsque le champ électromagnétique intra-résonateur contient davantage de photons. Cette figure est l'équivalent de la figure 2.7, où chaque photon correspond à un décalage de la fréquence du qubit différent [voir l'hamiltonien dispersif, Eq. (2.12)], mais dans un régime où le décalage de fréquence est insuffisant pour être résolu. Comme les états du champ électromagnétique sont des états cohérents qui présentent une distribution de nombre de photons, le déphasage induit par la mesure peut être interprété comme une conséquence des fluctuations de fréquence du qubit causée par le bruit de grenaille dans le nombre de photons du champ électromagnétique. Une autre interprétation, en terme d'états pointeurs du champ électromagnétique, sera introduite au chapitre 5.

2.4.4 Mesure dispersive

On a vu aux sections précédentes de quelle façon le signal à la sortie du résonateur est amplifié, puis croisé avec une référence. ainsi que les limites imposées par la mécanique quantique. On s'intéresse maintenant à la façon dont le champ électromagnétique du résonateur transporte de l'information à propos de l'état du qubit. La mesure dispersive est basée sur l'hamiltonien dispersif (2.12) que je réécris ici

$$H_{\text{dispersif}} = (\omega_r + \chi\sigma_z)a^\dagger a + \frac{\tilde{\omega}_{1,0}}{2}\sigma_z, \quad (2.15)$$

où j'ai inclus le décalage de Lamb dans la fréquence du qubit modifiée $\tilde{\omega}_{1,0}$. Puisque la fréquence du résonateur comprend un décalage dispersif dépendant de l'état du qubit, la transmission d'un signal à travers le résonateur présenterait deux pics séparés par 2χ , tel qu'illustré à la figure 2.11. Si l'on mesure avec un signal dont la fréquence est située entre $\omega_r \pm \chi$, l'amplitude transmise sera la même peu importe l'état du qubit. L'information sera alors dans la phase du signal par rapport au signal de référence. Cette phase prendra deux valeurs très différentes, environ $\pm 2\chi/\kappa$.

Comme chaque photon contient de l'information sur la fréquence du résonateur, on pourrait penser qu'il est possible d'obtenir un signal à la sortie du résonateur (et donc à l'entrée de l'amplificateur) aussi fort que désiré simplement en augmentant l'amplitude

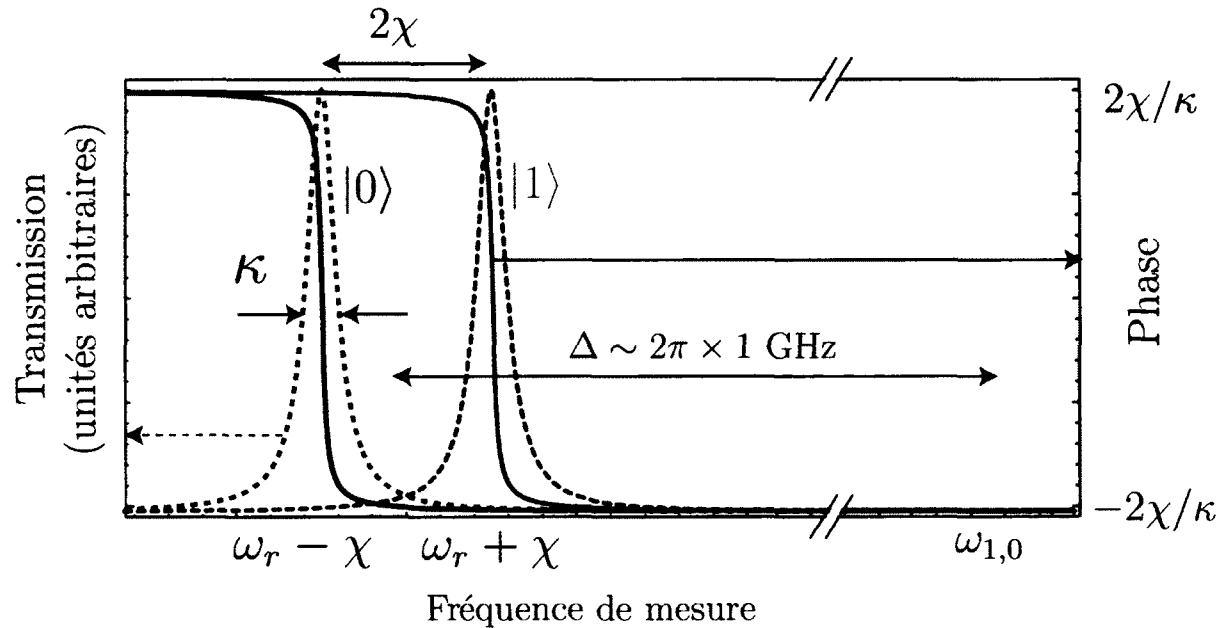


FIGURE 2.11 – Réponse d’un résonateur pour une mesure dispersive. Les courbes en bleu (rouge) sont pour l’état fondamental (excité) $|0\rangle$ ($|1\rangle$). Les courbes pointillées sont la transmission (axe de gauche) et les courbes pleines sont la phase (axe de droite).

— le nombre de photons — du signal d’entrée. On obtiendrait ainsi un très bon rapport signal-sur-bruit. Cependant, l’hamiltonien dispersif ci-dessus n’est valide que lorsque le nombre de photons à l’intérieur du résonateur est beaucoup plus faible que le nombre de photons critique $n_{\text{crit.}} = 4\Delta^2/g^2 = 4(\omega_a - \omega_r)^2/g^2$. Au-delà, notre équipe a montré dans le cadre de ma maîtrise que le déphasage des états combinés qubit-photon (appelés les états habillés) conduit à de la relaxation supplémentaire ainsi qu’une température effective pour le qubit [114, 115]. Cet effet est appelé le déphasage habillé et est présentement étudié expérimentalement par une équipe de Berkeley [116]. De plus, notre équipe a aussi montré que le décalage dispersif de la fréquence du résonateur $\pm\chi$ est réduit lorsque le nombre de photons augmente, menant à une saturation du rapport signal-sur-bruit à haute puissance [114].

Une autre façon qui permettrait d’améliorer le rapport signal-sur-bruit de la mesure serait de mesurer pendant une plus longue période. Malheureusement, le temps de vie limité des qubits supraconducteurs limite cette période à quelques micro-secondes la plupart du temps. On verra à la prochaine sous-section qu’une mesure par bifurcation permet de contourner ce problème.

2.4.5 Mesure par bifurcation

Une façon d'obtenir une mesure de qubit plus performante est d'utiliser la bifurcation d'un oscillateur non linéaire telle qu'expliquée à la section 2.1.1. Une mesure par bifurcation en électrodynamique quantique en circuit utilise la grande sensibilité d'un oscillateur non linéaire biaisé près du seuil de bifurcation pour discriminer entre les décalages dispersifs associés aux deux états du qubit. Ceci est illustré à la figure 2.12. Le décalage dispersif de la fréquence du résonateur par le qubit déplace légèrement le diagramme de stabilité de l'oscillateur non linéaire tel qu'illustré dans le panneau (b). La mesure consiste à augmenter l'amplitude du signal de mesure jusqu'à ce qu'elle soit située dans la zone grisée du panneau (b), soit au-dessus du seuil de bifurcation $\epsilon_C(0)$ pour l'état $|0\rangle$ du qubit et en-dessous du seuil $\epsilon_C(1)$ pour l'état $|1\rangle$. La réponse du résonateur au signal d'excitation sera alors telle qu'illustrée au panneau (a). Elle aura ainsi une basse

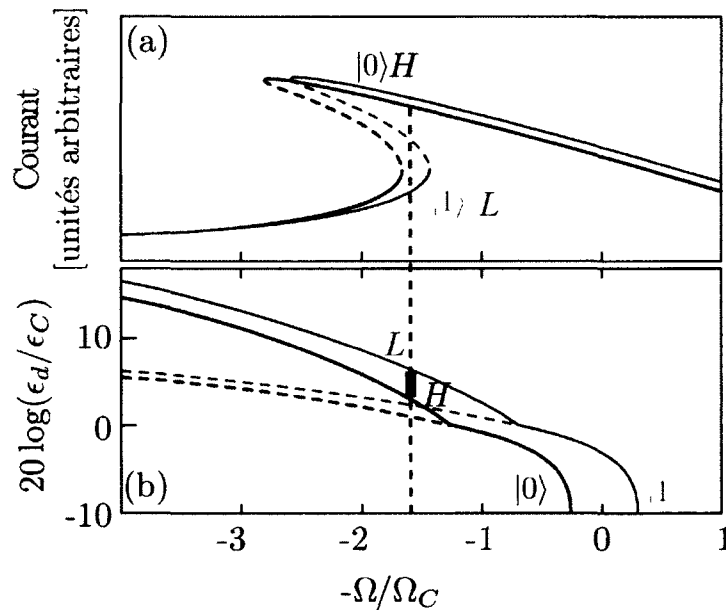


FIGURE 2.12 – Diagramme de stabilité d'une mesure par bifurcation de l'état d'un qubit. (a) Réponse (amplitude du signal par exemple) lorsque le qubit est dans l'état $|0\rangle$ (courbe bleue), ou $|1\rangle$ (courbe rouge). (b) Diagramme de stabilité du résonateur non linéaire lorsque le décalage dispersif de la fréquence du résonateur dû au qubit est inclus, pour l'état $|0\rangle$ (courbe bleue) ou $|1\rangle$ (courbe rouge). La zone grisée indique l'amplitude que le signal de mesure doit avoir pour que le résonateur bifurque dans l'état H pour l'état fondamental $|0\rangle$ mais demeure dans l'état L pour l'état excité $|1\rangle$. La ligne verticale pointillée noire indique la fréquence du signal de mesure en unités réduites.

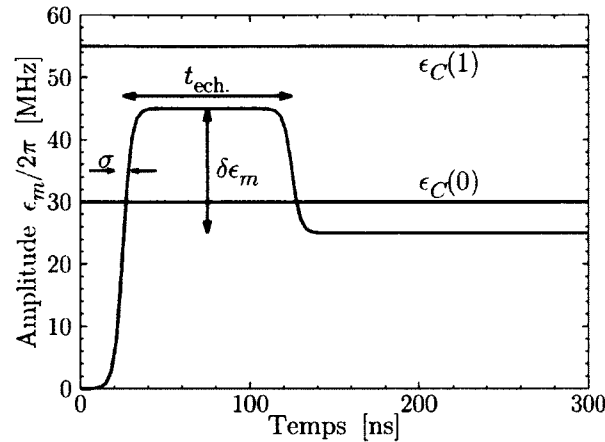


FIGURE 2.13 – Forme temporelle d'un signal de mesure de type échantillonneur-bloqueur.

amplitude (L) pour l'état $|1\rangle$, avec une certaine probabilité de bifurquer vers l'état de haute amplitude H à cause de fluctuations thermiques ou quantiques. Cependant, pour l'état $|0\rangle$, l'état de basse amplitude n'existe pas. Le seul état possible pour le résonateur est alors l'état de haute amplitude H .

Un problème demeure cependant. Même pour l'état $|1\rangle$, le résonateur a une certaine probabilité de bifurquer vers l'états H . Ainsi, si le résonateur est biaisé dans la zone grise pendant un temps trop long de sorte à moyenniser le signal pour avoir un bon rapport signal-sur-bruit, l'état mesuré sera H peu importe quel était l'état original du qubit. Une façon de contourner ce problème est d'utiliser un signal de la forme illustrée à la figure 2.13. Le signal est donc augmenté à une amplitude située entre $\epsilon_C(0)$ et $\epsilon_C(1)$ pour un temps d'échantillonnage $t_{\text{ech.}}$, puis rabaisé à une amplitude insuffisante pour faire bifurquer le résonateur vers l'état H , mais suffisante pour l'y maintenir s'il avait déjà bifurqué. De cette façon, le signal à la sortie du résonateur peut être moyenné pendant un temps plus long que le temps de relaxation du qubit, soit suffisamment longtemps pour obtenir un bon rapport signal-sur-bruit.

Une telle mesure a déjà été réalisée avec l'un ou l'autre des designs de résonateur non linéaire discutés à la section 2.1.1 pour lire l'état d'un qubit de type quantrium [69, 74, 83, 117], un qubit de flux [81] et un transmon [82]. La fidélité de ces mesures, c'est-à-dire la probabilité que le signal de mesure corresponde bien à l'état préparé, est de l'ordre de 90%. Le caractère non-destructif de la mesure a été évalué dans les trois cas [82, 118, 119] en obtenant des fidélités de mesures répétées — c'est à dire la probabilité que deux mesures

successives donnent le même résultat — entre 40% et 90%. Dans le cas du transmon qui nous intéresse ici, la fidélité de la mesure répétée était de 40% [82]. À la fois la fidélité d'une seule mesure et la fidélité de la mesure répétée étaient limitées par la relaxation du qubit pendant la mesure. Ainsi, dans le cas d'une seule mesure, le temps d'échantillonnage de la mesure était du même ordre de grandeur que le temps de relaxation du qubit.

2.5 Problématique

Comme on l'a vu à la section précédente, il reste plusieurs aspects qui peuvent être améliorés dans la mesure de l'état de qubits supraconducteurs en électrodynamique quantique en circuit. C'est à cette problématique que je me suis attaqué dans le cadre de cette thèse. Je commence par présenter les méthodes analytiques que j'ai utilisées au chapitre 3. Je présente ensuite au chapitre 4 le *Sherbrooke QUantum pACKage* (ou *SQUACK*), une librairie de simulation que j'ai développée en collaboration avec l'analyste de calcul du Centre de calcul scientifique de l'Université de Sherbrooke Steve Allen. Cette librairie a été utilisée pour obtenir tous les résultats numériques présentés dans cette thèse et elle est maintenant utilisée par la majorité des membres de notre groupe ainsi que par certains collaborateurs externes, entre autres à l'ETH Zurich.

J'applique ensuite les méthodes analytiques présentées au chapitre 3 afin de développer un modèle réduit au chapitre 5. Ce modèle réduit capture l'essentiel des effets du champ électromagnétique du résonateur non linéaire sur le qubit et vice-versa. Il est obtenu en partant de l'équation maîtresse du système couplé et permet de réduire la description physique à une équation maîtresse pour la matrice densité du qubit seulement et à quelques variables classiques représentant le champ électromagnétique.

Par la suite, au chapitre 6, j'étudie la perturbation du qubit par la mesure dans un résonateur non linéaire. Plusieurs effets, tels le déphasage induit par la mesure [99,120] et le déphasage des états habillés [114,115,121] étaient déjà connus pour un résonateur linéaire. En comparant des résultats numériques et expérimentaux au modèle obtenu au chapitre 5, j'explore dans ce chapitre la façon dont ces effets sont modifiés par la non-linéarité du résonateur. Je montre aussi comment il est possible de les utiliser afin d'étudier les propriétés quantiques du champ intra-résonateur — telle l'existence d'état comprimés — ainsi que comme outil de caractérisation des paramètres du résonateur. Cette comparaison pointue du modèle réduit à des résultats expérimentaux permet d'améliorer notre compréhension du régime de couplage fort avec un résonateur non linéaire.

Finalement, au chapitre 7, j'explore trois façon d'améliorer la mesure de qubits supraconducteurs. Pour ces trois avenues, il s'avère crucial que le qubit supraconducteur soit en fait un système à plusieurs niveaux plutôt qu'un système à deux niveaux. La première avenue consiste à choisir le points d'opération du transmon et du résonateur de façon à optimiser une mesure à faible puissance. La deuxième avenue consiste à utiliser la non-linéarité induite par le qubit sur le résonateur dans un régime de très fort signal de mesure. C'est une méthode qui a été découverte expérimentalement par le groupe expérimental de Yale [122] et expliquée théoriquement de façon simultanée par notre groupe [123] ainsi que par le groupe théorique de Yale [124]. La troisième avenue consiste à utiliser un régime particulier de paramètres dans lequel le décalage dispersif de la fréquence du résonateur causé par le qubit est amplifié. Ce régime pourrait permettre d'accélérer la bifurcation du résonateur et d'améliorer ainsi la fidélité de mesure.

Chapitre 3

Méthodes analytiques

[...] the truly creative principle [of science] resides in mathematics.

Albert Einstein [125]

Tel que l'exprimait Einstein, les outils mathématiques sont la base créative de la compréhension scientifique. Ce sont eux qui nous permettent de modéliser et de comprendre les expériences. Le but de ce chapitre est ainsi de présenter les outils qui seront nécessaires afin d'obtenir une description analytique simple de la physique du système présenté à la section 2.3, modélisé initialement par l'hamiltonien (2.10).

Comme la physique est en général plus facilement compréhensible dans la base propre d'un système, les premiers outils viseront à diagonaliser cet hamiltonien. Une diagonalisation exacte numérique est possible étant donné la faible taille du système, mais cette approche apporte bien peu d'intuition physique. J'ai plutôt choisi d'utiliser une approche par transformations unitaires. Une transformation unitaire est essentiellement un opérateur de changement de base ou de changement de référentiel. Une telle transformation prend la forme mathématique de l'exponentielle d'un opérateur anti-hermitique, et appliquer la transformation sur un opérateur revient à calculer une série de commutateurs.

Il est souvent difficile — voire impossible — de calculer la série de commutateurs de façon exacte. Dans un tel cas, on doit supposer qu'un paramètre est suffisamment petit afin de tronquer la série dans l'esprit d'une théorie de perturbation. En pratique, différentes transformations permettent de diagonaliser différents termes de l'hamiltonien (2.10). Comme ces transformations sont calculées approximativement, chaque étape

implique une erreur. Il est cependant possible que l'erreur introduite par une transformation dépende de la base dans laquelle elle est exprimée. Par exemple, appliquer une transformation dont le calcul suppose que le nombre de photons intra-résonateur est faible induira une erreur plus petite si l'on transforme d'abord le système dans une base où le résonateur est dans son état fondamental. Il sera ainsi important de choisir les « bonnes » transformations et de les appliquer dans le « bon » ordre afin de minimiser les erreurs. J'introduis l'approche des transformations unitaires en général, ainsi que les différentes transformations que j'ai utilisées spécifiquement dans cette thèse à la section 3.1.

Ultimement, je chercherai à connaître l'évolution de l'état du qubit sous l'effet du champ électromagnétique du résonateur. Je voudrai ainsi éliminer les degrés de liberté du résonateur pour obtenir une description plus simple — réduite — du qubit seul. Une technique qui permet d'atteindre cet objectif, que nous avons utilisée dans les articles [115, 126], consiste à passer dans un référentiel où le résonateur est dans son état fondamental. Cela permet ensuite de facilement calculer la trace sur les états du résonateur pour les éliminer. Il n'est cependant pas toujours possible de passer dans un tel référentiel, et la non-linéarité du résonateur complique cette approche. Dans cette thèse, j'ai plutôt choisi d'utiliser une élimination adiabatique. Dans cette approche, présentée à la section 3.2, on suppose que la dynamique du résonateur est beaucoup plus rapide que celle du qubit. Du point de vue du qubit, le résonateur est alors toujours dans un état stationnaire — qui n'est pas nécessairement le fondamental — qui peut être calculé et éliminé.

Afin d'éliminer adiabatiquement le résonateur, il sera nécessaire de calculer des fonctions de corrélation à deux temps d'opérateurs du résonateur. Ce calcul à priori compliqué est facilité par le théorème de régression quantique — essentiellement une généralisation de l'hypothèse de régression d'Onsager — que j'énonce à la section 3.3. Ce théorème permet de calculer des fonctions de corrélation à deux temps si l'on peut exprimer l'évolution des valeurs moyennes des opérateurs considérés comme un ensemble fermé d'équations différentielles linéaires.

J'utiliserai toutes les méthodes présentées dans ce chapitre afin d'obtenir le modèle réduit décrivant la dynamique du qubit au chapitre 5.

3.1 Transformations unitaires

L'approche des transformations unitaires consiste à appliquer une ou plusieurs transformations sur l'état du système ainsi que sur l'équation qui décrit son évolution dans

le but de passer dans une base dans laquelle l'hamiltonien du système est diagonal. Le système considéré étant relativement petit (espace d'Hilbert de taille typiquement inférieure à 1000), une diagonalisation numérique exacte de l'hamiltonien peut facilement se faire. Cependant, au contraire d'une approche analytique, une approche numérique offre peu d'intuition sur la physique du système.

3.1.1 Généralités et dépendance temporelle

Une transformation unitaire est un changement de base décrit par l'application d'une matrice \mathbf{U} telle que $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{1}$. On peut toujours écrire une matrice unitaire sous la forme $\mathbf{U} = e^{\mathbf{U}}$, où \mathbf{U} est une matrice anti-hermitique, de telle sorte que $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = e^{\mathbf{U}}e^{-\mathbf{U}} = \mathbf{1}$. On définit les transformations d'un ket $|\psi\rangle$, d'une matrice densité ρ et d'un opérateur A telles que [7]¹

$$\begin{aligned} |\psi\rangle' &= \mathbf{U}^\dagger |\psi\rangle . \\ \rho' &= \mathbf{U}^\dagger \rho \mathbf{U}, \\ A' &= \mathbf{U}^\dagger A \mathbf{U}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

On peut calculer la transformation de l'opérateur A via la relation d'Hausdorff

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^\dagger A \mathbf{U} &\equiv A - [\mathbf{U}, A] + \frac{1}{2!} [\mathbf{U}, [\mathbf{U}, A]] - \frac{1}{3!} [\mathbf{U}, [\mathbf{U}, [\mathbf{U}, A]]] + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathcal{C}_{\mathbf{U}}^n A \equiv e^{-\mathcal{C}_{\mathbf{U}}} A, \end{aligned} \tag{3.2}$$

où \mathbf{U} est l'opérateur anti-hermitique argument de la transformation unitaire et où j'ai défini l'application linéaire de commutation

$$\mathcal{C}_{\mathbf{U}} A \equiv [\mathbf{U}, A], \quad \mathcal{C}_{\mathbf{U}}^m A \equiv [\mathbf{U}, [\mathbf{U}, [\mathbf{U} \dots, A]]] . \tag{3.3}$$

On peut ainsi transformer un opérateur quelconque en calculant une série de commutateurs. Si cette série est fermée, il est possible de calculer la somme exactement.

¹On note que Cohen-Tannoudji [7] utilise la convention $|\psi\rangle' = \mathbf{U} |\psi\rangle$ à la place. Cependant, la convention $|\psi\rangle' = \mathbf{U}^\dagger |\psi\rangle$ est utilisée dans la plupart des livres d'optique quantique et entre autres dans les références [50, 55, 56]. C'est cette convention que j'ai choisi de suivre dans cette thèse.

Transformation du hamiltonien

La transformation du hamiltonien du système est légèrement différente de la transformation d'un opérateur. Si la transformation unitaire est dépendante du temps, alors le changement de référentiel est dépendant du temps et, tout comme en mécanique classique, des forces virtuelles apparaissent. Si l'on suppose que l'évolution temporelle du système dans le référentiel initial est décrite par l'équation

$$\dot{\rho} = -i [H, \rho], \quad (3.4)$$

on peut alors écrire l'évolution dans la base transformée par

$$\begin{aligned} \dot{\rho}' &= \dot{U}(t)^\dagger \rho U(t) + U^\dagger(t) \dot{\rho} U(t) + U^\dagger(t) \rho \dot{U}(t) \\ &= -i [U^\dagger(t) H U(t), \rho'] + \dot{U}^\dagger(t) U(t) \rho' + \rho' U^\dagger(t) \dot{U}(t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

où une éventuelle dépendance temporelle de U a été explicitée. Ainsi, en plus de la transformation de H selon les mêmes règles qu'un opérateur quelconque, on doit ajouter deux termes pour tenir compte de la dépendance temporelle de la transformation. On peut calculer ces deux termes avec les expressions

$$\frac{d}{dt} [e^{-U(t)}] e^{U(t)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} C_{U(t)}^{n-1} \dot{U}(t) \quad (3.6a)$$

$$\dot{U}^\dagger(t) U(t) = -U^\dagger(t) \dot{U}(t), \quad (3.6b)$$

que je démontre à l'annexe C. On peut ainsi réécrire l'évolution comme

$$\dot{\rho}' = -i [\bar{H}', \rho'], \quad (3.7)$$

et définir la transformation d'un hamiltonien comme

$$\bar{H}' \equiv H' + H_U = U^\dagger(t) H U(t) + H_U, \quad (3.8)$$

où

$$H_U \equiv i \dot{U}^\dagger(t) U(t) = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} C_{U(t)}^{n-1} \dot{U}(t), \quad (3.9)$$

tient compte de la dépendance temporelle de la transformation unitaire. De façon un peu plus compacte, on peut combiner la somme ci-dessus à celle pour H' et écrire

$$\bar{H}' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \mathcal{C}_{\mathbf{U}}^n \left[(n+1)H - i\dot{\mathbf{U}} \right]. \quad (3.10)$$

Ainsi, on peut calculer l'évolution temporelle dans un référentiel dépendant du temps par une série de commutateurs entre l'hamiltonien initial, l'argument de la transformation unitaire et sa dérivée temporelle.

Transformation des termes dissipatifs

Tel qu'expliqué à l'annexe B, les termes dissipatifs de l'équation maîtresse ($\mathcal{D}[a]\rho$, par exemple) proviennent du couplage du système à un environnement modélisé comme un bain d'oscillateurs harmoniques. La forme spécifique $\mathcal{D}[A]\rho$ apparaît lorsque l'on calcule la trace partielle sur les états de l'environnement et que l'on applique cette trace sur l'hamiltonien de couplage. Ainsi, lorsque l'on applique une transformation unitaire sur un système, non seulement faut-il transformer l'hamiltonien, mais il faut aussi transformer ces termes dissipatifs. Cette étape peut alors être faite avant ou après la trace sur les états de l'environnement.

Afin de comprendre l'impact du choix d'appliquer la transformation avant ou après la trace sur les états de l'environnement permettant d'obtenir l'équation maîtresse, il est nécessaire de savoir que cette trace est réalisée sous l'approximation de Born-Markov, tel qu'expliqué plus en détails à l'annexe B. Cette approximation suppose que le spectre de l'environnement est blanc et que le couplage à l'environnement est faible. Pour illustrer le principe, on prend l'exemple de la perte de photons à un taux κ pour un résonateur ayant une fréquence ω_r . L'approximation de Born-Markov suppose que le spectre de l'environnement $S(\omega)$ est blanc sur un intervalle de fréquences de largeur $\mathcal{O}(\kappa)$ autour de la fréquence ω_r . Le taux κ est alors proportionnel à $S(\omega_r)$. Typiquement, $\kappa \sim \mathcal{O}(1\text{MHz}) \ll \omega_r \sim \mathcal{O}(1\text{GHz})$ et l'approximation de bruit blanc est généralement bonne.

Si l'on applique la transformation \mathbf{U} après la trace sur les états de l'environnement, on transforme directement les opérateurs apparaissant dans les dissipateurs. Ainsi, $\mathcal{D}[A]\rho$ devient $\mathcal{D}[\mathbf{U}^\dagger A \mathbf{U}] \mathbf{U}^\dagger \rho \mathbf{U}$. Il est possible que la transformation \mathbf{U} sur l'opérateur A modifie les fréquences pertinentes. C'est ce qui arrive par exemple lorsque la transformation

dispersive quantique \mathbb{D} , donnée à la section 3.1.4, est appliquée sur l'opérateur a . On a alors $\mathbb{D}^\dagger a \mathbb{D} \approx a + \lambda \sigma_-$, où λ est un scalaire et on obtient $\kappa \mathcal{D}[a] \rho \rightarrow \kappa \mathcal{D}[a + \lambda \sigma_-] \rho$. Dans ce cas, appliquer la transformation dispersive après avoir obtenu l'équation maîtresse suppose donc que le bruit est blanc non pas sur un intervalle κ autour de la fréquence ω_r , mais sur tout l'intervalle pertinent, soit $|\omega_{1,0} - \omega_r| \gg \kappa$, ce qui n'est pas nécessairement une bonne approximation.

Le résultat peut être amélioré si la transformation est appliquée non pas sur l'équation maîtresse, mais sur les hamiltoniens de couplage à l'environnement. Si l'on procède de cette façon, on obtiendra plusieurs dissipateurs $\kappa(\omega_r) \mathcal{D}[a] \rho + \kappa(\omega_{1,0}) \mathcal{D}[\lambda \sigma_-] \rho$, où les taux $\kappa(\omega)$ dépendront du spectre de l'environnement aux fréquences $\omega = \{\omega_r, \omega_{1,0}\}$. C'est ce que nous avons fait par exemple dans l'article [115], où nous avons obtenu les taux de relaxation et de déphasage effectifs d'un qubit lorsqu'il est couplé à un champ de photons. Il est particulièrement important d'appliquer la transformation avant la trace sur les états de l'environnement dans le régime de couplage ultra fort où le couplage g entre le qubit et le résonateur est comparable aux fréquences de transition, $g \sim \omega_r, \omega_{1,0}$. En effet, tel que montré par Félix Beaudoin, appliquer la transformation dispersive sur l'équation maîtresse mène dans ce cas à un phénomène non-physique de génération spontanée de photons à température nulle lorsque le système est dans son état fondamental [127, 128].

Néanmoins, dans le cadre de cette thèse, j'ai choisi pour simplifier les calculs d'appliquer les transformations unitaires sur l'équation maîtresse, après la trace sur l'environnement. À cause de ce choix, il faudra garder en tête que les taux obtenus après l'application des transformations unitaires doivent être ajustés pour tenir compte du spectre de l'environnement.

3.1.2 Déplacement

La transformation de déplacement est celle que l'on a utilisé pour définir l'état cohérent à la définition 13. Elle s'écrit [50, 55, 56]

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}. \quad (3.11)$$

Lorsqu'appliquée sur le vide, elle crée l'état cohérent

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle. \quad (3.12)$$

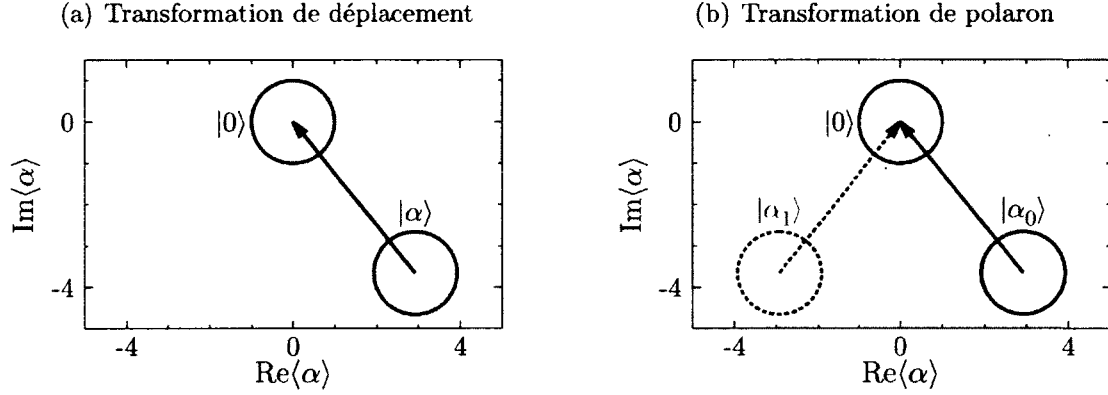


FIGURE 3.1 – Représentation graphique, dans l'espace de phase, des transformations de déplacement et de polaron.

On peut aussi l'utiliser dans le sens opposé, pour partir d'un état cohérent $|\alpha\rangle$ et ramener l'état vers le vide $|0\rangle = D(-\alpha)|\alpha\rangle$, tel qu'illustré à la figure 3.1(a). Cette opération unitaire transforme les opérateurs de champ tels que

$$a^{(t)'} = D^\dagger(\alpha)a^{(t)}D(\alpha) = a^{(t)} + \alpha^{(*)}. \quad (3.13)$$

On peut alors transformer n'importe quelle combinaison d'opérateurs d'échelle. Si α a une dépendance temporelle, l'équation (3.9) nous indique que la contribution à l'hamiltonien transformé est donnée par

$$\begin{aligned} H_{D(\alpha)} &= i\dot{D}^\dagger(\alpha)D(\alpha) = -i \left\{ (\dot{\alpha}a^\dagger - \dot{\alpha}^*a) - \frac{1}{2!} [\alpha\alpha^\dagger - \alpha^*a, \dot{\alpha}a^\dagger - \dot{\alpha}^*a] + \dots \right\}, \\ &= -i \left\{ (\dot{\alpha}a^\dagger - \dot{\alpha}^*a) - \frac{1}{2!} (\alpha\dot{\alpha}^* - \alpha^*\dot{\alpha}) \right\}, \\ &= -i (\dot{\alpha}a^\dagger - \dot{\alpha}^*a), \end{aligned} \quad (3.14)$$

où, puisque le terme d'ordre deux est un scalaire, il ne contribue pas à la dynamique et on peut le laisser tomber dans l'hamiltonien. De plus, comme un scalaire commute avec tout opérateur, tous les commutateurs d'ordre supérieurs sont nuls.

3.1.3 Polaron

La transformation de polaron est une transformation de déplacement qui dépend de l'état d'un autre système. Dans notre cas, cet autre système sera le qubit. On définit la transformation de polaron comme

$$\mathbb{P} \equiv \sum_{i=0}^{M-1} \Pi_{i,i} D(\alpha_i), \quad (3.15)$$

où $\Pi_{i,i} = |i\rangle \langle i|$ est le projecteur sur l'état i du qubit et M est le nombre de niveaux du qubit. Si l'on suppose que l'état du système qubit-résonateur est

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{M-1} c_i |i\rangle \otimes |\alpha_i\rangle, \quad (3.16)$$

alors on a

$$\mathbb{P}^\dagger |\psi\rangle = \left(\sum_{i=0}^{M-1} c_i |i\rangle \right) \otimes |0\rangle. \quad (3.17)$$

Tel qu'illustré à la figure 3.1(b), cette transformation envoie le champ électromagnétique — qui peut être différent selon l'état du qubit — vers le vide, peu importe l'état du qubit. S'il est possible de calculer cette transformation de façon exacte, comme dans le cas d'un résonateur linéaire dans le régime dispersif [126], il sera alors facile de calculer la trace sur le résonateur pour obtenir une équation maîtresse pour le qubit seulement. Cette transformation est utilisée dans le contexte de physique à N-corps pour découpler des bains de bosons [129], mais a aussi été utilisée récemment dans le contexte des qubits supraconducteurs [130]. Notre groupe l'a aussi utilisée dans un système composé d'un qubit à deux niveaux et d'un résonateur [114, 115, 126]. Dans le cadre de cette thèse, je l'utiliserai pour un qubit à plusieurs niveaux couplé à un résonateur. Cette transformation est en particulier ce qui nous permettra de développer un modèle allant au-delà d'une théorie de réponse linéaire comme on le verra plus tard.

Cette transformation agit sur les opérateurs d'échelle de l'oscillateur de telle sorte que

$$a^{(t)'} = \mathbb{P}^\dagger a^{(t)} \mathbb{P} = a^{(t)} + \Pi_\alpha^{(*)} \quad (3.18)$$

de façon similaire à la transformation de déplacement. Ici, Π_α est un opérateur diagonal agissant dans le sous-espace du qubit et défini tel qu'à l'équation (2.8). La dépendance

temporelle de cette transformation peut être calculée de la même façon que pour la transformation de déplacement et donne

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{P}} &= -i \left(\dot{\Pi}_{\alpha}^{\dagger} a^{\dagger} - \dot{\Pi}_{\alpha}^{*} a \right) + i \frac{1}{2} \left(\Pi_{\alpha} \dot{\Pi}_{\alpha}^{*} - \Pi_{\alpha}^{*} \dot{\Pi}_{\alpha} \right), \\ &= -i \left(\dot{\Pi}_{\alpha}^{\dagger} a^{\dagger} - \dot{\Pi}_{\alpha}^{*} a \right) - \text{Im} \left[\Pi_{\alpha} \dot{\Pi}_{\alpha}^{*} \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ainsi, les termes d'ordre supérieur à deux dans la série de commutateurs s'annulent car ils commutent avec le terme d'ordre deux. Cependant, le terme d'ordre deux, bien que trivial dans le sous-espace du résonateur, n'est pas un scalaire dans le sous-espace du qubit et ne peut donc pas être ignoré.

Finalement, bien que la transformation de polaron agisse principalement dans le sous-espace de l'oscillateur, son effet n'est pas trivial sur les termes hors-diagonaux dans le sous-espace du qubit. Ainsi, on a

$$\Pi'_{i,i+1} = \Pi_{i,i+1} D^{\dagger}(\alpha_i) D(\alpha_{i+1}) = \Pi_{i,i+1} D(\alpha_{i+1} - \alpha_i) e^{-i \text{Im}[\alpha_{i+1}^* \alpha_i]}, \quad (3.20)$$

et les opérateurs hors-diagonaux du qubit dans le référentiel transformé contiennent toutes les puissances de $a^{(t)}$ via le développement en série de l'opérateur de déplacement (3.11).

3.1.4 Dispersive

La transformation dispersive diagonalise l'hamiltonien de Jaynes-Cummings (1.25). Elle a été obtenue la première fois à ma connaissance par Carbonaro *et al.* en 1979 [131] pour diagonaliser l'hamiltonien d'atomes fortement irradiés dans l'approximation séculaire. Je l'ai aussi obtenue indépendamment dans le cadre de mes travaux de maîtrise [2, 115]. La transformation dispersive est typiquement définie de façon approximative pour un système à deux niveaux

$$\mathbb{D} \approx e^{\lambda(a^{\dagger} \sigma_{-} - a \sigma_{+})}, \quad (3.21)$$

où $\lambda = -g/(\omega_{1,0} - \omega_r)$. En l'appliquant sur l'hamiltonien de Jaynes-Cummings (1.25) et en développant la série de Hausdorff au deuxième ordre, on obtient l'hamiltonien dispersif (2.12). L'hamiltonien de Jaynes-Cummings étant diagonal par bloc dans la base des états de Fock du résonateur, il est possible de le diagonaliser exactement en diagonalisant

chacun des blocs (qui sont de taille 2×2). J'ai montré dans le cadre de ma maîtrise [2, 115] que la transformation qui le diagonalise exactement est donnée par

$$\mathbb{D} = e^{\Lambda(N_q)(a^\dagger \sigma_- - a \sigma_+)}, \quad (3.22)$$

où

$$\Lambda(N_q) = \frac{-\arctan(2\lambda\sqrt{N_q})}{2\sqrt{N_q}}, \quad (3.23)$$

est l'équivalent d'un angle de rotation et où $N_q = a^\dagger a + \Pi_{1,1}$ est l'opérateur représentant le nombre total de quanta d'excitation dans le système, le même résultat qui avait été obtenu auparavant par Carbonaro *et al.* [131]. Dans cette section, je m'intéresserai à deux généralisations de la transformation dispersive à plusieurs niveaux, que j'appelle les transformations dispersives quantique et classique.

Version quantique

J'appelle la transformation dispersive quantique à plusieurs niveaux la transformation

$$\mathbb{D} = \exp \left[\sum_{i=0}^{M-2} \lambda_i a^\dagger \Pi_{i,i+1} - \lambda_i^* a \Pi_{i+1,i} \right], \quad (3.24)$$

où

$$\lambda_i = -g_i / (\omega_{i+1,i} - \omega_r). \quad (3.25)$$

On note que cette transformation ne connaît que les fréquences du résonateur et du qubit, mais non celles de différents signaux d'excitation. Ainsi, elle permet d'obtenir les décalages de Lamb et de Stark dans le cas de qubits à plusieurs niveaux, mais suppose que les photons causant le décalage de Stark sont à la fréquence du résonateur. Cela sera à contraster avec la version *classique* présentée à la prochaine sous-section. J'utiliserai cette transformation dans un référentiel où la partie classique « champ moyen » du champ aura été éliminée des équations. Ainsi, la population de photon dans ce référentiel sera presque nulle et je n'aurai besoin que des résultats de la transformation au deuxième ordre. Pour l'opérateur d'échelle a , ce résultat est

$$a' \approx a + \sum_{i=0}^{M-2} \lambda_i \Pi_{i,i+1}. \quad (3.26)$$

De plus, l'hamiltonien Jaynes-Cummings généralisé

$$H = \Pi_\omega + \omega_r a^\dagger a + \sum_{i=0}^{M-2} g_i (a^\dagger \Pi_{i,i+1} + a \Pi_{i+1,i}), \quad (3.27)$$

devient au deuxième ordre [89]

$$H' = \Pi_\omega + \Pi_L + (\omega_r + \Pi_S) a^\dagger a, \quad (3.28)$$

où

$$\begin{aligned} L_i &= \chi_{i-1}, \\ S_i &= -(\chi_i - \chi_{i-1}), \end{aligned} \quad (3.29)$$

sont le décalage de Lamb et de Stark et $\chi_i = -g_i \lambda_i$.

Version classique

On a vu à la section précédente que la transformation dispersive permet de diagonaliser le terme d'interaction de Jaynes-Cummings. On peut aussi utiliser le même type de transformation pour diagonaliser l'hamiltonien d'un qubit excité par un champ décrit par un état cohérent, c'est-à-dire un hamiltonien du type

$$H = \Pi_\omega + \sum_{i=0}^{M-2} g_i \alpha_{i,d} e^{-i\omega_d t} \Pi_{i+1,i} + \text{c.h.}, \quad (3.30)$$

où $\alpha_{i,d}$ serait la valeur moyenne du champ oscillant à la fréquence ω_d pour l'état i du qubit. La transformation à utiliser serait alors de la forme

$$\mathbb{D}_C = \exp \left[\sum_{i=0}^{M-2} \xi_i^* \Pi_{i,i+1} - \xi_i \Pi_{i+1,i} \right]. \quad (3.31)$$

où $\xi_i = \lambda_i^d \alpha_{i,d} e^{-i\omega_d t}$ et

$$\lambda_i^d = \frac{-g_i}{\omega_{i+1,i} - \omega_d}. \quad (3.32)$$

On note que cette transformation est de la même forme que la version quantique (3.24), si l'on remplace λ_i par λ_i^d et $a^{(t)}$ par $\alpha_{i,d}^*$. Cependant, cette transformation n'agit que dans

le sous-espace du qubit et contient la fréquence d'oscillation du champ ω_d plutôt que celle du résonateur. En suivant les règles de transformation données à la section 3.1.1, on peut montrer qu'un opérateur diagonal de la forme Π_x devient au premier ordre

$$\Pi'_x = \mathbb{D}_C^\dagger \Pi_x \mathbb{D}_C \approx \Pi_x + \sum_{i=0}^{M-2} (x_{i+1} - x_i) (\xi_i \Pi_{i+1,i} + \xi_i^* \Pi_{i,i+1}). \quad (3.33)$$

Ainsi, en transformant l'hamiltonien (3.30) ci-dessus au premier ordre en ξ , on obtient

$$H' \approx \frac{1}{0!} \Pi_\omega + \frac{1}{1!} \sum_{i=0}^{M-2} [(\omega_{i+1,i} - \omega_d) \xi_i + g_i \alpha_i e^{-\omega_d t}] \Pi_{i+1,i} + \text{c.h.}, \quad (3.34)$$

où $\omega_{i+1,i} = \omega_{i+1} - \omega_i$. On voit qu'avec le choix $\xi_i = \lambda_i^d \alpha_{i,d} e^{-\omega_d t}$ fait ci-dessus, le terme hors-diagonal s'annule.

On peut ainsi voir la transformation dispersive quantique comme traitant le couplage avec le champ électromagnétique (et ses fluctuations quantiques) à la fréquence du résonateur, alors que la transformation classique traitera le couplage avec le champ électromagnétique à une fréquence quelconque, mais sans fluctuations quantiques. Si l'on développe l'hamiltonien ci-dessus aux ordres supérieurs en ξ , on obtiendra un décalage de Stark de la même façon qu'avec la version quantique, sauf que les coefficients dépendront du décalage qubit-signal et non du décalage qubit-résonateur. Cependant, puisque cette transformation est faite avec des champs classiques plutôt qu'un champ quantique, on n'obtiendra pas de décalage de Lamb, qui est dû aux fluctuations quantiques du vide. Je ferai ce développement aux ordres supérieurs au chapitre 5.

3.1.5 Squeezon

La dernière transformation que j'utiliserai est la transformation de *squeezon*. Cette transformation est définie telle que

$$\mathbb{S} = e^{\mathbb{S}} = \sum_{i=0}^{M-1} \Pi_{i,i} e^{\frac{1}{2} r_i^* a^2 - \frac{1}{2} r_i a^{\dagger 2}}, \quad (3.35)$$

où $r_i = |r_i| e^{2i\theta_i}$. De façon similaire à la transformation de polaron, la transformation de *squeezon* transforme le champ électro-magnétique du résonateur d'une façon qui est dépendante de l'état du qubit. Il s'agit en fait de l'opérateur de compression (*squeezing* en

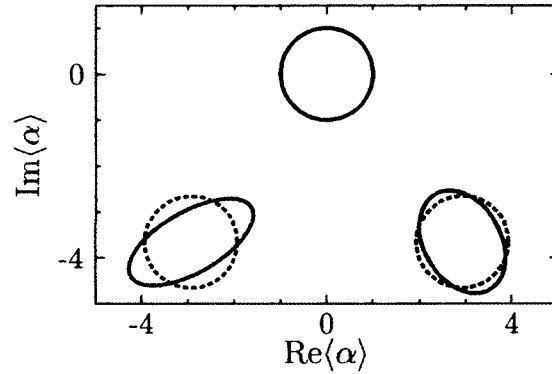


FIGURE 3.2 – Illustration de l’effet de la transformation de squeezeon. Les ellipses en trait plein représentent différents états comprimés dépendants de l’état du qubit. Les cercles en pointillés sont les états décomprimés après l’application de la transformation de squeezeon.

anglais) utilisé pour définir les états comprimés dont j’ai discutés au chapitre 1 [50,55,56], mais avec un coefficient de compression r_i différent pour chaque état du qubit. Avec le bon choix des r_i , il est possible de décompresser (ou de comprimer) l’état de l’oscillateur de façon dépendante de l’état du qubit, tel qu’illustré à la figure 3.2. Cette transformation est aussi une version mono-mode de la transformation de Bogoliubov utilisée en physique de l’état solide pour trouver la base propre de deux modes bosoniques couplés [129]. Dans ce cas cependant, plutôt qu’avoir a^2 et $a^{\dagger 2}$ comme argument de la transformation, on a ab et $a^{\dagger}b^{\dagger}$ où a et b sont deux modes bosoniques différents.

Puisque le commutateur $[a^{\dagger 2}, a] = -2a^{\dagger}$, les commutateurs d’ordre n entre l’argument de l’exponentielle et a alterneront entre a et a^{\dagger} . Due à cette cyclicité, la somme de la relation d’Hausdorff pour la transformation de l’opérateur a peut être calculée exactement et donne

$$a' = \mathbb{S}^{\dagger} a \mathbb{S} = \cosh |\Pi_r| a - e^{i2\Pi_{\theta}} \sinh |\Pi_r| a^{\dagger}, \quad (3.36)$$

où $|\Pi_r|$ contient seulement les normes $|r_i|$.

La dépendance temporelle rajoutée à l’évolution hamiltonienne par des r_i dépendants du temps peut être calculée par l’équation (3.9). On peut montrer que les commutateurs d’ordre arbitraires sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbb{S}}^{2n+1} \dot{\mathbb{S}} &= 4^n |\Pi_r|^2 \left(\Pi_r \dot{\Pi}_r^* - \Pi_r^* \dot{\Pi}_r \right) \left(a^{\dagger} a + \frac{1}{2} \right), \\ \mathcal{C}_{\mathbb{S}}^{2n+2} \dot{\mathbb{S}} &= 4^n |\Pi_r|^2 \left(\Pi_r \dot{\Pi}_r^* - \Pi_r^* \dot{\Pi}_r \right) \left(\Pi_r^* a^2 + \Pi_r a^{\dagger 2} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

où $\mathbf{S} = -\frac{1}{2}\Pi_r a^{\dagger 2} + \frac{1}{2}\Pi_r^* a^2$. On peut ainsi sommer l'équation (3.9) à l'infini pour obtenir

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{S}} &= \frac{-i}{2}(\dot{\Pi}_r^* a^2 - \dot{\Pi}_r a^{\dagger 2}) + \frac{i}{4|\Pi_r|^2}(\Pi_r \dot{\Pi}_r^* - \Pi_r^* \dot{\Pi}_r)(\Pi_r^* a^2 + \Pi_r a^{\dagger 2}) \\ &\quad - \frac{i}{4|\Pi_r|^3}(\Pi_r \dot{\Pi}_r^* - \Pi_r^* \dot{\Pi}_r)(\Pi_r^* a^2 + \Pi_r a^{\dagger 2}) \cosh(|\Pi_r|) \sinh(|\Pi_r|) \\ &\quad + \frac{i}{2|\Pi_r|^2}(\Pi_r \dot{\Pi}_r^* - \Pi_r^* \dot{\Pi}_r) \sinh^2(|\Pi_r|)(a^{\dagger} a + \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Cette forme est cependant trop générale pour nos besoins. Dans le cadre de cette thèse, je vais supposer que $r_i(t) = |r_i| e^{i\theta_i(t)}$, c'est-à-dire que l'amplitude de compression $|r_i|$ est fixe et que seule sa phase varie. Dans cette limite, on peut simplifier $H_{\mathbf{S}}$ pour obtenir

$$H_{\mathbf{S}} = \dot{\Pi}_{\theta} \sinh^2(|\Pi_r|)(a^{\dagger} a + \frac{1}{2}) - \frac{\dot{\Pi}_{\theta}}{2|\Pi_r|}(\Pi_r^* a^2 + \Pi_r a^{\dagger 2}) \cosh(|\Pi_r|) \sinh(|\Pi_r|). \quad (3.39)$$

Comme on peut le voir dans cette expression, les termes générés par cette transformation de squeeze sont tous quadratiques en nombre d'opérateurs d'échelle. Ainsi, alors que la transformation de polaron nous permettra d'éliminer les termes linéaires hors-diagonaux — comme $a^{\dagger} + a$ —, la transformation de squeeze permettra d'éliminer les termes quadratiques hors-diagonaux — comme $a^{\dagger 2} + a^2$ — qui sont liés à la non-linéarité du résonateur.

3.2 Élimination adiabatique

Dans cette section, je présente une méthode pour éliminer adiabatiquement les degrés de liberté d'un système dont la dynamique est beaucoup plus rapide — c'est-à-dire que le taux de relaxation est plus important — qu'un autre. Le système à dynamique rapide sera dans notre cas le résonateur alors que le qubit aura une dynamique lente. L'approche présentée utilise le formalisme des projecteurs de Zwanzig [132, 133] utilisé en thermodynamique pour éliminer les degrés de liberté d'un système « non pertinent » et garder seulement ceux du système d'intérêt. Ce formalisme a ensuite été développé par Gardiner et Zoller [134, 135] entre autres pour éliminer les degrés de liberté de l'environnement afin d'obtenir l'équation maîtresse de l'optique quantique. L'approche est similaire en esprit à celle que j'utilise à l'annexe B pour obtenir l'équation maîtresse, malgré que je n'utilise pas explicitement les projecteurs dans l'annexe. Cette section est reprise de notes ma-

nuscrites d'Andrew C. Doherty sur le sujet [136], mais j'ai adapté la notation pour être cohérente avec celle utilisée dans cette thèse et détaillé certaines étapes.

On considère un système composé de deux sous-systèmes, le qubit (q) et le résonateur (r). On décrit l'évolution des deux systèmes par trois Lindbladiens nommés \mathcal{L}_r décrivant l'évolution de l'état du résonateur, \mathcal{L}_q décrivant celle du qubit et $\mathcal{L}_c(t)$ décrivant le couplage entre les deux sous-systèmes. Ainsi, on peut écrire l'évolution totale du système couplé par l'équation maîtresse

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}_r \rho + \mathcal{L}_c(t) \rho + \mathcal{L}_q \rho, \quad (3.40)$$

où \mathcal{L}_r et \mathcal{L}_q agissent respectivement dans le sous-espace du résonateur et du qubit et où $\mathcal{L}_c(t)$ agit dans les deux sous-espaces. On considère aussi que la dynamique du résonateur est plus rapide que celle du qubit. Ainsi, on suppose que $\mathcal{L}_r \sim \mathcal{O}(1/\tau_r)$ et $\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_q \sim \mathcal{O}(1/\tau_c) \sim \mathcal{O}(1/\tau_q)$, où $\tau_r \ll \tau_c, \tau_q$ sont les temps caractéristiques des Lindbladiens. Cette hypothèse est correcte dans la limite où le taux de relaxation du résonateur $\kappa \sim 1/\tau_r$ est bien supérieur à celui du qubit $\gamma \sim 1/\tau_q$, ce qui sera respecté approximativement dans les résultats présentés dans cette thèse.

Comme la dynamique du résonateur est plus rapide que celle du qubit, on supposera que celui-ci relaxe rapidement vers un état stationnaire ρ_r^s respectant

$$\dot{\rho}_r^s = \mathcal{L}_r \rho_r^s = 0. \quad (3.41)$$

On supposera ainsi que l'état total du système à un temps t peut être écrit comme

$$\rho(t) = \rho_r^s \otimes \rho_q(t), \quad (3.42)$$

et on cherchera l'équation d'évolution de $\rho_q(t)$. Pour ce faire, on définit un super-opérateur de projection \mathcal{Q} sur le sous-espace du qubit tel que

$$\mathcal{Q}\rho \equiv \rho_r^s \otimes \text{Tr}_r \{ \rho \}, \quad (3.43)$$

où $\text{Tr}_r \{ \rho \}$ correspond à la trace sur les états du résonateur de la matrice densité totale. Ce projecteur obéit à la relation habituelle $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}$, et on peut définir un projecteur dual $\mathcal{R} = \mathcal{I} - \mathcal{Q}$, où \mathcal{I} est l'identité, et où l'on a $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$ et $\mathcal{Q}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{Q} = 0$. On peut alors montrer quelques propriétés de la dynamique de ces opérateurs de projection. On peut

montrer que

$$\mathcal{L}_r \mathcal{Q} \rho = \mathcal{L}_r \rho_r^s \otimes \text{Tr}_r \{ \rho \} = 0, \quad (3.44)$$

puisque ρ_r^s est un état stationnaire de \mathcal{L}_r et donc $\mathcal{L}_r \rho_r^s = 0$. De même,

$$\mathcal{Q} \mathcal{L}_r \rho = \rho_r^s \otimes \text{Tr}_r \{ \mathcal{L}_r \rho \} = 0, \quad (3.45)$$

où la dernière égalité est respectée parce que \mathcal{L}_r génère une évolution qui conserve la trace. En effet, pour tout Lindbladien \mathcal{L} , on a $\text{Tr} \{ \mathcal{L} \rho \} = \text{Tr} \{ \dot{\rho} \} = 0$. Ainsi, on peut écrire

$$\mathcal{L}_r \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \mathcal{L}_r = 0. \quad (3.46)$$

De même, puisque \mathcal{L}_q agit uniquement sur le sous-espace du qubit et que le projecteur \mathcal{Q} projette sur ce sous-espace, on a

$$\mathcal{L}_q \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \mathcal{L}_q. \quad (3.47)$$

Finalement, on suppose que le couplage est tel que

$$\mathcal{Q} \mathcal{L}_c(t) \mathcal{Q} = 0. \quad (3.48)$$

Cette supposition est sans perte de généralité, car on pourrait toujours redéfinir $\mathcal{L}'_q \rightarrow \mathcal{L}_q + \mathcal{Q} \mathcal{L}_c(t) \mathcal{Q}$ et $\mathcal{L}'_c(t) \rightarrow \mathcal{L}_c(t) - \mathcal{Q} \mathcal{L}_c(t) \mathcal{Q}$ de façon à inclure les termes qui ne respecteraient pas cette supposition dans le Lindbladien du qubit. Cette supposition implique donc que tous les termes diagonaux dans l'évolution du qubit sont compris dans \mathcal{L}_q et non $\mathcal{L}_c(t)$. Des résultats ci-dessus découlent facilement trois autres résultats pour le projecteur \mathcal{R}

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \mathcal{L}_r &= \mathcal{L}_r \mathcal{R}, \\ \mathcal{R} \mathcal{L}_c(t) &= \mathcal{R} \mathcal{L}_c(t) \mathcal{R} + \mathcal{R} \mathcal{L}_c(t) \mathcal{Q}, \\ \mathcal{R} \mathcal{L}_q &= \mathcal{L}_q \mathcal{R}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Par les opérateurs de projection \mathcal{Q} et \mathcal{R} , on a ainsi divisé l'espace d'Hilbert en deux parties, l'une correspondant au qubit et l'autre au résonateur, sans pour autant les découpler complètement. On s'intéresse maintenant à l'évolution des deux matrices

$v(t) = \mathcal{Q}\rho(t)$ et $w(t) = \mathcal{R}\rho(t)$. On trouve

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= \mathcal{Q}\dot{\rho}(t) = \mathcal{Q}\mathcal{L}_r\rho + \mathcal{Q}\mathcal{L}_c(t)\rho + \mathcal{Q}\mathcal{L}_q\rho, \\ &= \mathcal{Q}\mathcal{L}_c(t)(\mathcal{Q} + \mathcal{R})\rho + \mathcal{L}_q\mathcal{Q}\rho, \\ &= \mathcal{Q}\mathcal{L}_c(t)w(t) + \mathcal{L}_qv(t),\end{aligned}\tag{3.50}$$

où l'on a utilisé les résultats ci-dessus ainsi que les définitions de v et w . De même, on a

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= \mathcal{R}\dot{\rho}(t) = \mathcal{R}\mathcal{L}_r\rho + \mathcal{R}\mathcal{L}_c(t)\rho + \mathcal{R}\mathcal{L}_q\rho, \\ &= \mathcal{L}_r\mathcal{R}\rho + \mathcal{R}\mathcal{L}_c(t)\mathcal{R}\rho + \mathcal{R}\mathcal{L}_c(t)\mathcal{Q}\rho + \mathcal{L}_q\mathcal{R}\rho, \\ &= (\mathcal{L}_r + \mathcal{R}\mathcal{L}_c(t) + \mathcal{L}_q)w + \mathcal{R}\mathcal{L}_c(t)v.\end{aligned}\tag{3.51}$$

On écrit maintenant une solution approximative pour $w(t)$ en supposant que $v(t)$ varie lentement et que \mathcal{L}_r est plus important que $\mathcal{R}\mathcal{L}_c(t)$ et \mathcal{L}_q (car $1/\tau_r \gg 1/\tau_c, 1/\tau_q$). On obtient ainsi en intégrant l'équation différentielle

$$\begin{aligned}w(t) &\approx \exp[\mathcal{L}_r(t - t_0)] w(t_0) + \exp[\mathcal{L}_r t] \int_{t_0}^t dt' \exp[-\mathcal{L}_r t'] \mathcal{R}\mathcal{L}_c(t')v(t'), \\ &\approx \int_0^{t-t_0} d\bar{t} \exp[\mathcal{L}_r \bar{t}] \mathcal{R}\mathcal{L}_c(t - \bar{t})v(t - \bar{t}), \\ &\approx \int_0^\infty d\bar{t} \exp[\mathcal{L}_r \bar{t}] \mathcal{R}\mathcal{L}_c(t - \bar{t})v(t).\end{aligned}\tag{3.52}$$

À la deuxième ligne, on a supposé que le temps d'intégration est long devant τ_r de sorte à pouvoir laisser tomber le premier terme et on a fait un changement de variable $\bar{t} = t - t'$ pour le deuxième terme. À la troisième ligne, on fait l'approximation adiabatique et supposé que le temps d'intégration est court par rapport à τ_c et τ_q de telle façon que $v(t)$ varie lentement sur le temps d'intégration et $v(t - \bar{t}) \approx v(t)$, mais que le temps d'intégration est tout de même long par rapport à τ_r . On peut alors substituer cette solution approximative dans l'équation d'évolution pour v et obtenir

$$\dot{v} = \mathcal{L}_qv(t) + \mathcal{Q}\mathcal{L}_c(t) \int_0^\infty d\bar{t} \exp[\mathcal{L}_r \bar{t}] \mathcal{R}\mathcal{L}_c(t - \bar{t})v(t).\tag{3.53}$$

Puisque $\mathcal{L}_r\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{L}_r$ et que $\mathcal{Q}\mathcal{L}_c(t)\mathcal{R} = \mathcal{Q}\mathcal{L}_c(t)(\mathcal{Q} + \mathcal{R}) = \mathcal{Q}\mathcal{L}_c(t)$, on peut enlever \mathcal{R} de

l'équation et obtenir

$$\dot{v} = \mathcal{L}_q v(t) + \mathcal{Q} \mathcal{L}_c(t) \int_0^\infty d\bar{t} \exp[\mathcal{L}_r \bar{t}] \mathcal{L}_c(t - \bar{t}) v(t), \quad (3.54)$$

ou en explicitant $v(t)$

$$\mathcal{Q} \dot{\rho} = \mathcal{L}_q \mathcal{Q} \rho(t) + \mathcal{Q} \mathcal{L}_c(t) \int_0^\infty d\bar{t} \exp[\mathcal{L}_r \bar{t}] \mathcal{L}_c(t - \bar{t}) \mathcal{Q} \rho(t). \quad (3.55)$$

On peut alors appliquer la définition de \mathcal{Q}

$$\rho_r^s \otimes \text{Tr}_r \{\dot{\rho}\} = \rho_r^s \otimes \text{Tr}_r \{\mathcal{L}_q \rho(t)\} + \rho_r^s \otimes \text{Tr}_r \left\{ \mathcal{L}_c(t) \int_0^\infty d\bar{t} \exp[\mathcal{L}_r \bar{t}] \mathcal{L}_c(t - \bar{t}) \rho(t) \right\}, \quad (3.56)$$

éliminer ρ_r^s , et obtenir l'équation du mouvement pour la matrice densité réduite du qubit $\rho_q = \text{Tr}_r \{\rho\}$

$$\dot{\rho}_q = \mathcal{L}_q \rho_q(t) + \int_0^\infty dt' \text{Tr}_r \left\{ \mathcal{L}_c(t) \exp[\mathcal{L}_r t'] \mathcal{L}_c(t - t') [\rho_r^s \otimes \rho_q(t)] \right\}. \quad (3.57)$$

Comme on le verra par l'exemple ci-dessous, cette équation nous permet de trouver l'évolution de l'état du qubit ρ_q à partir des fonctions de corrélation à deux temps du résonateur.

3.2.1 Exemple : couplage dépendant du temps

Il est utile d'illustrer cette méthode générale à l'aide d'un exemple concret. Je suppose un hamiltonien de couplage de la forme

$$H_c = F Q^\dagger e^{i\delta t} + F^\dagger Q e^{-i\delta t}, \quad (3.58)$$

où F est un opérateur du résonateur qui agit comme une force sur le qubit, δ est une fréquence qui résulte par exemple du passage dans un référentiel d'interaction permettant d'éliminer H_r et H_q . Finalement, Q est un opérateur agissant sur le qubit. Le lindbladien de couplage est alors

$$\mathcal{L}_c \rho = -i [H_c(t), \rho]. \quad (3.59)$$

Selon l'équation (3.57), on a alors

$$\dot{\rho}_q = \mathcal{L}_q \rho_q + \int_0^\infty dt' \text{Tr}_r \{ -i [H_c(t), \exp[\mathcal{L}_r t'] (-i) [H_c(t-t'), (\rho_r^s \otimes \rho_q)]] \}. \quad (3.60a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_q = & \mathcal{L}_q \rho_q + \int_0^\infty dt' \left[\left(e^{-i\delta t'} \langle F(t') F^\dagger(0) \rangle_s + e^{i\delta t'} \langle F(t') F^\dagger(0) \rangle_s^* \right) Q \rho_q Q^\dagger \right] \\ & - \int_0^\infty dt' \left[e^{-i\delta t'} \langle F(t') F^\dagger(0) \rangle_s Q^\dagger Q \rho_q + e^{i\delta t'} \langle F(t') F^\dagger(0) \rangle_s^* \rho_q Q^\dagger Q \right] \\ & + \int_0^\infty dt' \left[\left(e^{i\delta t'} \langle F^\dagger(t') F(0) \rangle_s + e^{-i\delta t'} \langle F^\dagger(t') F(0) \rangle_s^* \right) Q^\dagger \rho_q Q \right] \\ & - \int_0^\infty dt' \left[e^{i\delta t'} \langle F^\dagger(t') F(0) \rangle_s Q Q^\dagger \rho_q + e^{-i\delta t'} \langle F^\dagger(t') F(0) \rangle_s^* \rho_q Q Q^\dagger \right] \\ & + \int_0^\infty dt' Q^\dagger \rho_q Q^\dagger e^{i\delta(2t-t')} \left(\langle F(t') F(0) \rangle_s + \langle F^\dagger(t') F^\dagger(0) \rangle_s^* \right) + \text{c.h.}, \end{aligned} \quad (3.60b)$$

où $\langle \cdot \rangle_s = \text{Tr}_r \{ \cdot \rho_s \}$, et où, pour les fonctions de corrélation à deux temps, j'ai utilisé [56]

$$\langle A(t+\tau) B(t) \rangle = \text{Tr} \{ A e^{\mathcal{L}_r \tau} [B \rho(t)] \}. \quad (3.61)$$

En pratique, je supposerai que l'on peut négliger la dernière ligne de l'équation (3.60b). Cette approximation est valide si $\langle F^\dagger F^\dagger \rangle \ll \langle F^\dagger F \rangle$ ou si l'on s'intéresse à des temps t longs comparativement à $1/\delta$, de sorte que les termes proportionnels à $e^{i2\delta t}$ peuvent être négligés sous une approximation séculaire. Cette approximation correspondra au chapitre 5 à l'approximation des bandes latérales résolues.

On peut simplifier cette équation en définissant deux spectres de fluctuation de la force F

$$S_\uparrow(\omega) = \int_0^\infty dt' e^{i\omega t'} \langle F^\dagger(t') F(0) \rangle_s \quad (3.62a)$$

$$S_\downarrow(\omega) = \int_0^\infty dt' e^{i\omega t'} \langle F(t') F^\dagger(0) \rangle_s. \quad (3.62b)$$

On peut alors réécrire l'équation du mouvement ci-dessus sous la forme

$$\dot{\rho}_q = \mathcal{L}_q \rho_q - i [\delta H, \rho_q] + \text{Re}[S_\uparrow(-\delta)] \mathcal{D}[Q^\dagger] \rho_q + \text{Re}[S_\downarrow(\delta)] \mathcal{D}[Q] \rho_q, \quad (3.63)$$

où

$$\delta H = \text{Im}[S_\uparrow(-\delta)] Q Q^\dagger + \text{Im}[S_\downarrow(\delta)] Q^\dagger Q, \quad (3.64)$$

est une modification à l'hamiltonien du qubit. Ainsi, les fluctuations de l'état du résonateur mènent à des termes dissipatifs sur le qubit ainsi qu'à une modification de son hamiltonien de façon analogue à lorsque l'on élimine les degrés de liberté de l'environnement.

3.3 Théorème de régression quantique

Le théorème de régression quantique [135] est une généralisation quantique de l'hypothèse de régression d'Onsager, qui affirme, en physique statistique, que pour un système à l'équilibre, la régression des fluctuations thermiques microscopiques suit la loi de relaxation macroscopique de retour à l'équilibre pour de petites perturbations [137, 138]. En réalité, la bonne généralisation de l'hypothèse d'Onsager est le théorème de fluctuations-dissipations [139, 140] et le théorème de régression quantique n'est valide que dans la limite de faible couplage à l'environnement [141]. Je supposerai néanmoins ici que le couplage du système à l'environnement est suffisamment faible pour que le théorème de régression quantique soit valide. En fait, les approximations sous lesquelles le théorème de régression quantique est obtenu sont les mêmes qui permettent l'écriture d'une équation maîtresse pour le système. Ainsi, si l'écriture de l'évolution du système sous forme d'une équation maîtresse est valide, le théorème de régression quantique l'est tout autant.

Pour ce théorème, on suppose que l'équation maîtresse nous permet de calculer l'équation d'évolution des valeurs moyennes d'un ensemble fermé d'opérateurs du système $\{Y_i\}$ selon

$$\partial_t \langle Y_i(t) \rangle = \sum_j G_{i,j}(t) \langle Y_j(t) \rangle, \quad (3.65)$$

où $G_{i,j}(t)$ sont des opérateurs qui ne dépendent pas des $Y_i(t)$. Ainsi, en d'autres mots, on suppose que l'évolution des opérateurs Y_i est donnée par un ensemble d'équations linéaires, c'est-à-dire qu'aucune équation n'implique de produits de $\langle Y_i \rangle \langle Y_j \rangle$ ou de puissances de $\langle Y_i \rangle$. En pratique, l'ensemble d'opérateurs Y_i pourrait même être infini rendant l'hypothèse de départ très générale. Si la condition ci-dessus est remplie, alors le théorème de régression quantique indique que l'on peut calculer l'évolution des fonctions de corrélation de deux opérateurs selon

$$\partial_\tau \langle Y_i(t + \tau) Y_l(t) \rangle = \sum_j G_{i,j}(\tau) \langle Y_j(t + \tau) Y_l(t) \rangle. \quad (3.66)$$

Ainsi, à partir des mêmes coefficients décrivant l'évolution des opérateurs $\{Y_i\}$, on peut

décrire l'évolution de leurs fonctions de corrélation à deux temps. J'utiliserai ce théorème afin de calculer les spectres $S_{\uparrow}(\omega)$ et $S_{\downarrow}(\omega)$ nécessaires pour éliminer adiabatiquement le résonateur.

Chapitre 4

SQUACK—

Sherbrooke QUantum pACKage

Any fool can write code that a computer can understand. Good programmers write code that humans can understand.

— Martin Fowler [142]

Alors que les outils en physique expérimentale sont principalement matériels, les outils d'un théoricien proviennent des mathématiques et des simulations numériques. Tel que l'indique ci-dessus Martin Fowler — un expert international en développement logiciel et auteur de plusieurs livres sur le sujet — pour que les programmes de simulation soient utiles, ils doivent être compréhensibles et facilement utilisables non seulement par l'ordinateur, mais aussi par les physiciens. En calcul scientifique, j'ajouterais qu'ils doivent être performants et, pour un domaine aussi jeune et dynamique que l'électrodynamique quantique en circuit, ils doivent aussi être flexibles et facilement s'adapter pour simuler les nouveaux dispositifs fabriqués par les expérimentateurs. C'est avec ces trois caractéristiques en tête — facilité d'utilisation, performance, et flexibilité — que j'ai créé le « Sherbrooke QUantum pACKage » – *SQUACK* – en collaboration avec Steve Allen, du Centre de calcul scientifique de l'Université de Sherbrooke et avec des contributions d'autres membres de notre groupe de recherche.

SQUACK est une librairie de calcul pensée et optimisée à la base pour la simulation numériques de systèmes en électrodynamique quantique en circuit, c'est-à-dire de

systèmes quantiques composés d'un nombre variable de systèmes quantiques tels des systèmes à deux, trois ou plusieurs niveaux et des oscillateurs harmoniques. Il s'agit avant tout d'une librairie de matrices dont les opérations ont été optimisées pour tenir compte des caractères creux ou dense, hermitique ou non et réel ou complexe de différentes matrices apparaissant dans les équations maîtresses. Les opérations les plus communes de notre domaine, en particulier le calcul d'un commutateur ou d'un dissipateur ont par exemple été optimisées afin d'être effectuées en une seule opération plutôt qu'en plusieurs produits et sommes de matrices comme on doit faire si l'on utilise BLAS (*Basic Linear Algebra Subprograms*) [143], probablement la librairie la plus utilisée en calcul scientifique pour les opérations matricielles denses. *SQUACK* a aussi été optimisé pour pouvoir exploiter les architectures multi-processeurs des calculateurs récents en utilisant une parallélisation via OpenMP [144].

À quelques exceptions près que j'ai programmées, les parties de code de haute performance et les optimisations pointues ont été programmées par l'analyste de calcul Steve Allen. J'ai pour ma part réalisé l'encapsulation de ce code en une architecture orientée objet facilitant la création de programmes pour simuler des systèmes variés. *SQUACK* étant une librairie collaborative encore en développement, ce chapitre ne se veut pas une documentation exhaustive, mais plutôt une introduction aux fonctionnalités primaires que j'ai couramment utilisées pour obtenir les résultats numériques présentés dans cette thèse. Pour une référence plus à jour, le lecteur peut se référer à l'article en préparation [145] ou à la documentation qu'il est possible de générer directement à partir du code source de la librairie en utilisant l'outil *doxygen* [146].

À la section 4.1, je présente les simulations typiques que l'on veut réaliser, les défis qu'elles présentent, et les astuces que *SQUACK* utilise pour relever ces défis. À la section 4.2, je décris ensuite la structure de la librairie ainsi que les outils et bibliothèques externes dont *SQUACK* dépend. À la section 4.3, je présente les trois modules principaux de *SQUACK* : *Matrix*, *System Factories*, et *Utilities*. Finalement, à la section 4.4, je donne quelques exemples de calculs simples à réaliser avec *SQUACK*, appuyés par des extraits de code.

4.1 Simulations typiques

Le point de départ d'une simulation typique en électrodynamique quantique en circuit est l'équation maîtresse d'un système. Une telle équation s'obtient tel que décrit à

l'annexe B, en supposant que le système est couplé à des bains d'oscillateurs harmoniques que l'on élimine en calculant la trace sur leurs degrés de liberté. Une équation maîtresse prend alors la forme générale

$$\dot{\rho}(t) = -i \sum_n [H_n(t) \cdot \rho(t)] + \sum_m \gamma_m \mathcal{D}[O_m] \rho(t) \equiv \mathcal{L}(t) \rho(t), \quad (4.1)$$

où H_n sont différents hamiltoniens qui peuvent dépendre du temps, O_m sont des opérateurs du système qui représentent la dissipation à des taux γ_m , et $\mathcal{L}(t)$ est le superopérateur de Lindblad. En utilisant cette équation, plusieurs questions peuvent alors être posées. On peut par exemple calculer $\rho(t)$ pour $t \in [t_0, t_f]$ en intégrant l'équation maîtresse à l'aide de méthodes de type Runge-Kutta. Connaissant $\rho(t)$, on peut alors calculer la valeur moyenne de tout opérateur selon

$$\langle A \rangle (t) = \text{Tr} \{ A \rho(t) \}, \quad (4.2)$$

ou encore tout autre objet mathématique tel que les fonctions d'espace de phase. Ces intégrations temporelles sont le type principal de simulations que j'ai réalisées pour les résultats présentés dans ma thèse. Notamment, pour obtenir les résultats numériques présentés au chapitre 6, j'ai intégré l'équation maîtresse Eq. (5.3) sur un temps suffisamment long pour être dans un état stationnaire, puis extrait la population moyenne de l'état excité du qubit.

Le temps requis pour réaliser de telles simulations dépend de plusieurs paramètres : la taille de l'espace d'Hilbert, le temps d'intégration $t_f - t_0$ et la fréquence des oscillations. La taille de l'espace d'Hilbert du système est en principe infinie dès que l'on considère un oscillateur harmonique. En pratique, il sera tronqué à un nombre de photons suffisamment grand pour contenir la simulation en minimisant les erreurs. La taille réelle de l'espace d'Hilbert est alors dictée par le nombre de niveaux du ou des qubits, le nombre de qubits, le nombre de photons considérés pour l'oscillateur harmonique et le nombre d'oscillateurs harmoniques. Typiquement, pour les simulations que j'ai réalisées, la taille de l'espace d'Hilbert variait entre 100 et 1000. Ceci représente ainsi jusqu'à un million (1000×1000) équations différentielles complexes couplées à résoudre. Les deux autres paramètres — le temps d'intégration et la fréquence des oscillations — sont quant à eux déterminés par les fréquences caractéristiques du problème. Typiquement, pour les expériences d'électrodynamique quantique en circuits, les fréquences pertinentes vont de

$\omega_{\text{LF}} \sim 0.1$ MHz à $\omega_{\text{HF}} \sim 1$ GHz. On peut donc s'attendre à devoir intégrer l'équation différentielle sur $\omega_{\text{HF}}/\omega_{\text{LF}} \sim 10^4$ périodes d'oscillation si l'on désire atteindre l'état stationnaire du système, chaque période requérant une centaine de pas d'intégration. En terme de complexité — et si l'on n'exploite aucune symétrie des opérateurs du système — le temps d'une simulation augmente donc comme $\mathcal{O}(N^3 \times (t_0 - t_f) \times \omega_{\text{HF}}/\omega_{\text{LF}})$, où N est la taille de l'espace d'Hilbert.

SQUACK intervient alors à plusieurs niveaux pour faciliter les simulations. Tout d'abord, il permet de tirer profit des propriétés spécifiques aux systèmes simulés. La première et la plus évidente de ces propriétés est que l'équation maîtresse préserve l'hermiticité de la matrice densité. Il est donc possible de diminuer la quantité de calcul par un facteur deux en ne calculant que l'une des moitiés de la matrice densité. La deuxième propriété est que les opérateurs H_n et O_m ne sont pas des matrices complètement générales. Elles sont plutôt, pour la plupart, des matrices très creuses, constituées d'au plus quelques diagonales. En optimisant les opérations afin d'exploiter cette particularité, *SQUACK* est ainsi capable de réduire la puissance cubique (N^3) associée à un produit de matrices denses à une puissance quadratique (N^2) associée à un produit entre une matrice creuse et une matrice dense.

Une autre optimisation que *SQUACK* fournit concerne spécifiquement les oscillateurs harmoniques. Typiquement, il est nécessaire de conserver un nombre d'états de Fock bien supérieur à l'écart-type ΔN de l'état du champ. Dans les cas où $\langle N \rangle$ varie grandement, la façon la plus simple de simuler l'évolution est alors de tronquer l'espace d'Hilbert de sorte que sa taille soit beaucoup plus grande que le maximum, sur la durée de la simulation, de ΔN . Différentes fonctions de *SQUACK* permettent plutôt de redimensionner l'espace d'Hilbert au court de la simulation afin de l'adapter à la taille des fluctuations du champs. Ceci permet d'accélérer grandement les calculs pour les parties de la simulation qui ne requièrent pas un grand espace d'Hilbert.

Finalement, un dernier aspect où *SQUACK* intervient est pour l'écriture même des états et des opérateurs sous une forme matricielle. Le stockage de matrices sous forme creuse ou dense, hermitique ou générale, n'est pas une tâche triviale, d'autant plus que les équations maîtresses simulées sont susceptibles de changer rapidement dans un domaine aussi jeune (on pense par exemple à l'ajout d'un qubit, le changement du type de qubit ou l'ajout d'un résonateur). Pour faciliter cette tâche, *SQUACK* fournit un ensemble de classes qui permettent de construire la représentation matricielle appropriée de n'importe quel opérateur d'un oscillateur harmonique, d'un système à deux, trois ou

plusieurs niveaux, et de les manipuler aussi simplement que le permet un logiciel de calcul symbolique typique.

4.2 Généralités

Pour simuler numériquement et efficacement des équations maîtresses telles que l'équation (5.3), *SQUACK* exploite deux particularités des matrices impliquées afin d'alléger le problème. Tout d'abord, *SQUACK* considère que les opérateurs (H, a, σ, \dots) sont non-seulement creux (constitués d'une majorité de zéro), mais ont une représentation qui peut se limiter à quelques diagonales. Ensuite, plutôt que d'effectuer par exemple le calcul $i[A, \rho]$ en calculant $A\rho$, puis ρA et en soustrayant les deux résultats, *SQUACK* calcule les opérations telles que $i[A, \rho]$ et $\mathcal{D}[A]\rho$ en une seule étape. Cela permet de conserver et d'exploiter l'hermiticité des résultats (alors que les résultats intermédiaires ne sont pas hermitiques) afin de diviser par deux le nombre de calculs. Ces deux considérations permettent de grandement dépasser les performances que l'on obtiendrait avec la librairie BLAS [143] qui force l'utilisation de matrices denses et la combinaison de plusieurs opérations plus génériques telles que l'addition et la multiplication de matrices. Néanmoins, pour certaines opérations, notamment la multiplication de matrices denses, la diagonalisation et la décomposition en valeurs singulières, *SQUACK* peut utiliser directement les bibliothèques standard que sont BLAS [143] et LAPACK (*Linear Algebra Pack*) [147] afin de bénéficier de leur grande performance pour ces opérations.

4.2.1 Structure de la librairie

SQUACK est réparti en trois modules, appelés *Matrix*, *System Factories*, et *Utilities*. Le module *Matrix* contient les classes qui définissent les différents types de matrices et vecteurs utilisés dans *SQUACK* pour représenter les opérateurs et les états. Le module *System Factories* contient un ensemble de classes facilitant la création d'opérateurs ou d'états sous forme matricielle ou vectorielle pour des systèmes à deux, trois ou plusieurs niveaux et pour des oscillateurs harmoniques. Finalement, le module *Utilities* contient différentes classes permettant par exemple de faciliter certains calculs de paramètres, de calculer l'évolution d'un système ou de calculer des fonctions d'espace de phase telles que la fonction $Q(\alpha)$ et la fonction de Wigner.

Le répertoire racine de la librairie, qui peut être obtenu via le serveur SVN [148] du

TABLEAU 4.1 – Contenu du répertoire racine de *SQUACK*

Nom de fichier	Description
COPYING	Copie de la licence GNU GPL.
Doxyfile	Fichier de configuration de <i>doxygen</i> .
Makefile	Fichier Makefile pour compiler la librairie.
Makefile.conf.examples/	Répertoire d'exemples pour fichiers de configuration Makefile.conf.
demo/	Répertoire de programmes de démonstration.
documentation/	Répertoires où la documentation sera générée en utilisant <i>doxygen</i> .
generic_headers/	Répertoire contenant des fichiers d'entête génériques.
gsLopenmp/	Répertoire contenant le code source d'une version OpenMP de l'algorithme de Runge-Kutta-Fehlberg de la librairie GSL.
.	
gtests/	Répertoire contenant une série de tests unitaires à utiliser avec <i>Google Test</i>
matrix.h	Fichier d'entête du module <i>Matrix</i> .
matrix/	Répertoire contenant le module <i>Matrix</i> .
systemfactories.h	Fichier d'entête du module <i>System Factories</i> .
systemfactories/	Répertoire contenant le module <i>System Factories</i> .
utilities/	Répertoire contenant le module <i>Utilities</i> .
utilities.h	Fichier d'entête du module <i>Utilities</i> .

groupe, contient les fichiers et répertoires listés à la table 4.1. Outre les fichiers d'entête et les répertoires des trois modules mentionnés ci-dessus, il contient aussi la licence (GNU GPL) sous laquelle *SQUACK* est disponible, un fichier de configuration pour le générateur de documentation *doxygen* [146], des fichiers de configuration pour compiler la librairie (*Makefile*) et un ensemble de programmes de démonstration. Le répertoire racine contient aussi un ensemble de *tests unitaires*.

Définition 23 (test unitaire)

En informatique, un **test unitaire** est un test visant à s'assurer du bon fonctionnement d'une partie (d'une unité, d'un module) d'un programme ou d'une librairie.

Ces tests permettent de s'assurer du bon fonctionnement des différents modules. Le répertoire racine contient aussi une implémentation parallélisée de l'algorithme de Runge-Kutta-Felbergh utilisé par la librairie GNU Scientific Library (GSL) [149] et utilisé dans *SQUACK* pour intégrer les équations maîtresses.

4.2.2 Outils et bibliothèques dont *SQUACK* dépend

SQUACK dépend ou peut bénéficier de certaines bibliothèques bien établies et de certains outils. Je résume ces dépendances et utilisations dans cette section. Notez qu'il est possible de compiler *SQUACK* sans avoir les différentes bibliothèques ci-dessous, mais que les fonctionnalités qui dépendent de ces bibliothèques seront désactivées ou moins efficaces.

Tout d'abord, pour certaines opérations entre matrices denses, *SQUACK* peut être lié à BLAS [143]. Ce lien n'est cependant pas une dépendance formelle, et un code maison peut se substituer à BLAS si cette bibliothèque n'est pas disponible. Cela va cependant diminuer les performances des opérations entre matrices denses. Ensuite, certaines opérations permises par *SQUACK* dépendent de LAPACK [147]. C'est le cas entre autres de la diagonalisation, de la décomposition en valeurs singulières et du calcul de fonctions matricielles. Finalement, la décomposition en valeurs singulières de matrices creuses dépend de la bibliothèque ARPACK [150].

SQUACK dépend aussi de GSL [149] pour l'intégration d'équations maîtresses. La classe *MasterEquation* dont je traiterai à la section 4.4.2 utilise l'algorithme de Runge-Kutta-Fehlberg avec un pas de temps adaptatif pour intégrer l'équation maîtresse. GSL est aussi utilisé pour le calcul de certaines fonctions mathématiques spéciales, telle la fonction Gamma utilisée pour le calcul d'états cohérents.

Du côté des outils, la documentation de *SQUACK* peut être générée à partir du code source via le générateur de documentation *doxygen* [146]. La majeure partie du code de *SQUACK* supporte les architectures multi-processeurs à mémoire partagée avec une parallélisation via l'interface de programmation OpenMP [144] qui est supportée sur la majorité des compilateurs. Finalement, le bon fonctionnement de plusieurs fonctionnalités de *SQUACK* peut être testé grâce à des tests unitaires réalisés à l'aide des outils de *Google Test* [151].

4.3 Modules

Dans cette section, je décris les modules *Matrix*, *System Factories* et *Utilities* de *SQUACK*.

4.3.1 Matrices

Le module de matrices, appelé *Matrix*, définit les différents types de matrices et les opérations mathématiques de base. La nomenclature pour les types de matrices est de la forme $[ZD][DS][FU][GH]Matrix$, où seulement une lettre de chaque paire $[XY]$ est présente à la fois. La première lettre, Z ou D indique si la matrice est réelle (D pour *double*) ou complexe (Z pour complexe, suivant la nomenclature de BLAS et LAPACK). La deuxième lettre, D ou S indique si la matrice est dense (D) ou creuse (S pour *sparse* en anglais). La troisième lettre (F ou U) indique si la matrice est pleine (F pour *full* en anglais) ou si seulement le triangle supérieur (U pour *up* en anglais) est stocké. La quatrième lettre (G ou H) indique finalement si la matrice est générale (G) ou hermitique (H). Pour les vecteurs, *SQUACK* ne connaît que les vecteurs denses, qui peuvent être complexes ou réels, appelés *ZDVector* ou *DDVector* respectivement.

Le module est conçu en arbre d'héritage de sorte à minimiser la redondance de code. La structure est illustrée à la figure 4.1. Ainsi, sur cette figure, chaque flèche indique un lien de la classe mère vers la classe fille et les classes filles possèdent toutes les caractéristiques de leur(s) classe(s) mère(s).

Opérations mathématiques de base

Les opérations mathématiques entre matrices, vecteurs et scalaires, sont définies de façon à être aussi intuitives et simples à utiliser que possible. Ainsi, on peut multiplier deux matrices A et B avec l'opérateur « $*$ » (ex. $C = A * B$), les additionner avec l'opérateur « $+$ » (ex. $C = A + B$) ou les soustraire avec l'opérateur « $-$ » (ex. $C = A - B$). Les opérations entre matrices de même type sont toutes permises, de même que certaines opérations entre matrices de types différents. Pour la liste explicite, on peut se référer à la documentation générée à partir du code source. Les opérations entre scalaires et vecteurs ou matrices et entre matrices et vecteurs sont aussi définies avec les mêmes opérateurs.

Comme on veut simuler plusieurs systèmes couplés, il est aussi utile d'avoir l'opérateur de produit tensoriel. Dans *SQUACK*, le produit tensoriel prend la forme de l'opérateur

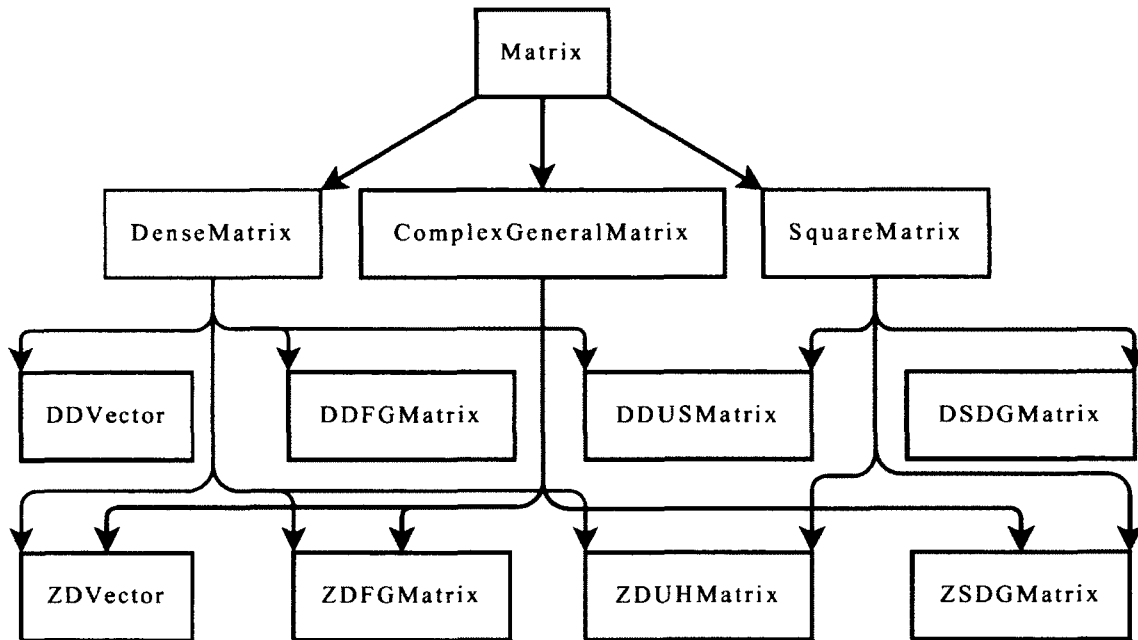


FIGURE 4.1 - Structure d'héritage du module *Matrix*. Les flèches indiquent les liens d'héritage. Ainsi, par exemple, *DenseMatrix* possède toutes les caractéristiques de *Matrix*, et *ZDFGMatrix* possède toutes les caractéristiques de *DenseMatrix* et de *ComplexGeneralMatrix*.

« \wedge ». Cet opérateur, lorsqu'utilisé sur des nombres, correspond au *ou exclusif*, ou *XOR* en C++, mais est redéfini dans *SQUACK* pour le produit tensoriel de matrices. Cet opérateur a malheureusement une basse priorité en C++. Par exemple, $A \wedge B + C \wedge D$ sera interprété comme $A \wedge (B + C) \wedge D$, car « \wedge » a une priorité plus basse que l'addition. Il est donc important d'utiliser les parenthèses lorsque nécessaire, par exemple $(A \wedge B) + (C \wedge D)$. Plusieurs exemples d'opérations mathématiques de base sont donnés au code 4.1.

Si *SQUACK* est compilé en le liant à LAPACK, certaines fonctions matricielles sont aussi définies pour les matrices carrées. Il s'agit de $\text{sqrt}(A)$ pour \sqrt{A} , $\text{exp}(A)$ pour e^A , $\text{pow}(A, x)$ pour A^x et $\text{log}(A)$ pour $\log(A)$ où \log désigne ici le logarithme naturel.

La classe *ZDUHMatrix*, qui est une matrice complexe, dense et hermitique, dont seul le triangle supérieur est stocké est utilisée pour représenter une matrice densité ρ ou de sa dérivée $\dot{\rho}$. Elle définit ainsi plusieurs opérations complexes — comme l'ajout d'un commutateur ou d'un dissipateur — qui ont été optimisées selon les propriétés des opérateurs impliqués.

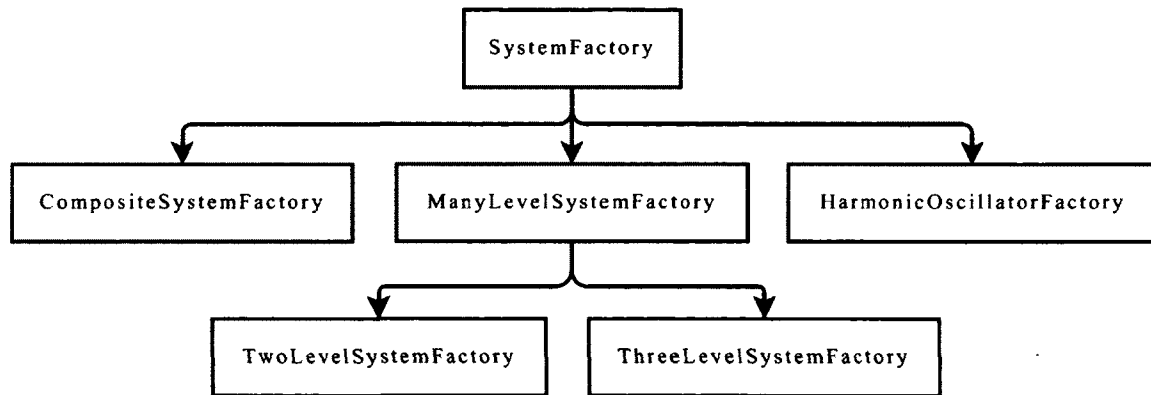


FIGURE 4.2 – Arbre d’héritage du module *System Factories*. Les flèches représentent les liens d’héritage des différentes classes.

4.3.2 Manufacture de systèmes

Le module *System Factories* contient des classes qui agissent comme manufacture de système, c’est-à-dire qu’ils peuvent créer les matrices qui sont nécessaires pour représenter les opérateurs et les états d’un système physique. Ce module est aussi conçu en arbre d’héritage, qui est représenté à la figure 4.2. Toutes les classes de ce module sont caractérisées par la taille de l’espace d’Hilbert associé à un système. Elles sont aussi caractérisées par un indice minimum et un indice maximum représentant le premier et le dernier niveau du système. Un oscillateur harmonique pourrait ainsi contenir les états de Fock $|0\rangle$ à $|n\rangle$, mais aussi les états $|m\rangle$ à $|n\rangle$ (avec $n > m$). Les opérateurs et états pour lesquels les classes du module permettent de créer les représentation matricielles varient selon la classe, mais on retrouve par exemple les opérateurs de Pauli et les opérateurs d’échelle pour un système à deux niveaux, les opérateurs d’échelle pour l’oscillateur harmonique, les projecteurs $|i\rangle\langle j|$ dans le cas de systèmes à plusieurs niveaux. Encore une fois, je référerai le lecteur à la documentation générée à partir du code source pour la liste exhaustive des possibilités.

L’exemple de code 4.1 présente un extrait du démo *demo_exe_simple.cpp* — présenté en totalité à l’annexe D — qui utilise les modules *System Factories* et *Matrix* pour créer les opérateurs et l’état ρ nécessaire afin d’écrire les hamiltoniens

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \frac{\omega_a}{2}\sigma_z + \omega_r a^\dagger a, \\
 H_I &= g a^\dagger \sigma_- + g^* a \sigma_+,
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

et l'état $\rho = |0\rangle\langle 0| \otimes |e\rangle\langle e|$ où $|0\rangle$ est le vide du résonateur et $|e\rangle$ est l'état excité du système à deux niveaux. L'espace d'Hilbert de l'oscillateur harmonique est tronqué de sorte à contenir les états $|n\rangle$ à $|m\rangle$. où $n=ho_bounds[0]$ et $m=ho_bounds[1]$ où ces deux éléments de tableau ont été assignés précédemment.

Code 4.1 – Exemple d'initialisation de matrices - demo/demo_exe_simple.cpp

```

16 HarmonicOscillatorFactory ho(ho_bounds[0],ho_bounds[1]);
17 TwoLevelSystemFactory tls;
18 DSDGMatrix idho = ho.Identity(), id2 = tls.Identity();
19 DSDGMatrix sz = idho^tls.operator_sz();
20 DSDGMatrix sm = idho^tls.operator_sm();
21 DSDGMatrix sp = idho^tls.operator_sp();
22 DSDGMatrix ad = ho.operator_ad()^id2;
23 DSDGMatrix N = ho.operator_N()^id2;
24 DSDGMatrix H_L0 = wa/2.0*sz + wr*N;
25 ZSDGMatrix H_I = g*(ad*sm)+conj(g)*(ad*sm).dagger();
26 ZDUHMatrix rho = ho.rho_state_fock(0)^tls.rho_state_e();

```

4.3.3 Utilitaires

Le module *Utilities* contient un mélange de fonctions et classes variées. On retrouve par exemple, dans les fichiers *Drive.h/.cpp* un ensemble de classes permettant de définir et de paramétrer différentes formes de signaux oscillants (amplitude constante, pulse gaussien, pulse quasi-trapézoïdal, etc...). Dans les fichiers *integration_utils.h/.cpp*, on retrouve des fonctions permettant d'intégrer une équation maîtresse en temps et facilitant le re-dimensionnement dynamique d'un espace d'Hilbert (voir section 4.4.2). Dans les fichiers *phase_space.h/.cpp*, on retrouve des fonctions permettant de calculer et d'écrire dans un fichier la fonction Q ou la fonction de Wigner d'un état. Dans les fichiers *TransmonParameters.h/.cpp*, on retrouve une classe permettant de calculer les énergies et couplages d'un qubit de type transmon [89].

Finalement, deux classes importantes sont les classes *GenericParameterFileInterface* et *MasterEquation*. La première facilite la lecture de fichiers de paramètres alors que la deuxième permet de facilement construire l'équation maîtresse qui sera intégrée par la suite. Je couvrirai pour le moment seulement *GenericParameterFileInterface* et l'utilisation de *MasterEquation* sera illustrée à la section 4.4.2.

GenericParameterFileInterface

La classe *GenericParameterFileInterface* permet de lire un fichier de paramètres et d'en extraire les valeurs simplement. La lecture est faite de façon résistante aux erreurs de types en utilisant le système d'exceptions de C++. Si par exemple une donnée de type « int » est attendue et qu'une donnée de type « double » est lue, une exception est lancée et l'utilisateur peut adapter le comportement de son programme. La classe permet d'éviter à l'utilisateur la gestion des flux d'entrée et la recherche dans le fichier. Tel que montré dans l'extrait du code D.1 présenté au code 4.2, l'objet de type *GenericParameterFileInterface* est créé simplement à partir du nom du fichier de paramètres. Par la suite, la reconnaissance des paramètres est gérée en appelant la fonction *GetParam<type>(nom)* avec le type et le nom du paramètre. Le paramètre lu peut être n'importe quel type supporté par l'opérateur « << » de C++ et la classe permet aussi de lire des tableaux dynamique (*vector* en C++) de paramètres via la commande *GetVector<type>(nom)*.

Code 4.2 – Exemple de lecture de fichier de paramètres - demo/demo_exe_simple.cpp

```

7   GenericParameterFileInterface gpfi("param_simple.dat");
8   double wa = gpfi.GetParam<double>("wa");
9   double wr = gpfi.GetParam<double>("wr");
10  vector<int> ho_bounds = gpfi.GetVector<int>("ho_bounds");
11  complex<double> g = gpfi.GetParam<complex<double> >("g");
12  vector<double> interval_bounds = gpfi.GetVector<double>("interval_bounds");
13  double gphi = gpfi.GetParam<double>("gphi");
14  double gamma = gpfi.GetParam<double>("gamma");
15  double nth = gpfi.GetParam<double>("nth");

```

Le fichier de paramètre correspondant pourrait ressembler au code 4.3.

Code 4.3 – Exemple de fichier de paramètres - demo/param_simple.dat

```

1  wa = 4000.0 //valid comment
2  wr = 4000.0 #valid comment
3  g = 15.0, 0.0 //comma or semi-colon separated real and imaginary part
4  ho_bounds : 0,3 //colon separated key-value is valid
5  interval_bounds : 0.0; 10.0 //comma or semi-colon separated array elements
6  gphi = 1.0
7  gamma = 4.0
8  nth = 0.5

```

4.4 Exemples de simulations

Dans cette section, j'illustre quelques calculs qui sont simples à réaliser avec *SQUACK*. Tous les exemples sont des extraits du code de démonstration présenté à l'annexe D. Les exemples sont basés sur un système à deux niveaux couplé à un oscillateur harmonique et décrit par l'équation maîtresse

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho \equiv -i[H, \rho] + \frac{\gamma\varphi}{2}\mathcal{D}[\sigma_z]\rho + \gamma(n_{th} + 1)\mathcal{D}[\sigma_-]\rho + \gamma n_{th}\mathcal{D}[\sigma_+]\rho, \quad (4.4)$$

où $H = H_0 + H_I$ et H_0 et H_I sont définis à la section 4.3.2.

Je montrerai que grâce à *SQUACK*, réaliser plusieurs calculs requiert seulement quelques lignes de code. C'est le cas par exemple du calcul de l'état stationnaire d'un système, de l'évolution temporelle, de la décomposition en valeurs et vecteurs propres, de fonctions de corrélation à deux temps et des fonctions Q et de Wigner d'un oscillateur harmonique. Cette simplicité d'utilisation alliée à la performance fait le succès de la librairie qui est maintenant utilisée par la majorité des membres de notre groupe ainsi que par le groupe d'Andreas Wallraff de l'ETH à Zurich.

4.4.1 Calcul de l'état stationnaire

Le premier calcul que l'on peut faire est celui de l'état stationnaire du système. Cet état stationnaire peut être calculé en résolvant l'équation $\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho = 0$. Si $\mathcal{L}\rho$ était un simple produit matriciel, cette équation pourrait se résoudre par la technique d'algèbre linéaire de décomposition en valeurs singulières. On résoudrait alors un système $AX = 0$. Cependant, \mathcal{L} étant un super-opérateur agissant des deux côtés de ρ , il faut modifier la notation légèrement. Ceci peut être fait en réécrivant la matrice densité ρ de dimension N comme un vecteur $\vec{\rho}$ de dimension N^2 . Si l'on classe les composantes du vecteur $\vec{\rho}$ de sorte que les lignes de ρ se suivent (par exemple, pour une matrice de taille 2, on aurait $\vec{\rho} = \{\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}\}$), on définit alors $spre(A) = \mathbf{1} \otimes A$ et $spost(A) = A^T \otimes \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est la matrice identité de taille N et \otimes est l'opérateur de produit tensoriel. On peut ensuite faire les remplacements [152]

$$\begin{aligned} A\rho &\Rightarrow spre(A)\vec{\rho}, \\ \rho A &\Rightarrow spost(A)\vec{\rho}, \\ A\rho B &\Rightarrow spre(A)spost(B)\vec{\rho}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

De cette façon, on peut réécrire le super-opérateur \mathcal{L} sous la forme d'une matrice L de taille N^2 et résoudre le problème $L\vec{\rho} = 0$ par une décomposition en valeurs singulières. C'est ce qui est fait dans le code 4.4, où j'utilise des fonctions *shamiltonian(H)* et *sdissipation(A)* qui combinent plusieurs *spost* et *spre* pour écrire les parties hamiltoniennes et dissipatives de l'équation maîtresse. L'exemple ci-dessous convertit l'opérateur $L = \text{slinblad}$ en matrice dense *ZDFGMatrix* avant de trouver l'état singulier. Cette conversion permet d'utiliser LAPACK, mais est plutôt lourde puisqu'une décomposition en valeurs singulières calcule $\mathcal{O}(N^3)$ opérations, qui devient $\mathcal{O}(N^6)$ dans notre cas puisque la taille de la matrice L est N^2 . Il est possible d'accélérer ce calcul en utilisant plutôt ARPACK qui permet de traiter les matrices éparées. Il suffit alors d'oublier la conversion en *ZDFGMatrix* et de compiler *SQUACK* en liant avec ARPACK.

Code 4.4 – Exemple de calcul d'état stationnaire - demo/demo_exe_simple.cpp

```

29 ZSDGMatrix slinblad = shamiltonian(H_L0+H_LI) + gphi/2*sdissipation(sz);
30 slinblad += gamma*(nth+1)*sdissipation(sm);
31 slinblad += gamma*(nth)*sdissipation(sp);
32 ZDUHMatrix rho_stationnary = ZDFGMatrix(slinblad).singularState(0);

```

4.4.2 Évolution temporelle de l'équation maîtresse

Un deuxième calcul que l'on peut faire simplement est celui de l'évolution temporelle. C'est ce qui est fait dans l'extrait de code 4.5 en utilisant la classe *MasterEquation*.

Code 4.5 – Exemple d'évolution temporelle - demo/demo_exe_simple.cpp

```

35 MasterEquation ME(ho.getSize()*tls.getSize());
36 ME.addHamiltonian(1.0,H_L0);
37 ME.addHamiltonian(1.0,H_LI);
38 ME.addDissipator(gphi/2,sz,idho^id2);
39 ME.addDissipator(gamma*(nth+1),sm,sp*sm);
40 ME.addDissipator(gamma*(nth),sp,sm*sp);
41 //solving the master equation
42 double t = interval_bounds[0], tf = interval_bounds[1], tk = t, intervalsize = 0.01, stepsize =
    1.0e-3;
43 while (t < tf) {
44     tk += intervalsize;
45     evolveSystem(t,tk,stepsize ,rho,&ME);
46     cout << t << "\t" << trace(rho,sz).real() << "\t" << trace(rho,N).real() << "\t" << trace(
        rho_stationnary,sz).real() << "\t" << trace(rho_stationnary,N).real() << endl;
47 }

```

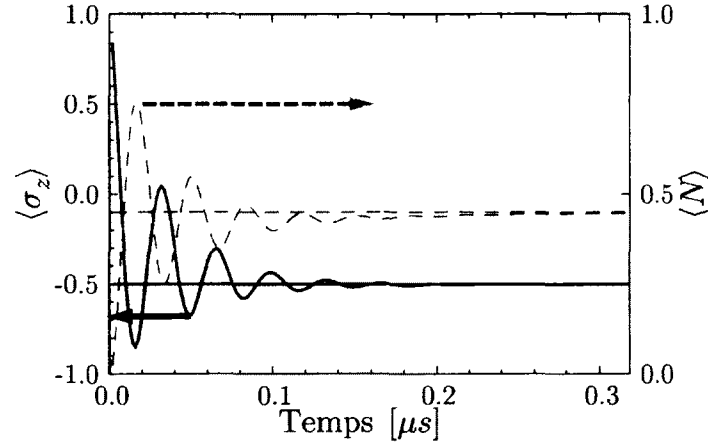


FIGURE 4.3 – Résultat de l'évolution temporelle telle que calculée par le code de démonstration de l'annexe D. Valeurs moyennes $\langle \sigma_z \rangle$ (ligne noire pleine) et $\langle a^\dagger a \rangle = \langle N \rangle$ (ligne orange pointillée) telles que calculées avec le code de démonstration donné à l'annexe D. Les lignes horizontales correspondent aux valeurs stationnaires telles que calculées via la décomposition en valeurs singulières à la section 4.4.1. L'état initial est un produit tensoriel avec un état de Fock $|1\rangle$ pour le résonateur et l'état excité pour le qubit.

La définition de l'objet *MasterEquation* est faite à la ligne 35 avec la taille des deux systèmes combinés (*ho* étant ici l'oscillateur harmonique et *tls* le système à deux niveaux). Aux lignes 36 à 40, l'équation maîtresse est construite en ajoutant un par un les différents termes de l'équation (4.4). Il est possible d'ajouter des hamiltoniens de différente forme (dépendants du temps ou non par exemple) grâce à la fonction *addHamiltonian()*, ainsi que des dissipateurs à l'aide de la fonction *addDissipator()*. Il est aussi possible d'ajouter des termes plus exotiques, mais pour la liste exhaustive, je réfèrerai le lecteur à la documentation de *SQUACK*. Après avoir défini les paramètres de l'intégration temporelle à la ligne 42, l'intégration est faite aux lignes 43 à 47. L'intégration se fait par intervalles via la fonction *evolveSystem()* qui fait évoluer le système entre *t* et *tk*. Après chaque intervalle, quatre valeurs moyennes $\langle A \rangle = \text{Tr} \{ \rho A \}$ sont calculées et écrites dans le flux de sortie standard *cout*. À l'intérieur d'un intervalle d'intégration $[t, tk]$, l'évolution se fait avec un schéma d'intégration de Runge-Kutta-Fehlberg avec pas de temps adaptatif.

Le résultat du programme de démonstration est illustré à la figure 4.3 où je trace les valeurs moyennes $\langle \sigma_z \rangle$ et $\langle a^\dagger a \rangle$ en fonction du temps, ainsi que leur valeur pour l'état stationnaire calculé par décomposition en valeurs singulières.

Redimensionnement dynamique de l'espace d'Hilbert

Lorsque l'on simule l'évolution temporelle d'un système composé d'un ou plusieurs oscillateurs harmoniques, on doit tronquer l'espace d'Hilbert infini de ceux-ci. Il faut alors s'assurer que la taille choisie est suffisante pour contenir l'état du système en minimisant l'erreur de troncature. Une façon de faire ceci est de le choisir beaucoup plus grand que le nombre moyen de photons $\langle a^\dagger a \rangle$ maximal qui sera présent dans le système au cours de la simulation. Ce choix se répercute cependant sur le temps de simulation qui croît comme le carré de la taille de l'espace d'Hilbert. *SQUACK* offre une façon plus efficace d'avoir un espace d'Hilbert de taille adaptée en fournissant des fonctions permettant d'analyser, puis de redimensionner l'espace d'Hilbert du ou des oscillateur(s) harmonique(s) pour garder un nombre minimal mais suffisant d'états de Fock. Comme ce type de code est plus compliqué, j'expliquerai ici seulement le principe et le lecteur peut se référer au programme de démonstration `demo/demo_exe_2ls+cavity_adapt.cpp` disponible avec *SQUACK* pour un exemple.

Les fonctions nécessaires au redimensionnement dynamique de l'espace d'Hilbert sont situées dans les fichiers `src/integration_utils.h/.cpp`. Ces fonctions doivent savoir quels éléments de la matrice densité correspondent à un oscillateur harmonique. Pour ce faire, elles requièrent un *CompositeSystemFactory*, qui est une classe du module *System Factories* qui ne stock pas les informations d'un système en particulier, mais plutôt la combinaison de tous les sous-systèmes et en particulier leurs positions dans la matrice ou en d'autres mots, l'ordre des produits tensoriels, par exemple $\rho_{\text{qubit}} \otimes \rho_{\text{oscil}}$ ou $\rho_{\text{oscil}} \otimes \rho_{\text{qubit}}$.

Le coeur de la procédure est la fonction `analyzeAndResize()`. Cette fonction prend en entrée un *CompositeSystemFactory*, une matrice densité et un ratio de probabilité P_{ratio} . La fonction calcule ensuite la probabilité $P_n = \langle n | \rho | n \rangle$ pour chaque état de Fock $|n\rangle$. Elle trouve ensuite le maximum $P_{\text{max}} = \max_n P_n$ et compare cette probabilité aux probabilités P_{ext} des extrémités de la distribution (pour le plus petit et le plus grand n de l'espace d'Hilbert tronqué). La fonction fait alors l'une de deux actions en fonction du ratio $P_{\text{ext.}}/P_{\text{max}}$.

Si $P_{\text{ext.}}/P_{\text{max}} > P_{\text{ratio}}$, alors les extrémités de la distribution ont trop de poids relatif et l'espace d'Hilbert n'est pas suffisamment grand. La fonction augmente alors la taille de l'espace en ajoutant des rangées et des colonnes vides à la matrice densité. Le nombre de colonnes et de rangées ajoutées est ajusté en supposant une décroissance exponentielle de $P_{\text{ext.}}$ vers les extrémités. Dans le cas contraire, si $P_{\text{ext.}}/P_{\text{max}} < P_{\text{ratio}}$, l'espace d'Hilbert

est trop grand. La fonction enlève alors des rangées et colonnes jusqu'à ce que le ratio P_{ratio} soit atteint.

Lorsque l'espace d'Hilbert est redimensionné, il faut alors reconstruire les opérateurs de l'équation maîtresse pour ajuster leur taille à la matrice densité. De plus, selon le ratio de probabilité calculé, il est possible si nécessaire de recommencer le calcul de l'intervalle d'intégration précédent si l'erreur est jugée trop grande. En répétant cette procédure — qui requiert un temps du même ordre qu'un seul pas de temps d'intégration — suffisamment fréquemment lors de l'intégration de l'équation maîtresse il est possible d'avoir un espace d'Hilbert dont la taille est minimale et suffisante tout au long de l'intégration.

4.4.3 Diagonalisation

Diagonaliser une matrice est aussi très simple avec *SQUACK*. Il suffit, tel qu'illustré à l'extrait de code 4.6, d'appeler la fonction *eigensystem()* avec comme arguments une matrice complexe générale *ZDFGMatrix* qui contiendra les vecteurs propres et une matrice creuse réelle *DSDGMatrix* qui contiendra les valeurs propres. Cette fonction n'est disponible que pour les matrices hermitiques. Les fonctions *eigenvalues()* et *eigenvecs()* peuvent aussi être utilisées si seulement les valeurs ou les vecteurs propres sont requis. Ces fonctions sont en réalité des encapsulations de fonctions de LAPACK pour la diagonalisation et sont donc aussi efficaces que l'implémentation de LAPACK utilisée. Cependant, les détails de gestion de mémoire et d'allocation d'espace de travail typiques à LAPACK sont gérés à l'interne. Ces fonctions sont aussi utilisées pour calculer les fonctions matricielles.

Code 4.6 Exemple de diagonalisation - demo/demo_exe_simple.cpp

```
50 ZDFGMatrix eigenvecs;
51 DSDGMatrix eigenvals;
52 (H_L0+H_L1).eigensystem(eigenvals,eigenvecs);
```

4.4.4 Calcul de fonctions de corrélation à deux temps

SQUACK fournit aussi une façon simple de calculer les fonctions de corrélation à deux temps telles que

$$f(t) = \langle \sigma_-(t)\sigma_+(0) \rangle = \text{Tr} \{ \sigma_-(t)\sigma_+(0)\rho \}. \quad (4.6)$$

Cette fonction de corrélation peut être calculée en utilisant le théorème de régression quantique énoncé à la section 3.3. C'est ce qui est fait dans *SQUACK* dans la fonction *computeTwoTimesCorrelationFunction()* qui prend en entrée un tableau des temps $\{t_i\}$ pour lesquels on veut calculer $f(t_i)$, un pas de temps initial (10^{-5} dans l'extrait de code 4.7), les opérateurs σ_- et σ_+ , la matrice densité de l'état initial, et l'équation maîtresse décrivant l'évolution de la matrice densité. Les résultats $f(t_i)$ sont alors retournés dans le tableau *output_array*. Le résultat de ce type de calcul pourrait alors être utilisé pour calculer le spectre d'absorption en calculant la transformée de Fourier de $f(t_i)$. Dans l'exemple de code 4.7, $f(t_i)$ est calculé pour 100 valeurs de t_i séparées de 0.003.

Code 4.7 – Exemple de calcul de fonction de corrélation - demo/demo_exe_simple.cpp

```
56  int ntimes = 100;
57  double times[ntimes];
58  for (int i=0; i<ntimes; i++) times[i] = i*0.003;
59  complex<double> output_array[ntimes];
60  computeTwoTimesCorrelationFunction(ntimes,times,1e-5,sm,sp,rho,&ME,output_array);
```

4.4.5 Calcul de fonction Q et de Wigner

Finalement, un dernier exemple est le calcul de la fonction Q ou de la fonction de Wigner qui correspond à la matrice densité d'un oscillateur harmonique. Ces fonctions peuvent être calculées avec *SQUACK* grâce aux fonctions *computeQFunction()* et *computeWignerFunction()* tel que montré dans l'extrait de code 4.8.

Code 4.8 – Exemple de calcul de fonction Q et de Wigner - demo/demo_exe_simple.cpp

```
70  vector<vector<Point3D> > F;
71  computeQFunction(F,ho,ho.rho_state_fock(1),grid);
72  computeWignerFunction(F,ho,ho.rho_state_fock(1),grid);
```

Ces deux fonctions reçoivent en paramètre d'entrée un vecteur bidimensionnel d'objets *Point3D*. Ces objets sont de simples structures contenant les coordonnées x , y et z d'un point en trois dimensions. La fonction Q ou la fonction de Wigner est alors calculée pour tous les x et y sur une grille de taille et de pas définis dans le plan complexe. L'initialisation de la grille est illustrée dans le code complet à l'annexe D. Après l'appel de la fonction *computeQFunction()* ou *computeWignerFunction()*, on peut alors accéder à la coordonnée x , y ou z des fonctions via le vecteur bidimensionnel avec $F[i][j].x$, $F[i][j].y$, ou $F[i][j].z$ où i et j sont les indices des sites de la grille.

Chapitre 5

Modèle réduit

It can scarcely be denied that the supreme goal of all theory is to make the irreducible basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of a single datum of experience.

— Albert Einstein [125]

Cette phrase a été énoncée par Einstein en 1933 lors d'un séminaire Herbert Spencer à Oxford avant que le texte du séminaire soit publié dans le journal *Philosophy of Science* en 1934 [125]. Einstein parlait évidemment ici de la recherche d'une théorie fondamentale composée d'aussi peu d'éléments que possible qui permettrait d'expliquer toutes les expériences. Ainsi, il s'agissait de partir de quelques éléments simples pour arriver à une théorie complète de la physique moderne.

Je trouve que cette phrase explique tout aussi bien le processus inverse que je poursuis dans ce chapitre, soit de partir du modèle décrivant le système complet résonateur plus qubit et d'arriver à un modèle réduit plus simple. L'objectif dans ce chapitre est ainsi de développer un modèle réduit qui permette de décrire d'un côté la dynamique du qubit et de l'autre côté celle du champ du résonateur. J'obtiens ce modèle dans le but de représenter les résultats expérimentaux obtenus en particulier par le groupe de quantronique du CEA-Saclay présentés partiellement dans l'article [75] et que j'explorerai plus en détail au chapitre 6. Ce sont ces résultats qui ont motivé l'élaboration du modèle et c'est à eux que je le comparerai ultimement. Pour cette comparaison, je veux conserver le maximum d'information sur les effets du qubit sur le résonateur et vice-versa, poursuivant l'idée

d'Einstein que tout devrait être rendu aussi simple que possible, mais sans plus, de sorte à bien représenter toutes les données expérimentales.

Pour ce faire, j'utiliserai les différentes transformations unitaires présentées à la section 3.1 ainsi que l'élimination adiabatique présentée à la section 3.2. Cependant, puisque la plupart de ces transformations ne peuvent être calculées qu'approximativement, à chaque étape, on perdra une partie de l'information. Il est donc important de considérer l'ordre dans lequel on applique les transformations afin de ne pas perdre d'informations importantes. Ainsi, après avoir rappelé le modèle initial à partir duquel on veut obtenir le modèle réduit à la section 5.1, j'expliquerai à la section 5.2 les points à considérer pour déterminer l'ordre dans lequel les transformations doivent être appliquées. Je détaillerai ensuite les étapes menant au modèle réduit dans les sections suivantes.

5.1 Modèle initial

Tel que présenté au chapitre 2 et illustré à la figure 2.5 de la page 35, le système auquel on s'intéresse est constitué d'un qubit supraconducteur à plusieurs niveaux couplé par une interaction dipolaire à un résonateur coplanaire rendu non linéaire par l'insertion d'un élément Josephson dans le conducteur central. Ce système est décrit par l'hamiltonien

$$H_s = H_q + H_r + H_I + H_d, \quad (5.1)$$

où les différents hamiltoniens sont donnés au chapitre 2 et repris ci-dessous

$$H_q = \sum_{i=0}^{M-1} \omega_i \Pi_{i,i} \equiv \Pi_\omega, \quad (5.2a)$$

$$H_r = \omega_r a^\dagger a + \frac{K}{2} a^{\dagger 2} a^2 + \frac{K'}{3} a^{\dagger 3} a^3, \quad (5.2b)$$

$$H_I = \sum_{i=0}^{M-2} g_i (a^\dagger + a) (\Pi_{i,i+1} + \Pi_{i+1,i}). \quad (5.2c)$$

$$H_d = \sum_d \epsilon_d(t) e^{-i\omega_d t} a^\dagger + \epsilon_d^*(t) e^{i\omega_d t} a. \quad (5.2d)$$

où $\Pi_{i,j} = |i\rangle \langle j|$ pour les états $\{|i\rangle\}$ du qubit, ϵ_d est l'amplitude du signal d'excitation d à la fréquence ω_d , K et K' sont les constantes Kerr du résonateur. ω_r est la fréquence du résonateur, ω_i sont les fréquences de transition du qubit. $\Pi_x \equiv \sum_{i=0}^{M-1} x \Pi_{i,i}$ et M est

le nombre de niveaux du qubit. On permettra à l'un des signaux d'excitation $\{d\}$ — le signal de spectroscopie s — d'être à une fréquence proche de celle d'une des transitions du qubit $\omega_{d=s} \sim \omega_{i+1,i}$ alors que tous les autres signaux sont à des fréquences éloignées des fréquences de transition du qubit et éloignées les unes des autres. On supposera aussi que les paramètres placent le système dans le régime dispersif où $|\omega_{i+1,i} - \omega_r| \gg |g_i|$.

Pour modéliser la dissipation dans le système, on considèrera quatre canaux de dissipation. Les trois principaux sont la perte de photons du résonateur à un taux $\kappa = \omega_r/Q$ où Q est le facteur de qualité du résonateur, la relaxation du qubit à un taux γ et le déphasage du qubit à un taux γ_φ . Par soucis de généralité, on ajoute aussi un canal de dissipation du résonateur par lequel deux photons peuvent être perdus à la fois, à un taux κ_{NL} , qui peut être présent dans les systèmes ayant une non-linéarité Kerr [79]. Cependant, comme il n'y avait pas d'évidence que ce type de processus soit présent pour les résultats expérimentaux utilisés comme base de comparaison pour cette thèse, κ_{NL} sera fixé à zéro pour toutes les comparaisons ainsi que pour les simulations numériques. En considérant ces canaux de dissipation, l'équation maîtresse du système prend la forme

$$\dot{\rho} = -i[H_s, \rho] + \kappa \mathcal{D}[a]\rho + \kappa_{\text{NL}} \mathcal{D}[a^2]\rho + \gamma \sum_{i=0}^{M-2} \left(\frac{g_i}{g_0}\right)^2 \mathcal{D}[\Pi_{i,i+1}]\rho + 2\gamma_\varphi \mathcal{D}[\Pi_\varepsilon]\rho. \quad (5.3)$$

Cette équation maîtresse peut être obtenue en suivant la méthode décrite à l'annexe B.

En écrivant cette équation maîtresse, j'ai fait plusieurs suppositions. J'ai d'abord supposé que le déphasage du qubit est dû au bruit dans un paramètre de contrôle X qui cause des fluctuations dans les fréquences du qubit. L'amplitude de ces fluctuations est reliée à la susceptibilité du niveau i normalisée à celle du premier niveau excité $i = 1$

$$\varepsilon_i = \frac{\partial(\omega_i - \omega_0)}{\partial X} \times \left(\frac{\partial(\omega_1 - \omega_0)}{\partial X}\right)^{-1}. \quad (5.4)$$

Le paramètre X pourrait par exemple être la charge de grille n_g dans le cas d'une boîte de Cooper, ou encore le flux Φ à l'intérieur du SQUID d'un transmon [89]. Ce modèle phénoménologique du déphasage peut être remplacé par un modèle microscopique impliquant une interaction du type $\sigma_- \sigma_+ b^\dagger b$, c'est-à-dire une interaction où un quanta est échangé deux fois avec un bain, perdant l'information de phase dans le processus. Une telle description théorique a été donnée par Carmichael [60]. Bien que plus satisfaisante, cette approche microscopique donne les mêmes résultats que l'approche d'un paramètre

de contrôle fluctuant. J'ai aussi supposé que le bruit qui cause la relaxation du qubit se couple à celui-ci de la même façon que le résonateur, soit par une interaction dipolaire de sorte que le taux de relaxation γ_i pour la transition $|i+1\rangle \rightarrow |i\rangle$ est tel que $\gamma_i/\gamma_0 = |g_i/g_0|^2$.

J'ai enfin supposé que le spectre de bruit des différents canaux est blanc. Cette approximation peut être relaxée en demandant que le bruit soit localement blanc — c'est-à-dire blanc seulement sur des intervalles de fréquences suffisamment grands autour de chacune des fréquences de transition [115, 127] — plutôt que globalement blanc. On obtient alors la même équation maîtresse, sauf que les taux de relaxation des différents niveaux du qubit dépendent du bruit autour de chacune des fréquences de transition. Cependant, même cette contrainte relâchée est insuffisante pour une bonne description du déphasage. En effet, le déphasage est dû au bruit à basse fréquence (puisqu'il n'implique pas d'échange d'énergie), qui est généralement un bruit en $1/f$. Puisque le spectre du bruit diverge, il ne peut pas être considéré même comme localement blanc. Il faut alors être plus prudent lors du calcul du taux de déphasage en tenant compte du spectre du bruit. Ceci a été fait pour un qubit à deux niveaux [153] ainsi que pour le déphasage des deux premiers niveaux du transmon [89]. Néanmoins, dans le cadre de cette thèse, on s'intéressera seulement aux deux premiers niveaux du transmon et la modélisation ci-dessus sera suffisante.

5.2 Ordre des transformations

Le but de ce chapitre est d'obtenir une description adéquate de la dynamique du qubit lorsque le résonateur auquel il est couplé est excité par plusieurs signaux. Pour considérer la description obtenue comme adéquate, le modèle devra reproduire de façon quantitative différentes données mesurées expérimentalement et simulées numériquement. Je présente à la figure 5.1 les données à calculer et leurs inter-dépendances¹. Les cases bleues sont les quantités de départ du modèle, qui sont ajustées pour correspondre aux valeurs expérimentales. Les cases vertes sont les quantités que l'on veut ultimement calculer correctement. Les cases rouges, oranges et jaunes sont les données intermédiaires en ordre d'importance. Par exemple, les cases rouges sont plus importantes car plusieurs

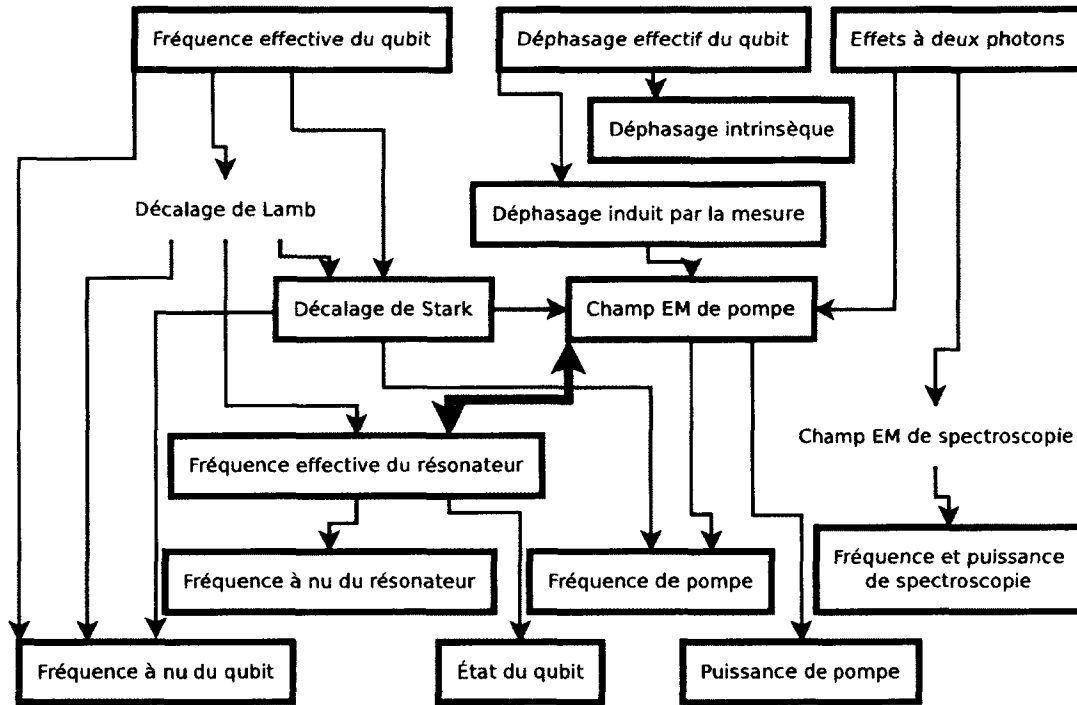


FIGURE 5.1 – Représentation schématique du modèle. Les cases bleues sont les quantités de départ, qui ne sont pas calculées par le modèle, mais plutôt ajustées pour correspondre aux valeurs expérimentales. Les cases vertes sont les quantités que l'on veut ultimement calculer correctement. Les cases rouges sont les cases critiques à calculer correctement, car la majorité des autres cases dépend d'elles. Les cases oranges et jaunes sont des données un peu moins critiques, dont moins de résultats dépendent. La double-flèche en trait épais représente la relation non linéaire entre le champ de pompe et la fréquence effective du résonateur.

autres données dépendent de celles-ci.

La première quantité à calculer correctement est la fréquence de transition effective du qubit. Celle-ci est décalée de la fréquence du qubit à nu par deux effets. Il y a d'abord le décalage de Stark qui dépendra du champ électromagnétique créé dans le résonateur par le signal de pompe. Dans le cas d'un résonateur Kerr, comme ce champ électromagnétique est créé par un signal qui peut être décalé de la fréquence ω_r , l'effet Stark calculé devra ainsi dépendre de la fréquence de pompe et non de la fréquence du résonateur. Il y a ensuite le décalage de Lamb, qui est dû aux fluctuations quantiques du champ à la fréquence effective du résonateur. Celui-ci dépendra donc de la fréquence effective du qubit décalée par l'effet Stark dû au champ classique ainsi que de la fréquence effective

¹Il n'est pas nécessaire de comprendre toutes ces relations à ce moment. Ce diagramme sert à distinguer les quantités les plus cruciales des autres.

du résonateur qui dépend de l'amplitude du champ électromagnétique via la non-linéarité Kerr.

La deuxième quantité est la largeur de la transition du qubit ou, en d'autres mots, le taux de déphasage effectif du qubit. Celui-ci est principalement modifié par le déphasage induit par la mesure tel qu'expliqué à la section 2.4.3. Ce déphasage a été étudié pour un résonateur linéaire par l'équipe de Yale [99, 120]. Avec un résonateur non linéaire, ce déphasage a été étudié par l'équipe de Saclay en collaboration avec notre groupe et Andrew C. Doherty de l'Université de Sydney [75]. Ces résultats seront présentés à la section 6.2.

Finalement, on sait qu'en optique classique, la non-linéarité permet la conversion de fréquence et le mélange d'ondes [154, 155]. Dans la situation où le champ électromagnétique est couplé à un qubit, ceci devrait permettre l'excitation du qubit à des fréquences autres que sa fréquence naturelle, donnant lieu à des bandes latérales. De telles bandes ont déjà été observées avec un résonateur linéaire, mais en présence de trois signaux [156]. On verra ici que ces mêmes bandes latérales peuvent être excitées avec un résonateur non linéaire en présence de seulement deux signaux, le troisième étant fourni par une conversion de fréquence permise par la non-linéarité.

Puisque tous ces effets dépendent du champ de pompe, il est important de calculer celui-ci en premier et aussi exactement que possible. Puisque le champ de pompe dépend de la fréquence effective du résonateur dépendant elle-même de l'état du qubit, on peut voir le champ de pompe comme amplifiant le « signal » du qubit (le signal étant ici le décalage dispersif de la fréquence du résonateur). Cependant, puisque la dépendance est non linéaire, il faudra que le modèle aille au-delà d'une théorie de réponse linéaire, en particulier près du seuil de bifurcation et du point critique du résonateur Kerr. La transformation qui permet de réaliser cela est la transformation de polaron, qui est donc la première que je calculerai. Je calculerai ensuite la dépendance envers l'état du qubit de la fréquence effective du résonateur. J'utiliserai pour ce faire la transformation dispersive classique, qui donnera en même temps le décalage de Stark du qubit. J'appliquerai ensuite la transformation dispersive quantique afin d'obtenir le décalage de Lamb du qubit dû aux fluctuations quantiques autour du champ moyen classique calculé précédemment, puis finalement la transformation de squeeze afin d'éliminer la non-linéarité restante et obtenir les termes qui donneront les bandes latérales. On note que ces transformations ont été discutées à la section 3.1.

5.3 Décalage de Stark et champ de pompe

Le décalage de Stark et le champ de pompe sont calculés grâce aux transformations de polaron et dispersive classique respectivement présentées aux sections 3.1.3 et 3.1.4.

5.3.1 Transformation de polaron

Je débute en appliquant la transformation de polaron \mathbb{P} aux hamiltoniens (5.2) en utilisant les résultats (3.18)–(3.20), ce qui donne

$$H'_q = \Pi_\omega - \text{Im}[\Pi_\alpha \dot{\Pi}_\alpha^*], \quad (5.5a)$$

$$H'_r \approx \omega_r (a^\dagger a + \Pi_\alpha^* a + \Pi_\alpha a^\dagger + |\Pi_\alpha|^2) \quad (5.5b)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{K}{2} \left[|\Pi_\alpha|^4 + (2a^\dagger |\Pi_\alpha|^2 \Pi_\alpha + \text{c.h.}) + 4a^\dagger a |\Pi_\alpha|^2 + (a^\dagger{}^2 \Pi_\alpha^2 + \text{c.h.}) \right] \\ & + \frac{K'}{3} \left[|\Pi_\alpha|^6 + (3a^\dagger |\Pi_\alpha|^4 \Pi_\alpha + \text{c.h.}) + 9a^\dagger a |\Pi_\alpha|^4 + (3a^\dagger{}^2 |\Pi_\alpha|^2 \Pi_\alpha^2 + \text{c.h.}) \right], \\ H'_I & \approx \sum_{i=0}^{M-2} g_i [a^\dagger + a] [\Pi_{i,i+1} + \Pi_{i+1,i}] + g_i [(\Pi_\alpha^* + \Pi_\alpha) \Pi_{i,i+1} + \Pi_{i+1,i} (\Pi_\alpha^* + \Pi_\alpha)] \quad (5.5c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{i=0}^{M-2} g_i \{ (\Pi_\alpha^* + \Pi_\alpha) [(\beta_i a^\dagger \Pi_{i,i+1} + \beta_i^* a \Pi_{i+1,i}) - (\beta_i^* a \Pi_{i,i+1} + \beta_i a^\dagger \Pi_{i+1,i})] \}, \\ H'_d & = \sum_d [\epsilon_d e^{-i\omega_d t} a^\dagger + \epsilon_d^* e^{i\omega_d t} a] + [\epsilon_d e^{-i\omega_d t} \Pi_\alpha^* + \epsilon_d^* e^{i\omega_d t} \Pi_\alpha] + (-i \dot{\Pi}_\alpha a^\dagger + i \dot{\Pi}_\alpha^* a), \quad (5.5d) \end{aligned}$$

où j'ai inclus le premier terme de l'hamiltonien $H_{\mathbb{P}}$ dans H'_d et le second dans H'_q . Pour obtenir ces hamiltoniens, j'ai fait quelques approximations. Tout d'abord, j'ai supposé que je pouvais négliger les termes comportant plus de deux opérateurs d'échelle a ou a^\dagger dans H'_r . Cette approximation est valide si

$$|\langle a \rangle| \ll |\langle \Pi_\alpha \rangle| \quad (5.6)$$

dans la base transformée. Cette approximation sera bien respectée si la transformation de polaron est telle qu'elle permet d'éliminer tout signal d'excitation du résonateur, i.e. si elle élimine H'_d . En effet, dans ce cas, la population du résonateur dans la base transformée sera causée uniquement par des effets thermiques ou par des termes d'ordre supérieur (liés à la non-linéarité), que l'on supposera faibles.

Pour H'_J , j'ai ensuite fait l'approximation dite de faible distinguabilité

$$|\beta_i| \equiv |\alpha_{i+1} - \alpha_i| \ll 1, \quad (5.7)$$

afin d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\dagger a^\dagger \Pi_{i,i+1} \mathbb{P} &= (a^\dagger + \Pi_\alpha^*) \Pi_{i,i+1} D(\beta_i) e^{-i\text{Im}[\alpha_{i+1}^* \alpha_i]}, \\ &\approx (a^\dagger + \Pi_\alpha^*) \Pi_{i,i+1} (1 + \beta_i a^\dagger - \beta_i^* a), \\ &\approx a^\dagger \Pi_{i,i+1} + \Pi_\alpha^* \Pi_{i,i+1} + \Pi_\alpha^* \Pi_{i,i+1} \beta_i a^\dagger - \Pi_\alpha^* \Pi_{i,i+1} \beta_i^* a. \end{aligned} \quad (5.8)$$

où j'ai gardé seulement les termes dominants en $|\beta_i|$. Cette approximation est la plus limitative du modèle obtenu dans ce chapitre. La distinguabilité est approximativement proportionnelle au décalage dispersif de la fréquence du résonateur par le qubit (le signal du qubit). Cependant, même si l'approximation ci-dessus limite l'amplitude de β_i , elle n'impose pas une dépendance linéaire entre β_i et le signal du qubit. On verra en fait au chapitre 6 que la dépendance non linéaire est cruciale pour obtenir un accord quantitatif avec l'expérience.

Suite à la transformation de l'hamiltonien, on doit transformer les termes dissipatifs de l'équation maîtresse (5.3) afin de les exprimer dans la même base. Le premier terme dissipatif se transforme en utilisant l'expression pour $a' = \mathbb{P}^\dagger a \mathbb{P}$ [126]

$$\mathcal{D}[a']\rho' = \mathcal{D}[a]\rho' + \mathcal{D}[\Pi_\alpha]\rho' - i\frac{1}{2} [i(\Pi_\alpha^* a - \Pi_\alpha a^\dagger), \rho'] + a[\rho', \Pi_\alpha^*] + [\Pi_\alpha, \rho'] a^\dagger. \quad (5.9)$$

Parmi les termes de droite, le premier est la dissipation du résonateur qui demeure inchangée et le deuxième mènera au déphasage induit par la mesure [120]. J'ai réécrit le troisième terme de façon à correspondre à une évolution hamiltonienne. Ce terme pourra être combiné à H'_J afin de déterminer la bonne valeur de Π_α qui permet d'éliminer toute excitation du résonateur. Finalement, les deux derniers termes agissent en réduisant le nombre de quanta de l'état ρ . Si la transformation de polaron est telle que ρ est dans l'état fondamental, ces deux termes s'annulent. Je les laisserai donc tomber. Cette approximation est exacte dans le cas d'un résonateur linéaire dans le régime dispersif [120] et est réaliste tant que le champ électromagnétique est seulement faiblement comprimé.

Le deuxième terme de l'équation maîtresse (5.3) se transforme comme

$$\begin{aligned} \mathcal{D}[a'a']\rho' &\approx \mathcal{D}[\Pi_\alpha^2]\rho' + 4\mathcal{D}[a\Pi_\alpha]\rho' \\ &- i [i(a|\Pi_\alpha|^2\Pi_\alpha^* - a^\dagger|\Pi_\alpha|^2\Pi_\alpha), \rho'] + 2 [\Pi_\alpha^2, \rho'] a^\dagger\Pi_\alpha^* + 2a\Pi_\alpha [\rho', \Pi_\alpha^{*2}] \\ &- i\frac{1}{2} [i(\Pi_\alpha^{*2}a^2 - \Pi_\alpha^2a^{\dagger 2}), \rho'] + a^2 [\rho', \Pi_\alpha^{*2}] + [\Pi_\alpha^2, \rho'] a^{\dagger 2}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

où j'ai négligé les termes contenant plus de deux opérateurs d'échelle. Le premier terme correspond à du déphasage induit par la mesure, mais via le canal de perte à deux photons du résonateur. Le deuxième terme correspond à un taux de perte de photons qui dépend de l'amplitude du champ électro-magnétique dans le résonateur. Le premier terme de la deuxième ligne est de forme hamiltonienne et sera éliminé par le choix de Π_α . Le premier terme de la troisième ligne sera traité en même temps que les autres termes quadratiques à la section 5.6. Finalement, les derniers termes des deuxième et troisième lignes seront négligés en supposant à nouveau que l'état ρ' du système est près du fondamental dans cette base transformée.

Pour le troisième dissipateur de l'équation maîtresse (5.3), il a été montré qu'en éliminant le résonateur (ce que je ferai ultérieurement), la transformation \mathbb{P} n'a pas d'impact sur la dynamique du qubit [126]. Ceci est lié au fait que, lorsque l'on calcule la trace sur le résonateur, la cyclicité de la trace permet d'éliminer les opérateurs $D(\beta_i)$ qui seraient autrement présents. Finalement, le quatrième dissipateur n'est pas affecté par la transformation \mathbb{P} puisque Π_x commute avec \mathbb{P} .

5.3.2 Réécriture des hamiltoniens

Afin de mieux séparer les effets, je réécris les hamiltoniens (5.5) de façon à les grouper selon le nombre d'opérateurs d'échelle du résonateur qu'ils contiennent. Je définis ainsi

$$\begin{aligned} H'_0 &\equiv \Pi_\omega + \sum_{i=0}^{M-2} [g_i\alpha_i\Pi_{i+1,i} + \text{c.h.}] \\ &+ \omega_r|\Pi_\alpha|^2 - \text{Im}[\Pi_\alpha\dot{\Pi}_\alpha^*] + \frac{K}{2}|\Pi_\alpha|^4 + \frac{K'}{3}|\Pi_\alpha|^6 + \sum_d [\epsilon_d e^{-i\omega_d t}\Pi_\alpha^* + \text{c.h.}] \end{aligned} \quad (5.11a)$$

$$H'_1 \equiv \left[(\omega_r - i\frac{\kappa}{2})\Pi_\alpha + (K - i\kappa_{\text{NL}})|\Pi_\alpha|^2\Pi_\alpha + K'|\Pi_\alpha|^4\Pi_\alpha + \sum_d \epsilon_d e^{-i\omega_d t} - i\dot{\Pi}_\alpha \right] a^\dagger + \text{c.h.} \\ + \sum_{i=0}^{M-2} g_i (\Pi_{i,i+1} + \Pi_{i+1,i}) a^\dagger + \text{c.h.} \quad (5.11b)$$

$$H'_2 \equiv \omega'_r(\alpha) a^\dagger a + \left(\Upsilon_p a^{\dagger 2} + \Upsilon_p^* a^2 \right), \quad (5.11c)$$

$$H'_{\text{SB}} \equiv \sum_{i=0}^{M-2} g_i \{ (\Pi_\alpha^* + \Pi_\alpha) [(\beta_i a^\dagger \Pi_{i,i+1} + \beta_i^* a \Pi_{i+1,i}) - (\beta_i^* a \Pi_{i,i+1} + \beta_i a^\dagger \Pi_{i+1,i})] \}, \quad (5.11d)$$

où j'ai pris

$$\omega'_r(\alpha) = (\omega_r + 2K|\Pi_\alpha|^2 + 3|\Pi_\alpha|^4), \quad (5.12) \\ \Upsilon = \left(\frac{K - i\kappa_{\text{NL}}}{2} + K'|\Pi_\alpha|^2 \right) \Pi_\alpha^2,$$

et H'_{SB} est l'hamiltonien qui donnera les bandes latérales, et où j'ai inclus les contributions hamiltoniennes de $\mathcal{D}[a']\rho$ et $\mathcal{D}[a'a']\rho$ dans H'_1 et H'_2 . J'ai aussi fait une approximation séculaire pour le terme d'excitation dans H'_0 . Ne pas faire cette approximation donnerait de faibles décalages de Bloch-Siegert [157] d'ordre $g_i^2/(\omega_d + \omega_i)$ que je néglige ici. J'ai aussi défini

$$\sum_d \epsilon_d e^{-i\omega_d t} \equiv \sum_d^* \epsilon_d e^{-i\omega_d t} + \epsilon_s e^{-i\omega_s t}, \quad (5.13)$$

où l'étoile sur la deuxième somme indique que seuls les signaux éloignés de la fréquence du qubit sont inclus dans celle-ci et où je ne considère qu'un seul signal quasi-résonant avec le qubit, d'amplitude ϵ_s et de fréquence $\omega_s \sim \omega_{1,0}$. Cette distinction entre les signaux hors-résonants et quasi-résonants est importante pour la transformation dispersive classique à la prochaine section. Finalement, de façon similaire à la séparation des signaux d'excitation, j'ai considéré que

$$\alpha_i \equiv \sum_d^* \alpha_{i,d} e^{-i\omega_d t} + \alpha_{i,s} e^{-i\omega_s t}, \quad (5.14)$$

et que les fréquences des signaux sont suffisamment différentes pour négliger leur mélange.

En tenant compte de la dissipation, on a ainsi

$$H'_s = H'_0 + H'_1 + H'_2 + H'_{\text{SB}}. \quad (5.15)$$

Dans les prochaines sections, je chercherai à diagonaliser H'_0 , éliminer H'_1 et éliminer la partie hors-diagonale de H'_2 . On peut déjà voir approximativement, à la première ligne de H'_1 , la valeur de Π_α que l'on devra choisir pour éliminer H'_1 . Cependant, annuler la première ligne de H'_1 à ce stade donnerait $\alpha_i = \alpha_j$, car elle ne contient pas le décalage dispersif de la fréquence du résonateur. C'est cette dépendance que j'obtiens à la prochaine sous-section.

5.3.3 Transformation dispersive classique et choix de polaron

Pour la transformation dispersive classique, on doit distinguer les signaux d'excitation dont la fréquence est près de celle du qubit de ceux très décalés en fréquence. Alors que l'on peut traiter ces derniers — qui ne causent que des transitions virtuelles du qubit — de façon dispersive, on ne peut pas faire de même pour les signaux quasi-résonants — qui causent des transitions bien réelles. Cependant, alors que les signaux décalés affectent de façon similaire toutes les transitions du qubit (on les suppose aussi éloignés en fréquence de chaque transition), les signaux quasi-résonants affectent de façon dominante une seule transition. Dans le premier cas, on doit ainsi tenir compte de la structure à plusieurs niveaux, alors que dans le deuxième, une approximation à deux niveaux est suffisante.

On a vu à la section 3.1.4 que la transformation \mathbb{D}_C , donnée à l'équation (3.31) permet de diagonaliser approximativement la première ligne de H'_0 pour un signal d'excitation donné. Si les signaux sont suffisamment espacés en fréquence, on peut supposer dans \mathbb{D}_C que $\xi_i = \sum_d^* \xi_{i,d} e^{-i\omega_d t}$ où chaque $\xi_{i,d}$ est donné par

$$\xi_{i,d} = \lambda_i^d \alpha_{i,d}. \quad (5.16)$$

Avec ce choix, on peut développer la relation d'Hausdorff au quatrième ordre et obtenir

$$\begin{aligned} H''_0 &\approx \frac{1}{0!} \Pi_\omega + \frac{1}{1!} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_d^* \Pi_{i,i} [|\xi_{i,d}|^2 (-\omega_{i+1,i} + \omega_d) - |\xi_{i-1,d}|^2 (-\omega_{i,i-1} + \omega_d)] + \frac{0}{2!} \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_d^* \Pi_{i,i} \{ 4(|\xi_{i-1,d}|^2 + |\xi_{i,d}|^2) [|\xi_{i-1,d}|^2 (-\omega_{i,i-1} + \omega_d) - |\xi_{i,d}|^2 (-\omega_{i+1,i} + \omega_d)] \} \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_d^* \Pi_{i,i} |\xi_{i-2,d} \xi_{i-1,d}|^2 [(-\omega_{i,i-1} + \omega_d) - 3(-\omega_{i-1,i-2} + \omega_d)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_d^* \Pi_{i,i} |\xi_{i,d} \xi_{i+1,d}|^2 [3(-\omega_{i+2,i+1} + \omega_d) - (-\omega_{i+1,i} + \omega_d)] \\
& + \sum_{i=0}^{M-3} \sum_d^* \alpha_{i,d}^* \alpha_{i+1,d}^* e^{-2i\omega_d t} g_{i,d}^{(2)} \Pi_{i,i+2} + \text{c.h.}, \\
& + \sum_{i=0}^{M-2} g_i (\alpha_{i,s} e^{-i\omega_s t} \Pi_{i+1,i} + \text{c.h.}), \tag{5.17}
\end{aligned}$$

où le terme d'ordre deux s'annule étant donné le choix de $\xi_{i,d}$ et où j'ai négligé les termes hors-diagonaux de la forme $\Pi_{i,i+\delta}$ pour $\delta \geq 3$ avec une approximation séculaire. J'ai aussi défini le couplage effectif à deux photons entre les niveaux i et $i+2$ du qubit

$$g_{i,d}^{(2)} = \lambda_i^d \lambda_{i+1}^d (\Delta_{i+1,d} - \Delta_{i,d}). \tag{5.18}$$

Ce couplage n'est important que si les décalages $\Delta_{i+1,d} = \omega_{i+2,i+1} - \omega_d$ et $\Delta_{i,d} = \omega_{i+1,i} - \omega_d$ sont de signe contraire, ce qui n'arrive que dans un régime de chevauchement où la fréquence du signal d'excitation (qui est près de celle du résonateur) est située entre deux fréquences de transition du qubit [89]. Ce régime sera important à la section 7.4.

L'hamiltonien ci-dessus peut être grandement simplifié avec l'approximation de faible distinguabilité, c'est-à-dire en supposant que $\alpha_{i,d} \sim \alpha_d$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
H_0'' & = \sum_{i=0}^{M-1} \omega_i''(\alpha) \Pi_{ii} + \sum_{i=0}^{M-2} g_i (\alpha_{i,s} e^{-i\omega_s t} \Pi_{i+1,i} + \text{c.h.}) \\
& + \sum_{i=0}^{M-3} \alpha_{i,d}^* \alpha_{i+1,d}^* e^{-2i\omega_d t} g_i^{(2)} \Pi_{i,i+2} + \text{c.h.}, \tag{5.19}
\end{aligned}$$

où

$$\omega_i''(\alpha) = \omega_i + \sum_d^* \left[\mathbb{S}_i^d |\alpha_d|^2 + \frac{1}{4} \mathbb{K}_i^d |\alpha_d|^4 \right], \tag{5.20}$$

est la fréquence du niveau ω_i modifiée par les décalages de Stark dus aux différents signaux d'excitation du résonateur, et où j'ai défini le décalage de Stark linéaire par photon

$$\mathbb{S}_i^d \equiv -(\mathbf{x}_i^d - \mathbf{x}_{i-1}^d), \tag{5.21}$$

de même que le décalage de Stark quadratique

$$\mathbb{K}_i^d = -4\mathbb{S}_i^d(|\boldsymbol{\lambda}_i^d|^2 + |\boldsymbol{\lambda}_{i-1}^d|^2) - (3\boldsymbol{\chi}_{i+1}^d|\boldsymbol{\lambda}_i^d|^2 - \boldsymbol{\chi}_i^d|\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^d|^2) + (3\boldsymbol{\chi}_{i-2}^d|\boldsymbol{\lambda}_{i-1}^d|^2 - \boldsymbol{\chi}_{i-1}^d|\boldsymbol{\lambda}_{i-2}^d|^2). \quad (5.22)$$

et où $\boldsymbol{\chi}_i^d = -g_i \boldsymbol{\lambda}_i^d$ et $\boldsymbol{\lambda}_i^d$ est défini à l'équation (3.32).

Si l'on s'intéresse au régime de chevauchement, la deuxième ligne de l'équation (5.19) est importante. On peut alors calculer son effet (diagonaliser approximativement) dans la limite dispersive avec la transformation

$$\mathbb{D}^{(2)} = \exp \left\{ \sum_{i=0}^{M-3} \sum_d^* \left[\xi_{i,d}^{(2)*} \Pi_{i,i+2} - \xi_{i,d}^{(2)} \Pi_{i+2,i} \right] \right\}. \quad (5.23)$$

En appliquant cette transformation sur l'hamiltonien ci-dessus et en choisissant

$$\xi_{i,d}^{(2)} = \frac{-g_{i,d}^{(2)} \alpha_{i,d} \alpha_{i+1,d}}{\Delta_{i+1,d} + \Delta_{i,d}} e^{-i2\omega_d t}, \quad (5.24)$$

on obtient une correction aux décalages de Stark quadratique

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_i^d \equiv & -4\mathbb{S}_i^d(|\boldsymbol{\lambda}_i^d|^2 + |\boldsymbol{\lambda}_{i-1}^d|^2) - (3\boldsymbol{\chi}_{i+1}^d|\boldsymbol{\lambda}_i^d|^2 - \boldsymbol{\chi}_i^d|\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^d|^2) \\ & + (3\boldsymbol{\chi}_{i-2}^d|\boldsymbol{\lambda}_{i-1}^d|^2 - \boldsymbol{\chi}_{i-1}^d|\boldsymbol{\lambda}_{i-2}^d|^2) - 4\boldsymbol{\chi}_{i,d}^{(2)} + 4\boldsymbol{\chi}_{i-2,d}^{(2)}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

où $\boldsymbol{\chi}_i^{d(2)} = -g_{i,d}^{(2)} \boldsymbol{\lambda}_{i,d}^{(2)}$ et $\boldsymbol{\lambda}_{i,d}^{(2)} = -g_{i,d}^{(2)} (\Delta_{i+1,d} + \Delta_{i,d})$. Ce choix donne alors l'hamiltonien

$$H_0'' = \sum_{i=0}^{M-1} \omega_i''(\alpha) \Pi_{ii} + \sum_{i=0}^{M-2} g_i (\alpha_{i,s} e^{-i\omega_s t} \Pi_{i+1,i} + \text{c.h.}). \quad (5.26)$$

Typiquement, en dehors du régime de chevauchement, on a $|g_i^{(2)}| \ll |g_i|$ et on peut négliger la correction due au terme effectif à deux photons.

On applique ensuite la transformation \mathbb{D}_C sur l'hamiltonien H_1' . Pour ce faire, il est utile de calculer la transformation de l'opérateur $\Sigma_- \equiv \sum_{i=0}^{M-2} g_i \Pi_{i,i+1}$. Avec les mêmes suppositions que précédemment (faible distinguabilité et signaux décalés), on peut mon-

trer qu'au quatrième ordre dans la relation d'Hausdorff, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbb{D}_C^\dagger \Sigma - \mathbb{D}_C &\approx \sum_{i=0}^{M-2} g_i \Pi_{i,i+1} + \sum_d^* \Pi_{\mathbb{S}^d} \Pi_{\alpha_d} e^{-\omega_d t} + \frac{1}{3!} \sum_d^* \Pi_{\mathbb{K}^d} |\Pi_{\alpha_d}|^2 \Pi_{\alpha_d} e^{-\omega_d t} \\
 &+ \frac{1}{2!} \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{d_1, d_2}^* \boldsymbol{\lambda}_i^{d_1} [\mathbb{S}_{i+1}^{d_2} - \mathbb{S}_i^{d_2}] [\alpha_{d_1} \alpha_{d_2} e^{-i(\omega_{d_1} + \omega_{d_2})t} \Pi_{i+1, i} + \text{c.h.}] \\
 &+ \frac{1}{2!} \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{d_1, d_2}^* [2\boldsymbol{\lambda}_i^{d_1} (-\boldsymbol{\chi}_{i+1}^{d_2} + \boldsymbol{\chi}_i^{d_2} - \boldsymbol{\chi}_{i-1}^{d_2}) - g_i (\boldsymbol{\lambda}_{i-1}^{d_1} \boldsymbol{\lambda}_{i-1}^{d_2} + \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^{d_1} \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^{d_2})] \\
 &\quad \times [\alpha_{d_1}^* \alpha_{d_2} e^{i(\omega_{d_1} - \omega_{d_2})t} \Pi_{i, i+1} + \text{c.h.}].
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

En utilisant ce résultat et celui pour la transformation de Π_x donné à l'équation (3.33), on peut montrer que le hamiltonien H_1' devient, sous la transformation \mathbb{D}_C ,

$$H_1'' \approx \sum_{i=0}^{M-2} g_i (a^\dagger \Pi_{i, i+1} + a \Pi_{i+1, i}) + (G'' a^\dagger + G'''^\dagger a) + H_{\text{SB}}^{\text{D}}, \tag{5.28}$$

où j'ai fait l'approximation séculaire sur le terme de Rabi et où j'ai défini

$$\begin{aligned}
 G'' &= (\omega_r - i\frac{\kappa}{2}) \Pi_\alpha + (K - i\kappa_{\text{NL}}) |\Pi_\alpha|^2 \Pi_\alpha + K' |\Pi_\alpha|^4 \Pi_\alpha + \sum_d \epsilon_d e^{-\omega_d t} - i\dot{\Pi}_\alpha \\
 &+ \sum_d \left(\Pi_{\mathbb{S}^d} + \frac{1}{3!} \Pi_{\mathbb{K}^d} |\Pi_\alpha|^2 \right) \Pi_{\alpha_d} e^{-\omega_d t}.
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Je définis alors le référentiel de polaron en choisissant $G'' = 0$, ce qui correspond à choisir

$$0 = (\omega_r - \omega_d - i\frac{\kappa}{2}) \alpha_{i,d} + (K - i\kappa_{\text{NL}}) |\alpha_i|^2 \alpha_{i,d} + K' |\alpha_i|^4 \alpha_{i,d} + \epsilon_d + \left(\mathbb{S}_i^d + \frac{1}{3!} \mathbb{K}_i^d |\alpha_i|^2 \right) \alpha_{i,d}, \tag{5.30}$$

pour chaque signaux hors-résonants, et

$$0 = (\omega_r - \omega_s - i\frac{\kappa}{2}) \alpha_{i,s} + (K - i\kappa_{\text{NL}}) |\alpha_i|^2 \alpha_{i,s} + K' |\alpha_i|^4 \alpha_{i,s} + \epsilon_s, \tag{5.31}$$

pour le signal quasi-résonant.

J'ai aussi défini à l'équation (5.28) un deuxième hamiltonien de bandes latérales

$$\begin{aligned}
 H_{\text{SB}}^{\text{D}} \approx & \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{d_1, d_2}^* \left\{ \boldsymbol{\lambda}_i^{d_1} [\mathbb{S}_{i+1}^{d_2} - \mathbb{S}_i^{d_2}] [\alpha_{d_1} \alpha_{d_2} e^{-i(\omega_{d_1} + \omega_{d_2})t} \Pi_{i+1, i} + \text{c.h.}] \right\} \frac{a^\dagger}{2!} \\
 & + \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{d_1, d_2}^* \left\{ [2\boldsymbol{\lambda}_i^{d_1} (-\mathbf{x}_{i+1}^{d_2} + \mathbf{x}_i^{d_2} - \mathbf{x}_{i-1}^{d_2}) - g_i (\boldsymbol{\lambda}_{i-1}^{d_1} \boldsymbol{\lambda}_{i-1}^{d_2} + \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^{d_1} \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^{d_2})] \right. \\
 & \quad \left. \times [\alpha_{d_1}^* \alpha_{d_2} e^{i(\omega_{d_1} - \omega_{d_2})t} \Pi_{i, i+1} + \text{c.h.}] \right\} \frac{a^\dagger}{2!}, \\
 & - \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{d_1, d_2}^* \boldsymbol{\lambda}_i^{d_1} [\mathbb{S}_{i+1}^{d_2} - \mathbb{S}_i^{d_2}] [\alpha_{d_1} \alpha_{d_2} e^{-i(\omega_{d_1} + \omega_{d_2})t} \Pi_{i+1, i} + \alpha_{d_1}^* \alpha_{d_2} e^{i(\omega_{d_1} - \omega_{d_2})t} \Pi_{i, i+1}] a^\dagger \\
 & + \text{c.h.}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Cet hamiltonien est valide si les deux signaux considérés d_1 et d_2 sont tous les deux hors-résonants avec le qubit et entre eux. C'est l'équivalent multi-niveaux d'un hamiltonien calculé pour décrire les bandes latérales dans la référence [158] pour un système à deux niveaux. Ces bandes latérales ont aussi déjà été étudiées expérimentalement [156]. Ce ne sont cependant pas ces bandes latérales qui nous intéresseront dans le chapitre 6, car on s'intéressera plutôt à un signal quasi-résonant avec le qubit et un signal hors-résonant. Ces bandes latérales quasi-résonantes sont plutôt décrites par H'_{SB} donné à l'équation (5.11d). Dans cette thèse, je négligerai donc H_{SB}^{D} pour plutôt me concentrer sur H'_{SB} .

On doit aussi appliquer la transformation dispersive \mathbb{D}_C sur les dissipateurs de l'équation maîtresse. On obtient facilement

$$\gamma_\varphi \mathcal{D} \left[\frac{\Pi_\varepsilon}{\varepsilon_1} \right] \rho \rightarrow \gamma_\varphi \mathcal{D} \left[\frac{\Pi_\varepsilon}{\varepsilon_1} \right] \rho + \gamma_\varphi \sum_{i, d}^* \frac{|\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i|^2}{\varepsilon_1^2} |\xi_{d, i}|^2 (\mathcal{D}[\Pi_{i+1, i}] \rho + \mathcal{D}[\Pi_{i, i+1}] \rho), \tag{5.33a}$$

$$\gamma \sum_{i=0}^{M-2} \left(\frac{g_i}{g_0} \right)^2 \mathcal{D}[\Pi_{i, i+1}] \rho \rightarrow \gamma \sum_{i=0}^{M-2} \left(\frac{g_i}{g_0} \right)^2 \mathcal{D}[\Pi_{i, i+1}] \rho + \gamma \mathcal{D} \left[\sum_{i=0}^{M-1} \frac{g_i \xi_i - g_{i-1} \xi_{i-1}}{g_0} \Pi_{i, i} \right] \rho. \tag{5.33b}$$

$$\kappa \mathcal{D}[\Pi_\alpha] \rho \rightarrow \kappa \mathcal{D}[\Pi_\alpha] \rho + \kappa \sum_{i, d}^* |\alpha_{i+1} - \alpha_i|^2 |\xi_{d, i}|^2 (\mathcal{D}[\Pi_{i+1, i}] \rho + \mathcal{D}[\Pi_{i, i+1}] \rho), \tag{5.33c}$$

où j'ai gardé seulement les corrections dominantes.

Le deuxième terme de la première ligne est le déphasage habillé [114, 115]. Il s'agit

de relaxation et d'excitation incohérentes dues au déphasage dans la base habillée où les états propres sont des superpositions des états propres du qubit et du résonateur. Cependant, tel que notre groupe a montré précédemment [115], le taux γ_φ , qui dépend du bruit à basse fréquence devrait, dans le cadre du déphasage habillé, dépendre du bruit à $\pm\omega_{1,0} - \omega_r$. Pour un bruit en $1/f$, ce bruit à haute fréquence devrait être négligeable. On note cependant qu'un faible bruit peut être compensé par une grande susceptibilité $|\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i|$. Pour un transmon par exemple, on peut montrer que la susceptibilité au bruit de charge augmente exponentiellement avec la transition i considérée [123], ce qui peut rendre cet effet important même pour un faible bruit lorsque les états d'énergie élevée du transmon sont occupés. Cela sera important pour la mesure par avalanche décrite à la section 7.3.

Le deuxième terme de la deuxième ligne est la relaxation habillée [114, 115]. De façon similaire — mais dans le sens inverse — au déphasage habillé, l'effet de la relaxation dans la base habillée est de déphaser le qubit davantage. Finalement, le deuxième terme de la troisième ligne est l'effet du déphasage induit par la mesure qui, dans la base habillée, cause de la relaxation et de l'excitation incohérentes additionnelles. Encore une fois, on rappelle que ces trois effets dépendent du spectre des diverses sources de bruit qui n'est pas bien connu à des fréquences de l'ordre du gigahertz.

5.3.4 Résumé

Avec le choix de référentiel de polaron exprimé aux équations (5.30) et (5.31), on obtient les hamiltoniens transformés

$$H_0'' = \sum_{i=0}^{M-1} \omega_i''(\alpha) \Pi_{ii} + \sum_{i=0}^{M-2} g_i (\alpha_{i,s} e^{-\omega_s t} \Pi_{i+1,i} + \text{c.h.}), \quad (5.34a)$$

$$H_1'' = \sum_{i=0}^{M-2} g_i (a^\dagger \Pi_{i,i+1} + a \Pi_{i+1,i}), \quad (5.34b)$$

$$H_2'' = H_2', \quad (5.34c)$$

$$H_{\text{SB}}'' = H_{\text{SB}}', \quad (5.34d)$$

où $\omega_i''(\alpha)$ est défini à l'équation (5.20) et $\alpha_{i,s}$ est donné par la solution de l'équation (5.31). Je n'ai pas transformé H_2' et H_{SB}' , car les parties dépendantes du qubit sont déjà des perturbations que je suppose petites. Les corrections données par la transformation \mathbb{D}_C

seraient donc trop petites pour être conservées. En utilisant la transformation des dissipateurs, j'obtiens l'équation maîtresse du système dans cette base doublement transformée

$$\begin{aligned} \dot{\rho}'' = & -i[H_s'', \rho''] + \kappa'' \mathcal{D}[a] \rho'' + \sum_{i=0}^{M-2} \gamma_{\downarrow, i}'' \mathcal{D}[\Pi_{i, i+1}] \rho'' + \sum_{i=0}^{M-2} \gamma_{\uparrow, i}'' \mathcal{D}[\Pi_{i+1, i}] \rho'' \\ & + 2\gamma_{\varphi} \mathcal{D}\left[\frac{\Pi_{\varepsilon}}{\varepsilon_1}\right] \rho'' + \kappa \mathcal{D}[\Pi_{\alpha}] \rho'' + \kappa_{\text{NL}} \mathcal{D}[\Pi_{\alpha}^2] \rho'' + \gamma \mathcal{D}\left[\sum_{i=0}^{M-1} \frac{g_i \xi_i - g_{i-1} \xi_{i-1}}{g_0} \Pi_{i, i}\right] \rho''. \end{aligned} \quad (5.35)$$

où

$$H_s'' = H_0'' + H_1'' + H_2'' + H_{\text{SB}}'', \quad (5.36)$$

et où j'ai défini les taux

$$\gamma_{\downarrow, i}'' \equiv \gamma \left(\frac{g_i}{g_0}\right)^2 + \sum_d^* \left[2\gamma_{\varphi} \frac{|\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i|^2}{\varepsilon_1^2} + \kappa |\alpha_{i+1} - \alpha_i|^2 \right] \lambda_i^{d^2} |\alpha_{i, d}|^2 \quad (5.37a)$$

$$\gamma_{\uparrow, i}'' \equiv \sum_d^* \left[2\gamma_{\varphi} \frac{|\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i|^2}{\varepsilon_1^2} + \kappa |\alpha_{i+1} - \alpha_i|^2 \right] \lambda_i^{d^2} |\alpha_{i, d}|^2 \quad (5.37b)$$

$$\kappa'' = \kappa + 4\kappa_{\text{NL}} |\alpha|^2. \quad (5.37c)$$

J'ai obtenu ces équations en supposant que la distinguabilité est faible ($|\alpha_{i+1, d} - \alpha_{i, d}| \ll 1$), que l'amplitude d'excitation est faible de sorte à être dans le régime dispersif ($|\alpha_{i, d}|^2 \ll n_{\text{crit}} = 1/4\lambda_i^{d^2}$), que la transformation de polaron est suffisamment bonne pour ramener le champ dans l'état fondamental dans la base transformée ($|\langle a \rangle| \ll 1$), et finalement que les spectres de bruit sont blancs.

5.4 Décalage de Lamb et effet Purcell

Avec les deux transformations appliquées à la section précédente, on a réussi à transposer le système dans une base où le résonateur n'est excité par aucun signal et où le qubit subit un décalage de Stark dû aux champs classiques $\alpha_{i, d}$, et où ces mêmes champs dépendent de façon non linéaire de l'état du qubit. Le qubit est aussi soumis à différentes sources de déphasage, de relaxation et d'excitation incohérente additionnelles dues à son couplage avec les photons du résonateur.

Outre les effets liés aux transitions à deux photons, deux effets — le décalage de

Lamb [100] et l'effet Purcell [159, 160] — ne sont pas (encore) visibles dans le modèle. Ces deux effets sont liés au couplage résiduel entre le qubit et la partie quantique du champ du résonateur présent dans H_1'' . On peut les obtenir en utilisant la transformation dispersive quantique \mathbb{D} présentée à la section 3.1.4. Puisque le résonateur n'est pas excité dans ce référentiel, on peut calculer la transformation au deuxième ordre plutôt qu'au quatrième ordre pour la version classique. Le résultat donné à l'équation (3.28) est ainsi directement applicable. On obtient

$$\begin{aligned}
H_0''' &\equiv \sum_{i=0}^{M-1} \omega_i'''(\alpha) \Pi_{i,i} + \sum_{i=0}^{M-2} g_i (\alpha_{i,s} e^{-i\omega_s t} \Pi_{i+1,i} + \text{c.h.}), \\
H_1''' &= 0 \\
H_2''' &\equiv \omega_{r_2}'''(\alpha) a^\dagger a + (\Upsilon_p a^{\dagger 2} + \Upsilon_p^* a^2), \\
H_{\text{SB}}''' &= H_{\text{SB}}'' = H_{\text{SB}}'.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

où

$$\omega_{r_2}'''(\alpha) = \omega_r'(\alpha) + S_i(\alpha), \tag{5.39a}$$

$$\omega_i'''(\alpha) = \omega_i''(\alpha) + L_i(\alpha), \tag{5.39b}$$

sont la fréquence du résonateur modifiée par le décalage dispersif et les fréquences du qubit modifiées par le décalage de Lamb. J'ai ici défini

$$L_i(\alpha) = \chi_{i-1}(\alpha), \tag{5.40a}$$

$$S_i(\alpha) = -(\chi_i(\alpha) - \chi_{i-1}(\alpha)), \tag{5.40b}$$

$$\lambda_i(\alpha) = \frac{-g_i}{\omega_{i+1}(\alpha) - \omega_i(\alpha) - (\omega_r + 2K|\alpha|^2 + 3K'|\alpha|^4)}, \tag{5.40c}$$

$$\chi_i(\alpha) = -g_i \lambda_i(\alpha). \tag{5.40d}$$

On voit que le décalage de Lamb dépend de la fréquence du qubit et de la fréquence du résonateur, mais tient compte des décalages de ces deux fréquences dus au champ électromagnétique moyen du résonateur. En transformant le dissipateur $\mathcal{D}[a]\rho$ selon l'équa-

tion (3.26), on obtient l'équation maîtresse

$$\begin{aligned} \dot{\rho}''' = & -i[H_s''', \rho'''] + \kappa''' \mathcal{D}[a] \rho''' + \sum_{i=0}^{M-2} \gamma_{\downarrow, i}''' \mathcal{D}[\Pi_{i, i+1}] \rho''' + \sum_{i=0}^{M-2} \gamma_{\uparrow, i}''' \mathcal{D}[\Pi_{i+1, i}] \rho''' \\ & + 2\gamma_{\varphi} \mathcal{D}\left[\frac{\Pi_{\varepsilon}}{\varepsilon_1}\right] \rho'' + \kappa \mathcal{D}[\Pi_{\alpha}] \rho'' + \kappa_{\text{NL}} \mathcal{D}[\Pi_{\alpha}^2] \rho'' + \gamma \mathcal{D}\left[\sum_{i=0}^{M-1} \frac{g_i \xi_i - g_{i-1} \xi_{i-1}}{g_0} \Pi_{i, i}\right] \rho''. \end{aligned} \quad (5.41)$$

où $H_s''' = H_0''' + H_2''' + H_{\text{SB}}'''$ et où les taux deviennent

$$\gamma_{\downarrow, i}''' \equiv \gamma_{\downarrow, i}'' + \lambda_i^2(\alpha) \kappa'' \quad (5.42a)$$

$$\gamma_{\uparrow, i}''' \equiv \gamma_{\uparrow, i}'' \quad (5.42b)$$

$$\kappa''' \equiv \kappa''. \quad (5.42c)$$

On note que la seule modification est le taux Purcell $\lambda_i^2(\alpha) \kappa''$ qui s'ajoute à la relaxation du qubit. On devrait aussi trouver les mêmes effets qu'à la section précédente — déphasage et relaxation habillés, excitation incohérente — mais j'ai négligé ces effets, considérant que leur équivalent dû au champ classique domine. J'ai aussi omis de transformer la partie de H_0'' qui représente le signal de spectroscopie $\alpha_{i, s}$ ainsi que la partie de H_2'' en Υ et H_{SB}'' car ces parties sont déjà des corrections ou sont supposées petites.

5.5 Projection dans le sous-espace à deux niveaux

Dans les deux sections précédentes, j'ai traité les signaux d'excitation du résonateur ainsi que le couplage qubit-résonateur dans le régime dispersif en tenant compte de la structure à plusieurs niveaux du qubit. Tel que mentionné précédemment, le signal quasi-résonant avec le qubit ne peut pas être traité de cette façon. On doit plutôt le traiter de façon exacte, ce que l'on fait en ne considérant que la transition quasi-résonante avec le signal. Pour cela — et puisque cela correspond à l'expérience qui nous intéresse — on doit projeter le système décrit par les équations de la section 5.4 dans le sous-espace à deux niveaux $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ qui nous intéresse pour le qubit.

Je définis $\sigma_+ \equiv \Pi_{1,0}$, $\sigma_- \equiv \Pi_{0,1}$, $\sigma_z = \Pi_{1,1} - \Pi_{0,0}$ et $\mathbf{1} = \Pi_{1,1} + \Pi_{0,0}$ et j'élimine tous les termes $\Pi_{i,j}$ pour lesquels $i > 1$ ou $j > 1$. À partir de ce point, je suppose aussi qu'il n'y a qu'un seul signal d'excitation hors-résonant (appelé signal de pompe) à la fréquence

$\omega_d = \omega_p$ et d'amplitude $\epsilon_d = \epsilon_p$. Dans un référentiel tournant à la fréquence ω_s pour le qubit et à la fréquence ω_p pour le résonateur, on obtient avec ces définitions

$$H_0''' = \frac{\delta}{2}\sigma_z + g_0 (\alpha_{0,s}\sigma_+ + \alpha_{0,s}^*\sigma_-) \quad (5.43a)$$

$$H_2''' = \Delta a^\dagger a + S_1(\alpha)\Pi_{1,1}a^\dagger a + S_0(\alpha)\Pi_{0,0}a^\dagger a + (\Upsilon_p a^{\dagger 2} + \Upsilon_p^* a^2) \quad (5.43b)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{SB}}''' &= g_0 [\alpha_{0,s}^* (\beta a^\dagger - \beta^* a) \sigma_- + \alpha_{0,s} (\beta^* a - \beta a^\dagger) \sigma_+] \\ &\quad + g_0 [\alpha_{0,s} e^{-2i\omega_s t} (\beta a^\dagger - \beta^* a) \sigma_- + \alpha_{0,s}^* e^{2i\omega_s t} (\beta^* a - \beta a^\dagger) \sigma_+] \\ &\approx F^\dagger \sigma_- + F \sigma_+ \end{aligned} \quad (5.43c)$$

$$H_s''' = H_0''' + H_2''' + H_{\text{SB}}''', \quad (5.43d)$$

où j'ai négligé la deuxième ligne de H_{SB}''' sous une approximation séculaire et défini

$$\begin{aligned} \delta &\equiv \omega_1'''(\alpha) - \omega_0'''(\alpha) - \omega_s, \\ \Upsilon_p &\equiv \left(\frac{K - i\kappa_{\text{NL}}}{2} + K' |\Pi_{\alpha_p}|^2 \right) \Pi_{\alpha_p}^2, \\ \Delta &\equiv \omega_r'(\alpha) - \omega_p, \\ \beta &\equiv \alpha_{1,p} - \alpha_{0,p}, \\ F &\equiv g_0 \alpha_{0,s} (\beta a^\dagger - \beta^* a). \end{aligned} \quad (5.44)$$

En projetant de la même façon les dissipateurs, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\rho}''' &= -i [H_s''', \rho'''] + \kappa''' \mathcal{D}[a] \rho''' + \gamma_{\downarrow,0}''' \mathcal{D}[\sigma_-] \rho''' + \gamma_{\uparrow,0}''' \mathcal{D}[\sigma_+] \rho''' + \frac{\gamma_\varphi'''}{2} \mathcal{D}[\sigma_z] \rho''' \\ &\quad - i \left(\frac{\kappa}{2} \text{Im} [\alpha_0 \alpha_1^*] + \frac{\kappa_{\text{NL}}}{2} \text{Im} [\alpha_0^2 \alpha_1^{*2}] - \sum_d^* \frac{\gamma \chi_1^d \chi_0^d \text{Im} [\alpha_{d,1} \alpha_{d,0}]}{g_0^2} \right) [\sigma_z, \rho'''], \end{aligned} \quad (5.45)$$

où j'ai défini

$$\gamma_\varphi''' = \gamma_\varphi + \frac{\kappa |\alpha_1 - \alpha_0|^2}{2} + \frac{\kappa_{\text{NL}} |\alpha_1^2 - \alpha_0^2|^2}{2} + \sum_d^* \frac{\gamma |2\chi_0^d \alpha_{d,0} - \chi_1^d \alpha_{d,1}|^2}{2g_0^2}. \quad (5.46)$$

La deuxième ligne de l'équation maîtresse ci-dessus est un décalage de fréquence du qubit que je négligerai, car il disparaît dans la limite de faible distinguabilité. Dans le taux de déphasage ci-dessus, le premier terme est le déphasage intrinsèque, le deuxième est le déphasage induit par la mesure et le troisième correspond à du déphasage induit par

l'information sur le qubit qui fuirait via un canal de perte à deux photons. Le quatrième terme est le seul qui ne disparaît pas dans la limite $\beta \rightarrow 0$. Dans cette limite, ce terme correspond à la relaxation du qubit dans la base habillée. En dehors de cette limite, on pourrait interpréter ce terme comme du déphasage lié à l'information sur le qubit qui fuirait par le canal de relaxation du qubit.

5.6 Squeezon et bandes latérales

Dans le modèle projeté à la section précédente, deux termes permettent encore d'exciter le champ du résonateur. Il s'agit du terme de compression Υ_p et de l'opérateur de force F couplant le qubit et le résonateur. C'est le premier de ces deux effets faibles que je traite dans cette section. Dû au terme de compression, l'état du résonateur dans son état stationnaire, même avec la transformation de polaron qui a éliminé le signal d'excitation direct, n'est pas dans le fondamental, mais plutôt dans un fondamental comprimé. Je traite cette compression en appliquant la transformation de squeezon présentée à la section 3.1.5. Je supposerai que $r_i(t) = |r_i|e^{-2i\omega_p t + 2i\Theta_i}$, c'est-à-dire que seule la phase des coefficients de compression r_i dépend du temps. En utilisant les résultats de la section 3.1.5 pour transformer $a^{(\dagger)}$ et $a^\dagger a$, on peut facilement transformer l'hamiltonien H_2''' et obtenir

$$\begin{aligned}
H_s^{(4)} = & H_0''' + \omega_r'(\alpha)a^\dagger a + \Pi_{S(\alpha)}a^\dagger a \\
& + [2 \sinh^2 \Pi_r (\omega_r'(\alpha) + \Pi_{S(\alpha)} - \omega_p) - \sinh(2\Pi_r) (\Upsilon_p e^{-i2\Pi_\theta} + \text{c.h.})] (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \\
& - \left[\frac{\sinh(2\Pi_r)}{2} (\omega_r'(\alpha) + \Pi_{S(\alpha)} - \omega_p) - \Upsilon_p e^{-i2\Pi_\theta} \sinh^2 \Pi_r - \Upsilon_p^* \cosh^2 \Pi_r e^{i2\Pi_\theta} \right. \\
& \quad \left. + i \frac{\kappa''' \sinh(2\Pi_r)}{4} \right] e^{-i2\Pi_\theta} a^2 + \text{c.h.} \\
& + (F^{(4)\dagger} \sigma_- + F^{(4)} \sigma_+)
\end{aligned} \tag{5.47}$$

où l'opérateur de force est transformé tel que

$$F^{(4)} = g_0 \alpha_{s,0} [(\beta \cosh \Pi_r + \beta^* e^{i2\Pi_\theta} \sinh \Pi_r) a^\dagger - (\beta^* \cosh \Pi_r + \beta e^{-i2\Pi_\theta} \sinh \Pi_r) a], \tag{5.48}$$

et où l'avant-dernière ligne provient de la transformation du dissipateur

$$\begin{aligned} \mathcal{D}[a]\rho \rightarrow & \mathcal{D}[\cosh \Pi_r a]\rho + \mathcal{D}[\sinh \Pi_r a^\dagger]\rho - i \frac{\sinh 2\Pi_r}{4} \left[-i(e^{-i2\Pi_\theta} a^2 - e^{i2\Pi_\theta} a^{\dagger 2}), \rho \right] \\ & - \left\{ \cosh \Pi_r a [\rho, a \sinh \Pi_r e^{-i2\Pi_\theta}] + [a^\dagger \sinh \Pi_r e^{i2\Pi_\theta}, \rho] a^\dagger \cosh \Pi_r \right\}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

La condition qui fait disparaître le terme $a^{(\dagger)^2}$ est alors donnée par

$$-(\omega'_r(\alpha) + \Pi_{S(\alpha)} - \omega_p) \frac{\sinh(2\Pi_r)}{2} + \Upsilon_p e^{-2i\Pi_\theta} \cosh^2 \Pi_r + \Upsilon_p^* e^{2i\Pi_\theta} \sinh^2 \Pi_r + i \frac{\kappa''' \sinh(2\Pi_r)}{4} = 0. \quad (5.50)$$

Cette équation se résout aisément en séparant la partie réelle de la partie imaginaire. La condition s'exprime alors

$$\cos [\arg(\Upsilon_p) - 2\Pi_\theta] = \frac{\omega'_r(\alpha) + \Pi_{S(\alpha)} - \omega_p}{2|\Upsilon_p|} \tanh 2\Pi_r \quad (5.51a)$$

$$\sin [\arg(\Upsilon_p) - 2\Pi_\theta] = \frac{\kappa'''}{4|\Upsilon_p|} \sinh 2\Pi_r, \quad (5.51b)$$

où $\Upsilon_p \equiv |\Upsilon_p| e^{i \arg(\Upsilon_p)}$. Cette condition peut toujours être remplie tant que $\kappa''' > 0$. Cependant, dans le cas où $\kappa''' = 0$, la deuxième condition impose que $\cos [\arg(\Upsilon_p) - 2\Pi_\theta] = 1$, ce qui ne peut être réalisé que si le ratio $[\omega'_r(\alpha) + \Pi_{S(\alpha)} - \omega_p] / 2|\Upsilon_p| \geq 1$ puisque $|\tanh(x)| \leq 1$. Il n'est donc pas toujours possible d'éliminer les termes quadratiques non-diagonaux si la dissipation est trop faible.

On peut isoler Π_r , qui détermine le degré de compression, en sommant et en prenant le carré des deux équations ci-dessus, pour obtenir

$$1 = \frac{\kappa'''^2}{16|\Upsilon_p|^2} \sinh^2(2\Pi_r) + \frac{[\omega'_r(\alpha) + \Pi_{S(\alpha)} - \omega_p]^2}{4|\Upsilon_p|^2} \tanh^2(2\Pi_r). \quad (5.52)$$

La solution de cette équation est analytique, mais gigantesque et je l'omettrai ici à la faveur d'une analyse sommaire.

Avec les conditions ci-dessus, on peut analyser l'orientation de l'axe de compression et le degré de compression du champ créé par les termes $a^{(\dagger)^2}$. Tout d'abord, on peut voir avec les équations (5.51) et (5.52) que, si $\omega'_r(\alpha) + \Pi_{S(\alpha)} = \omega_p$, alors $\sin [\arg(\Upsilon_p) - 2\Pi_\theta] = 1$, et l'angle de l'axe de compression θ est en quadrature avec celui de Υ_p qui est principalement celui de l'axe de α_p . À l'opposé, si ω_p est très différent de $\omega'_r(\alpha) + \Pi_{S(\alpha)}$, les deux axes sont presque alignés.

De même, si l'on prend la dérivée de l'équation (5.52) par rapport à $\omega'_r(\alpha) + \Pi_{S(\alpha)} - \omega_p$, on obtient un maximum de Π_r à la résonance. Ce coefficient de compression maximal est alors donné par

$$\Pi_{r_{\max}} = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{4|\Upsilon_p|}{\kappa'''} \right). \quad (5.53)$$

Cette valeur diverge en l'absence de dissipation, mais est toujours finie en pratique.

Avec le choix donné par les conditions (5.51), et en passant dans un référentiel d'interaction tournant à δ pour le qubit, on obtient alors

$$\begin{aligned} H_s^{(4)} &= H_q^{(4)} + H_r^{(4)} + H_I^{(4)}, \\ H_r^{(4)} &= (\omega'_r(\alpha) + \Pi_{S(\alpha)} - \omega_p) a^\dagger a + (\omega'_r(\alpha) + \Pi_{S(\alpha)} - \omega_p) \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\cosh(2\Pi_r)} - 1 \right) \\ H_q^{(4)} &= g_0(\alpha_{s,0} \sigma_+ e^{i\delta t} + \alpha_{s,0}^* \sigma_- e^{-i\delta t}), \\ H_I^{(4)} &= F^{(4)} \sigma_+ e^{i\delta t} + F^{(4)\dagger} \sigma_- e^{-i\delta t}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

où j'ai défini les hamiltoniens du résonateur (r), du qubit (q) et d'interaction (I), en réécrivant les opérateurs de force tels que

$$\begin{aligned} F^{(4)} &= g_0 \alpha_{s,0} (c a^\dagger - c^* a), \\ c &\equiv \beta \cosh(r) + \beta^* e^{i2\theta} \sinh(r). \end{aligned} \quad (5.55)$$

En écrivant cet opérateur de force, j'ai supposé que les coefficients de compression sont les mêmes pour les deux états du qubit en supposant $\Pi_r \sim r$. L'équation maîtresse est alors

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^{(4)} &= -i [H_s^{(4)}, \rho^{(4)}] + \kappa''' [1 + \sinh^2(r)] \mathcal{D}[a] \rho^{(4)} + \kappa''' \sinh^2(r) \mathcal{D}[a^\dagger] \rho^{(4)} \\ &\quad + \gamma_\downarrow''' \mathcal{D}[\sigma_-] \rho^{(4)} + \gamma_\uparrow''' \mathcal{D}[\sigma_+] \rho^{(4)} + \frac{\gamma_\varphi'''}{2} \mathcal{D}[\sigma_z] \rho^{(4)}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

où j'ai négligé la deuxième ligne de l'équation (5.49) en supposant que la compression est faible. On voit que dans cette base où l'on a éliminé la compression, un terme supplémentaire $\mathcal{D}[a^\dagger]$ apparaît dans l'équation maîtresse. Ce terme correspond à un bain thermique dont la température effective serait déterminée par le coefficient de compression r . En effet, alors que l'équation maîtresse pour un résonateur $\dot{\rho} = -i [H, \rho] + \kappa \mathcal{D}[a] \rho$ présentée à la section 1.2.2 était à température nulle, la même équation, à température finie, s'écrit,

tel que démontré à l'annexe B

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \kappa(1 + \bar{n})\mathcal{D}[a]\rho + \kappa\bar{n}\mathcal{D}[a^\dagger]\rho, \quad (5.57)$$

où \bar{n} est le nombre moyen de photons thermiques. On peut ainsi considérer que les termes de compression agissent comme un bain thermique où le nombre moyen de photons est $\bar{n} = \sinh^2(r)$. Dû à cette température, l'état stationnaire du résonateur dans ce référentiel sera un état thermique, même si la température réelle est nulle.

5.7 Élimination adiabatique du résonateur

Dans cette section, j'élimine adiabatiquement les degrés de liberté du résonateur tel qu'expliqué à la section 3.2. Je commence par réécrire l'équation maîtresse (5.56) sous la forme

$$\dot{\rho}^{(4)} = \mathcal{L}_q \rho_q + \mathcal{L}_r \rho_r + \mathcal{L}_I \rho, \quad (5.58a)$$

$$\mathcal{L}_q \rho_q \equiv -i[H_q^{(4)}, \rho_q] + \gamma_{\downarrow}''' \mathcal{D}[\sigma_-] \rho_q + \gamma_{\uparrow}''' \mathcal{D}[\sigma_+] \rho_q + \frac{\gamma_{\varphi}'''}{2} \mathcal{D}[\sigma_z] \rho_q, \quad (5.58b)$$

$$\mathcal{L}_r \rho_r \equiv -i[H_r^{(4)}, \rho_r] + \kappa''' [1 + \sinh^2(r)] \mathcal{D}[a] \rho_r + \kappa''' \sinh^2(r) \mathcal{D}[a^\dagger] \rho_r, \quad (5.58c)$$

$$\mathcal{L}_I \rho \equiv -i[H_I^{(4)}, \rho], \quad (5.58d)$$

où \mathcal{L}_q et \mathcal{L}_r agissent respectivement sur les parties résonateur ρ_r et qubit ρ_q de la matrice densité alors que \mathcal{L}_I agit sur les deux sous-espaces.

En utilisant les résultats de la section 3.2.1, on doit déterminer les fonctions de corrélation $S_{\uparrow}(\omega)$ et $S_{\downarrow}(\omega)$ où F devient $F^{(4)}$. Pour ce faire, j'utilise le lindbladien \mathcal{L}_r du résonateur pour écrire les équations d'évolution pour les valeurs moyennes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle a \rangle &= -i\tilde{\Delta}_r(\alpha) \langle a \rangle - \frac{\kappa'''}{2} \langle a \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle a^2 \rangle &= -i2\tilde{\Delta}_r(\alpha) \langle a^2 \rangle - \kappa''' \langle a^2 \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle &= -\kappa''' \langle a^\dagger a \rangle + \kappa''' \sinh^2 r, \end{aligned} \quad (5.59)$$

où j'ai défini le décalage

$$\tilde{\Delta}_r(\alpha) \equiv \frac{\omega_r'(\alpha) + S_0(\alpha) - \omega_p}{\cosh(2r)}, \quad (5.60)$$

qui suppose que le qubit est dans l'état fondamental (j'ai choisi $\langle \Pi_{S(\alpha)} \rangle$ en supposant $\langle \sigma_z \rangle = -1$). En pratique, les décalages $S_i(\alpha)$ seront petits devant $\omega'_r(\alpha) - \omega_p$ et ce choix n'a que peu d'impact. À partir des équations du mouvement ci-dessus, on peut calculer les valeurs moyennes $\langle a \rangle_s = \langle a^2 \rangle_s = 0$ et $\langle a^\dagger a \rangle_s = \sinh^2 r$ où $\langle \cdot \rangle_s$ est la valeur moyenne dans l'état stationnaire (c'est-à-dire en annulant les membres de droite des équations du mouvement).

À partir de ces valeurs moyennes et du théorème de régression quantique énoncé à la section 3.3, je calcule alors les fonctions de corrélation

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(t)a(0) \rangle_s &= \sinh^2(r) e^{i\tilde{\Delta}_r(\alpha)t - \kappa'''t/2} \\ \langle a(t)a^\dagger(0) \rangle_s &= (1 + \sinh^2 r) e^{-i\tilde{\Delta}_r(\alpha)t - \kappa'''t/2} \\ \langle a(t)a(0) \rangle_s &= 0 \\ \langle a^\dagger(t)a^\dagger(0) \rangle_s &= 0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

On peut alors obtenir les fonctions de corrélation pour la force $F^{(4)}$

$$\begin{aligned} \langle F^{(4)\dagger}(t)F^{(4)}(0) \rangle_s &= \langle F^{(4)}(t)F^{(4)\dagger}(0) \rangle_s \\ &= |g_0\alpha_{s,0}c|^2 \left[\sinh^2 r e^{i\tilde{\Delta}_r(\alpha)t - \kappa'''t/2} + (1 + \sinh^2 r) e^{-i\tilde{\Delta}_r(\alpha)t - \kappa'''t/2} \right] \end{aligned} \quad (5.62)$$

et les spectres

$$S_\uparrow(\omega) = S_\downarrow(\omega) = |g_0\alpha_{s,0}c|^2 [f(\omega) \sinh^2 r + f^*(-\omega)(1 + \sinh^2 r)] \quad (5.63)$$

où j'ai défini la fonction complexe

$$f(\omega) = \frac{\kappa'''/2 + i[\tilde{\Delta}_r(\alpha) + \omega]}{\kappa'''^2/4 + [\tilde{\Delta}_r(\alpha) + \omega]^2}. \quad (5.64)$$

Les coefficients requis pour écrire l'équation maîtresse du qubit après l'élimination adiabatique du résonateur, donnée à l'équation (3.63), sont finalement

$$\begin{aligned} \text{Re}[S_\uparrow(\delta)] &= \text{Re}[S_\downarrow(\delta)] = |g_0\alpha_{s,0}c|^2 [L(\delta) \sinh^2 r + L(-\delta)(1 + \sinh^2 r)] \\ \text{Im}[S_\uparrow(\delta)] &= \text{Im}[S_\downarrow(\delta)] = |g_0\alpha_{s,0}c|^2 [\text{Im}[f(\delta)] \sinh^2 r - \text{Im}[f(-\delta)](1 + \sinh^2 r)], \end{aligned} \quad (5.65)$$

où j'ai défini la fonction lorentzienne

$$L(\omega) = \text{Re}[f(\omega)] = \frac{\kappa'''/2}{\kappa'''^2/4 + (\tilde{\Delta}_r(\alpha) + \omega)^2}. \quad (5.66)$$

Selon l'équation (3.63), l'équation maîtresse réduite pour le qubit — après l'élimination adiabatique du résonateur — est finalement

$$\dot{\rho}_q = -i [\tilde{H}, \rho_q] + \tilde{\gamma}_\downarrow \mathcal{D}[\sigma_-] \rho_q + \tilde{\gamma}_\uparrow \mathcal{D}[\sigma_+] \rho_q + \frac{\tilde{\gamma}_\varphi}{2} \mathcal{D}[\sigma_z] \rho_q, \quad (5.67)$$

où

$$\tilde{\gamma}_\downarrow = \gamma_\downarrow''' + |g_0 \alpha_{s,0} c|^2 [(L(-\delta) + L(\delta)) \sinh^2 r + L(-\delta)] \quad (5.68a)$$

$$\tilde{\gamma}_\uparrow = \gamma_\uparrow''' + |g_0 \alpha_{s,0} c|^2 [(L(-\delta) + L(\delta)) \sinh^2 r + L(\delta)] \quad (5.68b)$$

$$\tilde{\gamma}_\varphi = \gamma_\varphi''' \quad (5.68c)$$

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{\delta}}{2} \sigma_z + g_0 (\alpha_{s,0} \sigma_+ + \alpha_{s,0}^* \sigma_-), \quad (5.68d)$$

où j'ai défini

$$\tilde{\delta} = \delta + \text{Im}[S_\downarrow(\delta) - S_\uparrow(-\delta)] = \omega_1'''(\alpha) - \omega_0'''(\alpha) - \omega_s + \text{Im}[S_\downarrow(\delta) - S_\uparrow(-\delta)]. \quad (5.69)$$

et où les taux γ_\downarrow''' , γ_\uparrow''' et γ_φ''' sont définis aux équations (5.42) et (5.46).

5.8 Spectre analytique du qubit

L'équation maîtresse (5.67) décrit un spin dans un champ magnétique oscillant perpendiculaire à un champ magnétique constant. On retrouve donc la solution donnée par Bloch [161] pour les valeurs moyennes des opérateurs de Pauli. Dans la notation utilisée dans cette thèse, on obtient, pour la valeur moyenne de σ_z correspondant à l'état du qubit,

$$\langle \sigma_z \rangle = -\frac{\tilde{\gamma}_\downarrow - \tilde{\gamma}_\uparrow}{\tilde{\gamma}_\downarrow + \tilde{\gamma}_\uparrow} \frac{\tilde{\gamma}_2^2 + \tilde{\delta}^2}{(\tilde{\gamma}_2^2 + \tilde{\delta}^2) + 4\tilde{\gamma}_2 |g_0 \alpha_{s,0}|^2 / (\tilde{\gamma}_\uparrow + \tilde{\gamma}_\downarrow)}, \quad (5.70)$$

où

$$\tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}_\varphi + \frac{\tilde{\gamma}_\uparrow + \tilde{\gamma}_\downarrow}{2}, \quad (5.71)$$

est le déphasage total. Dans le langage de Bloch, le coefficient $(\tilde{\gamma}_\downarrow - \tilde{\gamma}_\uparrow)/(\tilde{\gamma}_\downarrow + \tilde{\gamma}_\uparrow)$ correspondrait à l'aimantation moyenne à l'équilibre sans champ oscillant, $|g_0\alpha_{s,0}|^2$ correspondrait à l'amplitude du champ magnétique oscillant perpendiculairement au champ magnétique statique et $\tilde{\delta}$ serait le décalage entre la fréquence Zeeman du spin et la fréquence du champ oscillant.

Si l'on trace $\langle\sigma_z\rangle$ en fonction de la fréquence de spectroscopie ω_s et de l'amplitude de pompe ϵ_p par exemple, on obtient ce que j'appelle le spectre du qubit, que je comparerai à des résultats numériques et expérimentaux au chapitre 6. En pratique, on tracera plutôt $P(|1\rangle) = \langle\Pi_{1,1}\rangle = (1 + \langle\sigma_z\rangle)/2$, la probabilité que le qubit soit dans l'état excité. Cette quantité est

$$P(|1\rangle) = \frac{\langle\Pi_{1,1}\rangle_{\text{eq}} \left(\tilde{\gamma}_2^2 + \tilde{\delta}^2 \right) + 2\tilde{\gamma}_2 |g_0\alpha_{s,0}|^2 / (\tilde{\gamma}_\uparrow + \tilde{\gamma}_\downarrow)}{\left[\left(\tilde{\gamma}_2^2 + 4\tilde{\gamma}_2 |g_0\alpha_{s,0}|^2 / (\tilde{\gamma}_\uparrow + \tilde{\gamma}_\downarrow) \right) + \tilde{\delta}^2 \right]}, \quad (5.72)$$

où

$$\langle\Pi_{1,1}\rangle_{\text{eq}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\tilde{\gamma}_\downarrow - \tilde{\gamma}_\uparrow}{\tilde{\gamma}_\downarrow + \tilde{\gamma}_\uparrow} \right) = \frac{\tilde{\gamma}_\uparrow}{\tilde{\gamma}_\uparrow + \tilde{\gamma}_\downarrow}, \quad (5.73)$$

est la probabilité que le qubit soit excité à l'équilibre thermique, la « température effective » étant ici représentée par le taux d'excitation $\tilde{\gamma}_\uparrow$.

On peut interpréter le modèle développé dans ce chapitre selon deux points de vue. Tout d'abord, les équations ci-dessus pour le spectre fixent certaines attentes par rapport à la rétroaction du champ électromagnétique sur le qubit. Par exemple, sachant que $\gamma_\varphi''' \propto \kappa|\alpha_1 - \alpha_0|^2$, on s'attend à ce que la largeur de la transition du qubit augmente lorsque la distinguabilité $D = |\alpha_1 - \alpha_0|$ entre les deux états pointeurs augmente. De même, comme les taux de relaxation et de chauffage effectifs $\tilde{\gamma}_\downarrow$ et $\tilde{\gamma}_\uparrow$ sont piqués lorsque le décalage de fréquence qubit-spectroscopie est égal - en valeur absolue - au décalage résonateur-pompe. On s'attend donc à observer des pics (des bandes latérales) dans le spectre du qubit à ces fréquences de spectroscopie. Ce sont ces effets que j'analyserai plus en détails au chapitre 6, en comparant le spectre analytique à des simulations numériques et à des résultats expérimentaux.

D'un autre côté, le modèle nous donne aussi certains indicateurs pour améliorer la mesure du qubit. En effet, on s'attend à ce que la mesure s'améliore lorsque la distinguabilité des états pointeurs augmente. Cette même distinguabilité peut être calculée grâce aux équations (5.30) pour $\alpha_{i,d}$. En particulier, on s'attend à ce que D augmente si la différence entre les fréquences effectives du résonateur pour les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ du

qubit augmente. En analysant le comportement de \mathbb{S}_i^d et \mathbb{K}_i^d en fonction de différents paramètres, il est ainsi possible d'identifier ces régimes plus favorables à la mesure. C'est à cette question que je m'intéresserai dans le chapitre 7.

Chapitre 6

Sonde du résonateur par le qubit

Pure logical thinking can give us no knowledge whatsoever of the world of experience ; all knowledge about reality begins with experience and terminates in it.

-- Albert Einstein [125]

Cette citation d'Einstein illustre bien le chemin que j'ai suivi dans le cadre de cette thèse. Ainsi, c'est une expérience réalisée au CEA-Saclay par le groupe de quantronique qui a motivé le développement du modèle que j'ai présenté au chapitre 5. C'est à leurs résultats expérimentaux que je comparerai le modèle réduit ainsi que les résultats de simulations numériques basées sur le modèle initial complet énoncé à la section 5.1.

Je débute ce chapitre en décrivant, à la section 6.1, l'expérience réalisée à Saclay. Je compare ensuite les résultats expérimentaux à des résultats de simulations numériques et au modèle analytique dans un régime de faible et de forte amplitude de spectroscopie, aux sections 6.2 et 6.3 respectivement.

6.1 Description de l'expérience de Saclay

Le montage expérimental du groupe de Saclay est schématisé à la figure 6.1, et les paramètres sont donnés dans la légende de la figure. L'expérience se déroule de la façon suivante. Le résonateur est rempli de photons par un signal de pompe de fréquence $\omega_p \sim \omega_r$ et d'amplitude ϵ_p . Ce signal d'amplitude constante est envoyé pendant une

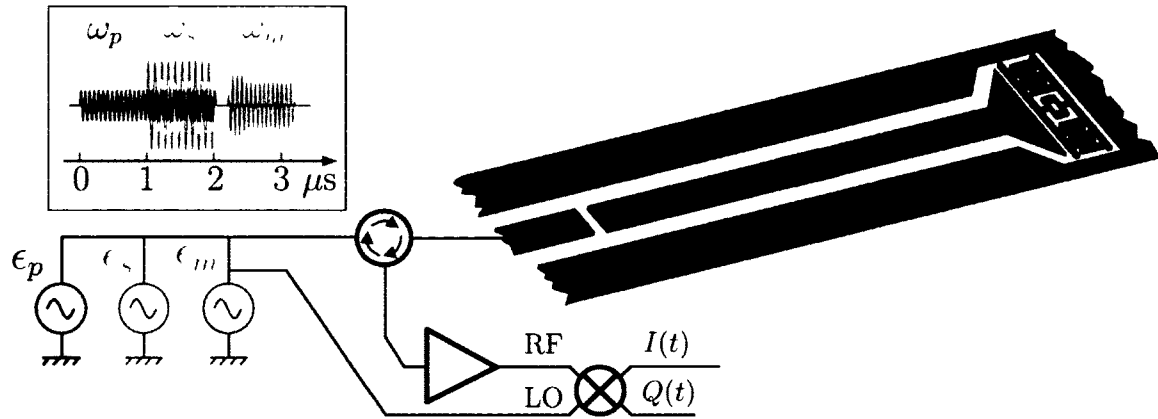


FIGURE 6.1 Représentation schématique de l'expérience du groupe de Saclay [75]. Les paramètres du résonateur sont $(\omega_r, K, K', \kappa, \kappa_{NL})/2\pi = (6453.5, -0.625, -0.00125, 9.6, 0)$ MHz. Les paramètres du transmon sont $(\omega_{1,0}, \omega_{2,1}, \gamma, \gamma_\varphi)/2\pi = (5720, 5421.6, 0.22, 0.25)$ MHz. Les constantes de couplage entre le transmon et le résonateur au point d'opération du transmon sont $(g_0, g_1)/2\pi = (42.4, 58.4)$. Les autres couplages et fréquences du transmon peuvent être calculés tel que décrit à la section 2.3. Les définitions de ces paramètres sont données à la section 5.1. L'encart en haut à gauche présente la séquence de pulses.

durée suffisamment longue ($> 1/\kappa$) pour que le résonateur atteigne un état stationnaire. Un signal de spectroscopie de fréquence $\omega_s \sim \omega_{1,0}$ et d'amplitude ϵ_s est ensuite appliqué pour tenter d'induire une transition vers l'état $|1\rangle$ du qubit. Les signaux de pompe et de spectroscopie sont ensuite arrêtés et, après un temps d'attente, l'état du qubit est lu avec une mesure par bifurcation. Le temps d'attente t est tel que $1/\gamma > t > 1/\kappa$ de sorte que le résonateur ait le temps de relaxer vers son fondamental, mais que l'état du qubit change peu. L'expérience est répétée en variant l'amplitude et la fréquence des signaux de pompe et de spectroscopie afin d'accumuler des statistiques et de calculer la probabilité que le signal de spectroscopie ait réussi à exciter le qubit vers l'état $|1\rangle$.

Les résultats qui sont présentés aux sections suivantes sont des spectres montrant la probabilité que le qubit soit dans l'état $|1\rangle$ en fonction de l'amplitude de pompe ϵ_p et de la fréquence de spectroscopie ω_s , pour différentes fréquences de pompe ω_p et amplitudes de spectroscopie ϵ_s . De ces spectres, on peut extraire la fréquence et le taux de déphasage effectifs du qubit, correspondant respectivement à la position et à la largeur à mi-hauteur de la raie de spectroscopie. Tel que montré théoriquement au chapitre 5, la fréquence effective et le taux de déphasage du qubit dépendent du champ intra-résonateur. Ceci permet d'utiliser le qubit comme une sonde pour ce champ.

6.2 Faible amplitude de spectroscopie

Je considère d'abord le régime de faible amplitude de spectroscopie. Ce régime correspond à considérer le champ de spectroscopie négligeable par rapport au champ de pompe, $|\alpha_s| \ll |\alpha_p|$. Ce régime minimise aussi l'élargissement radiatif des raies de spectroscopie, permettant de mieux observer l'effet dominant qui sera lié au déphasage induit par la mesure. Dans ce régime, le signal de spectroscopie est finalement trop faible pour causer des transitions à plusieurs photons et on devrait ainsi observer une seule transition dans le spectre du qubit.

L'une des questions fondamentales que l'on peut étudier dans ce régime est de savoir si une mesure avec un résonateur non linéaire atteint la limite quantique concernant le bruit ajouté par un amplificateur discutée à la section 2.4.3. Alors que l'atteinte de cette limite a été établie pour une mesure dispersive avec un résonateur linéaire [126], cette question est ouverte pour un résonateur non linéaire. La limite sera atteinte si la largeur de la raie de spectroscopie est prédite correctement par le modèle réduit. En effet, si tel est le cas, cela implique que la mesure ne cause pas davantage de rétroaction que celle prédite par la théorie.

Je présente d'abord, à la sous-section 6.2.1, les spectres expérimentaux et analytiques et les compare qualitativement. Puis, aux sous-sections 6.2.2 et 6.2.3, j'examine quantitativement la position et la largeur de la raie de spectroscopie et je discute de l'importance de certains choix que j'ai faits dans le développement du modèle analytique.

6.2.1 Spectres expérimentaux et analytiques

Avec la méthode décrite à la section 6.1, l'équipe de Saclay a réalisé la spectroscopie d'un qubit supraconducteur de type transmon lorsqu'il est couplé à un oscillateur non linéaire pompé. Ils ont étudié les deux régimes de l'oscillateur, soient les régimes d'amplificateur paramétrique (JPA) et de bifurcation (JBA) discutés à la section 2.1.1. Ces deux régimes correspondent respectivement à des décalages de fréquence réduits $\Omega = 2(\omega_r - \omega_p)/\kappa = \{0.42, 2.8\}\Omega_C^1$, où $\Omega_C = \sqrt{3}$ est le décalage critique au delà duquel l'oscillateur peut être bistable. Ces deux décalages correspondent aux deux lignes

¹On note que l'article [75] utilise plutôt $\Omega_g/\Omega_C = \{0.7, 3.1\}$, où Ω_g est le décalage réduit en considérant la fréquence *effective* du résonateur couplé au qubit dans l'état fondamental. J'utilise ici plutôt le décalage réduit par rapport à la fréquence du résonateur sans qubit. Ceci n'est qu'une question de notation et les fréquences absolues impliquées sont néanmoins les mêmes dans l'article et dans la thèse.

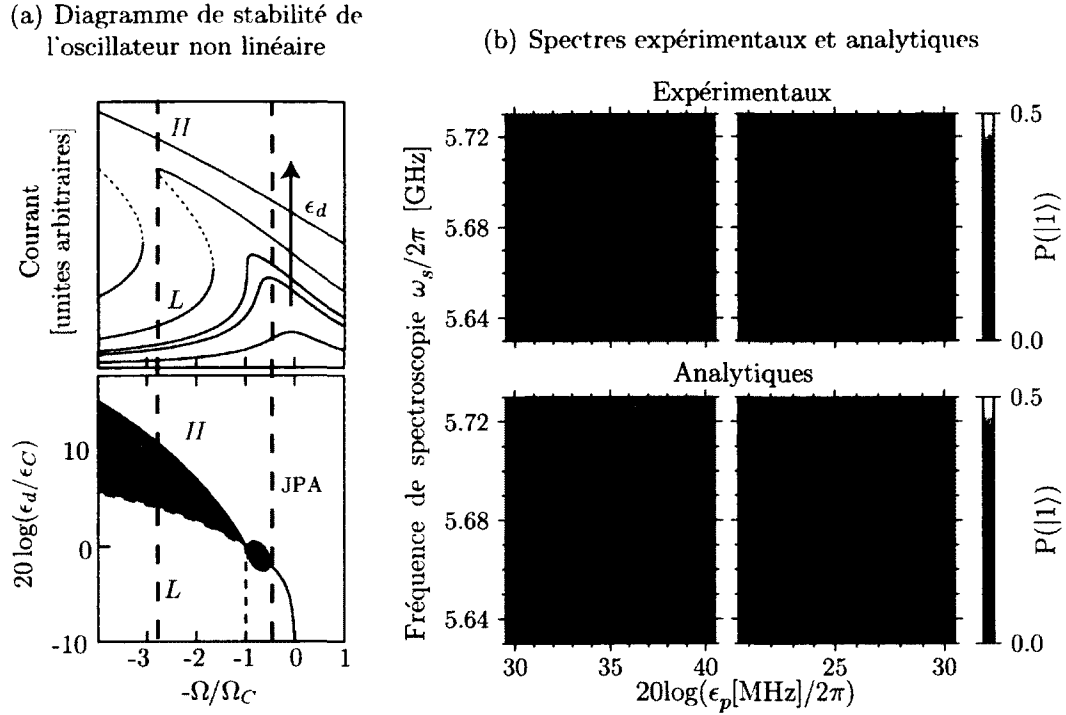


FIGURE 6.2 – Spectroscopie du qubit dans le régime de faible spectroscopie. Les deux points d’opération correspondant aux graphiques de gauche et droite en (b) sont illustrés dans le diagramme de stabilité du résonateur non linéaire en (a) par des lignes tiretées verticales. Les spectres expérimentaux ont été obtenus tel que décrit à la section 6.1, alors que les spectres analytiques ont été calculés à partir de l’équation (5.72) en négligeant le déphasage habillé. Les paramètres du résonateur et du qubit sont donnés à la figure 6.1. La puissance de spectroscopie des résultats expérimentaux est $P_s = -22$ dBm, correspondant à $\epsilon_s/2\pi \approx 3$ MHz. La correspondance est donnée par $\epsilon_s = \sqrt{\frac{\kappa}{\hbar\omega_i}} 10^{(P_i - A_i - 30)/20}$, où A_i est l’atténuation de la ligne transportant le signal, et où P_i est en dBm et ϵ_i en hertz. Le facteur A_s pour la ligne de spectroscopie a été évalué à 114 ± 2 dB avec les données de largeur à faible P_p .

verticales tiretées de la figure 6.2(a). Les spectres expérimentaux pour ces deux points d’opération sont présentés aux panneaux du haut de la figure 6.2(b) en fonction de la fréquence de spectroscopie ω_s et de l’amplitude de la pompe ϵ_p . L’amplitude de la pompe présentée en échelle logarithmique correspond expérimentalement à des décibels de puissance.

Dans le régime de bifurcation, à $\Omega/\Omega_C = 2.8$ (à gauche), on note un décalage de la fréquence de la raie de spectroscopie lorsque ϵ_p augmente jusqu’à $20 \log(\epsilon_p/2\pi) \approx 35$ où l’on observe un saut abrupt. Ce déplacement de la raie correspond au décalage de Stark

de la transition du qubit lorsque que le nombre de photons intra-résonateur augmente, lentement au début, puis soudainement lorsque le résonateur bifurque vers l'état de haute amplitude H . Bien que difficile à voir sur un graphique de densité, la largeur de la raie change aussi en fonction de l'amplitude de pompe ϵ_p . On verra aux prochaines sections, lors des comparaisons quantitatives que la largeur augmente juste avant la bifurcation, puis redescend à sa valeur minimale après la bifurcation. Ce comportement est très différent de ce qui se produit avec un résonateur linéaire, où la largeur augmente de façon monotone avec le nombre de photons [120].

Dans le régime d'amplification paramétrique, à $\Omega/\Omega_C = 0.42$ (à droite), on note un décalage plus monotone de la fréquence de la raie spectrale en augmentant l'amplitude ϵ_p , et en particulier, on n'observe pas de saut. Dans ce régime cependant, on observe une forte variation de la largeur de raie, et en particulier un élargissement significatif autour de $20 \log(\epsilon_p/2\pi) \approx 22$. Comme on le verra à la sous-section 6.2.3, cet élargissement est dû au déphasage induit par la mesure et indique un régime où l'amplificateur paramétrique permet de très bien distinguer les deux états du qubit.

Les deux spectres expérimentaux doivent être comparés aux spectres analytiques correspondant, présentés au bas de la figure 6.2(b). Ces spectres analytiques sont calculés à partir de l'équation (5.72) du modèle réduit. Je souligne ici que la seule partie non-analytique de ces spectres est la solution du polynôme de degré 5 [Eq. (5.30)] permettant de calculer l'amplitude des champs de pompe $\alpha_{i,p}$. En excluant la non-linéarité K' , le polynôme à résoudre est d'ordre 3 et une solution complètement analytique pourrait être calculée. La solution analytique d'un polynôme d'ordre 3 est cependant peu utile pour la compréhension et, bien que petite, la correction liée à K' est importante pour l'accord quantitatif.

Je souligne aussi que les fréquences de transition, les constantes de couplage et les taux de dissipation peuvent tous être évalués par des expériences indépendantes. Les seuls paramètres ajustables sont ainsi la non-linéarité K et un coefficient d'atténuation A_p correspondant à l'atténuation de la ligne amenant le signal de la source de tension jusqu'à l'échantillon. Cette atténuation A_p permet de faire le lien entre la puissance de pompe expérimentale P_p et l'amplitude théorique ϵ_p . Une variation de A_p correspondrait à un déplacement horizontal des spectres — qui pourrait être interprété comme un décalage de Stark, vertical — alors qu'une variation de K changerait l'amplitude du saut de fréquence à la bifurcation. Ces deux paramètres peuvent et ont été évalués expérimentalement à partir des paramètres cibles de l'échantillon et par une calibration de l'atténuation

de la ligne de signal [75]. Cette évaluation indépendante a permis d'obtenir $K/2\pi = -750 \pm 250$ kHz et $A_p = 111 \pm 2$ dB [75]. Un lissage des spectres expérimentaux pour plusieurs valeurs de Ω (non-présentés ici) a permis d'établir la valeur de ces paramètres à $K/2\pi = -625 \pm 15$ kHz et $A_p = 110.8 \pm 0.2$ dB [75], permettant ainsi un gain d'un ordre de grandeur dans la précision de ces deux paramètres. Le modèle présenté au chapitre 5 s'avère donc un outil intéressant pour caractériser les paramètres d'un résonateur non linéaire, qui sont autrement difficiles à obtenir.

En comparant les spectres expérimentaux et analytiques, on constate tout d'abord une différence dans l'amplitude des raies et de la probabilité de base (la couleur du fond, loin de la résonance). Trois facteurs peuvent expliquer ces différences. Tout d'abord, la température expérimentale, qui ne dépasse pas 50 mK, n'est pas incluse dans le modèle analytique. Cette température correspond à une population thermique du qubit d'environ $e^{-\hbar\omega_{1,0}/k_B T} \approx 0.4\%$. Un deuxième facteur est que l'expérience mesure en fait la probabilité de bifurcation du résonateur lors de la mesure, et non pas la probabilité que le qubit soit dans l'état excité. La fidélité de cette mesure étant d'environ 90% [82], la conversion entre les deux probabilités induit une erreur d'au plus 10%. Finalement, la correspondance (l'atténuation A_s) entre l'amplitude de spectroscopie théorique ϵ_s et la puissance expérimentale de spectroscopie P_s n'a pu être calibrée aussi précisément que pour le signal de pompe grâce au décalage de Stark. On note que le calcul analytique a été fait en enlevant le déphasage habillé (termes proportionnels à γ_φ et κ dans les équations (5.42 a et b)). Tel que discuté précédemment, ces taux devraient dépendre des spectres de bruit à haute fréquence (de l'ordre du gigahertz) qui sont méconnus, mais supposés très petits s'il s'agit de bruit $1/f$. La contribution du déphasage habillé apparaîtrait dans les spectres expérimentaux comme une élévation de la probabilité de fond à la puissance de la bifurcation. On semble observer ce type d'effet dans le spectre expérimental de gauche à $20 \log(\epsilon_p/2\pi) \approx 37$, mais l'élévation ne se produit pas au seuil de la bifurcation et on l'associe plutôt à un artefact expérimental.

Si l'on ignore ces différences dans l'amplitude des raies et la probabilité de fond, on constate que les caractéristiques — position et largeur des raies — expérimentales sont reproduites qualitativement par les spectres analytiques, et ce, dans les deux régimes. Aux deux sous-sections suivantes, je vais comparer ces deux caractéristiques de façon quantitative.

6.2.2 Position de la raie de spectroscopie

Les spectres présentés à la section précédente ont été lissés en supposant une raie de forme Lorentzienne pour en extraire la position et la largeur à mi-hauteur. La même méthode de lissage a aussi été utilisée sur des spectres calculés numériquement où j'ai calculé la valeur stationnaire de $\langle \sigma_z \rangle$ lorsque le système décrit par le modèle initial de la section 5.1 est soumis à un signal de pompe et un signal de spectroscopie. Ces simulations numériques ignorent ainsi tout des approximations que j'ai dû faire pour obtenir le modèle réduit et visent à vérifier que le modèle initial capture bien l'essence de la physique. Étant donné le temps de calcul nécessaire pour ces simulations, seuls quelques ensembles de paramètres $(\omega_p, \epsilon_p, \omega_s, \epsilon_s)$ ont pu être calculés et c'est pour cette raison que je n'ai pas présenté de spectre numérique complet à la section 6.2.1. Il est possible d'obtenir les spectres numériques d'émission ou d'absorption du qubit rapidement en utilisant le théorème de régression quantique présenté à la section 3.3, mais cela suppose une puissance de spectroscopie tendant vers zéro. Une telle simulation ne tient donc pas compte de l'élargissement radiatif.

La position de la raie de spectroscopie est présentée à la figure 6.3 en fonction de l'amplitude de pompe ϵ_p . Les points sont les positions extraites des spectres expérimentaux

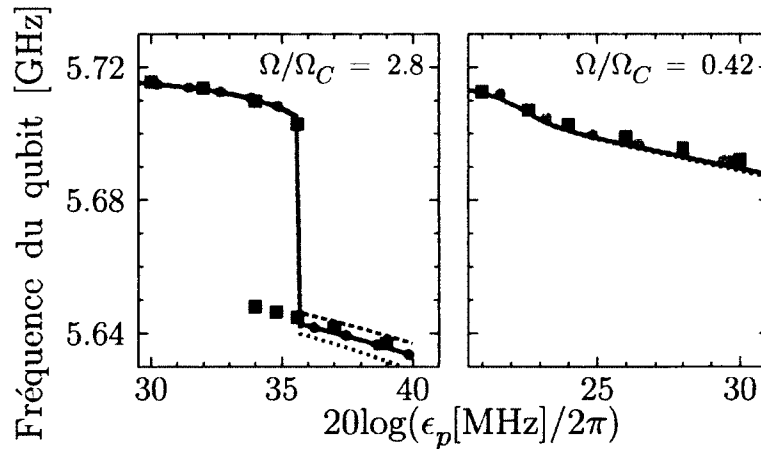


FIGURE 6.3 – Position de la raie de spectroscopie décalée par les effets Stark et Lamb. Les points sont les positions extraites des spectres expérimentaux (cercles gris) et numériques (carrés oranges). Les courbes sont la fréquence $\omega_1''' - \omega_0'''$ calculée analytiquement à partir des équations (5.20) et (5.39b) (courbes continues noires), en négligeant le décalage de Stark quadratique (i.e. en fixant $\mathbb{K}_i^p = 0$) (courbes pointillées rouges) et en remplaçant ω_p par ω_r dans \mathbb{S}_i^p et \mathbb{K}_i^p (courbes tiretées vertes).

(ronds gris) et numériques (carrés oranges). On peut constater que les points numériques correspondent bien aux points expérimentaux, assurant ainsi que le modèle initial est une bonne représentation du système expérimental.

On compare ensuite les résultats expérimentaux à trois versions du résultat analytique, correspondant à trois approximations différentes. Les courbes sont ainsi la fréquence $\omega_1''' - \omega_0'''$, correspondant à la position de la réponse maximale $\delta = \omega_1''' - \omega_0''' - \omega_s = 0$ lors du calcul analytique de $\langle \sigma_z \rangle$. Les trois versions sont calculées analytiquement, d'abord à partir des équations (5.20) et (5.39b) (courbes continues noires) correspondant précisément au modèle réduit, puis en négligeant le décalage de Stark quadratique (i.e. en fixant $\mathbb{K}_i^p = 0$) dans ces mêmes équations (courbes pointillées rouges) et finalement en remplaçant ω_p par ω_r dans \mathbb{S}_i^p et \mathbb{K}_i^p (courbes tiretées vertes).

Dans le régime d'amplification paramétrique ($\Omega/\Omega_C = 0.42$, à droite), les trois courbes analytiques se superposent presque. Ceci est attendu pour deux raisons. Tout d'abord, la fréquence du signal de pompe ω_p est très peu décalée de la fréquence naturelle du résonateur ω_r . Ainsi, le remplacement $\omega_p \rightarrow \omega_r$ a très peu d'impact. Ensuite, l'amplitude de pompe maximale sur le graphique correspond à un faible nombre de photons $n \sim 20$, ce qui rend le décalage de Stark quadratique $\mathbb{K}_i n^2$ négligeable.

Dans le régime de bifurcation ($\Omega/\Omega_C = 2.8$, à gauche), la situation est inversée. Tout d'abord, le décalage entre la fréquence de pompe et celle du résonateur est important. Cela entraîne une modification non-négligeable des constantes de Stark \mathbb{S}_i^p et \mathbb{K}_i^p si l'on remplace la fréquence de pompe par celle du résonateur, ce qui devient visible après la bifurcation par la différence entre la courbe continue noire et la courbe tiretée verte. De même, comme le nombre de photons moyen après la bifurcation est relativement élevé $n \sim 50$, l'effet du décalage de Stark quadratique est plus facilement discernable dans la différence entre la courbe continue noire et la courbe pointillée rouge.

On constate qu'il est nécessaire de tenir compte à la fois du décalage entre la fréquence de pompe et celle du résonateur ainsi que du terme Stark d'ordre supérieur. tel que le fait le modèle présenté au chapitre 5, afin de calculer correctement la fréquence de transition du qubit.

6.2.3 Largeur de la raie de spectroscopie

Plusieurs facteurs influencent la largeur de la raie de spectroscopie du qubit. Afin de les détailler, je réécris l'équation (5.72) pour calculer l'occupation de l'état excité tel que

$$P(|1\rangle) = \frac{1 + \langle \sigma_z \rangle}{2} = \frac{1 - \tilde{\gamma}_2^2 / \tilde{\gamma}_{2,\text{ER}}^2}{2} \frac{\tilde{\gamma}_{2,\text{ER}}^2}{\tilde{\gamma}_{2,\text{ER}}^2 + \tilde{\delta}^2}, \quad (6.1)$$

où j'ai défini le taux de déphasage modifié par l'élargissement radiatif tel que

$$\tilde{\gamma}_{2,\text{ER}}^2 \equiv \tilde{\gamma}_2^2 + 4\tilde{\gamma}_2 |g\alpha_{s,0}|^2 / (\tilde{\gamma}_\uparrow + \tilde{\gamma}_\downarrow). \quad (6.2)$$

Ainsi, le spectre est une lorentzienne de demi-largeur à mi-hauteur $\tilde{\gamma}_{2,\text{ER}}^2$, qui est augmentée par l'élargissement radiatif. Dans la limite de faible amplitude de spectroscopie considérée dans cette section, l'élargissement radiatif est faible et la largeur minimale est $\tilde{\gamma}_2$. Cette largeur minimale comporte une composante intrinsèque $\gamma_2 = \gamma_\varphi + \gamma/2$, de même qu'une composante liée au signal de pompe. Cette composante liée au signal de pompe peut être séparée en plusieurs contributions que je détaille maintenant.

Déphasage habillé

Tout d'abord, aux équations (5.37), le deuxième terme de $\gamma''_{\downarrow,z}$ et $\gamma''_{\uparrow,z}$ est l'effet du déphasage habillé. Cet effet, que notre groupe a décrit dans le cas d'un qubit à deux niveaux couplé à un résonateur linéaire dans les articles [114, 115], est causé par le déphasage des états dits habillés du qubit. Ces états sont les états propres de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings et, dans le cas d'un système à deux niveaux, sont des superpositions d'état $|n, 0\rangle$ et $|n-1, 1\rangle$ où le premier indice représente le nombre de photons et le deuxième est l'état du qubit. Dans cette base, le déphasage du qubit transforme la superposition cohérente des états $|n, 0\rangle$ et $|n-1, 1\rangle$ en mélange statistique et agit donc effectivement comme un terme de mélange, augmentant la relaxation effective. Cependant, tel que nous l'avons montré dans la référence [115], ces taux de déphasage habillés dépendent du spectre du bruit à des fréquences de l'ordre du gigahertz. En supposant un bruit en $1/f$ très faible à hautes fréquences, je considérerai cette contribution négligeable ici.

Effet Purcell

Une deuxième contribution liée au couplage entre l'atome et le résonateur est l'effet Purcell qui associe une perte d'un photon à une relaxation partielle du qubit. Cet effet correspond au deuxième terme de $\gamma_{\downarrow,r}'''$, aux équations (5.42). Ce terme ne dépend du champ de pompe que par le déplacement des fréquences du résonateur et du qubit induit par celui-ci. Puisque ces déplacements sont faibles par rapport au décalage de fréquence entre le qubit et le résonateur, cette dépendance est faible et la variation de ce terme sera négligeable sur les intervalles d'amplitude de pompe considérés.

Déphasage induit par la mesure

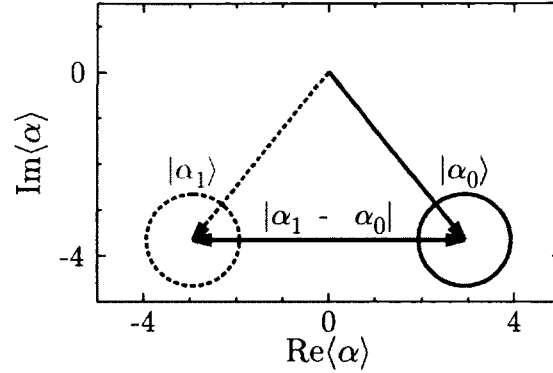
La troisième — et plus importante — contribution du champ de pompe au taux $\tilde{\gamma}_2$ est le déphasage induit par la mesure. Tel que discuté à la section 2.4.3, ce déphasage est la conséquence du principe d'incertitude d'Heisenberg, qui impose que si l'on mesure une quantité, on accroît l'incertitude dans la quantité conjuguée. Dans le cas présent, le champ intra-résonateur α_i dépend de l'état $|i\rangle$ du qubit et correspond donc à une mesure de l'opérateur $\sigma_z = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|$ du qubit (où j'ai limité le sous-espace du qubit aux deux premiers niveaux). Comme l'opérateur σ_z ne commute pas avec σ_x et σ_y , le principe d'incertitude nous indique que l'on doit augmenter l'incertitude dans le plan $X - Y$, ce qui est précisément l'effet du déphasage. Ce déphasage additionnel, induit par la mesure, est représenté par les trois derniers termes de l'équation (5.46) pour γ_φ''' . Étant donné les paramètres de l'expérience de Saclay, $\kappa \gg \gamma$ et $\kappa_{NL} = 0$, le plus important de ces trois termes est le premier

$$\Gamma_{\varphi,m} = \frac{\kappa |\alpha_1 - \alpha_0|^2}{2}. \quad (6.3)$$

Ainsi, le déphasage induit par la mesure est proportionnel au taux κ auquel les photons sortent du résonateur et peuvent donc être mesurés, et à la distance dans le plan complexe entre les états pointeurs α_1 et α_0 , tel qu'illustré dans l'espace des phases à la figure 6.4. Ainsi, le calcul correct de α_i est crucial pour celui du taux $\tilde{\gamma}_2$ et de la largeur de la raie.

En plus des points expérimentaux et numériques, je comparerai ici le modèle développé au chapitre 5 à deux autres résultats. Tout d'abord, en utilisant un résonateur linéaire plutôt qu'un résonateur non linéaire, il a été montré que le taux $\Gamma_{\varphi,m}$ peut s'écrire [120]

$$\Gamma_{\varphi,m}^{\text{lin}} = \frac{\kappa}{2} \frac{2(|\alpha_{1,p}|^2 + |\alpha_{0,p}|^2) \chi^2}{\kappa^2/4 + \chi^2 + (\omega_r - \omega_p)^2}, \quad (6.4)$$

FIGURE 6.4 – Distance entre les états pointeurs α_1 et α_0 .

où $\chi = \mathbb{S}_1^p - \mathbb{S}_0^p$ dans la notation de cette thèse. Ainsi, dans le cas d'un résonateur linéaire, le taux de déphasage induit par la mesure augmente de façon monotone avec le nombre de photons de mesure $\bar{n}_i = |\alpha_{i,p}|$. Cela implique que la largeur de raie de spectroscopie devrait toujours augmenter avec l'amplitude de pompe, ce qui n'est pas le cas dans les spectres présentés à la section 6.2.1.

Une autre possibilité est de faire une théorie de réponse linéaire. Dans une telle approche, on calcule d'abord le champ du résonateur non linéaire $\bar{\alpha}$ en l'absence du qubit, c'est-à-dire en fixant $\mathbb{S}_i^d = \mathbb{K}_i^d = 0$ dans l'équation (5.30). On suppose ensuite que l'effet du qubit est une perturbation autour de ce champ moyen, qui dépend linéairement du décalage dispersif de la fréquence du résonateur par le qubit. Plus précisément, j'ai pris l'équation

$$\alpha_{i,p}^{\text{RL}} = \bar{\alpha} - \frac{\mathbb{S}_i^p \bar{\alpha}}{(\omega_r - \omega_p - i\frac{\kappa}{2}) + 3K|\bar{\alpha}|^2}, \quad (6.5)$$

où j'ai négligé K' , \mathbb{K}_i^p et κ_{NL} . J'ai obtenu cette équation en supposant que $\alpha_{i,p}^{\text{RL}} = \bar{\alpha}(1 + \delta)$ où $\bar{\alpha}$ est la solution sans qubit, et en trouvant la valeur de δ qui résolve l'équation (5.30) au premier ordre. Dans une telle théorie de réponse linéaire, la valeur calculée de $\alpha_{i,p}^{\text{RL}}$ dépend du choix de $\bar{\alpha}$. Ainsi, il serait possible d'obtenir la valeur exacte pour $\alpha_{0,p}^{\text{RL}} = \alpha_{0,p}$ en choisissant $\bar{\alpha}$ comme la solution de l'équation (5.30) avec le qubit dans l'état $|0\rangle$ plutôt que sans qubit. Cela augmenterait cependant l'erreur sur la valeur de $\alpha_{1,p}^{\text{RL}}$ pour l'état $|1\rangle$.

Tel qu'on l'a vu à la section 2.4.3, le principe d'incertitude indique que le taux de déphasage induit par la mesure $\Gamma_{\varphi,m}$ doit être plus grand que la moitié du taux auquel

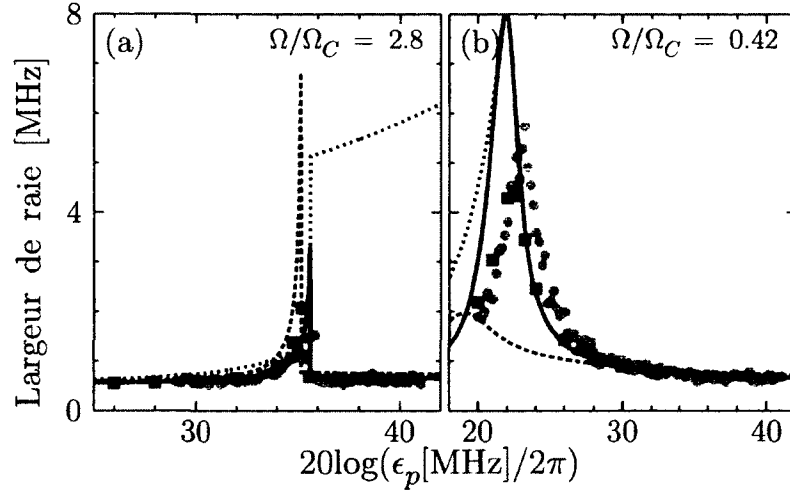


FIGURE 6.5 – Largeur de la raie de spectroscopie Les points sont les largeurs extraites des spectres expérimentaux (ronds gris) et numériques (carrés oranges). Les courbes sont le taux de déphasage $\gamma_2''' = \gamma_\varphi''' + (\gamma_{\downarrow,0}''' + \gamma_{\uparrow,0}''')/2$ où le taux de déphasage induit par la mesure $\Gamma_{\varphi,m}$ est calculé avec les champs donnés par l'équation (5.30) (réponse non linéaire, courbes continues noires), en supposant plutôt (6.5) (réponse linéaire, courbes tiretées vertes) et en supposant que $\Gamma_{\varphi,m}$ est donné par la même expression (6.4) qu'avec un résonateur linéaire (courbes pointillées rouges).

on acquiert de l'information sur le système Γ_m . Ceci est exprimé par l'inégalité [126]

$$\Gamma_{\varphi,m} \geq \frac{\Gamma_m}{2}. \quad (6.6)$$

Il a été montré que pour des états cohérents, le taux de mesure $\Gamma_m = \kappa|\alpha_1 - \alpha_0|^2$, et donc que la mesure dispersive avec un résonateur linéaire atteint la limite quantique sur la rétroaction imposée par le principe d'incertitude [126]. La question à laquelle je tente de répondre ici est de savoir si cette limite quantique est atteinte dans le cas d'un résonateur non linéaire.

Comparaison quantitative des largeurs de raie

Je trace à la figure 6.5 la largeur de la raie de spectroscopie en fonction de l'amplitude de pompe telle qu'extraites des résultats expérimentaux (ronds gris) ou des simulations numériques (carrés oranges). Les courbes correspondent au modèle développé au chapitre 5 (courbes continues noires), à une approximation de réponse linéaire (courbes tiretées

vertes) et à l'expression pour un résonateur linéaire (courbes pointillées rouges).

On constate tout d'abord que les largeurs extraites de simulations numériques suivent approximativement les résultats expérimentaux, indiquant encore une fois que le modèle initial contient l'essentiel de la physique observée par l'expérience de Saclay. Dans le régime de bifurcation (gauche), on constate une augmentation de la largeur de raie avant la bifurcation, puis un retour à la valeur à basse amplitude de pompe après la bifurcation. Dans le régime d'amplification paramétrique (droite), on voit aussi une augmentation suivie d'une diminution. Il a été montré que la position du maximum de largeur de la raie dans le régime d'amplification paramétrique correspond au maximum du gain de l'oscillateur lorsqu'il est utilisé comme un amplificateur paramétrique [75].

En comparant avec les courbes théoriques, on constate tout d'abord que les courbes calculées avec l'expression pour le résonateur linéaire (courbes pointillées rouges) échouent complètement à prédire le comportement même qualitatif de la largeur de raie. De même, les courbes calculées en réponse linéaire (courbes tiretées vertes) montrent un accord qualitatif avec les données expérimentales et numériques, soit une diminution de largeur de raie à haute amplitude de pompe. Néanmoins, seul le modèle en réponse non linéaire développé au chapitre 5 de cette thèse (courbes continues noires) obtient un accord quantitatif dans le régime de bifurcation et semi-quantitatif dans le régime d'amplification paramétrique. Le désaccord que l'on peut observer entre la courbe noire et les données expérimentales et numériques autour de $20 \log(\epsilon_p/2\pi) = 22$ dans le régime d'amplification paramétrique s'explique par une brisure de l'approximation de faible distinguabilité des états cohérents, i.e. $|\alpha_1 - \alpha_0| < 1$. En effet, avec les paramètres $\kappa/2\pi = 9.6$ MHz, la limite $|\alpha_1 - \alpha_0| = 1$ correspond à une largeur de raie de 4.8 MHz. Si l'on exclut ce régime qui est en dehors des limites du modèle théorique, on constate que la largeur de raie expérimentale n'est pas supérieure à la prédiction théorique du modèle non linéaire. Cela indique que la mesure avec un résonateur non linéaire peut atteindre la limite quantique $\Gamma_{\varphi,m} = \Gamma_m/2$, tout comme la mesure avec un résonateur linéaire. Le calcul avec la réponse linéaire nous amènerait cependant à conclure l'inverse, puisque dans le régime d'amplification paramétrique, les largeurs expérimentales sont parfois beaucoup plus grandes que la prédiction théorique.

Afin de mieux illustrer le comportement des états cohérents α_i , qui donnent le déphasage induit par la mesure, je trace la position de ces états dans le plan complexe à la figure 6.6. Je trace la trajectoire des états $\alpha_{0,p}$ (courbes noires, cercles) et $\alpha_{1,p}$ (courbes rouges, carrés) calculés par les équations de la réponse non linéaire (5.30) (courbes pleines)

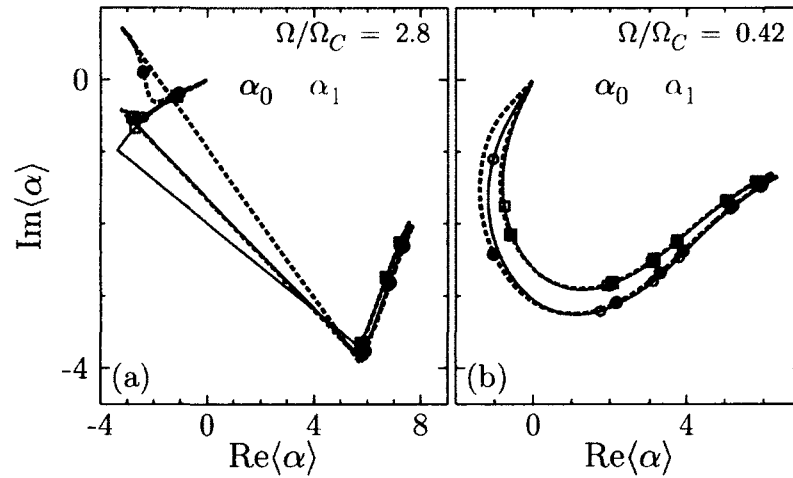


FIGURE 6.6 – Position des champs $\alpha_{0,p}$ et $\alpha_{1,p}$ dans le plan complexe en réponse linéaire versus non linéaire. Les courbes sont les solutions de $\alpha_{0,p}$ (courbes noires, symboles circulaires) et $\alpha_{1,p}$ (courbes rouges, symboles carrés) selon la réponse non linéaire (courbes pleines) et selon un modèle de réponse linéaire (courbes tiretées). Le taux $\Gamma_{\varphi,m}$ est proportionnel à la distance entre un symbole circulaire et le symbole carré correspondant.

et linéaire (6.5) (courbes tiretées). Les symboles représentent les positions des états cohérents pour les différentes courbes, pour des amplitudes de pompe ϵ_p fixées. Le taux $\Gamma_{\varphi,m}$ est proportionnel à la distance entre un symbole rond noir et le symbole carré rouge correspondant. On voit que non seulement la position des symboles peut différer fortement entre la réponse linéaire et la réponse non linéaire, mais aussi que la distance entre deux symboles correspondants peut être très différente, menant à la différence entre les courbes pleines noires et tiretées vertes à la figure 6.5.

6.2.4 Limites de la réponse linéaire

La rétroaction d'un résonateur non linéaire excité sur un qubit a été étudiée par d'autres auteurs récemment. Un premier exemple est l'article [162], où Serban, Dykman et Wilhelm ont étudié la relaxation d'un qubit de flux mesuré par un oscillateur non linéaire. Ils ont obtenu le taux de relaxation du qubit lorsqu'il est en résonance ou hors-résonance avec la fréquence ou le double de la fréquence du résonateur. Ils ont conclu que le taux de relaxation du qubit dépend fortement de l'état occupé par l'oscillateur entre les deux états bistables L ou H , et en particulier, qu'il est plus élevé lorsque l'oscillateur est dans l'état H . Cette forte dépendance n'est cependant pas présente dans l'expérience

de l'équipe de Saclay [75, 82].

Un deuxième exemple est l'article [163], où Laflamme et Clerk ont étudié entre autres le déphasage induit par la mesure avec un résonateur non linéaire. Ils obtiennent que la limite quantique $\Gamma_{\varphi,m} = \Gamma_m/2$ n'est pas satisfaite dans la limite de fort gain G de l'oscillateur. Ils obtiennent plutôt que le taux de déphasage $\Gamma_{\varphi,m} \sim G\Gamma_m/2$ est beaucoup plus important que la limite quantique.

Ces deux résultats sont en contradiction avec les résultats expérimentaux de Saclay et avec les résultats présentés à la section 6.2.3. Ils ont cependant été obtenus à l'aide de théories de réponse linéaire. Je montrerai dans cette section que le régime de paramètres de l'expérience de Saclay — qui est typique pour des expériences d'électrodynamique quantique en circuit avec résonateur non linéaire — est en dehors des limites de validité d'une théorie de réponse linéaire.

Le *signal* du qubit qui est traduit en variation du champ électromagnétique du résonateur prend la forme d'un décalage dispersif S_i de la fréquence du résonateur. On peut ainsi qualitativement décrire les limites de la réponse linéaire en imposant que la variation du champ électromagnétique soit une fonction linéaire de la fréquence sur un intervalle $\chi = |S_1 - S_0|/2$ autour de la fréquence d'opération. Il a été montré que, dans le cas d'un résonateur linéaire, la mesure est optimale lorsque $\chi/\kappa = 0.5$ [126]. Pour un résonateur non linéaire, la sensibilité accrue permet cependant de réduire ce ratio, ce qui est utile si l'on tient à utiliser une théorie de réponse linéaire. En choisissant $\chi/\kappa = 0.2$ comme valeur typique, on obtient un intervalle $\Omega/\Omega_C \sim 0.5$ en terme de fréquence réduite. Pour que la réponse linéaire soit valide, il faut ainsi que la variation du champ électromagnétique soit linéaire sur un intervalle de 0.5 en terme de fréquence réduite. Si l'on se réfère au haut de la figure 6.2(a), on peut voir qu'un intervalle de 0.5 exclut toutes les régions où la pente est significative, qui correspondent aussi aux régions où le gain de l'amplificateur est significatif.

De façon plus quantitative, on peut définir la validité de la réponse linéaire comme les ensembles de paramètres pour lesquels la correction de deuxième ordre (réponse quadratique) est beaucoup plus faible que la correction de premier ordre. Ainsi, je définis $\alpha_{i,p} = \bar{\alpha} + \alpha_{i,p}^{(1)} + \alpha_{i,p}^{(2)} + \dots$, où $\alpha_{i,p}^{(n)}$ correspond à la correction d'ordre n . En obtenant l'équation 6.5, j'avais imposé que $\alpha_{i,p} = \bar{\alpha} + \delta\bar{\alpha}$ avec δ réel. J'avais fait ce choix afin d'obtenir une solution analytique à l'équation (5.30). Pour l'analyse ci-dessous, j'ai fait un choix un peu plus général pour la réponse linéaire, laissant les $\alpha_{i,p}^{(n)}$ être complexes. En choisissant de résoudre l'équation (5.30) ordre par ordre, on obtient les équations

suyvantes pour $\alpha_{i,p}^{(n)}$

$$0 = (\omega_r - \omega_p - i\frac{\kappa}{2}) \alpha_{i,p}^{(1)} + 2K |\bar{\alpha}|^2 \alpha_{i,p}^{(1)} + K \bar{\alpha}^2 \left(\alpha_{i,p}^{(1)} \right)^* + \mathbb{S}_i^p \bar{\alpha} \quad (6.7a)$$

$$0 = (\omega_r - \omega_p - i\frac{\kappa}{2}) \alpha_{i,p}^{(2)} + 2K |\bar{\alpha}|^2 \alpha_{i,p}^{(2)} + K \bar{\alpha}^2 \left(\alpha_{i,p}^{(2)} \right)^* + \mathbb{S}_i^p \alpha_{i,p}^{(1)} + 2K \bar{\alpha} \left| \alpha_{i,p}^{(1)} \right|^2 + K \bar{\alpha}^* \left(\alpha_{i,p}^{(1)} \right)^2. \quad (6.7b)$$

Ces équations n'ont pas de solution algébrique, mais peuvent être facilement résolues numériquement. On peut alors étudier la validité de la réponse linéaire en comparant l'amplitude de la correction $\alpha_{i,p}^{(1)}$ à celle de $\alpha_{i,p}^{(2)}$. La réponse linéaire sera valide si le ratio

$$r_{i,p} \equiv \left| \alpha_{i,p}^{(2)} \right| / \left| \alpha_{i,p}^{(1)} \right| \quad (6.8)$$

est suffisamment faible. Le ratio r est en fait une fonction du décalage réduit Ω et de l'amplitude ϵ_p du signal. Comme le qubit modifie la fréquence effective du résonateur par le décalage dispersif, r est aussi une fonction de ce décalage dispersif, et on a $r_{i,p} = r(\Omega, \mathbb{S}_i^p, \epsilon_p)$.

Je définis alors le couplage dispersif $S_{\max}(\Omega)$ maximal pour lequel la réponse linéaire est valide comme

$$S_{\max}(\Omega) = \mathbb{S}_i^p \quad \text{tel que} \quad \max_{\epsilon_p} r(\Omega, \mathbb{S}_i^p, \epsilon_p) = 0.1. \quad (6.9)$$

En d'autres mots, pour trouver ce couplage maximal, je fixe Ω , puis je varie \mathbb{S}_i^p jusqu'à ce que le maximum de $r(\epsilon_p)$ soit égal à une valeur conservatrice de 10%. Cette condition affirme donc que la théorie de réponse linéaire est valide si la correction quadratique est au moins 10 fois plus faible que la correction linéaire pour toute amplitude ϵ_p , et donc en particulier pour l'amplitude ϵ_p correspondant au gain le plus fort de l'amplificateur.

Je trace, à la figure 6.7 le couplage dispersif maximal S_{\max} en fonction du décalage réduit Ω dans le régime d'amplification paramétrique pour les paramètres de l'expérience de Saclay. On voit que $S_{\max}/2\pi$ atteint un maximum d'environ 0.5 MHz lorsque la fréquence du signal est loin du point critique (loin de $\Omega/\Omega_C = 1$). On voit aussi que ce couplage maximal décroît et disparaît presque lorsque Ω s'approche du décalage critique Ω_C . On doit comparer ce couplage maximal avec la largeur de raie κ afin de déterminer s'il est réaliste pour la mesure d'un qubit. Avec le critère $\chi = S_{\max} \geq 0.2\kappa$, on doit ainsi avoir $\kappa/2\pi \lesssim 2.5$ MHz — quatre fois plus faible que dans l'expérience de Saclay —

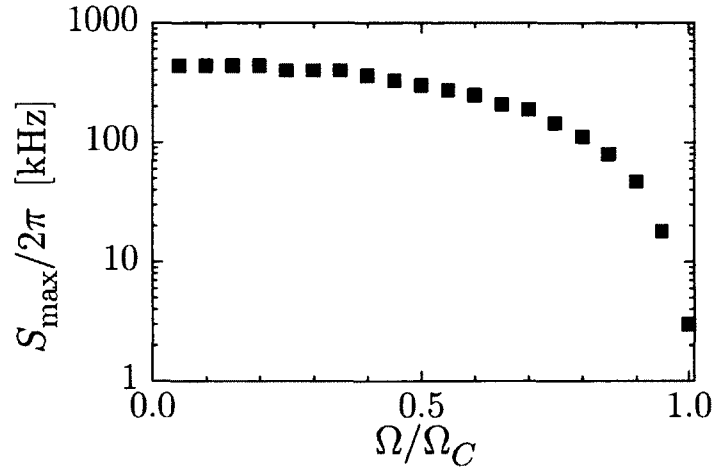


FIGURE 6.7 – Couplage dispersif maximal pour lequel la réponse linéaire est valide en fonction du décalage réduit Ω dans le régime d’amplification paramétrique $\Omega/\Omega_C \leq 1$.

afin que la réponse linéaire soit valide pour une mesure de qubit efficace. Une largeur de raie κ aussi faible signifierait une mesure plus lente, ce qui diminuerait l’efficacité de la mesure en raison du court temps de vie des qubits supraconducteurs. Une autre option serait de réduire la non-linéarité K du résonateur, mais cela réduirait aussi le gain de l’amplificateur et donc l’efficacité de la mesure. D’ici à ce que les temps de vie des qubits supraconducteurs soient suffisamment longs pour supporter une mesure moins rapide permettant d’être dans un régime de réponse linéaire, il sera probablement nécessaire de décrire la physique avec un modèle utilisant une réponse non linéaire tel que celui du chapitre 5.

6.3 Forte amplitude de spectroscopie

À la section précédente, on a analysé la réponse du qubit lorsqu’il est soumis à un signal de spectroscopie de faible amplitude ϵ_s et de fréquence $\omega_s \sim \omega_{1,0}$ en même temps que le résonateur est excité par un signal de pompe d’amplitude ϵ_p et de fréquence $\omega_p \sim \omega_r$. On a étudié la réponse en fonction de ϵ_p et de ω_s , pour deux valeurs de ω_p . Il reste maintenant à étudier le système lorsque le qubit est soumis à une plus forte amplitude de spectroscopie ϵ_s . On s’attend typiquement à ce que la population du qubit sature éventuellement à $\langle \sigma_z \rangle = 0$, et que la largeur de la résonance augmente dû à l’élargissement radiatif. Comme on le verra, l’augmentation de l’amplitude de spectroscopie fait aussi

apparaître des bandes latérales, de chaque côté de la raie de spectroscopie principale. Ces bandes latérales dans le spectre du qubit permettent de l'utiliser comme sonde pour la compression du champ électromagnétique dans le résonateur non linéaire, ce qui est une première à ma connaissance. Je commence par présenter à la section 6.3.1 les spectres expérimentaux et analytiques, puis j'analyse leurs bandes latérales et les liens avec le modèle du chapitre 5 à la section 6.3.2.

6.3.1 Spectres expérimentaux et analytiques

Je présente, à la figure 6.8, le spectre expérimental ainsi que celui prédit par le modèle du chapitre 5 pour $\Omega/\Omega_C = 1.74$ et une forte amplitude de spectroscopie $P_s = -4$ dBm, soit 18 dB de plus que les données présentées à la section 6.2.

Outre l'augmentation de la largeur et de la saturation de la raie principale due à l'élargissement radiatif, le principal changement apparent dans ces spectres, comparativement aux spectres à basse amplitude de spectroscopie, est la présence de bandes latérales de chaque côté de la raie principale. Ces bandes latérales sont analogues à des transitions Raman, avec des bandes Stokes et anti-Stokes (rouge et bleue) [164]. Les caractéristiques de ces bandes latérales sont cependant intrigantes. Tout d'abord, l'amplitude des deux bandes *diminue* lorsque l'amplitude de pompe *augmente*. Ensuite, l'espacement entre ces bandes et la raie principale augmente avec l'amplitude de pompe, plutôt que d'être constant. Finalement, l'espacement entre les bandes est de l'ordre de 40 MHz. Or, il n'y a aucun signal expérimental envoyé à cette fréquence. On verra en fait à la section 6.3.2 que l'amplitude des bandes latérales est liée à la compression du champ électromagnétique du résonateur et l'espacement avec la raie principale est lié au déplacement de la fréquence effective du résonateur en fonction du nombre moyen de photons.

Au panneau de droite de la figure 6.8, je présente la probabilité $P(|1\rangle)$ — donnée par l'équation (5.72) — que le qubit soit dans le premier état excité étant donné les signaux de spectroscopie et de pompe. Visuellement, on constate que l'accord est au moins qualitatif. En fait, pour obtenir cet accord qualitatif, j'ai dû arbitrairement multiplier par deux le coefficient c de la force $F^{(4)}$, donné à l'équation (5.55). Dans le modèle, c'est précisément ce terme qui donne lieu aux bandes latérales. Bien que cette multiplication soit arbitraire, j'estime que l'erreur sur la valeur de c calculée avec le modèle peut aisément atteindre ce facteur deux étant donné les multiples approximations faites tout au long du développement du modèle. Cette multiplication change l'amplitude relative des

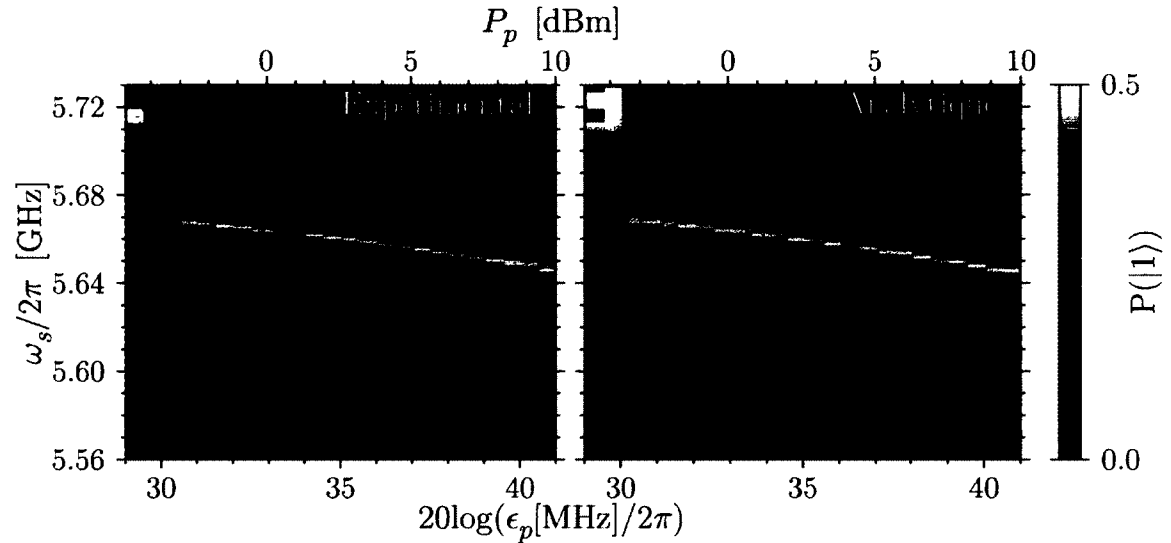


FIGURE 6.8 – Spectre du qubit pour une forte amplitude de spectroscopie, en fonction de la puissance de pompe. Les résultats expérimentaux (à gauche) sont comparés à ceux du modèle analytique du chapitre 5 (à droite). Les résultats sont pour $\omega_p/2\pi = 6439$ MHz, correspondant à $\Omega/\Omega_C = 1.74$ et $P_s = -4$ dBm, correspondant à $\epsilon_s/2\pi \approx 25$ MHz. Pour les résultats analytiques, afin d’obtenir la bonne amplitude pour les bandes latérales, j’ai multiplié le coefficient c de la force $F^{(4)}$, donné à l’équation (5.55), par deux.

bandes latérales par rapport à la raie principale, mais non leurs positions ou largeurs, ni l’amplitude relative des deux bandes latérales entre elles. On constate aussi que l’accord semble meilleur loin de la puissance de bifurcation (qui est à $P_p \sim -4$ dBm). Ceci est dû au bris d’une approximation séculaire lors de l’élimination adiabatique du résonateur. Cette approximation séculaire correspond à supposer que les bandes latérales sont bien résolues, ce qui est visiblement mieux respecté loin de la bifurcation. En fait, le modèle analytique prédit des bandes latérales mieux résolues qu’elles ne le sont expérimentalement. On peut d’ailleurs voir le début d’une bande latérale avant la bifurcation dans le graphique analytique, alors que l’expérience ne permet pas de la résoudre. D’autres jeux de données expérimentales (non présentés ici) permettent cependant de résoudre cette bande latérale [165].

Pour permettre une meilleure comparaison du modèle et de l’expérience, je présente à la figure 6.9 quatre coupes verticales de la figure 6.8 pour $P_p = \{-3, 0, 5, 10\}$ dBm. Près de la bifurcation ($P_p = -3$ et 0 dBm), on voit que les bandes latérales ne sont pas très bien résolues, et l’accord sur la position de la bande latérale décalée vers le rouge

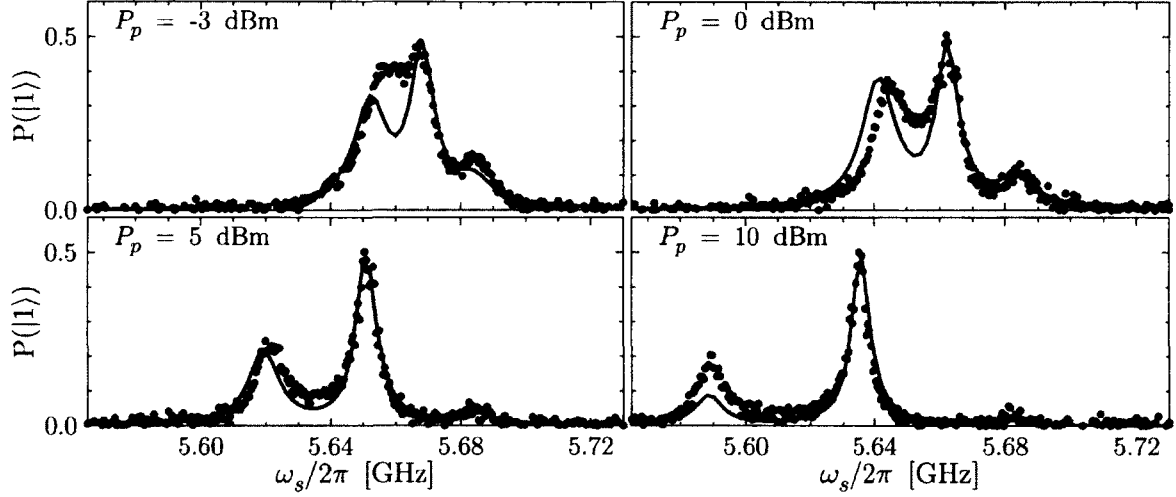


FIGURE 6.9 - Spectres du qubit pour une forte amplitude de spectroscopie, pour quatre puissances de pompe. Ces quatre graphiques sont des coupes de la figure 6.8 selon l'axe vertical. Les points sont les données expérimentales, les courbes continues sont la prédiction du modèle.

(basses fréquences) est semi-quantitatif. Loin de la bifurcation ($P_p = 5$ et 10 dBm), les bandes latérales sont bien résolues et l'accord sur les positions s'en voit amélioré. Tel que mentionné au paragraphe précédent, l'amplitude absolue des bandes latérales est affectée d'une erreur qui peut atteindre au moins un facteur deux, que j'ai tenté de corriger manuellement. La correction ne semble cependant pas suffisante pour faire concorder les amplitudes absolues à toutes les puissances de pompe, et il faudrait une correction qui soit dépendante de P_p . Cette dépendance pourrait venir d'une mauvaise évaluation du coefficient de compression r ou de son angle θ , qui entrent tous les deux dans c à l'équation (5.55).

6.3.2 Analyse des bandes latérales

L'équation permettant le calcul analytique du spectre du qubit a été donnée à l'équation (5.72), reproduite ci-dessous

$$P(|1\rangle) = \frac{\langle \Pi_{1,1} \rangle_{\text{eq}} \left(\tilde{\gamma}_2^2 + \tilde{\delta}^2 \right) + 2\tilde{\gamma}_2 |g_0 \alpha_{s,0}|^2 / (\tilde{\gamma}_\uparrow + \tilde{\gamma}_\downarrow)}{\left[\left(\tilde{\gamma}_2^2 + 4\tilde{\gamma}_2 |g_0 \alpha_{s,0}|^2 / (\tilde{\gamma}_\uparrow + \tilde{\gamma}_\downarrow) \right) + \tilde{\delta}^2 \right]}. \quad (6.10)$$

Bien que cette équation n'ait pas la forme de fonctions lorentzienne, il s'avère qu'un lissage avec la fonction

$$g(f = \omega/2\pi) = \sum_{i=r,c,b} \frac{2A_i}{\pi} \frac{w_i}{4(f - f_i)^2 + w_i^2}. \quad (6.11)$$

où A_i , w_i et f_i sont respectivement l'amplitude, la largeur et la fréquence des trois raies [rouge (r), centrale (c) et bleue (b)], permet de bien caractériser les spectres. Un tel lissage a été réalisé à la fois sur les données expérimentales et sur les points issus du modèle analytiques. Je trace les résultats à la figure 6.10.

Tout d'abord, on constate au panneau (a) que les positions des raies latérales extraites des résultats expérimentaux (points) est bien reproduite par le modèle (lignes), sauf à faible puissance de pompe, près de la bifurcation. On peut ainsi analyser l'équation pour $P(|1\rangle)$ dans notre modèle afin de comprendre l'origine de ces raies. Dans l'équation (6.10), $\tilde{\delta}$ est le décalage entre la fréquence de spectroscopie ω_s et la fréquence effective du qubit. Si l'on considère que la valeur moyenne de $\langle \Pi_{1,1} \rangle_{\text{eq}} = 0$ en l'absence de signal de spectroscopie, alors cette équation a la forme d'une lorentzienne dont la largeur augmente avec l'amplitude du champ de spectroscopie $\alpha_{s,0}$. Cette contribution correspond à la raie centrale. À l'opposé, si l'on considère que $\langle \Pi_{1,1} \rangle_{\text{eq}} \neq 0$ — ce qui se produit lorsque le spectre des fluctuations du résonateur $S_{\uparrow/\downarrow}(\omega)$ est significatif — et que le décalage $\tilde{\delta}^2 \gg \tilde{\gamma}_2^2, |g_0\alpha_{s,0}|^2$, la contribution dominante est directement donnée par $P(|1\rangle) \approx \langle \Pi_{1,1} \rangle_{\text{eq}}$. Il s'agit alors du régime dans lequel les bandes latérales sont résolues.

Selon le modèle, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{\downarrow} &= \gamma_{\downarrow}''' + |g_0\alpha_{s,0}c|^2 [(L(-\delta) + L(\delta)) \sinh^2 r + L(-\delta)], \\ \tilde{\gamma}_{\uparrow} &= \gamma_{\uparrow}''' + |g_0\alpha_{s,0}c|^2 [(L(-\delta) + L(\delta)) \sinh^2 r + L(\delta)], \end{aligned} \quad (6.12)$$

et

$$\langle \Pi_{1,1} \rangle_{\text{eq}} = \frac{\tilde{\gamma}_{\uparrow}}{\tilde{\gamma}_{\uparrow} + \tilde{\gamma}_{\downarrow}}, \quad (6.13)$$

où $L(\delta)$ est donnée à l'équation (5.66) et est une fonction lorentzienne centrée à $\tilde{\Delta}_r = (\omega_r'(\alpha) + S_0(\alpha) - \omega_p)/\cosh(2r)$. Ainsi, selon ces équations, $\langle \Pi_{1,1} \rangle_{\text{eq}}$ présente deux pics, situés à $\delta = \omega_{1,0}'''(\alpha) - \omega_s = \pm\tilde{\Delta}_r$. La dépendance de l'espacement des bandes latérales en fonction de la puissance de pompe est donc causée par le décalage de Stark de la fréquence du qubit et le décalage Kerr de la fréquence de résonateur non linéaire. En fait, $\tilde{\Delta}_r$ est

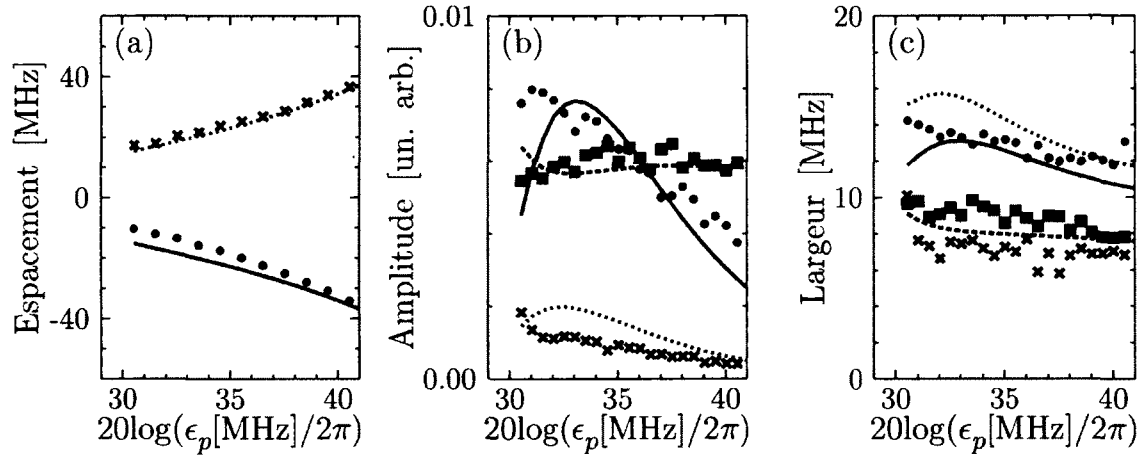


FIGURE 6.10 – Espacement (a), amplitude (b) et largeur (c) des pics du triplet de spectroscopie. Les carrés noirs (lignes tiretée noire), cercles rouges (lignes pleines rouges) et X bleus (lignes pointillées bleues) correspondent respectivement à la raie centrale, la raie à plus basse fréquence et la raie à plus haute fréquence. En (a), l’espacement est $f_i - f_c$, où $i = r, b$. En (b), l’amplitude correspond aux coefficients A_i de l’équation (6.11), et en (c), la largeur correspond aux w_i .

la fréquence des oscillations du champ électromagnétique autour de sa valeur d’équilibre. Cette fréquence est appelée *quasi-énergie* du résonateur par certains auteurs [166, 167].

Dans un parallèle avec la spectroscopie Raman, ces *quasi-énergies* correspondraient aux énergies des phonons qui peuvent être absorbés ou émis. On s’attend cependant typiquement à ce que la bande bleue (fréquences plus hautes que la fréquence du qubit), qui correspond à l’émission d’un « phonon » lors de l’excitation du qubit, soit plus intense que la bande rouge (fréquences plus basses que la fréquence du qubit) qui correspond à l’absorption d’un « phonon ». En effet, alors qu’il est toujours possible d’émettre un quanta, il est nécessaire que le mode de « phonon » soit peuplé pour que l’absorption soit possible. Or, c’est l’inverse qui se produit ici. Cette inversion se produit parce que, contrairement aux énergies de vrais phonons, qui sont toujours positives, $\tilde{\Delta}_r$ peut être aussi bien négatif que positif. En fait, $\tilde{\Delta}_r$ est positif à faible puissance (avant la bifurcation), diminue en augmentant la puissance (car $\omega_r(\alpha)$ diminue), puis devient négatif après la bifurcation. Cette augmentation de $|\tilde{\Delta}_r|$ avec ϵ_p après la bifurcation est ce qui explique que les raies latérales s’éloignent de la raie du qubit lorsque la puissance augmente. L’inversion de l’intensité des deux bandes latérales lorsque ϵ_p traverse l’amplitude critique de bifurcation a été observée expérimentalement [165], et on peut en avoir un aperçu dans le spectre du modèle théorique à la figure 6.8, où l’on voit une raie intense

au-dessus de la raie principale avant la bifurcation.

L'amplitude et la largeur des trois raies sont tracées aux figures 6.10 (b) et (c) respectivement. L'amplitude et la largeur de la raie principale (carrés noirs, lignes pointillées noires) sont toutes les deux dominées par la forte amplitude du signal de spectroscopie. Ainsi, son amplitude est à peu près constante et correspond à une saturation du qubit (probabilités égales d'être dans les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$). Sa largeur est dominée par l'élargissement radiatif, et on peut associer la faible décroissance avec l'augmentation de la puissance de pompe à la diminution du déphasage induit par la mesure dû au rapprochement des états pointeurs α_1 et α_0 .

Pour les raies latérales, l'amplitude est fixée par la force $F^{(4)}$, et en particulier le coefficient $c = \beta \cosh(r) + \beta^* e^{i2\theta} \sinh(r)$, où r et θ sont le coefficient de compression et l'angle de l'axe de compression, et $\beta = \alpha_1 - \alpha_0$. Tel que mentionné précédemment, j'ai ajouté un facteur multiplicatif au coefficient c , et il ne faut donc pas accorder trop d'importance à l'amplitude absolue des bandes latérales. Néanmoins, la diminution de leur amplitude lorsque ϵ_p augmente est une combinaison de deux facteurs. Tout d'abord, dans ce régime, $|\beta|$ diminue lorsque ϵ_p augmente. Ensuite, r , qui est donné par la solution de l'équation (5.52) diminue aussi lorsque ϵ_p augmente.

Dans la limite des bandes latérales résolue, la largeur de ces bandes est donnée selon le modèle par la largeur de la lorentzienne $L(\delta)$, qui est $\kappa/2\pi \approx 9.6$ MHz. Les bandes n'étant pas très bien résolues, les largeurs s'en trouvent cependant modifiées. Bien que le modèle prédise correctement la largeur de la bande rouge, la largeur prédite pour la bande bleue est environ deux fois plus grande que celle extraite des résultats expérimentaux. Bien que le modèle semble échouer pour cet aspect, il est important de considérer que la bande latérale bleue est très faible, d'amplitude comparable au bruit expérimental, et donc que l'erreur à la fois sur l'amplitude et sur la largeur est importante. En fait, sans même considérer d'erreur systématique sur l'évaluation de $P(|1\rangle)$ à partir de la probabilité de bifurcation du résonateur, l'erreur statistique sur le lissage lorentzien est d'environ 30% pour l'amplitude et la largeur de la bande bleue.

Bien que l'on ne puisse pas comparer quantitativement l'amplitude absolue des bandes latérales à cause du facteur d'échelle du coefficient c , il est possible de comparer le ratio de leur amplitude. À partir de l'équation (6.10) pour $P(|1\rangle)$, on peut faire quelques approximations afin de calculer le ratio de ces amplitudes. Si l'on suppose que, pour les bandes latérales, le terme dominant est $\langle \Pi_{1,1} \rangle_{\text{eq}}$, alors le ratio des bandes latérales est

donné par

$$R = \frac{A_{\text{bleue}}}{A_{\text{rouge}}} \times \frac{w_{\text{rouge}}}{w_{\text{bleue}}} \approx \frac{\tilde{\gamma}_{\uparrow}(\omega = \omega_{\text{bleue}})}{\tilde{\gamma}_{\uparrow}(\omega = \omega_{\text{rouge}})}. \quad (6.14)$$

où $\omega = \omega_{\text{bleue}}$ implique $\delta = \tilde{\Delta}_r$, et $\omega = \omega_{\text{rouge}}$ implique $\delta = -\tilde{\Delta}_r$. En supposant que γ_{\uparrow}''' , donné à l'équation (5.42), est négligeable, on obtient alors

$$R \approx \frac{\left[L(-\tilde{\Delta}_r) + L(\tilde{\Delta}_r) \right] \sinh^2 r + L(\tilde{\Delta}_r)}{\left[L(-\tilde{\Delta}_r) + L(\tilde{\Delta}_r) \right] \sinh^2 r + L(-\tilde{\Delta}_r)}. \quad (6.15)$$

De même, si les bandes latérales sont vraiment très bien séparées, alors $L(-\tilde{\Delta}_r) \gg L(\tilde{\Delta}_r)$, et on peut simplifier pour obtenir

$$R \approx \frac{\sinh^2 r}{\sinh^2 r + 1}. \quad (6.16)$$

Je rappelle qu'à la section 5.6, j'avais identifié $\sinh^2 r$ au nombre moyen de photons thermiques dans le référentiel de polaron. Ces photons thermiques étaient créés par la non-linéarité du résonateur et par le coefficient de compression. Plutôt qu'une température réelle comme pour l'effet Raman, c'est donc une température effective créée par la présence d'états comprimés dans le résonateur qui contrôle le ratio d'amplitude des bandes latérales.

Notons que ces « quasi-photons thermiques » ont été étudiés par Dykman *et al.* pour un résonateur non linéaire sans qubit [168]. Ils ont montré que ce phénomène, qu'ils nomment chauffage quantique (*quantum heating*), devrait se traduire par une structure en double pics — correspondant aux deux bandes latérales — dans le spectre du bruit du résonateur. Serban *et al.* ont aussi étudié l'effet de ces photons sur la relaxation d'un qubit couplé à un résonateur [162]. Leur calcul est cependant limité à un qubit à deux niveaux en réponse linéaire et avec un seul signal. De même, leurs principaux résultats sont dans un régime de paramètres non pertinent pour l'expérience de Saclay, soit $\omega_d \approx \omega_r \sim \omega_{1,0}/2$.

Je présente à la figure 6.11 le ratio R [voir équation (6.14)] calculé à partir des paramètres des lissages sur les données expérimentales (cercles noirs), sur le spectre analytique (triangles verts), ainsi que les expressions (6.15) et (6.16). Plusieurs approximations du modèle sont mises à rude épreuve dans le régime étudié ici. Tout d'abord, la différence entre les courbes pour les expressions (6.15) (courbe pointillée bleue) et (6.16) (courbe

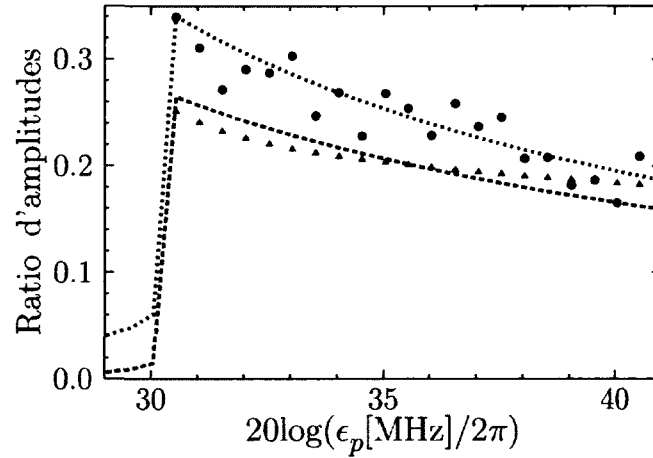


FIGURE 6.11 – Ratio de l'amplitude $A_b/A_r \times w_r/w_b$ des bandes latérales. Les cercles noirs sont extraits des résultats expérimentaux. Les triangles verts sont extraits à partir du lissage sur le modèle. La ligne tiretée rouge correspond à l'équation (6.16), et la ligne pointillée bleue correspond à l'équation (6.15).

tiretée rouge) indique que l'approximation séculaire utilisée pour les bandes latérales (limite des bandes latérales résolues) n'est pas très bien respectée, même loin de la bifurcation. Ensuite, lors du traitement de la compression par la transformation de squeezeon, j'ai supposé que le coefficient r était faible ($r \ll 1$). Cette approximation n'est pas très bonne, puisqu'en réalité, $r \in [0.3, 0.5]$ sur l'intervalle de puissance de pompe présenté au graphique 6.11.

Malgré le bris de ses approximations, on constate un accord quantitatif entre l'expression (6.16) et les points issus des données expérimentales. L'expression approximative semble même fonctionner mieux que les points issus des lissages sur le modèle analytique (triangles verts). Malgré l'accord quantitatif, il est important de mentionner que l'erreur statistique sur les paramètres de lissage de la raie latérale bleue est très importante. Elle se répercute par une erreur d'environ 0.1 sur tous les points expérimentaux. Les barres d'erreur expérimentales incluent ainsi à la fois la courbe bleue, rouge et les triangles verts.

6.4 Retour sur le modèle réduit

À partir d'un modèle initialement complexe, j'ai développé au chapitre 5 un modèle réduit comportant seulement quelques expressions analytiques. Dans ce chapitre, j'ai comparé ce modèle à des résultats numériques et expérimentaux, et trouvé qu'il prédit

quantitativement la position, et la largeur principale de la raie de spectroscopie du qubit, la position et le ratio des amplitudes de raies latérales décalées vers le rouge et le bleu, ainsi que semi-quantitativement l'amplitude absolue et la largeur de ces raies latérales. Ce modèle fonctionne bien dans une situation elle-même fort complexe : qubit à plusieurs niveaux, résonateur non linéaire excité par plusieurs signaux parfois forts et système dissipatif. le tout dans des régimes où une approximation de réponse linéaire pour le résonateur ne fonctionne pas.

Cette correspondance quantitative a permis de conclure que, dans la limite où les états pointeurs sont des états-cohérents et que le taux de mesure peut s'écrire $\Gamma_m = \kappa|\alpha_1 - \alpha_0|$, alors un résonateur non linéaire a le potentiel d'atteindre l'égalité $\Gamma_{\varphi,m} = \Gamma_m/2$ et d'être limité quantiquement au niveau de la rétroaction sur le qubit. La question demeure cependant ouverte si les états pointeurs sont fortement comprimés.

En plus de permettre la détermination précise de la constante de non-linéarité K et de l'atténuation A_p , la spectroscopie du qubit jumelée au modèle réduit peut ainsi être utilisée comme sonde, non seulement du nombre de photons et de la position d'états pointeurs α_i dans l'espace des phases, mais aussi de la compression de ces états. L'utilisation du qubit pour sonder les fluctuations quantiques du champ dans un résonateur non linéaire est une première à ma connaissance, et ceci est permis grâce au modèle réduit.

Chapitre 7

Lecture de l'état du qubit par le résonateur

An experiment is a question which science poses to Nature, and a measurement is the recording of Nature's answer.

— Max Planck [169]

Bien avant que Feynman envisage la simulation de systèmes physiques avec un ordinateur quantique [20], Planck formulait par la citation ci-dessus l'idée qu'une expérience peut être vue comme une question posée au système — à la nature — et que la mesure est le moyen d'obtenir la réponse. Si l'on peut concevoir et contrôler un système physique, on peut alors imaginer la *nature* comme un calculateur. C'est exactement ce qui est réalisé dans les expériences où des calculs quantiques ont été effectués. La mesure occupe alors un rôle crucial : aussi intéressante que soit la question encodée dans l'expérience, aussi ingénieuse que soit la façon de l'encoder, l'expérience est inutile si l'on ne peut pas obtenir la réponse via une mesure.

C'est à cette question que je m'intéresse dans ce chapitre. Plus précisément, je discuterai de la mesure d'un qubit à plusieurs niveaux couplé à un résonateur, qui peut être linéaire ou non linéaire. Comme le résonateur est utilisé comme appareil de mesure pour le qubit, il importe que la différence entre les états du résonateur correspondant à chaque état du qubit soit significative. En plus de dépendre de l'amplitude et de la fréquence du signal de mesure, cette différence dépendra de la façon dont le qubit modifie les para-

mètres effectifs du résonateur. Ainsi, le décalage dispersif de la fréquence du résonateur dû au qubit jouera un rôle central dans l'analyse que je présenterai dans ce chapitre. Bien que les résultats que je présente ici ont été obtenus avec les paramètres d'un qubit de type transmon [89], il est possible de les adapter à tout qubit à plusieurs niveaux couplé de la même façon.

Je commence par discuter de l'importance de la structure à plusieurs niveaux du qubit à la section 7.1. Aux sections 7.2 et 7.3, je m'intéresse d'abord au cas où le résonateur est linéaire, dans les régimes de faible et de forte puissance de mesure. À la section 7.2, j'analyse comment une mesure dispersive usuelle peut bénéficier de la structure à plusieurs niveaux du qubit. Puis, à la section 7.3, j'étudie une mesure par avalanche qui se produit dans le régime de forte puissance. Finalement, à la section 7.4, je présente comment la structure à plusieurs niveaux peut être utilisée pour améliorer une mesure par bifurcation avec un résonateur non linéaire.

7.1 Importance de la structure à plusieurs niveaux

Pour les informaticiens quantique, parler de la structure à plusieurs niveaux d'un qubit est souvent perçu comme une hérésie. En effet, ils définissent un qubit comme un système strictement à deux niveaux, et un qudit comme un système à d niveaux (où $d > 2$) [4]. En réalité cependant, les systèmes physiques ont très rarement seulement deux niveaux, ce qui n'empêche pas d'en utiliser seulement deux si nécessaire.

Dans le domaine de l'électrodynamique quantique en circuit, les niveaux supérieurs des qubits ont d'abord été en pratique inexistant, ou quasi-inexistants, comme dans la boîte de Cooper qui est un bon système à deux niveaux [88]. Alors que les qubits ont évolué et que la présence des niveaux supérieurs est devenue plus proéminente — comme pour le transmon [89] — des techniques ont été développées afin de limiter l'effet de ces niveaux, par exemple en façonnant les pulses de contrôle [170, 171] pour minimiser la population de ces niveaux. Ces techniques ont été utilisées avec succès expérimentalement pour contrôler et caractériser un transmon malgré son caractère multi-niveaux [172]. Finalement, les niveaux supérieurs des qubits supraconducteurs sont devenus un outil qui peut être utilisé pour améliorer certains aspects. Par exemple, l'interaction des niveaux supérieurs du qubit a été utilisée afin d'implémenter une porte à deux qubits dans la réalisation d'algorithmes quantiques [25].

Néanmoins, la présence de niveaux supérieurs pour le transmon demeurerait jusqu'à

récemment une nuisance pour la mesure de l'état du qubit. En effet, comme on l'a vu au chapitre 5, la structure à plusieurs niveaux réduit l'amplitude du décalage dispersif de la fréquence du résonateur par le qubit, $S_i = -(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1})$. Ainsi, plutôt que d'être séparées par $|S_1 - S_0| = |2\mathbf{x}_0| \sim |2g_0^2/(\omega_{1,0} - \omega_r)|$ dans le cas à deux niveaux, les deux résonances du résonateur correspondant aux deux états du qubit sont séparées par une quantité réduite $|S_1 - S_0| = |2\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1| \sim |2g_0^2/(\omega_{1,0} - \omega_r) - g_1^2/(\omega_{2,1} - \omega_r)|$. De plus, dans le cas du transmon, on a $g_1 \sim \sqrt{2}g_0$ et $\mathbf{x}_1 \sim 2\mathbf{x}_0$ dans la plupart des régimes. Le décalage dispersif est ainsi fortement réduit pour un transmon comparativement à une boîte de Cooper pour les mêmes couplages et fréquences.

Un changement de paradigme a été initié par l'équipe expérimentale de Rob Schoelkopf à l'Université de Yale qui a réalisé une mesure forte monofrappe de l'état d'un transmon couplé à un résonateur linéaire dans un régime de très haute puissance de mesure [122]. Cette mesure a été expliquée de façon simultanée par le groupe théorique de Steve Girvin à Yale [124] ainsi que par notre groupe [123]. Pour que cette mesure fonctionne, il s'avère crucial que le qubit soit un système à plusieurs niveaux. Ces niveaux peuvent être intrinsèques au qubit ou être créés par la présence d'un autre système à deux niveaux qui est spectateur (qui n'est pas utilisé pour le calcul). Après avoir discuté du comportement à faible puissance à la section 7.2, j'expliquerai le fonctionnement de cette mesure, que j'appelle la mesure par avalanche, à la section 7.3. J'expliquerai finalement à la section 7.4 comment certains points d'opération particuliers du qubit et du résonateur pourraient être utilisés pour améliorer la mesure par bifurcation. Dans ces trois cas, il est crucial que le qubit ait une structure à plusieurs niveaux pour que la mesure fonctionne.

7.2 Régime de faible puissance

Le modèle obtenu au chapitre 5 est valide dans la limite de l'approximation dispersive. Selon l'équation (3.31), comme le développement des opérateurs transformés par \mathbb{D}_C est tronqué, pour que l'approximation demeure valide, il faut que

$$|\xi_i| = \left| \frac{-g_i}{\omega_{i+1,i} - \omega_d} \right| |\alpha_{i,d}| \ll 1. \quad (7.1)$$

Ainsi, pour un couplage et des fréquences données, cela impose une limite sur l'amplitude de $\alpha_{i,d}$

$$\bar{n}_{i,d} \equiv |\alpha_{i,d}|^2 \ll \frac{(\omega_{i+1,i} - \omega_d)^2}{g_i^2}. \quad (7.2)$$

Comme $\alpha_{i,d} \propto \epsilon_d$, le modèle réduit est ainsi valide pour des signaux de faible amplitude ϵ_d . Cela permet, en étudiant ses propriétés à faible amplitude, de développer une intuition de la physique à haute amplitude de mesure. Je m'intéresserai d'abord au cas d'un système à deux niveaux à la section 7.2.1, puis à celui d'un système à plusieurs niveaux à la section 7.2.2. Les résultats de cette section ont été publiés dans la référence [123].

7.2.1 Système à deux niveaux

Pour un système à deux niveaux, on a $g_i = 0$ pour $i > 0$. Ainsi, selon l'équation (5.21), le décalage dispersif de la fréquence du résonateur est donné par $\mathbb{S}_0^d = -\mathbf{x}_0^d$ ou $\mathbb{S}_1^d = \mathbf{x}_0^d$ selon l'état du qubit. Cela correspond au régime présenté à la section 2.4.4 où la fréquence du résonateur devenait $\omega_r \pm \chi$. Si l'on s'intéresse maintenant à la correction quadratique du décalage dispersif, l'équation (5.25) donne $\mathbb{K}_i^d = -4\mathbb{S}_i^d |\boldsymbol{\lambda}_0^d|^2$. La quantité qui importe pour la différence de réponse du résonateur est alors

$$\delta = \chi' + \zeta' |\alpha_i|^2, \quad (7.3)$$

où $|\alpha_i|^2$ est l'amplitude moyenne du champ classique du résonateur, $\chi' = \mathbb{S}_1^d - \mathbb{S}_0^d = 2\mathbf{x}_0^d$ et $\zeta' = \frac{1}{3!}(\mathbb{K}_1^d - \mathbb{K}_0^d) = -\frac{2}{3}\mathbf{x}_0^d |\lambda_0^d|^2$. Notons que le signe opposé de ζ' et χ' deviendra bientôt important.

Pour comprendre comment la mesure change en fonction de l'amplitude de mesure, il est utile de faire deux remarques. Tout d'abord, dans ce cas à deux niveaux, le décalage dispersif de la fréquence du résonateur est symétrique autour de ω_r . Cela implique que, si le signal de mesure est à la fréquence ω_r , l'amplitude du champ du résonateur est la même peu importe l'état du qubit, et seule sa phase sera différente. Ensuite, la contribution quadratique (en amplitude de champ) ζ' au décalage est de signe opposé à la contribution linéaire χ' . Cela implique que lorsque l'amplitude du signal de mesure augmente, le décalage dispersif diminue. Dans le cadre de travaux précédents et non-discutés en détails dans cette thèse, nous avons montré que cette réduction entraîne une saturation du rapport signal-sur-bruit de la mesure dispersive [114]. En d'autres termes, s'il n'y avait pas de contribution quadratique ζ' , augmenter la puissance de mesure améliorerait la mesure indéfiniment. simplement car il y aurait davantage de photons à mesurer. Dû au terme quadratique, il y a plutôt une saturation à haute puissance. Une autre façon de l'imaginer est que, puisque les fréquences effectives du résonateur correspondant à l'état fondamental et à l'état excité du qubit se rapprochent l'une de l'autre à haute puissance,

chaque photon transporte moins d'information sur l'état du qubit.

Je vais montrer dans le reste du chapitre que la structure plus complexe d'un système à plusieurs niveaux permet à la fois de briser la symétrie du décalage dispersif autour de ω_r et offre des régimes où la correction quadratique peut augmenter plutôt que diminuer le décalage dispersif, et comment ceci peut être utilisé pour améliorer la mesure.

7.2.2 Système à plusieurs niveaux

Dans le cas d'un système à plusieurs niveaux, les équations (5.21) pour \mathbb{S}_i^d et (5.25) pour \mathbb{K}_i^d sont beaucoup plus complexes. Tout d'abord, on a $\mathbb{S}_1^d = -(\mathbf{x}_1^d - \mathbf{x}_0^d) \neq -\mathbb{S}_0^d = \mathbf{x}_0^d$. Ainsi, même à l'ordre linéaire, la fréquence du résonateur n'est pas déplacée de façon symétrique par les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ du qubit. De plus, la relation $\mathbb{K}_i^d = -4\mathbb{S}_i^d|\boldsymbol{\lambda}_0|^2$ est fortement modifiée par les contributions des autres niveaux. Cela implique que le terme quadratique n'est pas non plus nécessairement symétrique, et que le signe de ζ' n'est plus nécessairement opposé à celui de χ' .

Je trace à la figure 7.1 les coefficients χ' et ζ' du décalage dispersif en fonction de la fréquence du résonateur ω_r — où je suppose que le signal de mesure est à la fréquence du résonateur, i.e. $\omega_d = \omega_r$ — dans le cas d'un système à $M = 2$ ou à $M = 6$ niveaux. Sur cette figure, les courbes noires représentent χ' et les courbes rouges, ζ' , alors que les parties continues indiquent un signe positif et les parties pointillées, un signe négatif. Dans le cas $M = 2$ au panneau (a), on peut voir que, sauf près de la résonance avec la fréquence du qubit, peu importe la fréquence du résonateur, le signe de χ' est toujours opposé à celui de ζ' . Dans le cas à 6 niveaux au panneau (b), on constate qu'il y a toute une région (région ombragée verte), pour $\omega_r < \omega_{3,2}$, où les deux coefficients ont le même signe. Pour valider les équations théoriques, j'ai aussi diagonalisé numériquement l'hamiltonien Jaynes-Cummings à plusieurs niveaux et calculé la fréquence effective du résonateur $\omega_{r,i}(n)$ en fonction du nombre de photons n et de l'état i du qubit. Avec un lissage quadratique sur $\omega_{r,i}(n)$, j'ai extrait les coefficients χ' et ζ' que je trace au panneau (c). Il est important de mentionner que, pour les paramètres choisis (voir légende de la figure), l'approximation dispersive n'est pas valide près des résonance du qubit, c'est-à-dire dans la région ombragée rouge. En dehors de cette région, l'accord entre les courbes analytiques et numériques est le bon.

Afin d'évaluer l'effet d'un décalage dispersif augmentant plutôt que diminuant avec

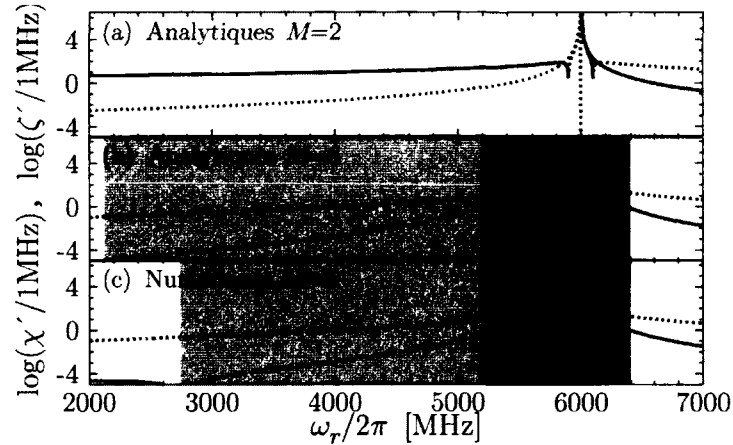


FIGURE 7.1 – Résultats analytiques et numériques pour les décalages dispersifs linéaire et quadratique en fonction de la fréquence du résonateur. (a) Résultats analytiques pour un système à $M = 2$ niveaux. (b) Résultats analytiques pour un système à $M = 6$ niveaux. (c) Résultats numériques pour un système à $M = 6$ niveaux. Les courbes noires représentent la composante linéaire χ' et les courbes rouges représentent la composante quadratique ζ' . Une courbe pointillée indique une valeur négative alors qu'une courbe continue indique une valeur positive. Les lignes verticales pointillées représentent les fréquences de transition du qubit. La région ombragée rouge est une région où l'approximation dispersive n'est pas valide. La région ombragée verte correspond à un régime où les contributions χ' et ζ' sont de même signe. Les paramètres du système à $M = 6$ niveaux sont ceux d'un transmon avec $(\omega_{1,0}, \omega_{2,1}, g_0)/2\pi = (6000, 5750, 100)$ MHz. Les paramètres pour le système à deux niveaux sont les mêmes, mais sans la deuxième transition. Les valeurs numériques ne sont pas tracées près des résonances avec les fréquences du qubit (région rouge). Cette figure a été adaptée de l'article [123].

l'amplitude de mesure, je trace à la figure 7.2 le décalage dispersif [panneau (a)] et le rapport signal-sur-bruit (SNR en anglais) [panneaux (b)–(d)] en fonction du nombre moyen de photons de mesure n . Le rapport signal sur bruit est calculé selon [126]

$$\text{SNR} = \frac{4n\eta\kappa\delta(n)^2}{\gamma_1[\kappa^2/4 + \delta(n)^2]}, \quad (7.4)$$

où $\eta = 1/40$ est une efficacité de mesure liée au bruit ajouté par la chaîne d'amplification. Les trois courbes correspondent à l'approximation linéaire ($\zeta' = 0$) (lignes tiretées bleues), à une fréquence $\omega_r/2\pi = 4515$ MHz, située dans la zone verte de la figure 7.1 (lignes pleines noires) et à une fréquence $\omega_r/2\pi = 7660$ MHz, à l'extérieur de cette zone (lignes pointillées rouges). Ces deux fréquences correspondent à la même valeur de $|\chi'|/2\pi = 2$ MHz. Au panneau (a), on constate que tel que prévu, le décalage dispersif δ augmente avec le nombre de photons pour $\omega_r/2\pi = 4515$ MHz. Les panneaux (b)–(d)

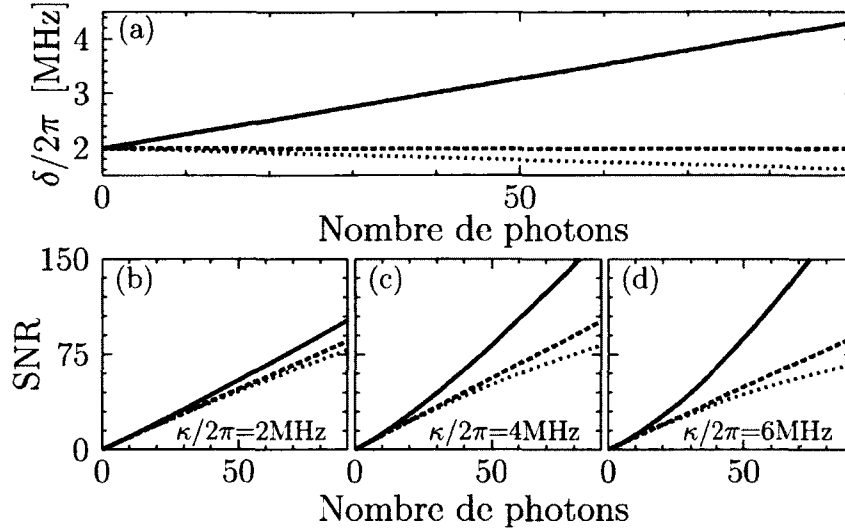


FIGURE 7.2 – Décalage dispersif (a) et rapport signal-sur-bruit (b)–(d) d’une mesure dispersive en fonction du nombre de photons de mesure. Les lignes tiretées bleues correspondent à l’approximation linéaire (i.e. $\zeta' = 0$). Les lignes pleines noires (pointillées rouges) ont été obtenues pour $\omega_r/2\pi = 4515(7660)$ MHz, correspondant à $\text{sgn}(\chi') = (-)\text{sgn}(\zeta')$. Ces fréquences ont été choisies de telle sorte que la contribution linéaire $|\chi'|/2\pi = 2$ MHz dans les deux cas. Les paramètres sont les mêmes qu’à la figure 7.1 avec $T_1 = 1 \mu\text{s}$. Cette figure a été adaptée de l’article [123].

présentent le SNR pour $\kappa/2\chi' = 0.5$ (b), 1 (c) et 1.5 (d), où $\kappa/2\chi' = 1$ est le choix optimal dans le régime linéaire [126]. On constate que, au moins pour la mesure dispersive, il serait préférable d’opérer le système dans le régime où la fréquence du résonateur est en-dessous de celle du qubit, permettant ainsi une augmentation plutôt qu’une diminution du décalage dispersif en fonction du nombre de photons. Pour $\kappa/2\chi' = 1$, une amélioration de près de 100% est attendue sur le SNR à haut nombre de photons.

Opérer le système avec la fréquence du résonateur en-dessous de celle du qubit présente cependant le désavantage que, dû aux harmoniques supérieures du résonateur et au couplage du qubit à ces modes, le taux de relaxation du qubit dû à l’effet Purcell est augmenté. Cet effet peut cependant être réduit par un changement de design [173]. Il serait aussi envisageable d’amener dynamiquement la fréquence du résonateur ou du qubit à ce point d’opération au moment de la mesure grâce à des résonateurs ou qubits à fréquence ajustable [89, 174, 175].

7.3 Régime de forte puissance : mesure par avalanche

Lors de la conférence de l'*American Physical Society* en mars 2010, l'équipe expérimentale de Rob Shoelkopf à Yale a surpris en présentant une mesure forte et mono-frappe dans un échantillon avec un résonateur linéaire et quatre transmons [122]. L'astuce consiste à augmenter la puissance du signal de mesure à un niveau bien supérieur à ce qui était fait auparavant, soit environ 40 à 50 dB de plus. Lorsque le signal de mesure est en résonance avec le résonateur, et pour un intervalle de puissance donné, il s'avère alors que la puissance du signal à la sortie diffère par plusieurs ordres de grandeur selon l'état du qubit. Ceci est visible dans les résultats expérimentaux présentés à la figure 7.3, tirée de la référence [122], si l'on choisit le point d'opération indiqué par une croix.

Pour une puissance aussi élevée, on s'attend à avoir de l'ordre de 10^4 photons dans le résonateur, bien au-delà de la limite de validité de tout modèle dispersif approximatif. Un nombre de photons aussi élevé rend aussi très difficile les simulations numériques avec l'équation maîtresse (5.3). car, même avec un système à deux niveaux, la taille de la matrice densité est $N = 2 \times 10^4$, ce qui implique $N^2 = 4 \times 10^8$ équations différentielles couplées à résoudre. Pour des simulations numériques, il devient alors nécessaire d'utiliser l'approche des trajectoires quantiques [60], dans laquelle la matrice densité de N^2 composantes peut être réduite à une matrice densité plus petite ou à un état pur $|\psi\rangle$ de

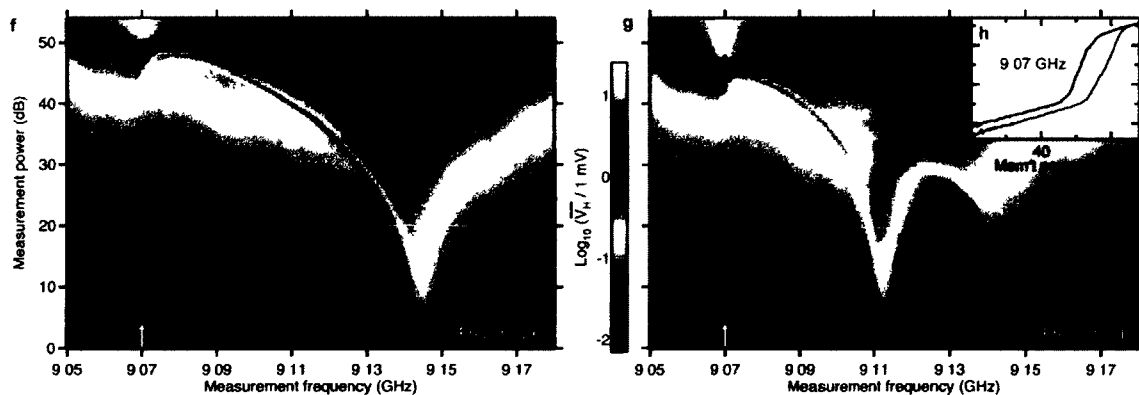


FIGURE 7.3 – Résultats expérimentaux de la mesure par avalanche. Tension mesurée à la sortie du circuit (échelle de couleur) en échelle logarithmique en fonction de la puissance et de la fréquence du signal de mesure, lorsque le qubit est préparé dans l'état fondamental (gauche) ou excité (droite). L'encadré présente deux tranches verticales prises pour une fréquence de mesure correspondant à la fréquence naturelle du résonateur sans qubit, indiquée par la flèche blanche. Figure partielle extraite de la référence [122].

N composantes. Le prix à payer est alors que l'évolution de la matrice densité réduite ou de l'état pur est décrite par une équation stochastique qu'il faut intégrer plusieurs fois afin de calculer les valeurs moyennes.

Ce régime est donc difficile à explorer aussi bien de manière analytique que numérique. L'explication théorique derrière cette mesure a été développée parallèlement et indépendamment par le groupe théorique de Steve Girvin à Yale [124] et par notre groupe [123]. Je couvrirai d'abord nos résultats et notre approche à la section 7.3.1 et poursuivrai avec ceux du groupe de Yale à la section 7.3.2. Je terminerai en évaluant le caractère destructeur de cette mesure à la section 7.3.3.

7.3.1 Approche auto-cohérente

Pour un système à deux niveaux, on sait que l'hamiltonien de Jaynes-Cummings peut être diagonalisé analytiquement et exactement via la transformation dispersive, tel qu'expliqué à la section 3.1.4. L'exactitude de la transformation est permise dans ce cas par la structure diagonale par bloc de l'hamiltonien, de même que par la taille (2×2) des blocs. En effet, dans le cas de blocs de taille deux, la diagonalisation peut être réalisée par la résolution d'une équation quadratique. Dans le cas à plus de deux niveaux, la diagonalisation analytique est ardue pour trois et quatre niveaux, puis devient impossible pour plus de quatre. La diagonalisation numérique de chaque demeure cependant très facile et rapide à réaliser.

En vertu de la symétrie de son terme d'interaction lumière-matière, chaque bloc de l'hamiltonien de Jaynes-Cummings est composé d'états avec un nombre total d'excitations qubit-résonateur n fixé. On peut écrire le sous-espace soutenant le bloc n comme $\mathcal{E}_n = \{|n, 0\rangle, \dots, |n - M + 1, M - 1\rangle\}$, où M est le nombre d'états du qubit et où $|i, j\rangle$ est l'état nu qui est produit tensoriel de i photons et du qubit dans l'état j . La taille du bloc correspond au nombre de niveaux du qubit qui, en pratique est au plus de l'ordre de 10. On peut ainsi facilement diagonaliser chaque bloc et obtenir les énergies propres $\bar{E}_{n,i}$ et les états propres (états habillés) $|\bar{n}, i\rangle$, où $|\bar{n}, i\rangle$ est l'état propre correspondant à l'état nu $|n, i\rangle$.

En pratique, l'état habillé $|\bar{n}, i\rangle$ est une superposition de tous les états du sous-espace \mathcal{E}_n et, pour n grand, le poids de chaque état nu peut être du même ordre de grandeur. La correspondance entre $|\bar{n}, i\rangle$ et $|n, i\rangle$ est alors non-triviale à effectuer. Pour faire cette correspondance je pose ainsi que l'état $|\bar{n}, i\rangle$ qui correspond à l'état $|n, i\rangle$ est celui qui

maximise l'élément de matrice $\langle \overline{n, i} | a^\dagger | \overline{n-1, i} \rangle / \sqrt{n}$. C'est de cette façon que j'ai obtenu la correspondance entre les états propres des blocs pour n grand et ceux où n est faible.

Pour donner un exemple, prenons l'état $|\overline{n, 1}\rangle$ correspondant au qubit dans le premier état excité et n photons dans le résonateur. On peut facilement identifier l'état $|\overline{0, 1}\rangle \sim |0, 1\rangle + \lambda |1, 0\rangle$ lors de la diagonalisation du bloc \mathcal{E}_1 , car $|\langle \overline{0, 1} | 0, 1 \rangle|^2 \approx 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$. Par la suite, l'état $|\overline{1, 1}\rangle$, qui correspond à un photon de plus que l'état $|\overline{0, 1}\rangle$, sera l'état propre $|\psi_i\rangle$ du sous-espace \mathcal{E}_2 qui maximise $|\langle \psi_i | a^\dagger | \overline{0, 1} \rangle|^2$. On peut alors identifier, de proche en proche, tous les états $|\overline{n, 1}\rangle$ correspondant au qubit dans le premier état excité avec n photon dans le résonateur.

Lorsque la correspondance est faite, je définis ensuite la fréquence effective du résonateur pour l'état i du qubit telle que

$$\omega_{r_i}(n) = \bar{E}_{n+1, i} - \bar{E}_{n, i}. \quad (7.5)$$

Cette fréquence effective dépend de façon non linéaire du nombre moyen de photons. Pour une amplitude ϵ et une fréquence de mesure ω_m , ce nombre de photons moyen est donné, dans l'état stationnaire, par

$$n_i(\epsilon, \omega_m) = \frac{\epsilon^2}{[\omega_{r_i}(n_i) - \omega_m]^2 + [\kappa/2]^2}. \quad (7.6)$$

L'équation pour n_i peut s'obtenir en solutionnant l'équation (5.30) pour $\alpha_{i,d}$ avec $K = \kappa_{\text{NL}} = K' = \mathbb{S}_i^d = \mathbb{K}_i^d = 0$, $\epsilon_d = \epsilon$, $\omega_d = \omega_m$ et $\omega_r = \omega_{r_i}(n_i)$ puis en posant $n_i = |\alpha_{i,d}|^2$. Les équations (7.5) et (7.6) peuvent alors être résolues de façon auto-cohérente afin de déterminer à la fois ω_{r_i} et n_i en fonction de ϵ et ω_m .

Je trace à la figure 7.4 la fréquence ω_{r_i} et le nombre de photons n_i correspondant à la solution auto-cohérente obtenue pour les cas d'un système à deux, trois ou six niveaux, pour $\omega_m = \omega_r$ tel que dans la référence [122]. On constate que, peu importe M , la fréquence effective du résonateur [panneaux (a)–(c)] s'approche de sa fréquence intrinsèque ω_r à haute puissance. Il s'agit du régime classique. Comme le qubit est limité à un nombre fini de niveaux, si la puissance est suffisamment grande, l'effet du qubit devient négligeable et le résonateur répond comme s'il n'y avait pas de qubit. La transition vers le régime classique se produit à une puissance relativement bien définie et le changement rapide de fréquence effective ω_{r_i} est accompagnée par une augmentation rapide du nombre

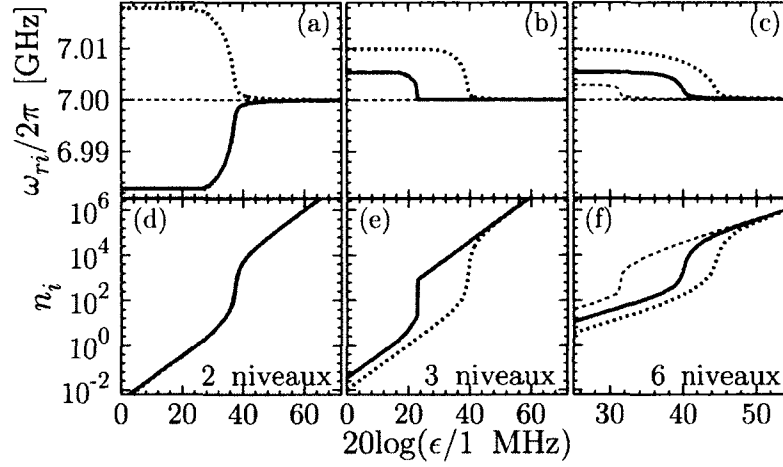


FIGURE 7.4 – Fréquence effective ω_{ri} (a)–(c) et nombre moyen de photons n_i (d)–(f) en fonction de l’amplitude de mesure ϵ pour $i = 0$ (lignes rouges pleines), $i = 1$ (lignes pointillées bleues) et $i = 2$ [lignes tiretées grises, (c) et (f) seulement]. Les panneaux [(a),(d)], [(b),(e)] et [(c),(f)] sont pour $M = 2, 3$ et 6 , respectivement. Dans les panneaux (a)–(c), la ligne tiretée verte est ω_r . Les paramètres sont les mêmes que dans la figure 7.1. Pour clarifier la présentation, les panneaux ont des échelles horizontales différentes. Une unité de l’échelle horizontale correspond à un décibel de puissance. Figure adaptée de [123].

de photons. On peut imaginer la transition comme un régime où, en rapprochant ω_{ri} de la fréquence intrinsèque ω_r et donc de la fréquence de mesure ω_m , l’ajout de quelques photons facilite l’ajout d’autres photons, à la manière d’une avalanche.

Puisque les coefficients S_i^p et K_i^p sont symétriques dans le cas d’un système à deux niveaux, la transition vers le régime classique se produit à la même puissance pour les deux états du qubit. Le résultat est cependant très différent pour un système à plus de deux niveaux. Dans ce cas, et tel qu’illustré aux panneaux (b) et (c), l’avalanche se produit à des puissances différentes selon l’état du qubit. Le résultat quantitatif change selon le nombre de niveaux, mais demeure qualitativement le même. Aux panneaux (e) et (f), on peut voir qu’il y a un intervalle de quelques décibels de puissance de mesure où le nombre de photons moyen peut différer par autant que $\sim 10^5$ photons entre les réponses pour les deux premiers états du qubit. C’est cette différence dans le nombre de photons, beaucoup plus grande que le nombre de photons de bruit typiquement rajoutés par un amplificateur, qui a permis à l’équipe de Yale d’obtenir une mesure monofrappe de l’état du qubit [122]. La courbe tiretée grise du panneau (f), tracée pour l’état $|2\rangle$ du qubit indique qu’il est réaliste de faire fonctionner ce type de mesure à plus basse puissance en induisant une transition de l’état $|1\rangle$ à l’état $|2\rangle$ avant la mesure, tel que

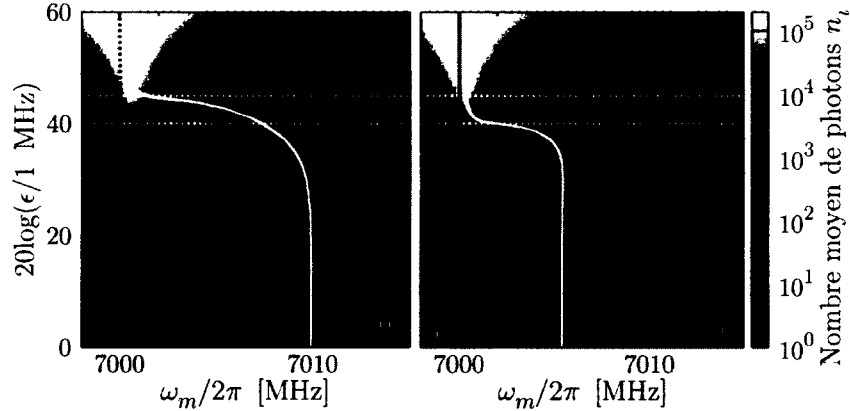


FIGURE 7.5 – Nombre de photons moyen n_i pour les états $i = 0$ (a) et $i = 1$ (b) du qubit en fonction de la fréquence et de la puissance de mesure. La ligne pleine blanche représente $\omega_{ri}(n_i)$ pour $\omega_m/2\pi = \omega_r/2\pi = 7$ GHz. Les lignes verticales indiquent la fréquence de mesure utilisée pour les courbes correspondantes de la figure 7.4. Les lignes pointillées horizontales indiquent le régime de puissance de mesure où la différence de nombre de photons est grande entre les deux états i du qubit. Les paramètres sont les mêmes qu'à la figure 7.1. Figure adaptée de [123].

réalisé expérimentalement [82, 122].

À la figure 7.5, je trace le nombre de photons moyen n_i en fonction de la fréquence et de la puissance de mesure, pour les états $i = 0$ et $i = 1$ du qubit. Bien qu'une comparaison quantitative avec les résultats expérimentaux de Reed *et al.* [122] présentés à la figure 7.3 requerrait un modèle à quatre qubits pour décrire l'échantillon expérimental, le graphique montre un accord qualitatif avec les résultats expérimentaux. Près des courbes de fréquence effective du résonateur (courbes blanches), on peut voir une zone où le nombre de photons calculé est bruyant. Ce bruit témoigne de problèmes de convergence dans la résolution des équations auto-cohérentes, ce qui pourrait indiquer que le système est bistable dans cette zone, en accord avec les résultats obtenus par Bishop *et al.* [124] et décrits ci-dessous.

7.3.2 Approche semi-classique et trajectoires quantiques

De façon concomitante, l'équipe de Steve Girvin à Yale a aussi réussi à expliquer la mesure de Reed *et al.* Pour ce faire, ils ont utilisé une approche semi-classique en considérant un système à deux niveaux, et des simulations numériques à l'aide de trajectoires quantiques [124]. L'approche semi-classique consiste à réécrire la version diagonale de

l'hamiltonien Jaynes-Cummings sous la forme

$$H = \frac{\omega_c}{2}(X^2 + P^2 + \sigma_z) + \xi X \cos(\omega_d t) - \frac{\sigma_z}{2} \sqrt{2g^2(X^2 + P^2 + \sigma_z) + \delta^2}, \quad (7.7)$$

où $X = \sqrt{1/2}(a^\dagger + a)$, $P = i\sqrt{1/2}(a^\dagger - a)$, ω_c est la fréquence du résonateur, ξ est l'amplitude du signal, ω_d est sa fréquence, g est le couplage entre le résonateur et le qubit, et $\delta = \omega_q - \omega_c$ est le décalage entre la fréquence du qubit ω_q et celle du résonateur. En traitant σ_z et $X^2 + P^2$ comme des constantes, ils trouvent alors la solution stationnaire en présence de dissipation et obtiennent les équations pour $A = \sqrt{X^2 + P^2}$

$$A^2 = \frac{\omega_c^2 \xi^2}{\{\omega_d^2 - [\omega_c - \chi(A)]^2\}^2 + \kappa^2 \omega_d^2}, \quad (7.8)$$

avec

$$\chi(A) = \sigma_z \frac{g^2}{\sqrt{2g^2(A^2 + \sigma_z) + \delta^2}}. \quad (7.9)$$

Dans cette notation, A^2 est l'équivalent du nombre de photons n_i que nous obtenons à l'équation (7.6) et $\chi(A)$ correspond à la variation de ω_{r_i} que nous calculons numériquement via l'équation (7.5).

Comme ce traitement analytique est restreint à un système à deux niveaux, les résultats analytiques de Bishop *et al.* ne permettent pas d'expliquer l'amplitude très différente du champ du résonateur selon l'état du qubit à haute puissance. La théorie analytique permet néanmoins de décrire l'augmentation rapide du nombre de photons à une puissance bien définie, que nous appelons l'avalanche. De plus, grâce au caractère analytique de leur solution, ils ont pu montrer qu'il y a effectivement une zone où le résonateur est bistable [124], si la fréquence du signal de mesure est dans l'intervalle $]\omega_r, \omega_r + \chi[$. Il est notable que, contrairement à un résonateur avec une non-linéarité Kerr — où le domaine de bistabilité est $\omega_d < \omega_r - \sqrt{3}\kappa/2$ — l'intervalle de fréquences où le résonateur peut être bistable est borné des deux côtés. Il y a donc deux fréquences critiques plutôt qu'une seule.

À l'aide de simulations numériques utilisant des trajectoires quantiques, un espace d'Hilbert tronqué à 10 000 photons et un qubit figé dans l'état fondamental, ils ont pu démontrer que la dynamique du système mène effectivement à une augmentation significative du nombre de photons dans un intervalle de puissance restreint. Finalement, en analysant le décalage dispersif à basse puissance, ils ont montré que le comportement

symétrique avec un système à deux niveaux est brisé par l'ajout de niveaux supplémentaires, mais aussi par l'ajout de systèmes à deux niveaux supplémentaires [124].

7.3.3 Une mesure destructrice

Étant donné le grand nombre de photons dans le résonateur, on ne s'attend pas à ce que cette mesure soit QND. Dans l'article [123], nous avons évalué le caractère destructeur de cette mesure en analysant comment la perte de photons, la relaxation du qubit et le déphasage du qubit modifient la relaxation effective du qubit en présence des photons. Pour les trois effets, nous avons aussi analysé le taux de fuite vers les niveaux supérieurs $i > 1$ du qubit. Tout comme la relaxation du qubit, la fuite vers des états supérieurs non-désirés du qubit causerait une erreur dans un éventuel calcul quantique. Nous avons estimé le taux de relaxation Purcell γ_κ et le taux de fuite γ_κ^l dus à la perte de photon comme

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_\kappa}{\kappa} &\approx |\langle \overline{n}, 0 | a | \overline{n}, 1 \rangle|^2, \\ \frac{\gamma_\kappa^l}{\kappa} &\approx \sum_{i=2}^{M-1} |\langle \overline{n-i}, i | a | \overline{n}, 1 \rangle|^2,\end{aligned}\tag{7.10}$$

et le taux de relaxation $\gamma_{1,d}$ et le taux de fuite $\gamma_{1,d}^l$ dus à la relaxation intrinsèque du qubit comme

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_{1,d}}{\gamma_1} &\approx |\langle \overline{n}, 0 | \Sigma_- | \overline{n}, 1 \rangle|^2, \\ \frac{\gamma_{1,d}^l}{\gamma_1} &\approx \sum_{i=2}^{M-1} |\langle \overline{n-i}, i | \Sigma_- | \overline{n}, 1 \rangle|^2,\end{aligned}\tag{7.11}$$

où $\Sigma_- = \sum_{i=0}^{M-2} \frac{g_i}{g_0} \Pi_{i,i+1}$ est l'opérateur de destruction pour le qubit normalisé avec les constantes de couplage.

Je présente ces taux à la figure 7.6. Les taux de relaxation sont les courbes continues noires, alors que les taux de fuite sont les courbes tiretées bleues. Au panneau (a), on constate que le taux de relaxation Purcell commence à sa valeur attendue (ligne pointillée rouge) à basse puissance, puis diminue à plus haute puissance. Ceci s'explique par le fait que lorsque le nombre de photons est élevé, perdre un photon ne change pas significativement l'état du système, ou en d'autres mots, qu'on ne peut pas distinguer N de $N - 1$

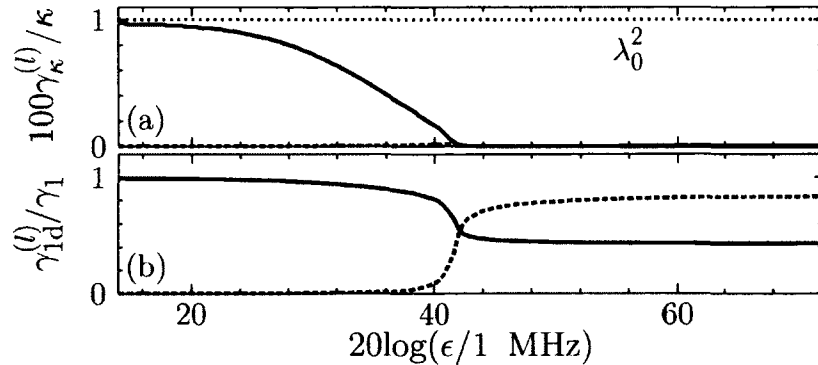


FIGURE 7.6 – Taux de relaxation et de fuite des états habillés dus à la perte de photons (a) et à la relaxation intrinsèque du qubit (b). Les courbes continues noires sont les taux de relaxation. Les courbes tiretées bleues sont les taux de fuite. La ligne pointillée rouge en (a) représente la valeur attendue du taux Purcell à faible puissance. Les paramètres sont les mêmes qu'à la figure 7.1. Figure reprise de [123].

lorsque N est suffisamment grand. Le taux de fuite vers les états supérieurs du transmon dû à la perte d'un photon est négligeable et la courbe se confond avec l'axe horizontal. Au panneau (b), on voit que le taux effectif de relaxation du qubit diminue. Ceci est dû à la contribution supérieure des niveaux élevés du transmon dans les états habillés. La relaxation a alors une plus faible probabilité de causer une transition $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ du qubit. L'effet est cependant complètement inversé pour la fuite vers les états supérieurs. À la fois pour la perte de photons et pour la relaxation, l'effet de l'habillage n'est pas critique, car les taux demeurent du même ordre de grandeur malgré la présence de dizaines de milliers de photons. Il en va cependant autrement pour le déphasage intrinsèque du qubit comme nous le verrons.

Nous avons montré précédemment que le déphasage des états habillés peut mener à des transitions entre les états du qubit [114]. Nous avons de plus montré que l'amplitude de cet effet dépend du spectre du bruit qui cause le déphasage, mais à des fréquences de l'ordre du gigahertz plutôt qu'à basse fréquences [115]. Bien que méconnu à des fréquences micro-ondes, le spectre du bruit causant le déphasage est souvent supposé comme $S(\omega) \propto 1/\omega$. Selon cette hypothèse, le bruit aux fréquences micro-ondes serait alors plusieurs ordres de grandeur plus faible que celui aux basses fréquences, causant le déphasage. Ainsi, le taux de transition dû au déphasage des états habillés serait négligeable si le taux de déphasage est lui-même faible.

Cependant, le taux de déphasage habillé dépend aussi de l'amplitude de la variation

des énergies du qubit en fonction du paramètre bruyant. Si le bruit est causé par des fluctuations de charge, on appelle l'amplitude de cette variation pour l'état $|i\rangle$ du qubit la dispersion de charge ε_i [89]. On introduit alors l'opérateur

$$\Sigma_z = \sum_{i=0}^{M-1} \Pi_{i,i} \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1}. \quad (7.12)$$

On peut alors estimer les taux de relaxation et de fuite dus au déphasage des états habillés via les éléments de matrice [115]

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_d}{\gamma_\varphi} &\approx \left| \langle \overline{n+1, 0} | \Sigma_z | \overline{n, 1} \rangle \right|^2 \frac{S(\omega_{1,0} - \omega_r)}{S(1 \text{ Hz})}, \\ \frac{\gamma_d'}{\gamma_\varphi} &\approx \sum_{i=2}^{M-1} \left| \langle \overline{n+1-i, i} | \Sigma_z | \overline{n, 1} \rangle \right|^2 \frac{S(\omega_{1,0} - \omega_r)}{S(1 \text{ Hz})}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

où l'on compare le spectre à haute fréquence à celui à une basse fréquence typique de 1 Hz.

Bien que les premiers niveaux du transmon soient protégés du bruit de charge tel qu'expliqué à la section 2.2.1, leur susceptibilité au bruit de charge augmente exponentiellement avec l'indice du niveau, atteignant $\varepsilon_6/\varepsilon_1 \sim 10^6$ pour 6 niveaux. Ainsi, bien qu'il soit difficile d'évaluer la valeur de ces taux étant donné la méconnaissance du bruit à hautes fréquences, si l'on suppose un bruit en $1/f$, on peut s'attendre à des taux $\gamma_d/\gamma_\varphi \sim 1 - 10^3$ et $\gamma_d'/\gamma_\varphi \sim 10 - 10^4$ selon les paramètres et le nombre de niveaux du qubit [123]. La mesure par avalanche détruit donc vraisemblablement l'état du qubit, laissant celui-ci dans un mélange statistique de tous ses états après la mesure.

7.4 Mesure par bifurcation dans le régime de chevauchement

Les deux régimes présentés aux sections 7.2 et 7.3 pour la mesure fonctionnent avec un résonateur linéaire couplé fortement au qubit. Dû à ce fort couplage — de l'ordre de $g/2\pi \sim 100$ MHz — un large intervalle de fréquences ne pouvait être décrit par l'approximation dispersive. Cet intervalle était indiqué par l'ombrage rouge à la figure 7.1. J'explore dans cette section comment en utilisant la bifurcation d'un résonateur non

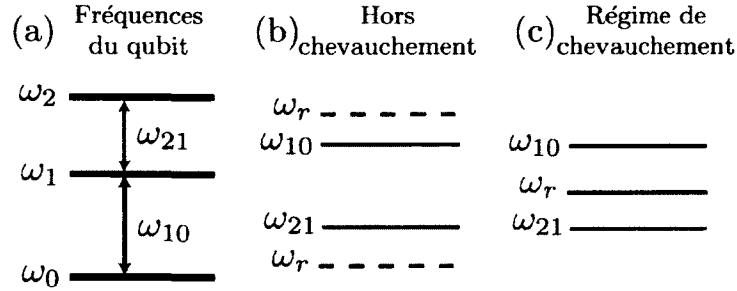


FIGURE 7.7 – Énergies de transition du qubit (a) et leurs positions relatives à la fréquence du résonateur hors (b) et à l'intérieur (c) du régime de chevauchement. Figure adaptée de [176].

linéaire, on peut réaliser une mesure aussi — sinon plus — efficace avec un couplage beaucoup plus faible, de l'ordre de $g/2\pi \sim 10$ MHz. Je présente tout d'abord le régime de chevauchement dans lequel cette mesure est possible à la section 7.4.1. J'analyse ensuite la performance d'une mesure par bifurcation dans ce régime en la comparant avec une mesure en dehors de ce régime à la section 7.4.2, puis je présente quelques autres avantages d'opérer dans ce régime à la section 7.4.3. Les résultats de cette section sont repris de la référence [176].

7.4.1 Régime de chevauchement

Un régime de chevauchement (*straddling regime* en anglais [89]) ne peut exister que pour un qubit à plus de deux niveaux. Dans un tel régime, la fréquence du résonateur est située entre deux fréquences de transition du qubit. On peut alors imaginer les deux fréquences de transition comme chevauchant celle du résonateur, d'où le nom du régime. Ainsi, si l'on représente les fréquences du qubit tel qu'à la figure 7.7 (a), les positionnements de ω_r ¹ illustrés à la figure 7.7 (b) seraient considérés comme en dehors du régime de chevauchement, alors que la situation illustrée à la figure 7.7 (c) serait à l'intérieur du régime de chevauchement.

Dans ce régime, le décalage dispersif $S_1^d = -(\mathbf{x}_1^d - \mathbf{x}_0^d) = -\left[\frac{g_1^2}{\omega_{2,1} - \omega_d} - \frac{g_0^2}{\omega_{1,0} - \omega_d}\right]$ est augmenté (en valeur absolue) grâce aux signes contraires de $\omega_{2,1} - \omega_d$ et $\omega_{1,0} - \omega_d$. Il est ainsi possible d'obtenir des décalages dispersifs beaucoup plus grands à l'intérieur qu'à

¹On note que c'est plutôt la fréquence du signal de mesure qui entre dans les coefficients du décalage dispersif S_i^d et K_i^d . Cependant, le régime de chevauchement est généralement considéré en fonction de la fréquence du résonateur [89]. Ceci n'affecte pas qualitativement les résultats, puisque la fréquence du signal de mesure est relativement proche de celle du résonateur.

l'extérieur du régime de chevauchement, pour des couplages et décalages qubit-résonateur similaires. Afin de bénéficier de l'augmentation du décalage dispersif, il faut en pratique que les décalages qubit-résonateur pour les deux transitions concernées soient du même ordre. Ainsi, même si la boîte de Cooper n'est pas strictement un système à deux niveaux, la fréquence de transition $\omega_{2,1}$ est beaucoup trop grande pour que l'augmentation du décalage dispersif due au régime de chevauchement soit significatif. C'est un régime qui s'applique donc bien à des qubits qui ont une faible anharmonicité, tels le transmon [89] ou le qubit de flux à faible impédance [93]. Finalement, le comportement de \mathbb{K}_i^d en fonction de la fréquence ω_d , donné à l'équation (5.25) est aussi beaucoup plus riche à l'intérieur qu'à l'extérieur du régime de chevauchement.

Les coefficients \mathbb{S}_i^d et \mathbb{K}_i^d sont tracés à la figure 7.8 pour $i = 0$ (lignes continues noires) et $i = 1$ (lignes tiretées vertes), pour des fréquences $\omega_d \sim \omega_r$ à l'intérieur et à l'extérieur du régime de chevauchement². Puisque le modèle du chapitre 5 est obtenu dans la limite dispersive, les couplages doivent être faibles comparativement aux décalages entre les transitions du qubit et la fréquence du résonateur. Comme l'anharmonicité typique d'un transmon n'est que de quelques centaines de mégahertz, les constantes de couplages ne peuvent être beaucoup plus grandes que 10 MHz. Afin de m'assurer de la validité de l'approximation dispersive dans le régime de chevauchement, je compare à la figure 7.8 les équations analytiques pour \mathbb{S}_i^d et \mathbb{K}_i^d à des valeurs numériques. Ces valeurs sont extraites de la diagonalisation numérique de l'hamiltonien Jaynes-Cummings à plusieurs niveaux et d'un lissage quadratique des différences d'énergie en fonction du nombre de photons. On constate, en comparant les panneaux (a) et (b), de même que (c) et (d) que, loin des résonances identifiées par les lignes pointillées verticales grises, rouges et bleues, le comportement des équations analytiques concorde quasi-quantitativement aux lissages numériques.

De cette figure, j'ai choisi deux points d'opération, identifiés par A (ligne continue noire verticale) — à l'intérieur du régime de chevauchement — et B (ligne tiretée grise verticale) — à l'extérieur du régime de chevauchement. Ces deux points ont été choisis pour que $|\mathbb{S}_1^d - \mathbb{S}_0^d|$ ait la même valeur. On peut cependant voir aux panneaux (c) et (d) que la même chose n'est pas vraie pour $|\mathbb{K}_1^d - \mathbb{K}_0^d|$. Ainsi, alors que \mathbb{K}_i^d est de signe contraire à \mathbb{S}_i^d au point B, seul \mathbb{K}_1^d est de signe contraire à \mathbb{S}_1^d au point A. De même, la différence

²On peut considérer qu'il y a plusieurs régimes de chevauchement, correspondant aux différentes paires de transitions $\{0 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2\}$, $\{1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 3\}$. etc. En pratique, le seul de ces régimes qui sera important pour nous est le premier.

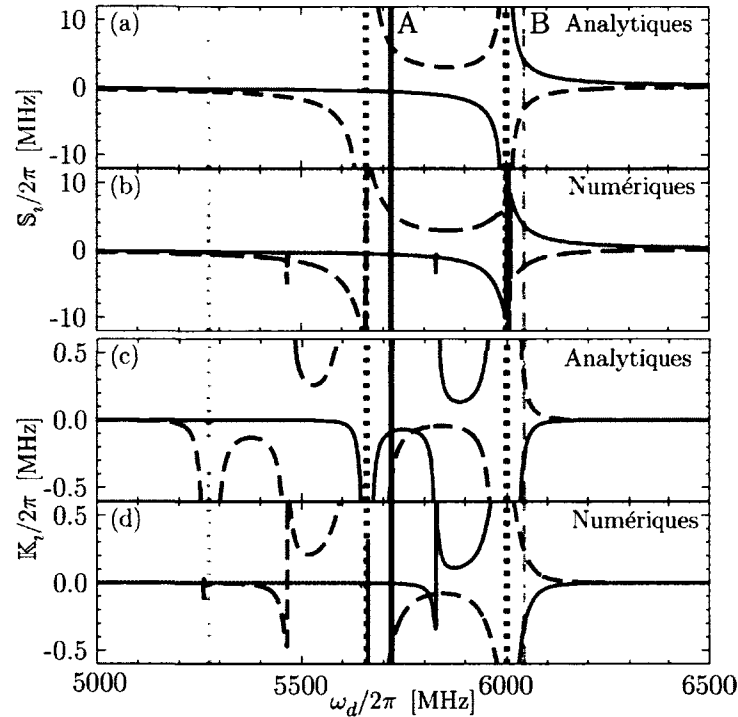


FIGURE 7.8 – Décalages dispersifs dans le régime de chevauchement. Les courbes noires continues (vertes tiretées) sont pour l'état fondamental (excité) d'un transmon. L'énergie de charge E_C et l'énergie Josephson E_J du transmon sont $E_C = 300$ MHz et $E_J = 25$ GHz. Le transmon est biaisé en flux pour avoir $\omega_{10}/2\pi = 6$ GHz, et le couplage à flux nul est $g_{10}/2\pi = 15$ MHz. Les paramètres au point d'opération en flux sont alors $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)/2\pi \approx (6, 11.7, 16.9, 21.8)$ GHz, et $(g_0, g_1, g_2, g_3)/2\pi = (13.5, 18.5, 21.8, 24.1)$ MHz. Les panneaux (a) et (c) sont les résultats analytiques des équations (5.21) et (5.25). Les lignes verticales pointillées sont les fréquences de transitions ω_{10} (bleues), ω_{21} (rouges) et ω_{32} (grises). Les lignes verticales continue noire et tiretée grise sont les points d'opération A ($\omega_m/2\pi = 5720$ MHz) et B ($\omega_m/2\pi = 6044$ MHz) comparés dans cette section. Figure adaptée de [176].

$|\mathbb{K}_1^d - \mathbb{K}_0|$ est environ deux fois plus grande au point B qu'au point A. Comme on l'a vu à la section 7.2, les fréquences effectives du résonateur $\omega_{ri}(n)$ dépendent du nombre de photon et des coefficients S_i^d et \mathbb{K}_i^d . Étant donné le comportement de ces coefficients dans le régime de chevauchement, la séparation entre ces fréquences effectives devrait demeurer plus grande au point A qu'au point B lorsque le nombre de photons augmente. L'idée est alors d'utiliser ceci pour optimiser une mesure par bifurcation.

7.4.2 Simulations numériques de la mesure par bifurcation

Afin de vérifier que ce comportement du décalage dispersif peut se traduire en amélioration pour une mesure par bifurcation, j'ai calculé la valeur moyenne du nombre de photons dans l'état stationnaire pour un résonateur non linéaire (dont les paramètres sont donnés dans la légende de la figure 7.9) couplé à un transmon sans dissipation, pour les deux états du qubit. Le signal de mesure appliqué était d'amplitude constante ϵ_d et la fréquence du résonateur ω_r était variée avec celle du signal ω_d de sorte à garder un décalage réduit $\Omega/\Omega_C = 3.5$ constant, bien supérieur au décalage critique $\Omega_C = \sqrt{3}$ à partir duquel le résonateur peut être bistable.

Le nombre moyen de photons n_i est tracé en fonction de l'amplitude et de la fréquence du signal à la figure 7.9. La zone blanche relativement bien circonscrite en amplitude indique l'amplitude critique ϵ_H pour laquelle le résonateur bifurque d'un état de faible amplitude (zones bleues, $n_i \sim 10$) à un état de haute amplitude (zones rouges, $n_i \sim 60$). On constate que les points d'opération A et B choisis correspondent respectivement à un maximum de ϵ_H (indiqué par les deux X de droite) pour l'état excité et pour l'état fondamental du qubit. On constate aussi que la distance entre les amplitudes critiques (la distance entre les X) pour les deux états du qubit est plus importante au point A qu'au point B. Ceci indique que l'intervalle d'amplitudes sur lequel un seul des deux états du qubit fait bifurquer le résonateur est plus grand au point A qu'au point B, ce qui devrait permettre une plus grande flexibilité pour les pulses de mesure.

Afin de vérifier que c'est bien le cas, j'ai fait des simulations numériques avec des pulses de mesure plutôt que des signaux constants. La forme des pulses est illustrée à la figure 7.10 (d). Cette forme est utilisée dans les mesures par bifurcation afin d'augmenter le contraste entre les réponses du résonateur pour les deux états [83] tel qu'expliqué à la section 2.4.5. Pour les simulations, j'ai varié le temps d'échantillonnage t_s , la durée de la rampe σ et la différence d'amplitude $\delta\epsilon_d$ pour chacun des deux états du qubit.

L'état du résonateur après cette simulation est donné par une distribution bimodale. En terme de fonction $Q(\alpha)$, la matrice densité du résonateur présenterait ainsi deux bosses bien séparées, correspondant aux états de faible (L) et de haute (H) amplitude d'oscillation. Le poids (l'intégrale) de chacune des deux bosses correspond alors à la probabilité expérimentale de bifurcation du résonateur. Cette évaluation des probabilités de bifurcation à partir de la fonction Q du résonateur a déjà été utilisée pour reproduire numériquement la mesure rapportée par Mallet *et al.* [82] et la même fidélité numérique

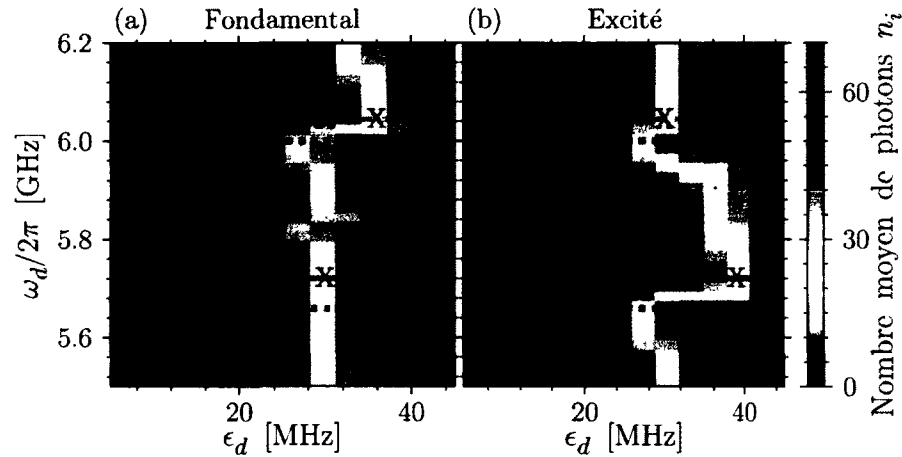


FIGURE 7.9 – Nombre moyen de photons n_i calculé numériquement pour un qubit initialement dans l'état $|i\rangle$ dans le régime de chevauchement. L'évolution est calculée selon l'équation (5.3) pour un signal ϵ_d d'amplitude constante et en absence de relaxation du qubit. Les paramètres du résonateur sont $(\kappa, K)/2\pi = (5, -0.4)$ MHz. La fréquence du résonateur est ajustée de telle sorte que $(\omega_r - \omega_d)/2\pi = 15$ MHz, donnant un décalage réduit $\Omega/\Omega_C \sim 3.5$, à l'intérieur du régime de bifurcation du résonateur. Les lignes horizontales représentent les fréquences de transition du qubit et les points d'opérations tels qu'à la figure 7.8. Les paramètres du qubit sont les mêmes qu'à la figure 7.8. Figure adaptée de [176].

concordait avec la fidélité expérimentale à l'intérieur d'une marge de 2% [76].

J'ai ensuite calculé la probabilité d'erreur de la mesure par bifurcation que j'ai définie comme

$$P_{\text{erreur}} = \max_{\substack{\{i,j\} \in \{0,1\} \\ j \neq i}} P_{|i\rangle}(|j\rangle), \quad (7.14)$$

où $P_{|i\rangle}(|j\rangle)$ correspond au poids de l'état du résonateur que l'on assignerait à l'état $|i\rangle$ étant donné que le qubit était au départ dans l'état $|j\rangle$. Cette probabilité d'erreur correspond au maximum entre les probabilités d'erreur pour l'état fondamental et excité, et constitue donc un pire scénario.

J'ai ensuite optimisé cette probabilité d'erreur en fonction de σ et de $\delta\epsilon_d$. Je trace le résultat optimisé en fonction du temps d'échantillonnage t_s à la figure 7.10 pour des temps de relaxation intrinsèques du qubit $T_1 = \infty$ [panneau (a)], $T_1 = 800$ ns [panneau (b)] et $T_1 = 300$ ns [panneau (c)], pour les points d'opération A (courbes continues noires) et B (courbes tiretées grises). En comparant les panneaux (a), (b) et (c), on constate que la probabilité d'erreur augmente lorsque le temps de relaxation diminue. Cette augmentation correspond tout simplement à la probabilité que le qubit relaxe avant que le résonateur

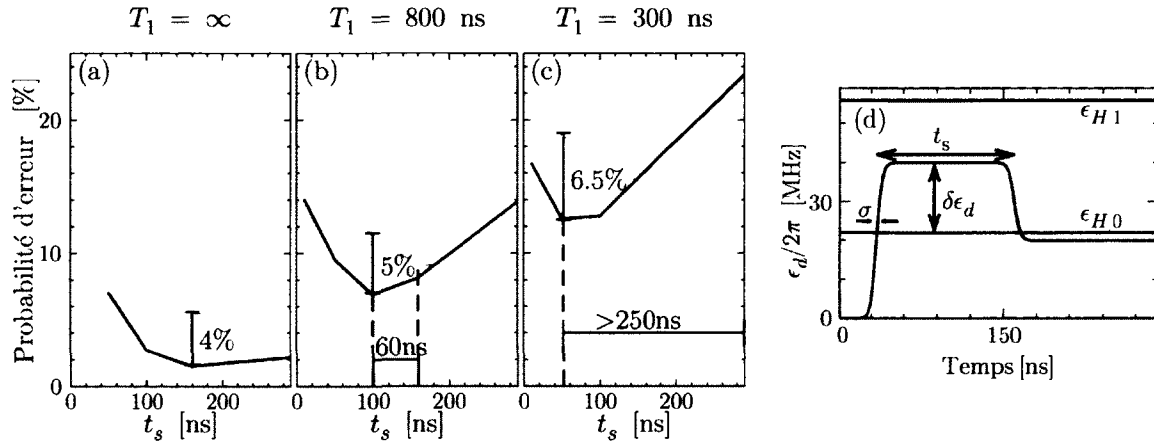


FIGURE 7.10 Probabilité d'erreur d'une mesure par bifurcation en fonction du temps d'échantillonnage t_s . Le pulse de mesure est illustré au panneau (d). La probabilité d'erreur est minimisée par rapport au temps de rampe σ et à l'amplitude du plateau $\delta\epsilon_d$. Les lignes continues noires (tiretées grises) correspondent aux points d'opération A (B) à l'intérieur (à l'extérieur) du régime de chevauchement. Les simulations sont faites pour un qubit avec des temps de relaxation intrinsèques (sans effet Purcell) $T_1 = \infty$ (a), 800 ns (b) et 300 ns (c). En (b) et (c), les lignes tiretées rouges verticales indiquent le minimum des courbes pour les deux points d'opération. Les barres vertes indiquent le gain en temps d'échantillonnage (horizontales) ou en probabilité d'erreur (verticales). Les paramètres sont les mêmes qu'à la figure 7.9. Figure adaptée de [176].

ait le temps de bifurquer.

En comparant les courbes correspondant aux deux points d'opération entre elles, on note ensuite que la courbe du point A présente toujours une probabilité d'erreur plus faible que celle du point B pour des temps d'échantillonnage court. Comme les décalages dispersifs linéaires sont les mêmes (en valeur absolue) pour les deux points, cet avantage du régime de chevauchement ne peut être expliqué que par le décalage dispersif quadratique plus avantageux ou par un effet Purcell réduit comme on le verra à la section 7.4.3. On constate ensuite que l'avantage du point A croît d'abord en fonction du temps d'échantillonnage, avant de diminuer et de devenir négatif pour t_s grand. L'accroissement initial peut être expliqué par l'effet Purcell réduit au point A comparativement au point B. La décroissance subséquente peut être expliquée par l'inversion des amplitudes critiques $\epsilon_{H,1}$ et $\epsilon_{H,0}$ entre les points d'opération A et B. En d'autres mots, puisque pour le point A, $\epsilon_{H,1} > \epsilon_{H,0}$, la relaxation du qubit fera bifurquer le résonateur, entraînant un faux positif. Pour le point B, $\epsilon_{H,1} < \epsilon_{H,0}$ et un faux positif ne peut être causé que par une transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$, un processus qui ne se produit pas à basse température. On note

que la situation serait inversée pour un qubit dont l'anharmonicité serait inversée par rapport au transmon, c'est-à-dire que $\omega_{2,1} > \omega_{1,0}$. C'est le cas du qubit de flux à faible impédance [93].

Finalement, les résultats de simulations indiquent qu'une probabilité d'erreur plus faible peut être atteinte pour une mesure par bifurcation en utilisant le régime de chevauchement comme point d'opération. L'amélioration est due à une augmentation de la différence entre les fréquences effectives du résonateur correspondant aux deux états du qubit. Ce décalage de fréquence plus important permet en fait de rendre le phénomène de bifurcation moins sensible aux oscillations transitoires qui se produisent dans le champ intra-résonateur lors de l'augmentation soudaine de l'amplitude du signal de mesure. Cette sensibilité diminuée permet de réduire les temps de rampe σ et d'augmenter l'amplitude du plateau d'échantillonnage $\delta\epsilon_d$, permettant ainsi une bifurcation plus rapide. On trouve une probabilité d'erreur qui peut être jusqu'à trois fois plus faible à l'intérieur du régime de chevauchement. Pour un temps d'échantillonnage optimal, le gain sur la probabilité d'erreur augmente pour des temps de relaxation T_1 plus faibles, mais l'erreur absolue la plus faible est obtenue pour des temps T_1 plus longs.

7.4.3 Avantages et inconvénients

Outre les avantages de la mesure par bifurcation, tels son caractère non-destructeur et sa haute fidélité [82], utiliser une mesure par bifurcation dans le régime de chevauchement et avec un couplage qubit-résonateur plus faible présente certains avantages et inconvénients que j'expose ici.

Portes à deux qubit plus lentes

Le principal désavantage à utiliser le régime de chevauchement est aussi un de ses avantages, soit que cela requiert un couplage faible. Or, pour la plupart des portes à deux qubits utilisant le résonateur pour réaliser l'interaction effective, la vitesse de la porte est directement proportionnelle au couplage entre le qubit et le résonateur [158]. Ainsi, plusieurs expériences récentes utilisent des couplages $g/2\pi \sim 100$ MHz pour réaliser les portes à deux qubits [25, 103]. Cette limitation peut cependant être contournée de plusieurs façons. Il serait par exemple possible d'utiliser d'autres canaux que le mode du résonateur servant à faire la mesure afin de coupler les qubits. Ceci pourrait être réalisé en utilisant un deuxième mode du même résonateur [177], un coupleur externe [178], un autre

résonateur ou une capacité [106]. Il serait aussi possible d'améliorer la vitesse des portes utilisant le résonateur principal comme coupleur en réalisant des portes résonantes [179], ou encore appliquer des méthodes de contrôle optimal afin d'optimiser les séquences de pulse pour les portes à deux qubits [170, 171].

Relaxation Purcell réduite

Un fort couplage est avantageux pour la réalisation de portes à deux qubits rapides [158], mais présente le désavantage d'augmenter la relaxation Purcell [160]. Dans le régime de chevauchement, la relaxation Purcell dépend fortement de la transition que l'on considère et du point d'opération. Ainsi, je trace à la figure 7.11 les taux de relaxation Purcell $\gamma_{\kappa,i} = \kappa\lambda_i^2$ associés aux transitions $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$, $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$, et $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$, dans l'approximation à un seul mode. On peut voir que les taux de relaxation divergent lorsque la fréquence du résonateur croise celle d'une transition du qubit. Cependant, le seul taux de relaxation qui importe pour le qubit est $\gamma_{\kappa,0}$. Ainsi, alors que le décalage dispersif pour les deux points d'opération étaient les mêmes, on peut voir que le taux de relaxation Purcell est beaucoup plus faible pour le point A que pour le point B. Ceci explique en partie le gain à opérer au point A.

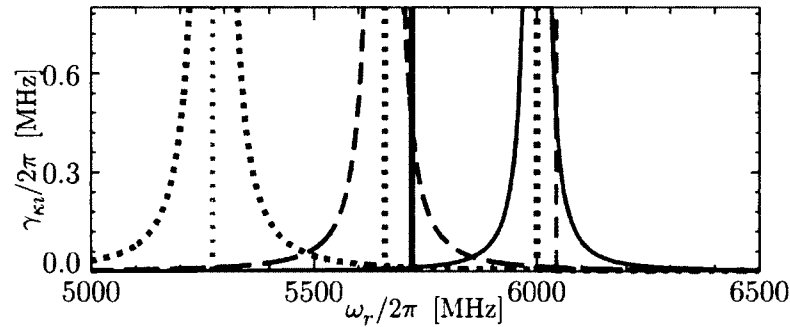


FIGURE 7.11 – Taux de relaxation Purcell $\gamma_{\kappa,i}$ en fonction de la fréquence du résonateur dans le régime de chevauchement. Les courbes continue noire, tiretée verte et pointillée bleue correspondent respectivement aux transitions $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$, $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$, et $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$. Les lignes verticales représentent les fréquences de transition du qubit et les points d'opérations tels qu'à la figure 7.8. Les paramètres sont les mêmes qu'à la figure 7.9. Figure adaptée de [176].

Entassement spectral

La raison pour laquelle les portes à deux qubits sont plus rapides avec un couplage plus fort est parce que l'interaction qubit-qubit effective via le résonateur est plus forte. Lorsqu'on veut désactiver cette interaction à deux qubits (pour ne pas réaliser d'opérations) cependant, il faut décaler les fréquences des deux qubits *suffisamment loin* l'une de l'autre, et *suffisamment loin* de celle du résonateur. Or, *suffisamment loin* signifie un décalage beaucoup plus grand que les constantes de couplage. Étant donné que la fréquence des qubits est de l'ordre du gigahertz, avoir des couplages de l'ordre de la centaine de mégahertz mène rapidement à une saturation de l'espace de fréquences lors de l'ajout de qubits, un phénomène appelé *entassement spectral* (*spectral crowding* en anglais). Opérer avec un couplage plus faible permet alors d'ajouter davantage de qubits dans un même résonateur tout en minimisant les couplages parasites.

Transitions Landau-Zener-Stueckelberg

Afin de diminuer davantage la relaxation Purcell et les interactions indésirables entre qubits, il est aussi envisageable d'ajuster la fréquence du transmon dans le temps afin de l'amener dans le régime de chevauchement uniquement au moment de la mesure. Ceci implique cependant que la fréquence du transmon traversera celle du résonateur. Alors que ce croisement peut entraîner une transition Landau-Zener-Stueckelberg [180–182] — c'est-à-dire un transfert cohérent de l'excitation du qubit vers le résonateur — lorsque le couplage est important, la probabilité de ces transitions est grandement réduite avec de faibles couplages. En supposant que la fréquence du qubit puisse être ajustée à une vitesse réaliste de $v = 2\pi \cdot 1 \text{ GHz}/1 \text{ ns}$, on trouve ainsi une probabilité de transition de [183] $P = 1 - e^{-2\pi g_0^2/v} = 0.7 \%$ pour un couplage $g/2\pi = 13.5 \text{ MHz}$, alors que la probabilité monte à $\sim 10\%$ pour $g/2\pi = 50 \text{ MHz}$ et $\sim 30\%$ pour $g/2\pi = 100 \text{ MHz}$.

7.5 Résumé des résultats

Dans ce chapitre, grâce à l'intuition développée avec le modèle analytique présenté au chapitre 5, j'ai donné une explication d'un nouveau type de mesure de qubit démontrée expérimentalement par Reed *et al.* [122] et j'ai proposé deux régimes de paramètres dans lesquels des mesures existantes peuvent être améliorées.

Tout d'abord, dans le cas d'un résonateur linéaire avec une mesure dispersive conven-

tionnelle, j'ai montré à la section 7.2 qu'il est possible d'obtenir un meilleur rapport signal-sur-bruit en choisissant la fréquence du résonateur pour qu'elle soit en-dessous des trois premières fréquences de transition du qubit.

Toujours avec un résonateur linéaire, mais en augmentant la puissance de mesure, j'ai montré à la section 7.3 que la fréquence effective du résonateur passe d'un régime où elle est fortement décalée par le qubit (à basse puissance) à un régime où elle rejoint la fréquence naturelle du résonateur (à haute puissance). Si le signal de mesure est résonant avec la fréquence naturelle du résonateur, cette transition est accompagnée d'une très forte augmentation du nombre de photon intra-résonateur, à la manière d'une avalanche. J'ai montré que, grâce à la structure multi-niveau du qubit, la puissance seuil à laquelle se produit cette transition dépend de l'état du qubit, permettant d'expliquer qualitativement les résultats expérimentaux de Reed *et al.* [122].

Enfin, j'ai montré à la section 7.4 qu'un autre régime intéressant pour la mesure est le régime de chevauchement, dans lequel la fréquence du résonateur est située entre deux fréquences de transition du qubit ($\omega_{1,0}$ et $\omega_{2,1}$). Dans ce régime, j'ai montré qu'il est possible d'obtenir une mesure par bifurcation dans un temps de mesure plus faible et avec une probabilité d'erreur plus faible qu'à l'extérieur de ce régime. Ceci est réalisé en utilisant un couplage qubit-résonateur beaucoup plus faible que ceux utilisés dans la majorité des expériences récentes ($g/2\pi \sim 10$ MHz versus 100 MHz). Les avantages et inconvénients de ce choix (couplage plus faible) sont discutés à la section 7.4.3.

Conclusion

Dans cette thèse, j'ai étudié l'électrodynamique quantique en circuit supraconducteur [3]. Plus précisément, j'ai considéré un qubit supraconducteur couplé à un résonateur. J'ai considéré le qubit non pas comme un système à deux niveaux, mais comme un système à plusieurs niveaux, et le résonateur pouvait être non linéaire et a été modélisé comme un oscillateur anharmonique. Les paramètres utilisés pour les résultats présentés sont ceux d'un transmon [89], mais le modèle développé peut se transposer à d'autres types de qubits.

En utilisant différentes méthodes analytiques, telles les transformations unitaires et l'élimination adiabatique, j'ai développé, à partir d'un modèle initial complet, un modèle réduit qui permet de décrire l'ensemble couplé qubit-résonateur comme deux systèmes découplés, le qubit étant décrit par une matrice densité et le résonateur étant décrit par quelques variables complexes. Ce modèle réduit traite de façon non linéaire la dépendance du champ intra-résonateur en fonction de l'état du qubit.

J'ai aussi développé — en collaboration avec Steve Allen, analyste de calcul au Centre de calcul scientifique de l'Université de Sherbrooke et quelques autres membres de notre groupe de recherche — une librairie de calcul numérique efficace et très flexible pour la simulation des expériences d'électrodynamique quantique en circuit. J'ai pu, grâce à cette librairie, réaliser des simulations numériques extensives afin de reproduire des résultats expérimentaux et de tester le modèle réduit.

J'ai comparé les prédictions du modèle réduit et les simulations numériques à des résultats expérimentaux obtenus par l'équipe de qnantronique du CEA-Saclay [75]. Ces résultats expérimentaux consistent en la spectroscopie d'un qubit supraconducteur de type transmon couplé à un résonateur non linéaire pompé. Pour ces résultats, j'ai considéré les régimes de faible et de forte spectroscopie.

Dans le régime de faible spectroscopie, la raie du qubit est décalée en fonction de l'amplitude de la pompe. Ce décalage est un indicateur du nombre de photons à l'intérieur du

résonateur. Pour certains régimes de puissance et de fréquence de pompe, le résonateur est bistable ou bifurque d'un état de faible amplitude à un état de haute amplitude du champ intra-résonateur, ce qui se traduit par un saut de la fréquence du qubit. La largeur de la raie de spectroscopie présente un comportement non-monotone en fonction de la puissance de pompe, augmentant près de la puissance de bifurcation ou de celle où la réponse du résonateur est la plus sensible aux variations de puissance, puis diminuant à plus haute puissance. Cette diminution à haute puissance est contraire au comportement attendu avec un résonateur linéaire, pour lequel la largeur de la raie augmente proportionnellement à la puissance de pompe. En fait, la largeur de la raie du qubit est dominée par le déphasage induit par la mesure [120]. L'amplitude de ce déphasage est déterminée par la distance entre deux états pointeurs du champ électromagnétique correspondant aux deux états du qubit. Alors que cette distance ne fait que croître en fonction de la puissance de mesure pour un résonateur linéaire, elle est piquée pour un résonateur non linéaire. Dans les limites des approximations utilisées, les prédictions du modèle réduit concordent quantitativement avec les résultats des simulations numériques et les résultats expérimentaux. Cela suggère que, dans la limite où les états pointeurs correspondant aux deux états d'un qubit sont des états cohérents, un résonateur non linéaire peut atteindre la limite quantique sur la rétroaction $\Gamma_{\varphi,m} \geq \Gamma_m/2$, où $\Gamma_{\varphi,m}$ est le taux de déphasage induit par la mesure, et Γ_m est le taux de mesure. Je montre finalement que cette concordance nécessite de modéliser la dépendance du champ électromagnétique (selon l'état du qubit) par une réponse non linéaire.

Dans le régime de forte spectroscopie, la raie principale, au-delà de la puissance de bifurcation, est accompagnée de bandes latérales dont l'amplitude diminue lorsque la puissance de pompe augmente. La position de ces raies par rapport à la raie principale est donnée par la fréquence des fluctuations du champ électromagnétique autour de sa valeur moyenne. L'amplitude absolue des raies latérales est déterminée à la fois par le coefficient de compression du champ électromagnétique et par la distance entre les deux états pointeurs. Le ratio de l'amplitude des deux raies latérales est déterminé par le coefficient de compression, et peut ainsi servir comme sonde pour détecter la compression du champ électromagnétique. Dans ce régime, les approximations utilisées pour obtenir le modèle analytique montrent leurs limites, mais le modèle analytique concorde tout de même semi-quantitativement avec les résultats expérimentaux.

Je suggère enfin qu'il est possible d'améliorer deux types de mesure d'un qubit supraconducteurs à plusieurs niveaux en modifiant le décalage entre le résonateur et les

fréquences de transition du qubit. Je montre qu'il est possible d'améliorer une mesure dispersive en positionnant la fréquence du résonateur sous celles du qubit, et d'améliorer une mesure par bifurcation en positionnant la fréquence du résonateur dans un régime dit de chevauchement du qubit. Finalement, j'explique comment les non-linéarités induites dans le résonateur par le qubit — et dépendantes de l'état du qubit — permettent d'expliquer la mesure par avalanche, haute fidélité, monofrappe et haute puissance développée par l'équipe expérimentale de Rob Schoelkopf à l'Université de Yale [122]. Je montre que cette mesure ne fonctionne que si le qubit a plus de deux niveaux et qu'elle est destructive.

Avec la complexification des nouveaux qubits supraconducteurs, il sera de plus en plus difficile de négliger leur aspect multi-niveaux. De même, la bifurcation dépendante de l'état du qubit confère aux résonateurs non linéaires un avantage certain comme appareil de mesure de l'état des qubits supraconducteurs, nécessitant un modèle non linéaire. Le modèle et les outils et méthodes développés et validés quantitativement dans le cadre de cette thèse deviennent ainsi un point de départ précieux pour étudier les expériences futures d'électrodynamique quantique en circuit.

Plusieurs questions demeurent cependant ouvertes. Par exemple, il serait intéressant de savoir si un résonateur non linéaire demeure limité quantiquement dans la limite où les états pointeurs sont significativement comprimés, ou bien si la distance entre les états pointeurs devient importante. Pour trouver la réponse à cette question, il faudrait éliminer ces approximations dans l'obtention du modèle réduit. Il serait aussi intéressant de voir s'il existe d'autres régimes que le régime de chevauchement à exploiter pour la mesure si le couplage qubit-résonateur n'a pas les mêmes règles de sélection que celles supposées dans cette thèse. C'est le cas par exemple d'un nouveau qubit, le « tunable coupling qubit » [94, 95]. On pourrait aussi penser à la possibilité de réaliser une mesure par avalanche dans un régime où le nombre de photons est moins important, afin d'avoir une mesure non seulement haute fidélité et monofrappe, mais aussi non-destructrice. Enfin, il serait intéressant d'étudier la dynamique de la bifurcation du résonateur et d'explorer comment les techniques de contrôle optimal peuvent être utilisées afin d'accélérer celle-ci pour diminuer le temps requis pour réaliser une mesure par bifurcation.

Annexe A

Approximation séculaire

L'approximation séculaire [7] consiste à laisser tomber des fréquences élevées dans le problème. On appelle aussi cette approximation l'approximation du référentiel tournant, ou en anglais, « *rotating wave approximation* » ou RWA. Dans cette annexe, j'explique dans quelle mesure cette approximation est valide. On suppose un hamiltonien de la forme

$$H = \delta a^\dagger a + r_1 (a^\dagger + a) + r_2 (a^\dagger e^{-i\Delta t} + a e^{i\Delta t}), \quad (\text{A.1})$$

où δ et Δ sont des fréquences et r_1 et r_2 sont des constantes quelconques. Dans la représentation d'Heisenberg, l'équation d'évolution pour l'opérateur a est

$$\dot{a}(t) = -i[a, H] = -i\delta a + r_1 + r_2 e^{-i\Delta t}. \quad (\text{A.2})$$

La solution analytique de cette équation est donnée par

$$a(t) = A e^{-i\delta t} - \frac{i r_1}{\delta} + \frac{i r_2}{\Delta - \delta} e^{-i\Delta t}, \quad (\text{A.3})$$

où A est une constante d'intégration. On voit que, si $\Delta \gg \delta$, le dernier terme oscille beaucoup plus rapidement que le premier. Si l'on s'intéresse à des phénomènes dont la constante de temps est plus grande que $1/\Delta$, on peut donc laisser tomber le dernier terme. Si de même $r_1 \gtrsim r_2$, alors le deuxième terme domine le dernier et il est encore justifié de laisser tomber le deuxième.

Un exemple d'utilisation de cette approximation est pour obtenir l'hamiltonien de Jaynes-Cummings. Si l'on passe dans un référentiel où l'on fait tourner le champ à la

fréquence $\omega_m \sim \omega_r$ et l'atome à la fréquence $\omega_c \sim \omega_a$, avec la transformation

$$\mathbb{R} = e^{i(\omega_m a^\dagger a + \omega_c \sigma_z / 2)t}, \quad (\text{A.4})$$

alors l'hamiltonien de Rabi

$$H_{\text{Rabi}} = \omega_r a^\dagger a + \frac{\omega_a}{2} \sigma_z + g(a^\dagger + a) \sigma_x \quad (\text{A.5})$$

devient

$$\begin{aligned} H_{\text{Rabi}}^{\mathbf{R}} &= \Delta_{rm} a^\dagger a + \frac{\Delta_{ac}}{2} \sigma_z + g \left(a^\dagger \sigma_- e^{-i(\omega_m - \omega_c)t} + a \sigma_+ e^{i(\omega_m - \omega_c)t} \right) \\ &+ g \left(a^\dagger \sigma_+ e^{-i(\omega_m + \omega_c)t} + a \sigma_- e^{i(\omega_m + \omega_c)t} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

où $\Delta_{ij} = \omega_i - \omega_j$. L'approximation séculaire nous permet alors de négliger les termes qui oscillent à la fréquence $\omega_m + \omega_c \gg \{\Delta_{rm}, \Delta_{ac}\}$ et d'obtenir l'hamiltonien de Jaynes-Cummings dans l'approximation séculaire et dans le référentiel du laboratoire

$$H_{\text{JC}} = \omega_r a^\dagger a + \frac{\omega_a}{2} \sigma_z + g(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+). \quad (\text{A.7})$$

Annexe B

Obtention de l'équation maîtresse

Dans cette annexe, on veut obtenir l'équation maîtresse à partir de considérations physiques. On suit de près le développement fait dans le chapitre 5 de Ref. [135], mais en l'appliquant spécifiquement au système qui nous intéresse.

B.1 Dérivation générale

On considère un système en contact avec un ou plusieurs bains de chaleur. Dans le cas qui nous intéresse, le système serait composé des modes de la cavité et du qubit, et les bains de chaleurs seraient les modes du champ électromagnétique à l'extérieur de la cavité. On suppose que la situation peut se décrire par l'hamiltonien

$$H = H_{\text{sys}} + H_B + H_{\text{Int}}, \quad (\text{B.1})$$

où les hamiltoniens décrivent respectivement le système, un bain de chaleur, et l'interaction entre le système et le bain. La matrice densité totale R du système couplé au bain obéit à l'équation

$$\dot{R} = -i [H, R]. \quad (\text{B.2})$$

Comme on s'intéresse seulement au système, et non pas au bain, on veut obtenir la matrice densité réduite du système en prenant la trace sur les états du bain

$$\rho(t) = \text{Tr}_B \{R(t)\}. \quad (\text{B.3})$$

B.1.1 Passage dans la représentation d'interaction

Pour simplifier les calculs, il est utile de passer dans la représentation d'interaction. On pose donc

$$R_I(t) = e^{i(H_{\text{sys}} + H_B)t} R(t) e^{-i(H_{\text{sys}} + H_B)t}, \quad (\text{B.4})$$

ce qui implique l'équation du mouvement

$$\dot{R}_I(t) = -i [H_{\text{Int}}(t), R_I(t)], \quad (\text{B.5})$$

$$H_{\text{Int}}(t) = e^{i(H_{\text{sys}} + H_B)t} H_{\text{Int}} e^{-i(H_{\text{sys}} + H_B)t}, \quad (\text{B.6})$$

où l'on a supposé que H_{sys} et H_B ne dépendent pas explicitement du temps. Dans cette représentation, on peut obtenir la matrice densité réduite du système par

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \text{Tr}_B \{ e^{-i(H_{\text{sys}} + H_B)t} R(t) e^{i(H_{\text{sys}} + H_B)t} \} \\ &= e^{-iH_{\text{sys}}t} \rho_I(t) e^{iH_{\text{sys}}t}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\rho_I(t) = \text{Tr}_B \{ R_I(t) \} \quad (\text{B.8})$$

où l'on a utilisé la cyclicité de la trace, le fait que $[H_B, H_{\text{sys}}] = 0$ et que H_B n'est qu'une fonction des opérateurs du réservoir.

B.1.2 Intégration de l'équation du mouvement

On veut maintenant intégrer formellement l'équation du mouvement Eq. (B.5). Pour ce faire, on suppose que le système et le réservoir sont initialement indépendants, de manière à ce que la matrice densité totale au temps $t = 0$ s'écrive

$$R_I(0) = R(0) = \rho(0) \otimes \rho^B. \quad (\text{B.9})$$

On suppose aussi que le réservoir est assez grand pour que ses propriétés statistiques ne soient pas affectées par le système. On peut maintenant intégrer l'équation (B.5) et obtenir, au deuxième ordre

$$R_I(t) = R_I(0) - i \int_0^t dt' [H_{\text{Int}}(t'), R_I(0)] - \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' [H_{\text{Int}}(t'), [H_{\text{Int}}(t''), R_I(t'')]]. \quad (\text{B.10})$$

On dérive cette équation par rapport à t pour obtenir l'équation intégro-différentielle

$$\dot{R}_I(t) = -i [H_{\text{sys}}(t), R_I(0)] - \int_0^t dt' [H_{\text{Int}}(t), [H_{\text{Int}}(t'), R_I(t')]]. \quad (\text{B.11})$$

B.1.3 Trace sur les états du réservoir

On peut maintenant prendre la trace sur les états du réservoir de chaque côté de l'équation (B.11) et obtenir

$$\dot{\rho}_I(t) = - \int_0^t dt' \text{Tr}_B \{ [H_{\text{Int}}(t), [H_{\text{Int}}(t'), R_I(t')]] \}, \quad (\text{B.12})$$

où l'on a supposé que $\text{Tr}_B \{ H_{\text{Int}} R_I(0) \} = 0$. Cette supposition implique que H_{Int} n'a aucun élément de matrice diagonal dans la représentation où H_B est diagonal. Tel que mentionné dans [135], il est toujours possible de redéfinir H_{sys} et H_{Int} pour inclure n'importe quel élément diagonal dans H_{sys} . Cette supposition n'est donc pas très restrictive.

Il est maintenant nécessaire de faire deux autres approximations. L'approximation de couplage faible, aussi appelée l'approximation de Born, suppose que H_{Int} est beaucoup plus faible que H_B ou H_{sys} et que l'état du réservoir n'est pas significativement changé par le système. Dans ce cas, il est raisonnable de remplacer $R_I(t')$ dans Eq. (B.12) par

$$R_I(t') \approx \rho_I(t') \otimes \rho^B. \quad (\text{B.13})$$

Enfin, l'approximation de Markov suppose que les temps de corrélation du réservoir sont beaucoup plus courts que les temps caractéristiques du système. Dans ce cas, on peut supposer que, sur le temps pendant lequel les fonctions de corrélation dans Eq. (B.12) sont appréciables, l'état du système ne change pas. On pose donc $\rho_I(t') = \rho_I(t)$. De plus, pour t beaucoup plus grand que les temps de corrélation du réservoir, on peut mettre la borne inférieure de l'intégrale de Eq. (B.12) à $-\infty$. On obtient alors

$$\dot{\rho}_I = - \int_0^\infty d\tau \text{Tr}_B \{ [H_{\text{Int}}(t), [H_{\text{Int}}(t - \tau), \rho_I(t) \otimes \rho^B]] \}. \quad (\text{B.14})$$

B.2 Application à l'électrodynamique quantique

Soit H_{sys} , l'hamiltonien du système, et S , un opérateur du système tel que

$$e^{iH_{\text{sys}}t} S^{(+)} e^{-iH_{\text{sys}}t} = S^{(+)} e^{-i\omega_s t}. \quad (\text{B.15})$$

L'hamiltonien du système pourrait par exemple être celui de l'atome ou de la cavité et l'opérateur S pourrait être a ou σ_- . On suppose que le système est couplé à un bain d'oscillateurs harmoniques [184] dont l'hamiltonien est

$$H_B = \int_0^\infty \omega b^\dagger(\omega) b(\omega) d\omega, \quad (\text{B.16})$$

où $b^{(\dagger)}(\omega)$ détruit (créé) une oscillation dans le mode de fréquence ω . On écrit alors les états du bain comme

$$\begin{aligned} b^\dagger(\omega') |\omega, n\rangle \otimes |\psi\rangle &= \delta(\omega' - \omega) \sqrt{d(\omega)} \sqrt{n+1} |\omega, n+1\rangle \otimes |\psi\rangle \\ &+ [1 - \delta(\omega' - \omega)] |\omega, n\rangle \otimes b^\dagger(\omega') |\psi\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.17a})$$

$$\begin{aligned} b(\omega') |\omega, n\rangle \otimes |\psi\rangle &= \delta(\omega - \omega') \sqrt{d(\omega)} \sqrt{n} |\omega, n-1\rangle \otimes |\psi\rangle \\ &+ [1 - \delta(\omega' - \omega)] |\omega, n\rangle \otimes b(\omega') |\psi\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.17b})$$

où $d(\omega)$ est la densité de modes du bain à la fréquence ω et $|\psi\rangle$ représente l'état du bain excluant le mode de fréquence ω . On voit que, si $\omega' = \omega$, une excitation est ajoutée dans le mode de fréquence ω et le reste de l'état du bain n'est pas touché. On est donc dans une notation où les fréquences sont continues, mais le nombre d'occupation de chaque mode est discret. Les états de chaque mode ω sont orthogonaux entre eux. Ces états ont les relations de fermeture et d'orthonormalité suivantes

$$\mathbf{1} = \sum_n \int_0^\infty d(\omega) d\omega |\omega, n\rangle \langle \omega, n|, \quad (\text{B.18a})$$

$$\langle \omega, n | \omega', n' \rangle = \frac{1}{d(\omega)} \delta(\omega - \omega') \delta_{n, n'}. \quad (\text{B.18b})$$

On peut écrire l'hamiltonien d'interaction entre le système et le bain comme

$$H_I = \int_0^\infty (f^*(\omega) b^\dagger(\omega) S + f(\omega) b(\omega) S^\dagger) \sqrt{d(\omega)} d\omega. \quad (\text{B.19})$$

On passe maintenant en représentation d'interaction en appliquant la transformation $e^{i(H_B + H_{\text{sys}})t}$ sur l'hamiltonien d'interaction. On obtient

$$H_{\text{Int}} = A^\dagger(t)S e^{-i\omega_s t} + A(t)S^\dagger e^{i\omega_s t}. \quad (\text{B.20a})$$

$$A^\dagger(t) = \int_0^\infty f^*(\omega) b^\dagger(\omega) e^{i\omega t} \sqrt{d(\omega)} d\omega. \quad (\text{B.20b})$$

où l'on a introduit les opérateurs $A^{(\dagger)}(t)$ pour simplifier la notation. On peut maintenant appliquer l'équation Eq. (B.14) avec cet hamiltonien d'interaction.

Pour simplifier les calculs, on suppose que les corrélations du type $\langle A(t)A(t-\tau) \rangle$ et $\langle A^\dagger(t)A^\dagger(t-\tau) \rangle$ sont toutes nulles. Cette supposition est vérifiée entre autres pour un état thermique. On obtient alors, pour l'équation maîtresse pour le système

$$\dot{\rho}_I = [(C_2 + C_3)S\rho_I S^\dagger - C_3 S^\dagger S\rho_I - C_2 \rho_I S^\dagger S] - [(C_1 + C_4)S^\dagger \rho_I S - C_1 S S^\dagger \rho_I - C_4 \rho_I S S^\dagger], \quad (\text{B.21})$$

avec les fonctions de corrélation

$$C_1 = \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega_s \tau} \text{Tr}_B \{ A^\dagger(0)A(\tau)\rho^B \}, \quad (\text{B.22})$$

$$C_2 = \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega_s \tau} \text{Tr}_B \{ A(\tau)A^\dagger(0)\rho^B \}, \quad (\text{B.23})$$

$$C_3 = \int_0^\infty d\tau e^{i\omega_s \tau} \text{Tr}_B \{ A(0)A^\dagger(\tau)\rho^B \}, \quad (\text{B.24})$$

$$C_4 = \int_0^\infty d\tau e^{i\omega_s \tau} \text{Tr}_B \{ A^\dagger(\tau)A(0)\rho^B \}. \quad (\text{B.25})$$

Pour obtenir ce résultat, on a supposé que le réservoir n'est pas affecté par la présence du système, et qu'il est dans un état stationnaire, de sorte que les corrélations ne dépendent pas de t , mais seulement de τ . En d'autres termes, on a posé $\text{Tr}_B \{ A^\dagger(t)A(t-\tau)\rho^B \} = \text{Tr}_B \{ A^\dagger(0)A(\tau)\rho^B \}$.

On suppose maintenant que le réservoir est dans un état thermique. Sa matrice densité est alors donnée par

$$\rho^B = \sum_n \int_0^\infty P(\omega, n) d\omega |\omega, n\rangle \langle \omega, n|, \quad (\text{B.26})$$

où $P(\omega, n)$ est la densité de probabilité de trouver n excitations dans un intervalle infinitésimal autour de ω dans un état thermique.

On peut alors écrire la fonction de corrélation C_1 comme

$$C_1 = \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega_s \tau} \int_0^\infty \sqrt{d(\omega)} d\omega \int_0^\infty \sqrt{d(\omega')} d\omega' f^*(\omega) f(\omega') e^{i\omega' \tau} \text{Tr}_B \{ b^\dagger(\omega) b(\omega') \rho^B \}. \quad (\text{B.27})$$

La trace sur les états du réservoir donne

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B \{ b^\dagger(\omega) b(\omega') \rho^B \} &= \sum_{n_1, n_2} \int_0^\infty d\omega_1 \int_0^\infty d\omega_2 d(\omega_2) \langle \omega_2, n_2 | b^\dagger(\omega) b(\omega') P(\omega_1, n_1) | \omega_1, n_1 \rangle \\ &\quad \times \langle \omega_1, n_1 | \omega_2, n_2 \rangle \\ &= \sum_{n_1, n_2} \int_0^\infty d\omega_1 \int_0^\infty d\omega_2 d(\omega_2) P(\omega_1, n_1) \frac{\delta(\omega_1 - \omega_2) \delta_{n_1, n_2}}{d(\omega_1)} \\ &\quad \times \langle \omega_2, n_2 | b^\dagger(\omega) b(\omega') | \omega_1, n_1 \rangle \\ &= \sum_{n_1} \int_0^\infty d\omega_1 P(\omega_1, n_1) n_1(\omega_1) \delta(\omega - \omega_1) \delta(\omega' - \omega_1) \\ &= \bar{n}(\omega) \delta(\omega - \omega'), \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

où $\bar{n}(\omega) = 1/[\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]$ est le nombre moyen d'excitations dans le réservoir à la fréquence ω , et $n_1(\omega_1)$ est la population de l'état $|\omega, n_1\rangle$ à la fréquence ω .

On peut aussi faire l'intégrale sur τ ,

$$\int_0^\infty e^{-i(\omega_s - \omega')\tau} d\tau = \pi \delta(\omega_s - \omega') - i\mathbf{P} \frac{1}{\omega_s - \omega'}, \quad (\text{B.29})$$

où \mathbf{P} est la partie principale. On obtient alors pour la fonction de corrélation

$$\begin{aligned} C_1 &= \pi \int_0^\infty \sqrt{d(\omega)} d\omega \sqrt{d(\omega_s)} f^*(\omega) f(\omega_s) \bar{n}(\omega) \delta(\omega - \omega_s) + iC_{1I} \\ &= \pi d(\omega_s) |f(\omega_s)|^2 \bar{n}(\omega_s) + iC_{1I}. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

De la même façon, on peut calculer les autres fonctions de corrélation et obtenir

$$C_4 = C_1^* \quad (\text{B.31a})$$

$$C_2 = C_3^* = \pi d(\omega_s) |f(\omega_s)|^2 (\bar{n}(\omega_s) + 1) - iC_{3I}. \quad (\text{B.31b})$$

Dans ces équations, C_{1I} et C_{3I} sont les intégrales des termes qui dépendent des parties

principales. En posant $\gamma_s = 2\pi d(\omega_s) |f(\omega_s)|^2$, on obtient alors l'équation du mouvement

$$\dot{\rho}_I = -iC_{3I} [S^\dagger S, \rho_I] + iC_{1I} [SS^\dagger, \rho_I] + \gamma_s [\bar{n}(\omega_s) + 1] \mathcal{D}[S] \rho_I + \gamma_s [\bar{n}(\omega_s)] \mathcal{D}[S^\dagger] \rho_I, \quad (\text{B.32})$$

avec $\mathcal{D}[L]\rho = (2L\rho L^\dagger - L^\dagger L\rho - \rho L^\dagger L)/2$. Si l'hamiltonien du système est une fonction de $S^\dagger S$ et de SS^\dagger , les parties imaginaires des fonctions de corrélation agissent comme des décalages de fréquence. Puisque, expérimentalement, on ne contrôle pas le couplage au bruit, il est impossible de les dissocier des fréquences du système en l'absence de bruit. On absorbe donc généralement ces fréquences dans les fréquences du système, à la manière du décalage de Lamb. On a alors l'équation maîtresse

$$\dot{\rho}_I = \gamma_s [\bar{n}(\omega_s) + 1] \mathcal{D}[S] \rho_I + \gamma_s [\bar{n}(\omega_s)] \mathcal{D}[S^\dagger] \rho_I. \quad (\text{B.33})$$

On peut appliquer directement ce résultat au qubit et à la cavité. Avec l'hamiltonien du qubit $H = \omega_a \sigma_z / 2$ et $S = \sigma_-$, on a alors $e^{iHt} \sigma_- e^{-iHt}$, et donc

$$\dot{\rho}_I = \gamma [\bar{n}(\omega_a) + 1] \mathcal{D}[\sigma_-] \rho_I + \gamma [\bar{n}(\omega_a)] \mathcal{D}[\sigma_+] \rho_I, \quad (\text{B.34})$$

avec $\gamma = 2\pi d_\gamma(\omega_a) |f_\gamma(\omega_a)|^2$, où d_γ et f_γ sont la densité de modes du bain couplé au qubit et la force du couplage entre les deux. De la même façon, pour la cavité, avec $H = \omega_r a^\dagger a$ et $S = a$, on obtient

$$\dot{\rho}_I = \kappa [\bar{n}(\omega_r) + 1] \mathcal{D}[a] \rho_I + \kappa [\bar{n}(\omega_r)] \mathcal{D}[a^\dagger] \rho_I, \quad (\text{B.35})$$

où $\kappa = 2\pi d_\kappa(\omega_r) |f_\kappa(\omega_r)|^2$, où d_κ et f_κ sont la densité de modes du bain couplé à la cavité et la force du couplage entre les deux.

Si l'on suppose maintenant une température nulle pour les deux réservoirs, le nombre d'excitations est alors zéro. En supposant que le qubit et la cavité forment deux systèmes indépendants, l'équation maîtresse pour la matrice densité du système combiné se réduit alors à

$$\dot{\rho}_I = \kappa \mathcal{D}[a] \rho_I + \gamma \mathcal{D}[\sigma_-] \rho_I. \quad (\text{B.36})$$

On peut alors revenir en représentation de Schrödinger et obtenir

$$\dot{\rho} = -i [H_{\text{sys}}, \rho] + \kappa \mathcal{D}[a] \rho + \gamma \mathcal{D}[\sigma_-] \rho. \quad (\text{B.37})$$

Annexe C

Dépendance temporelle d'une transformation unitaire

Le but de cette annexe est d'obtenir une forme compacte pour l'expression $\dot{U}^\dagger U$, où $U = e^U$ et $U^\dagger = -U$. Pour ce faire, on commence par calculer l'expression $\frac{d}{dt} [e^{U(t)}] e^{-U(t)}$ que l'on peut développer en série

$$\frac{d}{dt} [e^{U(t)}] e^{-U(t)} = \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{d}{dt} (U^l) \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} U^k \right] \quad (\text{C.1})$$

où j'ai utilisé la distributivité de la dérivée. On peut ensuite dériver le produit en introduisant une autre somme

$$\frac{d}{dt} [e^{U(t)}] e^{-U(t)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{l!k!} \sum_{i=0}^{l-1} U^i \dot{U} U^{l-1-i+k} \quad (\text{C.2})$$

On utilise ensuite la propriété des sommes infinies

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(l, k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k f(l, k-l) \quad (\text{C.3})$$

pour réécrire

$$\frac{d}{dt} [e^{U(t)}] e^{-U(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^k \sum_{i=0}^{l-1} \frac{(-1)^{(k-l)}}{l!(k-l)!} U^i \dot{U} U^{k-1-i} \right]. \quad (\text{C.4})$$

On inverse ensuite l'ordre des deux dernières sommes avec l'identité

$$\sum_{l=0}^k \sum_{i=0}^{l-1} a_{i,l} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{l=i+1}^k a_{i,l}, \quad (\text{C.5})$$

pour obtenir

$$\frac{d}{dt} [e^{U(t)}] e^{-U(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{l=i+1}^k \frac{(-1)^{(k-l)}}{l!(k-l)!} U^i \dot{U} U^{k-1-i} \right], \quad (\text{C.6})$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{d}{dt} [e^{U(t)}] e^{-U(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{k-1} U^i \dot{U} U^{k-1-i} \left(\sum_{l=i+1}^k \frac{(-1)^{(k-l)}}{l!(k-l)!} \right) \right]. \quad (\text{C.7})$$

On peut alors calculer la dernière somme

$$\sum_{l=i+1}^k \frac{(-1)^{(k-l)}}{l!(k-l)!} = \frac{-(-1)^{k-i}}{k(i!)(k-i-1)!} = \frac{(-1)^{k-i-1}(k-1)!}{k!(k-i-1)!i!}. \quad (\text{C.8})$$

On obtient alors

$$\frac{d}{dt} [e^{U(t)}] e^{-U(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \frac{(k-1)!}{(k-1-i)!i!} U^i \dot{U} U^{k-1-i} \right]. \quad (\text{C.9})$$

Or, on peut aussi montrer en développant le commutateur d'ordre k que

$$C_U^k \dot{U} = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i} k!}{(k-i)!i!} U^i \dot{U} U^{k-i}. \quad (\text{C.10})$$

Ainsi, en combinant les deux dernières équations, on a montré que

$$\frac{d}{dt} [e^{U(t)}] e^{-U(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} C_U^{k-1} \dot{U} = C_U^{-1} (e^{C_U \dot{U}}). \quad (\text{C.11})$$

Un corollaire est que

$$C_U \left(\frac{d}{dt} e^U \right) = \left[U, \frac{d}{dt} e^U \right] = e^U \dot{U}. \quad (\text{C.12})$$

Ce corollaire peut être démontré avec la relation d'Hausdorff (3.2),

$$\mathcal{C}_U \left\{ \frac{d}{dt} [e^{U(t)}] e^{-U(t)} \right\} = e^U \dot{U} e^{-U}. \quad (\text{C.13})$$

Comme U commute avec e^{-U} , on en déduit le corollaire ci-dessus.

Pour une transformation unitaire \mathbb{U} , on peut en déduire que

$$\dot{\mathbb{U}}^\dagger(t) \mathbb{U}(t) = \frac{d}{dt} (e^{-\mathbb{U}(t)}) e^{\mathbb{U}(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mathcal{C}_{\mathbb{U}}^{k-1} \dot{\mathbb{U}}. \quad (\text{C.14})$$

Comme $\mathbb{U}^\dagger = -\mathbb{U}$, on peut calculer le conjugué hermitique en utilisant

$$(\mathcal{C}_{\mathbb{U}} X)^\dagger = (-\mathcal{C}_{\mathbb{U}^\dagger} X^\dagger) = \mathcal{C}_{\mathbb{U}} X^\dagger, \quad (\text{C.15})$$

pour obtenir

$$\mathbb{U}(t) \dot{\mathbb{U}}^\dagger(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mathcal{C}_{\mathbb{U}}^{k-1} \dot{\mathbb{U}} = -\dot{\mathbb{U}}^\dagger(t) \mathbb{U}(t). \quad (\text{C.16})$$

Annexe D

Exemple d'un code avec *SQUACK*

Code D.1 – demo/demo_exe_simple.cpp

```
1 #include "matrix.h"
2 #include "systemfactories.h"
3 #include "utilities.h"
4 #include <iostream>
5 using namespace std;
6 int main() {
7     GenericParameterFileInterface gpf("param_simple.dat");
8     double wa = gpf.GetParam<double>("wa");
9     double wr = gpf.GetParam<double>("wr");
10    vector<int> ho_bounds = gpf.GetVector<int>("ho_bounds");
11    complex<double> g = gpf.GetParam<complex<double> >("g");
12    vector<double> interval_bounds = gpf.GetVector<double>("interval_bounds");
13    double gphi = gpf.GetParam<double>("gphi");
14    double gamma = gpf.GetParam<double>("gamma");
15    double nth = gpf.GetParam<double>("nth");
16    HarmonicOscillatorFactory ho(ho_bounds[0],ho_bounds[1]);
17    TwoLevelSystemFactory tls;
18    DSDGMatrix idho = ho.Identity(), id2 = tls.Identity();
19    DSDGMatrix sz = idho^tls.operator_sz();
20    DSDGMatrix sm = idho^tls.operator_sm();
21    DSDGMatrix sp = idho^tls.operator_sp();
22    DSDGMatrix ad = ho.operator_ad()^id2;
23    DSDGMatrix N = ho.operator_N()^id2;
24    DSDGMatrix H_L0 = wa/2.0*sz + wr*N;
25    ZSDGMatrix H_LI = g*(ad*sm)+conj(g)*(ad*sm).dagger();
26    ZDUHMatrix rho = ho.rho_state_fock(0)^tls.rho_state_e();
```

```

27
28 //solving for the stationary state
29 ZSDGMatrix slinblad = shamiltonian(H_L0+H_LI) + gphi/2*sdissipation(sz);
30 slinblad += gamma*(nth+1)*sdissipation(sm);
31 slinblad += gamma*(nth)*sdissipation(sp);
32 ZDUHMatrix rho_stationnary = ZDFGMatrix(slinblad).singularState(0);
33
34 //building a master equation
35 MasterEquation ME(ho.getSize()*tls.getSize());
36 ME.addHamiltonian(1.0,H_L0);
37 ME.addHamiltonian(1.0,H_LI);
38 ME.addDissipator(gphi/2,sz,idho^id2);
39 ME.addDissipator(gamma*(nth+1),sm,sp*sm);
40 ME.addDissipator(gamma*(nth),sp,sm*sp);
41 //solving the master equation
42 double t = interval_bounds[0], tf = interval_bounds[1]. tk = t, intervalsize = 0.01, stepsize =
    1.0e-3;
43 while (t < tf) {
44     tk += intervalsize;
45     evolveSystem(t,tk, stepsize , rho,&ME);
46     cout << t << "\t" << trace(rho,sz).real() << "\t" << trace(rho,N).real() << "\t" << trace(
        rho_stationnary,sz).real() << "\t" << trace(rho_stationnary,N).real() << endl;
47 }
48
49 //compute the eigenstates and eigenenergies of the Hamiltonian
50 ZDFGMatrix eigenvecs;
51 DSDGMatrix eigenvals;
52 (H_L0+H_LI).eigensystem(eigenvals,eigenvecs);
53 cout << eigenvals << endl << eigenvecs << endl;
54
55 //compute two-times correlation function for sm(t) sp(0)
56 int ntimes = 100;
57 double times[ntimes];
58 for (int i=0; i<ntimes; i++) times[i] = i*0.003;
59 complex<double> output_array[ntimes];
60 computeTwoTimesCorrelationFunction(ntimes,times,1e-5,sm,sp,rho,&ME,output_array);
61
62 //compute the Q and Wigner function for a density matrix
63 Grid2D<double> grid;
64 grid.xmin = -5.0;
65 grid.xmax = 5.0;

```

```
66  grid.xstep = 0.05;
67  grid.ymin = -5.0;
68  grid.ymax = 5.0;
69  grid.ystep = 0.05;
70  vector<vector<Point3D> > F;
71  computeQFunction(F,ho,ho.rho_state_fock(1),grid);
72  computeWignerFunction(F,ho,ho.rho_state_fock(1),grid);
73 }
```

Index

- algorithmes, 12
- amplificateur Josephson à bifurcation, 30
- amplificateur Josephson paramétrique, 29
- amplification, 44
 - limite quantique standard, 44
 - limite sur la rétroaction, 45
 - limites, 44, 45
- approximation
 - adiabatique, 68
 - bandes latérales résolues, 70, 143
 - de Born-Markov, 56, 178
 - de bruit blanc, 94
 - de faible compression, 97
 - de faible distinguabilité, 98, 102
 - polaron, 97
 - réponse linéaire, 131
 - séculaire, 60, 100, 102, 104, 110, 174
- architectures, 13
 - atomes froids, 14
 - électrodynamique quantique en cavité, 15
 - électrodynamique quantique en circuit, voir électrodynamique quantique en circuit
 - microfabrication, 15
 - optique linéaire, 13
 - optique quantique en cavité, voir électrodynamique quantique (en cavité)
 - points quantiques, 15
 - qubits supraconducteurs, voir qubits supraconducteurs
 - résonance magnétique nucléaire, 14
 - RMN, 14
 - trappes à ions, 14
- bandes latérales, 136, 138
- boîte de Cooper, 32
- calcul quantique, 4, 10
 - algorithmes, 12
 - Grover (de), 13
 - Shor (de), 12
 - simulation de systèmes physiques, 12
 - correction d'erreur, 12
 - critères
 - de DiVincenzo, 11
 - porte
 - à deux qubits, 11
 - à un qubit, 11
 - logique quantique, 10
 - qubit, 5
- champ électromagnétique, 16
 - états, 18
 - état cohérent, 19
 - état comprimé, 19
 - état de Fock, 18
 - excitation, 18
 - représentations, 20
 - fonction Q, 21
 - matrice densité, 20
- chauffage quantique, 142
- coefficient de compression, 112, 142
- correction d'erreur, 12
- couplage de deux qubits, 41
- décalage de Lamb, 38
- décalage de Stark, 38, 125
- décalage dispersif, 38
- déphasage habillé, 47, 105, 127
- déphasage induit par la mesure, 45, 98, 105, 128

- détecteur échantillonneur bloqueur, 30
- détecteur *sample-and-hold*, 30
- dissipateur, 25
- DiVincenzo, critères de, 11
- effet Purcell, 107, 109, 128, 168
- électrodynamique quantique en circuit
 - mesure, 42
 - réalisations, 39
 - clivage de nombre, 39
 - états arbitraires du champ EM, 40
 - extensibilité, 41
 - implémentation d'algorithmes, 41
 - processeur quantique, 41
 - temps de cohérence, 42
 - temps de relaxation, 42
 - régime dispersif, 37
- entassement spectral, 169
- équation maîtresse, 24
- états arbitraires du champ électro-magnétique, 40
- expérience de Saclay, 119
 - faible amplitude de spectroscopie, 121
 - forte amplitude de spectroscopie, 135
- extensibilité, 41
- fidélité, 49
- fonction Q, 21
- Hamiltonien
 - atome, 23
 - excitation, 18
 - interaction atome-champ électromagnétique, 23
 - Jaynes-Cummings, 24
 - Rabi, 23
 - résonateur, 17
- implémentation d'algorithmes, 41
- information quantique, voir calcul quantique
- informatique quantique, voir calcul quantique
- interaction lumière-matière, 22
- Landau-Zener-Stuckelberg, 169
- largeurs de raie, 130
- limite quantique standard, 44
- matrice densité, 20
- mesure
 - d'un qubit supraconducteur, 145
 - en couplage faible, 167
 - faible puissance, 147
 - forte puissance, 152
 - par avalanche, 152
 - par bifurcation, 160
 - régime de chevauchement, 160
 - structure à plusieurs niveaux, 146
 - dispersive, 46
 - faible, 9
 - forte, 8
 - hétérodyne, 43
 - homodyne, 43
 - monofrappe, 9
 - non-destructrice, 9
 - par avalanche, 152
 - par bifurcation, 48, 160
 - projective, 8
 - QND, 9
 - quantique, 7
 - quantique non-destructrice, 9
- méthodes analytiques, 52
 - élimination adiabatique, 65, 114
 - théorème de régression quantique, 71, 115
 - transformations unitaires, 53, 54
 - dépendance temporelle, 54
 - déplacement, 57
 - dispersive, 60
 - dispersive classique, 62, 101
 - dispersive quantique, 61, 107
 - polaron, 59, 97
 - squeezon, 63, 111
- modèle initial, 92
- modèle réduit, 91
 - bandes latérales, 105, 111, 136, 138
 - décalage de Lamb, 107

- décalage de Stark, 97, 102, 125
- déphasage habillé, 105
- déphasage induit par la mesure, 98
- déphasage induit par la mesure habillé, 105
- effet Purcell, 107
- élimination adiabatique du résonateur, 114
- largeurs de raie, 130
- modèle initial, 92
- ordre des transformations, 94
- relaxation habillée, 105
- relaxation Purcell, 107
- sous-espace à deux niveaux, 109
- spectre analytique du qubit, 116, 121, 136
- transformation de polaron, 97
- transformation de squeezeon, 111
- transformation dispersive classique, 101
- transformation dispersive quantique, 107
- porte logique, voir calcul quantique
- Purcell, effet, 107, 109, 128, 168
- Q, fonction, 21
- quantique
 - algorithmes, 12
 - bit, 5
 - calcul, voir calcul quantique
 - électrodynamique (en cavité), 15
 - électrodynamique (en circuit), voir électrodynamique quantique en circuit
 - information, voir calcul quantique
 - informatique, voir calcul quantique
 - mesure, voir mesure quantique
- quasi-énergies, 140
- qubit, 5
 - implémentation, 6
- qubits supraconducteurs
 - boîte de Cooper, 32
 - transmon, 32
- régime de chevauchement, 161
- régime dispersif, 37
- réponse linéaire, 59, 96
- réponse linéaire, 129
 - limites de validité, 132
- résonateur coplanaire, 27
- résonateur non linéaire, 28
- Sherbrooke Quantum Package, voir SQUACK
- simulation de systèmes physiques, 12
- sonde du résonateur
 - clivage de nombre, 39
- sonde du résonateur par le qubit, 119
- spectres du qubit, 121
- SQUACK, 73
 - dépendances, 79
 - exemples, 85
 - diagonalisation, 89
 - état stationnaire, 85
 - évolution temporelle, 86
 - fonction de Wigner, 90
 - fonction Q, 90
 - fonctions de corrélation à deux temps, 89
 - redimensionnement dynamique de l'espace d'Hilbert, 88
 - généralités, 77
 - lecture de fichiers, 84
 - modules, 80
 - manufacture de systèmes, 82
 - matrices, 80
 - utilitaires, 83
 - opérations mathématiques de base, 80
 - structure, 77
- super-opérateur, 25
- temps de cohérence et de relaxation, 42
- test unitaire, 78
- transformation unitaire
 - hamiltonien, 55
 - ket, 54
 - matrice densité, 54
 - opérateur, 54
- transmon, 32

Bibliographie

- [1] R. Landauer. The physical nature of information. *Physics Letters A* **217**(4-5), 188–193 (1996).
- [2] Maxime Boissonneault. Effets non-linéaires et qualité de la mesure en électrodynamique quantique en circuit. Mémoire de Maîtrise, Université de Sherbrooke, (2007).
- [3] Alexandre Blais, Ren-Shou Huang, Andreas Wallraff, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits : An architecture for quantum computation. *Phys. Rev. A* **69**(6), 062320 (2004).
- [4] M.A. Nielsen et I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, (2000).
- [5] W. K. Wootters et W. H. Zurek. A single quantum cannot be cloned. *Nature* **299**(5886), 802–803 (1982).
- [6] John Preskill. Notes du cours *Quantum Computation*. Disponibles en ligne, (2011).
- [7] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu et Frank Laloe. *Quantum Mechanics*. Wiley-Interscience, (2006).
- [8] D. Deutsch. Quantum computational networks. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **425**(1868), 73–90 (1989).
- [9] Robert Raussendorf, Daniel E. Browne et Hans J. Briegel. Measurement-based quantum computation on cluster states. *Phys. Rev. A* **68**(2), 022312 (2003).
- [10] Richard Jozsa. An introduction to measurement based quantum computation. quant-ph/0508124v2, (2005).
- [11] Edward Farhi, Jeffrey Goldstone. Sam Gutmann et Michael Sipser. Quantum computation by adiabatic evolution. quant-ph/0001106v1, (2000).
- [12] Dorit Aharonov, Wim van Dam, Julia Kempe, Zeph Landau, Seth Lloyd et Oded Regev. Adiabatic quantum computation is equivalent to standard quantum computation. *SIAM JOURNAL OF COMPUTING* **37**, 166 (2007).
- [13] David P. DiVincenzo. Two-bit gates are universal for quantum computation. *Phys. Rev. A* **51**(2), 1015–1022 (1995).
- [14] David P. DiVincenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte der Physik* **48**(9-11), 771–783 (2000).

- [15] Daniel Gottesman et Isaac L. Chuang. Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations. *Nature* **402**(6760), 390–393 (1999).
- [16] Peter W. Shor. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Phys. Rev. A* **52**(4), R2493–R2496 (1995).
- [17] Panos Aliferis, Daniel Gottesman et John Preskill. Quantum accuracy threshold for concatenated distance-3 codes. quant-ph/0504218v3, (2005).
- [18] E. Knill. Quantum computing with realistically noisy devices. *Nature* **434**, 39–44 (2004).
- [19] R. Raussendorf, J. Harrington et K. Goyal. Topological fault-tolerance in cluster state quantum computation. *New Journal of Physics* **9**(6), 199 (2007).
- [20] Richard Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics* **21**, 467–488 (1982).
- [21] Peter W. Shor. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. *SIAM Journal on Computing* **26**(5), 1484–1509 (1997). quant-ph/9508027v2.
- [22] Lieven M. K. Vandersypen, Matthias Steffen, Gregory Breyta, Costantino S. Yannoni, Mark H. Sherwood et Isaac L. Chuang. Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. *Nature* **414**(6866), 883–887 (2001).
- [23] Ronald L. Rivest, Adi Shamir et Leonard M. Adleman. Cryptographic communications system and method. Brevet U.S. 4405829 (1983).
- [24] Lov K. Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. Dans *Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, 212–219, (1996). quant-ph/9605043v3.
- [25] L. DiCarlo, J. M. Chow, J. M. Gambetta, Lev S. Bishop, B. R. Johnson, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, L. Frunzio, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Demonstration of two-qubit algorithms with a superconducting quantum processor. *Nature* **460**(7252), 240–244 (2009).
- [26] Stephen Jordan. Quantum algorithm zoo. <http://math.nist.gov/quantum/zoo/>, (2011).
- [27] Andrew M. Childs et Wim van Dam. Quantum algorithms for algebraic problems. *Rev. Mod. Phys.* **82**(1), 1–52 (2010).
- [28] Pieter Kok, W. J. Munro, Kae Nemoto, T. C. Ralph, Jonathan P. Dowling et G. J. Milburn. Linear optical quantum computing with photonic qubits. *Rev. Mod. Phys.* **79**(1), 135–174 (2007).
- [29] E. Knill, R. Laflamme et G. J. Milburn. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature* **409**(6816), 46–52 (2001).

- [30] D. Stick, W. K. Hensinger, S. Olmschenk, M. J. Madsen, K. Schwab et C. Monroe. Ion trap in a semiconductor chip. *Nat. Phys.* **2**(1), 36–39 (2006).
- [31] C.S. Adams et E. Riis. Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Progress in Quantum Electronics* **21**(1), 1 – 79 (1997).
- [32] William D. Phillips. Nobel lecture : Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Rev. Mod. Phys.* **70**(3), 721–741 (1998).
- [33] Claude N. Cohen-Tannoudji. Nobel lecture : Manipulating atoms with photons. *Rev. Mod. Phys.* **70**(3), 707–719 (1998).
- [34] Thomas Monz, Philipp Schindler, Julio T. Barreiro, Michael Chwalla, Daniel Nigg, William A. Coish, Maximilian Harlander, Wolfgang Hänsel, Markus Hennrich et Rainer Blatt. 14-qubit entanglement : Creation and coherence. *Phys. Rev. Lett.* **106**(13), 130506 (2011).
- [35] L. M. K. Vandersypen et I. L. Chuang. NMR techniques for quantum control and computation. *Rev. Mod. Phys.* **76**(4), 1037–1069 (2005).
- [36] S. L. Braunstein, C. M. Caves, R. Jozsa, N. Linden, S. Popescu et R. Schack. Separability of very noisy mixed states and implications for nmr quantum computing. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1054–1057 (1999).
- [37] N. C. Menicucci et Carlton M. Caves. Local realistic model for the dynamics of bulk-ensemble nmr information processing. *Phys. Rev. Lett.* **88**(16), 167901 (2002).
- [38] R. Hanson, L. P. Kouwenhoven, J. R. Petta, S. Tarucha et L. M. K. Vandersypen. Spins in few-electron quantum dots. *Rev. Mod. Phys.* **79**(4), 1217–1265 (2007).
- [39] Yuriy Makhlin, Gerd Schön et Alexander Shnirman. Quantum-state engineering with josephson-junction devices. *Rev. Mod. Phys.* **73**(2), 357–400 (2001).
- [40] M. H. Devoret, A. Wallraff et J. M. Martinis. Superconducting Qubits : A Short Review. cond-mat/0411174v1, (2004).
- [41] Steve M. Girvin. Superconducting qubits and circuits : Artificial atoms coupled to microwave photons. École d’été Les Houches 2011, à paraître dans Oxford University Press, (2011).
- [42] Sergio M. Dutra. *Cavity Quantum Electrodynamics : The Strange Theory of Light in a Box*. Wiley-Interscience, (2004).
- [43] J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, R. Miller, J. R. Buck, A. Kuzmich et H. J. Kimble. Deterministic generation of single photons from one atom trapped in a cavity. *Science* **303**(5666), 1992–1994 (2004).
- [44] A. D. Boozer, A. Boca, R. Miller, T. E. Northup et H. J. Kimble. Reversible state transfer between light and a single trapped atom. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 193601 (2007).
- [45] P. Bertet, S. Osnaghi, P. Milman, A. Auffeves, P. Maioli, M. Brune, J. M. Raimond et S. Haroche. Generating and probing a two-photon fock state with a single atom in a cavity. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 143601 (2002).

- [46] M. Brune, J. Bernu, C. Guerlin, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, I. Dotsenko, J. M. Raimond et S. Haroche. Process tomography of field damping and measurement of fock state lifetimes by quantum nondemolition photon counting in a cavity. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 240402 (2008).
- [47] J. M. Raimond, M. Brune et S. Haroche. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Rev. Mod. Phys.* **73**(3), 565–582 (2001).
- [48] M. Saffman, T. G. Walker et K. Mølmer. Quantum information with Rydberg atoms. *Rev. Mod. Phys.* **82**(3), 2313–2363 (2010).
- [49] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey, (1999).
- [50] M.O. Scully et M. Suhail Zubairy. *Quantum optics*. Cambridge University Press, Cambridge, (1997).
- [51] B. T. H. Varcoe, S. Brattke, M. Weidinger et H. Walther. Preparing pure photon number states of the radiation field. *Nature* **403**(6771), 743–746 (2000).
- [52] A. A. Houck, D. I. Schuster, J. M. Gambetta, J. A. Schreier, B. R. Johnson, J. M. Chow, L. Frunzio, J. Majer, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Generating single microwave photons in a circuit. *Nature* **449**, 328 (2007).
- [53] Max Hofheinz, E. M. Weig, M. Ansmann, Radoslaw C. Bialczak, Erik Lucero, M. Neeley, A. D. O’Connell, H. Wang, John M. Martinis et A. N. Cleland. Generation of fock states in a superconducting quantum circuit. *Nature* **454**(7202), 310–314 (2008).
- [54] Clement Sayrin, Igor Dotsenko, Xingxing Zhou, Bruno Peaudecerf, Theo Rybarczyk, Sebastien Gleyzes, Pierre Rouchon, Mazyar Mirrahimi, Hadis Amini, Michel Brune, Jean-Michel Raimond et Serge Haroche. Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states. *Nature* **477**(7362), 73–77 (2011).
- [55] Wolfgang P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley-VCH, 1 edition, (2001).
- [56] D.F. Walls et G.J. Milburn. *Quantum optics*. Springer-Verlag, Berlin, (1995).
- [57] I. I. Rabi. On the process of space quantization. *Phys. Rev.* **49**(4), 324–328 (1936).
- [58] I. I. Rabi. Space quantization in a gyrating magnetic field. *Phys. Rev.* **51**(8), 652–654 (1937).
- [59] E. T. Jaynes et F. W. Cummings. Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theories with Application to the Beam Maser. *Proceedings of the IEEE* **51**(1), 89–109 (1963).
- [60] Howard J. Carmichael. *An Open Systems Approach to Quantum Optics*. Springer-Verlag, (1993).
- [61] Erwin Schrödinger. Are there quantum jumps? Part II. *The British Journal for the Philosophy of Science* **III**(11), 233–242 (1952).

- [62] Moe S. Khalil, F. C. Wellstood et Kevin D. Osborn. Loss Dependence on Geometry and Applied Power in Superconducting Coplanar Resonators. *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on* **21**, 879 (2011).
- [63] S. J. Weber, K. W. Murch, D. H. Slichter, R. Vijay et I. Siddiqi. Single crystal silicon capacitors with low microwave loss in the single photon regime. *Applied Physics Letters* **98**(17), 172510 (2011).
- [64] K. Geerlings, S. Shankar, E. Edwards, L. Frunzio, R. J. Schoelkopf et M. H. Devoret. Improving the quality factor of microwave compact resonators. Présenté à la conférence de mars 2011 de l'APS, (2011).
- [65] L. Frunzio, A. Wallraff, D. Schuster, J. Majer et R. Schoelkopf. Fabrication and characterization of superconducting circuit QED devices for quantum computation. *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on* **15**(2), 860–863 (2005).
- [66] M. Göppl, A. Fragner, M. Baur, R. Bianchetti, S. Filipp, J. M. Fink, P. J. Leek, G. Puebla, L. Steffen et A. Wallraff. **104**(11), 113904 (2008).
- [67] B. D. Josephson. The discovery of tunnelling supercurrents. *Rev. Mod. Phys.* **46**(2), 251–254 (1974).
- [68] John Clarke et Alex I. Braginski. *The SQUID Handbook : Fundamentals and Technology of SQUIDs and SQUID Systems*. Wiley-VCH, (2004).
- [69] Michael B. Metcalfe. *A new microwave resonator readout scheme for superconducting qubits*. Thèse de Doctorat, Yale University, (2008).
- [70] M. A. Castellanos-Beltran et K. W. Lehnert. Widely tunable parametric amplifier based on a superconducting quantum interference device array resonator. *Applied Physics Letters* **91**(8), 083509 (2007).
- [71] M. A. Castellanos-Beltran, K. D. Irwin, G. C. Hilton, L. R. Vale et K. W. Lehnert. Amplification and squeezing of quantum noise with a tunable Josephson metamaterial. *Nat. Phys.* **4**(12), 929–931 (2008).
- [72] M. A. Castellanos-Beltran, K. D. Irwin, L. R. Vale, G. C. Hilton et K. W. Lehnert. (2009).
- [73] T. Yamamoto, K. Inomata, M. Watanabe, K. Matsuba, T. Miyazaki, W. D. Oliver, Y. Nakamura et J. S. Tsai. Flux-driven Josephson parametric amplifier. *Applied Physics Letters* **93**(4), 042510 (2008).
- [74] Rajamani Vijayaraghavan. *Josephson Bifurcation Amplifier : Amplifying quantum signals using a dynamical bifurcation*. Thèse de Doctorat, Yale University, (2008).
- [75] F. R. Ong, M. Boissonneault, F. Mallet, A. Palacios-Laloy, A. Dewes, A. C. Doherty, A. Blais, P. Bertet, D. Vion et D. Esteve. Circuit qed with a nonlinear resonator : ac-stark shift and dephasing. *Phys. Rev. Lett.* **106**(16), 167002 (2011).
- [76] P. Bertet, F. R. Ong, M. Boissonneault, A. Bolduc, F. Mallet, A. Doherty, Blais A., D. Vion et D. Esteve. *Fluctuating Nonlinear Oscillators*, chapitre Circuit quantum electrodynamics with a nonlinear resonator. Oxford University Press (À paraître).

- [77] J. Bourassa, J. M. Gambetta, A. A. Abdumalikov, O. Astafiev, Y. Nakamura et A. Blais. Ultrastrong coupling regime of cavity qed with phase-biased flux qubits. *Phys. Rev. A* **80**(3), 032109 (2009).
- [78] V. E. Manucharyan, E. Boaknin, M. Metcalfe, R. Vijay, I. Siddiqi et M. Devoret. Microwave bifurcation of a Josephson junction : Embedding-circuit requirements. *Phys. Rev. B* **76**(1), 014524 (2007).
- [79] B. Yurke et E. Buks. Performance of Cavity-Parametric Amplifiers, Employing Kerr Nonlinearities, in the Presence of Two-Photon Loss. *Lightwave Technology, Journal of* **24**(12), 5054–5066 (2006).
- [80] R. Vijay, D. H. Slichter et I. Siddiqi. Observation of quantum jumps in a superconducting artificial atom. *Phys. Rev. Lett.* **106**(11), 110502 (2011).
- [81] A. Lupaşcu, E. F. C. Driessen, L. Roschier, C. J. P. M. Harmans et J. E. Mooij. High-Contrast Dispersive Readout of a Superconducting Flux Qubit Using a Non-linear Resonator. *Phys. Rev. Lett.* **96**(12), 127003 (2006).
- [82] Francois Mallet, Florian R. Ong, Agustin Palacios-Laloy, Francois Nguyen, Patrice Bertet, Denis Vion et Daniel Esteve. Single-shot qubit readout in circuit quantum electrodynamics. *Nat. Phys.* **5**(11), 791–795 (2009).
- [83] I. Siddiqi, R. Vijay, M. Metcalfe, E. Boaknin, L. Frunzio, R. J. Schoelkopf et M. H. Devoret. Dispersive measurements of superconducting qubit coherence with a fast latching readout. *Phys. Rev. B* **73**(5), 054510 (2006).
- [84] V. Bouchiat, D. Vion, P. Joyez, D. Esteve et M. Devoret. Quantum coherence with a single cooper pair. *Physica Scripta* **T76**, 165–170 (1998).
- [85] John M. Martinis, Michel H. Devoret et John Clarke. Experimental tests for the quantum behavior of a macroscopic degree of freedom : The phase difference across a Josephson junction. *Phys. Rev. B* **35**(10), 4682–4698 (1987).
- [86] I. Chiorescu, Y. Nakamura, C. J. P. M. Harmans et J. E. Mooij. Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit. *Science* **299**(5614), 1869–1871 (2003).
- [87] D. Vion, A. Aassime, A. Cottet, P. Joyez, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve et M. H. Devoret. Manipulating the Quantum State of an Electrical Circuit. *Science* **296**(5569), 886–889 (2002).
- [88] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin et J. S. Tsai. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-cooper-pair box. *Nature (London)* **398**, 786 (1999).
- [89] Jens Koch, Terri M. Yu, Jay Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, Alexandre Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Charge-insensitive qubit design derived from the cooper pair box. *Phys. Rev. A* **76**(4), 042319 (2007).
- [90] Michel H. Devoret. Quantum fluctuations in electrical circuits. Dans *Les Houches, Session LXIII*, 351–386. Elsevier, (1997).
- [91] J. A. Schreier, A. A. Houck, Jens Koch, D. I. Schuster, B. R. Johnson, J. M. Chow, J. M. Gambetta, J. Majer, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin et

- R. J. Schoelkopf. Suppressing charge noise decoherence in superconducting charge qubits. *Phys. Rev. B* **77**(18), 180502 (2008).
- [92] A. Houck, Jens Koch, M. Devoret, S. Girvin et R. Schoelkopf. Life after charge noise : recent results with transmon qubits. *Quantum Information Processing* **8**(2), 105–115 (2009).
- [93] Matthias Steffen, Shwetank Kumar, David P. DiVincenzo, J. R. Rozen, George A. Keefe, Mary Beth Rothwell et Mark B. Ketchen. High-coherence hybrid superconducting qubit. *Phys. Rev. Lett.* **105**(10), 100502 (2010).
- [94] J. M. Gambetta, A. A. Houck et Alexandre Blais. Superconducting qubit with purcell protection and tunable coupling. *Phys. Rev. Lett.* **106**(3), 030502 (2011).
- [95] S. J. Srinivasan, A. J. Hoffman, J. M. Gambetta et A. A. Houck. Tunable coupling in circuit quantum electrodynamics using a superconducting charge qubit with a v -shaped energy level diagram. *Phys. Rev. Lett.* **106**(8), 083601 (2011).
- [96] Matteo Mariantoni, H. Wang, Radoslaw C. Bialczak, M. Lenander, Erik Lucero, M. Neeley, A. D. O’Connell, D. Sank, M. Weides, J. Wenner, T. Yamamoto, Y. Yin, J. Zhao, John M. Martinis et A. N. Cleland. Photon shell game in three-resonator circuit quantum electrodynamics. *Nat. Phys.* **7**(4), 287–293 (2011).
- [97] T. Lindström, C. H. Webster, J. E. Healey, M. S. Colclough, C. M. Muirhead et A. Ya. Tzalenchuk. Circuit qed with a flux qubit strongly coupled to a coplanar transmission line resonator. *Superconductor Science and Technology* **20**(8), 814 (2007).
- [98] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics. *Nature* **431**, 162 (2004).
- [99] D. I. Schuster, A. Wallraff, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. ac stark shift and dephasing of a superconducting qubit strongly coupled to a cavity field. *Phys. Rev. Lett.* **94**(12), 123602 (2005).
- [100] Willis E. Lamb et Robert C. Retherford. Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. *Phys. Rev.* **72**(3), 241–243 (1947).
- [101] D. I. Schuster, A. A. Houck, J. A. Schreier, A. Wallraff, J. M. Gambetta, A. Blais, L. Frunzio, J. Majer, B. Johnson, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Resolving photon number states in a superconducting circuit. *Nature* **445**(7127), 515 (2007).
- [102] Max Hofheinz, H. Wang, M. Ansmann, Radoslaw C. Bialczak, Erik Lucero, M. Neeley, A. D. O’Connell, D. Sank, J. Wenner, John M. Martinis et A. N. Cleland. Synthesizing arbitrary quantum states in a superconducting resonator. *Nature* **459**(7246), 546–549 (2009).
- [103] J. Majer, J. M. Chow, J. M. Gambetta, Jens Koch, B. R. Johnson, J. A. Schreier, L. Frunzio, D. I. Schuster, A. A. Houck, A. Wallraff, A. Blais, M. H. Devoret,

- S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Coupling superconducting qubits via a cavity bus. *Nature* **449**(7161), 443–447 (2007).
- [104] Mika A. Sillanpaa, Jae I. Park et Raymond W. Simmonds. Coherent quantum state storage and transfer between two phase qubits via a resonant cavity. *Nature* **449**(7161), 438–442 (2007).
- [105] David Deutsch et Richard Jozsa. Rapid solution of problems by quantum computation. *Proceedings : Mathematical and Physical Sciences* **439**(1907), pp. 553–558 (1992).
- [106] A. Dewes, F. R. Ong, V. Schmitt, R. Lauro, N. Boulant, P. Bertet, D. Vion et D. Esteve. Characterization of a two-transmon processor with individual single-shot qubit readout. arXiv :1109.6735v1, (2011).
- [107] Paik Hanhee, D. I. Schuster, Lev S. Bishop, G. Kirchmair, G. Catelani, A. P. Sears, B. R. Johnson, M. J. Reagor, L. Frunzio, L. Glazman et R. J. Schoelkopf. How coherent are Josephson junctions? arXiv :1105.4652v2, (2011).
- [108] Jiansong Gao, Miguel Daal, Anastasios Vayonakis, Shwetank Kumar, Jonas Zmuidzinas, Bernard Sadoulet, Benjamin A. Mazin, Peter K. Day et Henry G. Leduc. **92**(15), 152505 (2008).
- [109] J. P. Colinge et C. A. Colinge. *Physics of semiconductor devices*, chapitre 9, 321–324. Kluwer Academic Publishers (2002).
- [110] W. H. Louisell, A. Yariv et A. E. Siegman. Quantum Fluctuations and Noise in Parametric Processes. I. *Phys. Rev.* **124**(6), 1646–1654 (1961).
- [111] H. A. Haus et J. A. Mullen. Quantum Noise in Linear Amplifiers. *Phys. Rev.* **128**(5), 2407–2413 (1962).
- [112] Carlton M. Caves. Quantum limits on noise in linear amplifiers. *Phys. Rev. D* **26**(8), 1817–1839 (1982).
- [113] A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, Florian Marquardt et R. J. Schoelkopf. Introduction to quantum noise, measurement, and amplification. *Rev. Mod. Phys.* **82**(2), 1155–1208 (2010).
- [114] Maxime Boissonneault, J. M. Gambetta et Alexandre Blais. Nonlinear dispersive regime of cavity QED : The dressed dephasing model. *Phys. Rev. A* **77**(6), 060305 (R) (2008).
- [115] Maxime Boissonneault, J. M. Gambetta et Alexandre Blais. Dispersive regime of circuit QED : Photon-dependent qubit dephasing and relaxation rates. *Phys. Rev. A* **79**(1), 013819 (2009).
- [116] Daniel H. Slichter. Limits on quantum non-demolition measurement in circuit QED from upconverted low-frequency noise. Non-publié, (2011).
- [117] M. Metcalfe, E. Boaknin, V. Manucharyan, R. Vijay, I. Siddiqi, C. Rigetti, L. Frunzio, R. J. Schoelkopf et M. H. Devoret. Measuring the decoherence of a quantum qubit with the cavity bifurcation amplifier. *Phys. Rev. B* **76**(17), 174516 (2007).

- [118] N. Boulant, G. Ithier, P. Meeson, F. Nguyen, D. Vion, D. Esteve, I. Siddiqi, R. Vijay, C. Rigetti, F. Pierre et M. Devoret. Quantum nondemolition readout using a Josephson bifurcation amplifiers. *Phys. Rev. B* **76**(1), 014525 (2007).
- [119] A. Lupaşcu, S. Saito, T. Picot, P. C. de Groot, C. J. P. M. Harmans et J. E. Mooij. Quantum non-demolition measurement of a superconducting two-level system. *Nat. Phys.* **3**(2), 119–125 (2007).
- [120] Jay Gambetta, Alexandre Blais, D. I. Schuster, A. Wallraff, L. Frunzio, J. Majer, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Qubit-photon interactions in a cavity : Measurement-induced dephasing and number splitting. *Phys. Rev. A* **74**(4), 042318 (2006).
- [121] C. M. Wilson, G. Johansson, T. Duty, F. Persson, M. Sandberg et P. Delsing. Dressed relaxation and dephasing in a strongly driven two-level system. *Phys. Rev. B* **81**(2), 024520 (2010).
- [122] M. D. Reed, L. DiCarlo, B. R. Johnson, L. Sun, D. I. Schuster, L. Frunzio et R. J. Schoelkopf. High-Fidelity Readout in Circuit Quantum Electrodynamics Using the Jaynes-Cummings Nonlinearity. *Phys. Rev. Lett.* **105**(17), 173601 (2010).
- [123] Maxime Boissonneault, J. M. Gambetta et Alexandre Blais. Improved superconducting qubit readout by qubit-induced nonlinearities. *Phys. Rev. Lett.* **105**(10), 100504 (2010).
- [124] Lev S. Bishop, Eran Ginossar et S. M. Girvin. Response of the Strongly Driven Jaynes-Cummings Oscillator. *Phys. Rev. Lett.* **105**(10), 100505 (2010).
- [125] Albert Einstein. On the method of theoretical physics. *Philosophy of Science* **1**(2), 163–169 (1934).
- [126] Jay Gambetta, Alexandre Blais, M. Boissonneault, A. A. Houck, D. I. Schuster et S. M. Girvin. Quantum trajectory approach to circuit qed : Quantum jumps and the zeno effect. *Phys. Rev. A* **77**(1), 012112 (2008).
- [127] Félix Beaudoin. Couplage ultra-fort et dissipation en électrodynamique quantique en circuit. Mémoire de Maîtrise, Université de Sherbrooke. (2011).
- [128] Félix Beaudoin, Jay M. Gambetta et A. Blais. Dissipation and ultrastrong coupling in circuit QED. *Phys. Rev. A* **84**, 043832 (2011).
- [129] Gerald D. Mahan. *Many Particle Physics*. Springer, 3rd edition, (2000).
- [130] E. K. Irish, J. Gea-Banacloche, I. Martin et K. C. Schwab. Dynamics of a two-level system strongly coupled to a high-frequency quantum oscillator. *Phys. Rev. B* **72**(19), 195410 (2005).
- [131] P. Carbonaro, G. Compagno et F. Persico. Canonical dressing of atoms by intense radioation fields. *Phys. Lett. A* **73**, 97 (1979).
- [132] Robert Zwanzig. Ensemble method in the theory of irreversibility. *The Journal of Chemical Physics* **33**(5), 1338–1341 (1960).

- [133] Robert Zwanzig. Memory effects in irreversible thermodynamics. *Phys. Rev.* **124**, 983–992 (1961).
- [134] C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods : For Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer, 2 edition, (1997).
- [135] Crispin W. Gardiner et Peter Zoller. *Quantum Noise : A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*. Springer, 3e edition, (2000).
- [136] Andrew C. Doherty. Notes on adiabatic elimination. Communication privée., (2010).
- [137] Lars Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. i. *Phys. Rev.* **37**, 405–426 (1931).
- [138] Lars Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. ii. *Phys. Rev.* **38**, 2265–2279 (1931).
- [139] Herbert B. Callen et Theodore A. Welton. Irreversibility and generalized noise. *Phys. Rev.* **83**, 34–40 (1951).
- [140] R. Kubo. The fluctuation-dissipation theorem. *Rep. Prog. Phys.* **29**, 255 (1966).
- [141] G. W. Ford et R. F. O’Connell. There is no quantum regression theorem. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 798–801 (1996).
- [142] Martin Fowler, Kent Beck, John Brant, William Opdyke et Don Roberts. *Refactoring : Improving the Design of Existing Code*. Addison-Wesley Professional, 1 edition, (1999).
- [143] C. L. Lawson, R. J. Hanson, D. R. Kincaid et F. T. Krogh. Basic Linear Algebra Subprograms for Fortran usage. *ACM Transactions on Mathematical Software* **5**(3), 308–323 (1979).
- [144] L. Dagum et R. Menon. OpenMP : An industry standard API for shared-memory programming. *IEEE COMPUTATIONAL SCIENCE & ENGINEERING* **5**(1), 46–55 (1998).
- [145] Maxime Boissonneault, Steve Allen, Félix Beaudoin, Kevin Lalumière, Adam Bolduc et Alexandre Blais. Sherbrooke QUantum pACKage (SQUACK) : a package for quantum computing and quantum optics. En préparation pour soumission à Computer Physics Communication, (2012).
- [146] Dimitri van Heesch. doxygen manual for version 1.7.5.1. <http://www.doxygen.org/>, (2011).
- [147] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney et D. Sorensen. *LAPACK Users’ Guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, third edition, (1999).
- [148] Ben Collins-Sussman, Brian W. Fitzpatrick et C. Michael Pilato. *Version Control with Subversion*. O’Reilly, (2004).

- [149] M. Galassi, J. Davies, J. Theiler, B. Gough, G. Jungman, M. Booth et F. Rossi. *GNU Scientific Library Reference Manual*. Network Theory Ltd., (2006).
- [150] Richard B. Lehoucq, Danny C. Sorensen et C. Yang. *Arpack User's Guide : Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems With Implicitly Restarted Arnoldi Methods (Software, Environments, Tools)*. Soc for Industrial & Applied Math, (1998).
- [151] Zhanyong Wan. Getting started with Google C++ Testing Framework. <http://code.google.com/p/googletest/>, (2009).
- [152] Sze M Tan. A computational toolbox for quantum and atomic optics. *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics* **1**(4), 424–432 (1999).
- [153] G. Ithier, E. Collin, P. Joyez, P. J. Meeson, D. Vion, D. Esteve, F. Chiarello, A. Shnirman, Y. Makhlin, J. Schrieffer et G. Schön. Decoherence in a superconducting quantum bit circuit. *Phys. Rev. B* **72**(13), 134519 (2005).
- [154] Y. R. Shen. *The Principles of Nonlinear Optics*. Wiley-Interscience, (2002).
- [155] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics, Second Edition*. Academic Press, 2 edition, (2003).
- [156] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, J. M. Gambetta, J. Schreier, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Sideband transitions and two-tone spectroscopy of a superconducting qubit strongly coupled to an on-chip cavity. *Phys. Rev. Lett.* **99**(5), 050501 (2007).
- [157] F. Bloch et A. Siegert. Magnetic resonance for nonrotating fields. *Phys. Rev.* **57**(6), 522–527 (1940).
- [158] Alexandre Blais, Jay Gambetta, A. Wallraff, D. I. Schuster, S. M. Girvin, M. H. Devoret et R. J. Schoelkopf. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics. *Phys. Rev. A* **75**(3), 032329 (2007).
- [159] E. M. Purcell. Spontaneous Emission Probabilities at Radio Frequencies. Dans *Proceedings of the American Physical Society*, volume 69, 681, (1946).
- [160] A. A. Houck, J. A. Schreier, B. R. Johnson, J. M. Chow, Jens Koch, J. M. Gambetta, D. I. Schuster, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Controlling the spontaneous emission of a superconducting transmon qubit. *Phys. Rev. Lett.* **101**(8), 080502 (2008).
- [161] F. Bloch. Nuclear induction. *Phys. Rev.* **70**(7-8), 460–474 (1946).
- [162] I. Serban, M. I. Dykman et F. K. Wilhelm. Relaxation of a qubit measured by a driven duffing oscillator. *Phys. Rev. A* **81**(2), 022305 (2010).
- [163] C. Laflamme et A. A. Clerk. Quantum-limited amplification with a nonlinear cavity detector. *Phys. Rev. A* **83**(3), 033803 (2011).
- [164] Neil W. Ashcroft et David Mermin. *Solid State Physics*. Brooks Cole, (1976).
- [165] Bertet P. Vion D. Esteve D. Ong, F. R. Communication privée.

- [166] M. I. Dykman et M. V. Fistul. Multiphoton antiresonance. *Phys. Rev. B* **71**, 140508 (2005).
- [167] M. Marthaler et M. I. Dykman. Switching via quantum activation : A parametrically modulated oscillator. *Phys. Rev. A* **73**(4), 042108 (2006).
- [168] M. I. Dykman, M. Marthaler et V. Peano. Quantum heating of a parametrically modulated oscillator : spectral signatures. arXiv :1012.3339v1, (2010).
- [169] Max Planck. *Scientific Autobiography and other papers*. Philosophical Library, (1968).
- [170] Navin Khaneja, Timo Reiss, Cindie Kehlet, Thomas Schulte-Herbrüggen et Steffen J. Glaser. Optimal control of coupled spin dynamics : design of nmr pulse sequences by gradient ascent algorithms. *Journal of Magnetic Resonance* **172**(2), 296–305 (2005).
- [171] F. Motzoi, J. M. Gambetta, P. Rebentrost et F. K. Wilhelm. Simple pulses for elimination of leakage in weakly nonlinear qubits. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 110501 (2009).
- [172] R. Bianchetti, S. Filipp, M. Baur, J. M. Fink, C. Lang, L. Steffen, M. Boissonneault, A. Blais et A. Wallraff. Control and tomography of a three level superconducting artificial atom. *Phys. Rev. Lett.* **105**(22), 223601 (2010).
- [173] M. D. Reed, B. R. Johnson, A. A. Houck, L. DiCarlo, J. M. Chow, D. I. Schuster, L. Frunzio et R. J. Schoelkopf. Fast reset and suppressing spontaneous emission of a superconducting qubit. *Applied Physics Letters* **96**(20), 203110 (2010).
- [174] A. Palacios-Laloy, F. Nguyen, F. Mallet, P. Bertet, D. Vion et D. Esteve. Tunable Resonators for Quantum Circuits. *Journal of Low Temperature Physics* **151**(3), 1034–1042 (2008).
- [175] M. Sandberg, C. M. Wilson, F. Persson, T. Bauch, G. Johansson, V. Shumeiko, T. Duty et P. Delsing. Tuning the field in a microwave resonator faster than the photon lifetime. *Applied Physics Letters* **92**(20), 203501 (2008).
- [176] Maxime Boissonneault, J. M. Gambetta et A. Blais. Improving bifurcation readout of many-level superconducting qubits with a straddling regime. In preparation, (2011).
- [177] S. Filipp, M. Göppl, J. M. Fink, M. Baur, R. Bianchetti, L. Steffen et A. Wallraff. Multimode mediated qubit-qubit coupling and dark-state symmetries in circuit quantum electrodynamics. *Phys. Rev. A* **83**(6), 063827 (2011).
- [178] R. C. Bialczak, M. Ansmann, M. Hofheinz, M. Lenander, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O’Connell, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, T. Yamamoto, A. N. Cleland et J. M. Martinis. Fast tunable coupler for superconducting qubits. *Phys. Rev. Lett.* **106**(6), 060501 (2011).
- [179] G. Haack, F. Helmer, M. Mariantoni, F. Marquardt et E. Solano. Resonant quantum gates in circuit quantum electrodynamics. *Phys. Rev. B* **82**(2), 024514 (2010).

- [180] L. D. Landau. Zur theorie der energieübertragung bei stößen. *Phys. Z. Sowjetunion* **2**, 46 (1932).
- [181] Clarence Zener. Non-adiabatic crossing of energy levels. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **137**(833), pp. 696–702 (1932).
- [182] E. C. G. Stueckelberg. *Helv. Phys. Acta* **5**, 369 (1932).
- [183] David Zueco, Peter Hänggi et Sigmund Kohler. Landau–zener tunnelling in dissipative circuit qed. *New Journal of Physics* **10**(11), 115012 (20pp) (2008).
- [184] A. O. Caldeira et A. J. Leggett. Influence of Dissipation on Quantum Tunneling in Macroscopic Systems. *Phys. Rev. Lett.* **46**(4), 211–214 (1981).