

**Une approche non-simplement lacée aux structures amassées et aux potentiels**

par

**Bertrand Nguéfack**

Thèse présentée au Département de Mathématiques  
en vue de l'obtention du grade de philosophiæ doctor (Ph.D.)

**FACULTÉ DES SCIENCES**

**UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE**

**Sherbrooke, Québec, Canada, Octobre 2009**



Library and Archives  
Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
ISBN: 978-0-494-64199-6  
*Our file* *Notre référence*  
ISBN: 978-0-494-64199-6

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

Le 17 novembre 2009

*le jury a accepté la thèse de Monsieur Bertrand Nguefack  
dans sa version finale.*

**Membres du jury**

**Professeur Ibrahim Assem  
Directeur de recherche  
Département de mathématiques**

**Professeur Thomas Brüstle  
Codirecteur de recherche  
Département de mathématiques**

**Professeure Virginie Charrette  
Membre  
Département de mathématiques**

**Professeur Ralf Schiffler  
Membre externe  
University of Connecticut, Department of Mathematics**

**Professeur Shiping Liu  
Président rapporteur  
Département de mathématiques**

# Sommaire

La théorie des algèbres amassées ainsi que leurs catégorifications par les catégories amassées et par les catégories 2-Calabi-Yau apportent à la théorie des représentations des algèbres de nouvelles techniques et de nouveaux outils dont l'intérêt ne cesse de croître. Dans cette thèse, nous proposons une approche non-simplement lacée à quelques-uns des aspects importants de ces nouvelles techniques et de ces nouveaux outils.

De prime abord, nous nous intéressons aux structures amassées pour les catégories 2-Calabi-Yau étudiées par Buan, Iyama, Reiten et Scott dans [10], et nous en proposons une version non-simplement lacée lorsque le corps de base n'est plus nécessairement algébriquement clos, généralisant ainsi la version simplement lacée sur les corps algébriquement clos. Comme généralisation du théorème [10, 1.1.6], nous obtenons alors que les catégories 2-Calabi-Yau possèdent la version non-simplement lacée des structures amassées dès que l'existence d'une structure amassée faible est garantie. Et en guise d'une première application de l'existence de structures amassées non-simplement lacées, à l'aide des fonctions d'amas (généralisant les caractères d'amas) nous pouvons réaliser directement une large classe d'algèbres (et de sous-algèbres) amassées non-simplement lacées (encore dites anti-symétrisables) de type géométrique, avec la possibilité qu'un amas puisse avoir un nombre dénombrable de variables. En particulier, sur des corps non-algébriquement clos, il devient alors clair que les catégories amassées telles que définies dans [12] possèdent toujours une structure amassée non-simplement lacée induite par les objets inclinants amassés. Ce qui nous amène à notre second objectif lequel s'articule autour de deux principaux volets : le premier étant de proposer une notion adéquate de potentiel pour les carquois modulés et le second étant de généraliser les mutations de carquois avec potentiels aux carquois modulés avec potentiels. Les carquois avec potentiels ainsi que leurs mutations et leurs représentations sont introduits et étudiés par Derksen, Weyman et Zelevinsky dans [24]. Ici, nous commençons l'étude des carquois modulés avec potentiels et de leurs mutations, nous obtenons alors des versions généralisées de deux principaux résultats de [24] : notamment, au moins lorsque le corps de base est parfait, à une équivalence droite faible près nous montrons que la réduction des carquois modulés avec potentiels est toujours possible.

Dans [11] Buan, Iyama, Reiten et Smith montrent que la mutation des carquois avec potentiels et la mutation des objets inclinants amassés dans une catégorie 2-Calabi-Yau sont compatibles et il existe un lien fort intéressant entre les algèbres inclinées 2-Calabi-Yau et les algèbres jacobiniennes associées aux carquois avec potentiels ; en particulier les algèbres inclinées amassées apparaissent comme algèbres jacobiniennes des

carquois avec potentiels. Ici, nous nous intéressons également à la généralisation des résultats principaux de [11]. Une conséquence qu'on peut tirer de notre étude est que, sur des corps parfaits, les algèbres inclinées amassées apparaissent aussi comme algèbres jacobiennes des carquois modulés avec potentiels. Dans le cas particulier des algèbres de représentation finie, nous obtenons une caractérisation complète et explicite des algèbres inclinées amassées de types  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  en termes d'algèbres jacobiennes des carquois modulés avec potentiels.

Par ailleurs, pour un carquois avec potentiel Jacobi-fini  $(Q, W)$ , Claire Amiot a construit dans sa thèse ([1], 2008) une catégorie amassée  $\mathcal{C}_{(Q,W)}$  généralisant la construction originelle de [12]. Nous proposons une version non-simplement lacée de la catégorie  $\mathcal{C}_{(Q,W)}$  en construisant pour chaque carquois modulé avec potentiel Jacobi-fini  $(Q, m)$  une catégorie amassée  $\mathcal{C}_{(Q,m)}$ . Et sous-réserve qu'un certain résultat de Bernhard Keller se généralise au contexte des carquois modulés, il suit que le résultat de Claire Amiot [1, 7.9, 7.10] admet une généralisation immédiate comme suit : la catégorie amassée (non-simplement lacée)  $\mathcal{C}_{(Q,m)}$  est aussi Hom-finie 2-Calabi-Yau et les algèbres jacobiennes des carquois modulés avec potentiels apparaissent elles-aussi comme algèbres inclinées 2-Calabi-Yau.

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, M. Ibrahim Assem qui, par ses précieux conseils et encouragements, a su me guider durant les quatre années de doctorat que je viens de compléter ici à Sherbrooke. Envers moi, il a su marier confiance et rigueur mathématique, ces deux qualités vont me rester. Je tiens aussi à remercier mon codirecteur, M. Thomas Brüstle, pour m'avoir aussi accordé sa confiance et son temps précieux. Je veux ensuite remercier M. Shiping Liu, toujours disponible pour apporter son aide, qu'elle soit académique ou logistique, je pense notamment à bien des fois où il m'a prêté un livre ou une place dans sa voiture pour assister à un séminaire hors de Sherbrooke. Mes remerciements vont ensuite à toute l'équipe d'algèbre ainsi qu'au Département de Mathématiques de l'Université de Sherbrooke, en particulier à Charles P., à Jean-Philippe M., à David S. et à Julie D. pour leur esprit de camaraderie, à Marie-France pour son accueil et son sourire depuis mon arrivée ici à Sherbrooke, ainsi qu'à chaque professeur avec qui j'ai eu à partager un sourire, notamment, le doyen de la faculté des sciences et le chef du Département de Mathématiques que j'avais toujours le bonheur de rencontrer et surtout de saluer dans l'un de ces deux ou trois couloirs entre mon bureau et la salle de séminaire ou de photocopie...

En même temps, je me sens très endetté envers les travaux de nombreux auteurs, que probablement je ne rencontrerai même pas, et dont les publications ou préprints sont librement consultables dans bon nombre de journaux scientifiques, je souligne la gentillesse des chercheurs que j'ai pu rencontrer lors de quelques colloques internationaux et qui étaient très disposés à discuter avec un aussi débutant en théorie des représentations que je suis. Ma reconnaissance s'adressé en particulier à Osamu Iyama qui, durant un colloque ici à Sherbrooke et un autre au Mexique, a accepté de m'accorder suffisamment de son temps et de son expérience pour mes travaux sur le deuxième chapitre de cette thèse.

J'aimerai souligner et louer, sur un plan entièrement personnel, le soutien moral de ma famille au Cameroun. Précisément je trouve ici une occasion en or pour louer ma mère et me rappeler que c'est bien grâce elle que pour la toute première fois j'ai pu apprendre à compter, d'abord en commençant par 1, 2 . . . , et ensuite en recommençant par 0, 1, 2 . . . . Je profite aussi pour faire un clin d'oeil rapide et discret à mon amie de coeur, Gladis A., à mon frère Patrice D. ainsi qu'à tous mes autres frères, soeurs, cousines et cousins, oncles et tantes que j'aurais aimé nommer si le temps et l'espace me le permettaient.

Je suis entièrement reconnaissant envers l'Agence Canadienne de Développement International (ACDI) et son organe d'exécution, le Programme Canadien de Bourse de la Francophonie (PCBF), pour leur soutien financier pendant ces quatre années que je viens de compléter au Canada, de même, puisse le gouvernement

## REMERCIEMENTS

de ma si belle et si chère patrie, le Cameroun, trouver ici l'expression de ma profonde gratitude pour m'avoir accordé leur confiance en me permettant d'obtenir la bourse de l'ACDI.

Enfin, sur toute une autre dimension, je n'aurai pas pu terminer cette thèse, sans la santé, le courage et la foi de réussir ainsi que la faveur de toutes les personnes aimables qui ont été autour de moi pendant ces quatre années ici au Canada : pour cela donc, au Seigneur Dieu qui accorde à tous toutes ces si grandes choses qui ont primauté sur tout ce qu'on peut posséder comme connaissance ou savoir ou biens, rien ne m'empêche de simplement lui dire : merci Seigneur pour ta faveur !

Bertrand Nguetack

Sherbrooke, 17 novembre 2009

ng.bertd@yahoo.ca, Bertrand.Nguetack@Usherbrooke.ca

# Table des matières

<b>Sommaire</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>6</b>
1.1 Quelques conventions pour les catégories additives et abéliennes . . . . .	6
1.2 Algèbres de carquois modulés liés . . . . .	9
1.3 Représentations de carquois modulés liés . . . . .	14
1.4 Représentations des algèbres héréditaires . . . . .	16
1.5 Carquois modulé d'une k-catégorie . . . . .	19
1.6 Quelques généralités sur les morphismes minimaux dans les catégories additives . . . . .	21
1.7 Quelques généralités sur les $\tau$ -catégories . . . . .	24
1.8 Quelques généralités sur les catégories triangulées et les catégories de Calabi-Yau . . . . .	27
1.8.1 Définition et quelques propriétés élémentaires des catégories triangulées . . . . .	27
1.8.2 Foncteur de Serre et condition de Calabi-Yau . . . . .	30
1.9 Quelques généralités sur les catégories dérivées . . . . .	33
1.9.1 Définitions et quelques propriétés . . . . .	33
1.9.2 La forme répétitive de la catégorie dérivée d'une catégorie héréditaire . . . . .	39
1.10 Catégories amassées et sous-catégories inclinantes amassées . . . . .	39
1.10.1 Catégories d'orbites d'une catégorie triangulée . . . . .	40
1.10.2 La catégorie amassée associée à une catégorie abélienne héréditaire . . . . .	43
1.10.3 Sous-catégories inclinantes amassées . . . . .	44
<b>2 Une généralisation non simplement lacée des structures amassées</b>	<b>48</b>
2.1 Approximations minimales, $\tau$ -suites reliant . . . . .	48
2.2 Structures amassées faibles et structures amassées . . . . .	55

TABLE DES MATIÈRES

2.2.1	Structures amassées faibles . . . . .	55
2.2.2	Structures amassées . . . . .	57
2.3	Catégories triangulées 2-Calabi-Yau avec structures amassées . . . . .	59
2.3.1	Énoncés principaux . . . . .	59
2.3.2	Preuve du Théorème 2.3.2 et du Théorème 2.3.3 . . . . .	62
2.3.3	Sous-structures amassées . . . . .	67
2.4	Algèbres amassées, sous-algèbres amassées, fonctions d'amas . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Carquois modulés avec potentiels, algèbres jacobiennes</b> . . . . .	<b>72</b>
3.1	Morphismes traces, formes bilinéaires non-dégénérées et paires dualisantes de bimodules . . . . .	72
3.2	Approche non-simplement lacée aux potentiels et aux algèbres jacobiennes . . . . .	81
3.2.1	Rappels de quelques terminologies . . . . .	81
3.2.2	Système gauche de flèches et système droite de flèches pour un carquois modulé . . . . .	86
3.2.3	Généralisation non-simplement lacée des potentiels . . . . .	87
3.2.4	Dérivées partielles, permutation tordue, dérivée cyclique et algèbres jacobiennes . . . . .	92
3.3	Loi de Leibniz cyclique, images homomorphes continues des idéaux jacobienns . . . . .	99
3.4	Réduction des carquois modulés avec potentiels . . . . .	108
3.4.1	Quelques considérations préliminaires . . . . .	108
3.4.2	Une première approche à la réduction . . . . .	113
3.4.3	Une seconde approche à la réduction . . . . .	116
3.5	Mutations de carquois modulés avec potentiels . . . . .	123
<b>4</b>	<b>Mutation inclinante amassée et carquois modulés avec potentiels</b> . . . . .	<b>126</b>
4.1	Dérivées partielles et présentation d'algèbres . . . . .	126
4.2	Algèbres jacobiennes et suites faiblement 2-presque scindées . . . . .	131
4.3	Algèbres jacobiennes et mutations des objets inclinants amassés . . . . .	133
4.3.1	Résultats principaux . . . . .	133
4.3.2	Preuve du Théorème 4.3.2 . . . . .	137
4.4	La catégorie amassée associée à un carquois modulé avec potentiel Jacobi-fini . . . . .	139
<b>5</b>	<b>Algèbres inclinées amassées de représentation finie</b> . . . . .	<b>144</b>
5.1	Mutations de carquois valués de types $\mathbb{B}_n$ , $\mathbb{C}_n$ et $\mathbb{F}_4$ . . . . .	144
5.1.1	Quelques terminologies et résultats principaux . . . . .	144
5.1.2	Preuve du théorème de structure . . . . .	147
5.2	Algèbres inclinées amassées de type $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n\}$ . . . . .	150
	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>162</b>

# Introduction

La théorie des représentations des algèbres utilise plusieurs techniques et outils plus moins graphiques pour caractériser diverses classes d'algèbres. On peut notamment citer les techniques provenant de la théorie des catégories : l'étude de divers invariants homologiques d'une algèbre  $A$  se ramène le plus souvent à l'étude des catégories définies à partir de  $A$ , plus ou moins proches, allant des catégories de  $A$ -modules jusqu'aux catégories dérivées de  $A$ -modules ou plus généralement jusqu'aux catégories triangulées. Citons aussi l'utilisation de la théorie de l'inclinaison consistant à déformer une classe d'algèbres plus ou moins simple en une autre classe relativement assez proche pour ensuite étudier les algèbres de la dernière classe. Citons enfin l'utilisation d'outils graphiques tels que les carquois (liés) ou plus généralement les carquois modulés (liés) (ou encore espèces liées) pour représenter et étudier une classe suffisamment large d'algèbres, allant des algèbres de dimension finie sur un corps aux algèbres d'Artin. Pour cette dernière classe d'algèbres, la sous-classe formée par les algèbres sur un corps algébriquement clos est la mieux étudiée, ces algèbres sont dites simplement lacées et l'utilisation des carquois suffit généralement pour leurs représentations. À cause de très nombreux avantages qu'offrent les corps algébriquement clos, une très grande majorité d'auteurs en théorie des représentations des algèbres ont tendance à travailler sur des algèbres simplement lacées, si bien que de très nombreuses techniques sont développées autour des représentations de carquois, tandis que les représentations de carquois modulés avancent à petits pas. À notre connaissance, voici quelques-uns des auteurs qui se sont vraiment intéressés aux représentations de carquois modulés proprement dits (la liste est bien sûr non-exhaustive) : d'abord Dlab et Ringel par exemple dans [25] pour la caractérisation des types de représentations des algèbres héréditaires données par des carquois modulés acycliques, Igusa et Todorov dans [40] pour la description des carquois modulés pouvant apparaître comme carquois modulés d'une algèbre de représentation finie, et Benson dans [8] pour un bref survol des représentations de carquois modulés. Citons aussi en guise d'exemple, I. Assem dans [2] pour l'étude des algèbres inclinées itérées non-simplement lacées de type  $\mathbb{B}$  et  $\mathbb{C}$ . Une autre technique en théorie des représentations des algèbres pour étudier indirectement les représentations de carquois de modulés est l'utilisation de la théorie du pliage, pour un très récent aspect de la théorie du pliage, on peut se référer par exemple à [23] sur le pliage des catégories dérivées suivant un foncteur de Frobenius.

La représentation des algèbres sur un corps non-algébriquement clos, exige au moins l'utilisation des carquois modulés, et dans ce cas on perd l'avantage qu'offre les corps algébriquement clos et on est souvent confronté aux difficultés liées aux corps gauches dont la théorie est bien moins riche que celle des corps

commutatifs. Dans bien des cas, une adaptation relativement aisée permet d'obtenir par exemple pour les carquois modulés une version généralisée d'un nouveau résultat ou d'une nouvelle technique valable dans un contexte simplement lacé. Cependant, dans certaines situations, grande est la surprise qui nous attend lorsqu'on essaie de partir d'un cadre simplement lacé pour un cadre non-simplement lacé pourtant pas si loin, on est aussi souvent amené à développer une technique totalement différente de la version simplement lacée. Dans cette thèse, nous avons essayé le pari de partir de certaines des très récentes techniques simplement lacées utilisées par la théorie des représentations des algèbres pour établir les versions non-simplement lacées correspondantes.

Il apparaît aussi très souvent que certaines nouvelles techniques trouvent leurs origines non pas directement dans la théorie des représentations des algèbres, mais plutôt dans d'autres domaines connexes : c'est d'ailleurs ce qui se passe ces dernières années avec l'arrivée si heureuse de la théorie des algèbres amassées et de leurs catégorifications par les catégories amassées ou par les catégories 2-Calabi-Yau, lesquelles suscitent un intérêt fort croissant chez plusieurs auteurs, à cause des performances inattendues des techniques que ces dernières apportent. Les algèbres amassées viennent notamment enrichir les représentations des carquois liés en introduisant les carquois avec potentiels ainsi que les mutations de carquois avec potentiels. De même la théorie classique de l'inclinaison se voit enrichie par la nouvelle théorie de l'inclinaison amassée dans les catégories amassées ou plus généralement dans les catégories 2-Calabi-Yau. Comme objectifs multiples de cette thèse, nous aimerions généraliser pour les représentations de carquois modulés les récentes techniques de carquois avec potentiels, de mutations de carquois avec potentiels, ainsi que les mutations des objets inclinants amassés dans les catégories 2-Calabi-Yau.

Tout d'abord nous nous intéresserons aux structures amassées pour les catégories (stablement) 2-Calabi-Yau introduites par Buan, Iyama, Reiten et Scott dans [10]. Et nous en proposons une version non-simplement lacée pour les catégories 2-Calabi-Yau sur des corps non-nécessairement algébriquement clos, généralisant ainsi la version simplement lacée sur les corps algébriquement clos. Pour une catégorie 2-Calabi-Yau  $\mathcal{C}$  et pour un sous-ensemble  $\underline{X} \subset \text{Obj}(\mathcal{C})$  dont les éléments sont alors appelés amas, une des conditions exigées dans [10] pour les structures amassées simplement lacées est que, la mutation inclinante amassée soit compatible avec la mutation de carquois : c'est-à-dire, pour un amas  $T = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} T_i \in \underline{X}$  où les objets  $T_1, \dots, T_n$  sont indécomposables et deux-à-deux non-isomorphes (appelés alors variables amassées), si on note  $Q_T$  le carquois (valué) de  $T$ , alors pour chaque variable amassée  $T_k$  dans  $T$ , il existe un unique amas  $T^* = \mu_k(T) = (\bigoplus_{i \neq k} T_i) \oplus T_k^*$  (appelé mutation de  $T$  au point  $k$ ) et les carquois de  $T$  et de  $\mu_k(T)$  sont liés par la mutation de carquois traduite par la relation,  $\mu_k(Q_T) = Q_{\mu_k(T)}$ . Désignons par  $\mathcal{Q}_T$  et  $\mathcal{Q}_{T^*}$  les carquois modulés de  $T$  et de  $T^*$ . Nous enrichissons la condition précédente en exigeant que la mutation inclinante amassée soit compatible avec ce que nous nommons par mutation semi-modulée de carquois modulés : non seulement les carquois valués de  $T$  et de  $T^*$  doivent être liés par la mutation de carquois valués, mais aussi les modulations attachées aux carquois modulés  $\mathcal{Q}_T$  et  $\mathcal{Q}_{T^*}$  doivent être compatibles dans un certain sens avec la mutation inclinante amassée. Pour cette dernière forme enrichie des structures amassées, nous obtenons alors que, comme dans [10, Thm 1.1.6], les catégories 2-Calabi-Yau sur des corps

quelconques possèdent des structures amassées dès que l'existence d'une structure amassée faible est garantie (Théorème 2.3.2 et Théorème 2.3.3). Et en guise d'une première application de l'existence de structures amassées non-simplement lacées, nous pouvons réaliser directement une large classe d'algèbres (et de sous-algèbres) amassées non-simplement lacées (encore dites anti-symétrisables) de type géométrique, avec la possibilité qu'un amas puisse avoir un nombre dénombrable de variables (Théorème 2.4.1). Cela se fait en introduisant comme dans [10] une notion de *fonction d'amas* (généralisant celle de caractère d'amas) définie sur une sous-catégorie d'une catégorie 2-Calabi-Yau possédant une structure amassée et à valeur dans un corps ambiant  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(u_1, \dots, u_m)$  des fonctions rationnelles à  $m$  variables indépendantes sur le corps  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels.

Signalons que l'intérêt grandissant que revêt actuellement l'étude des catégories  $d$ -Calabi-Yau remonte à la découverte des catégories amassées introduites pour la première fois dans [12] et aussi dans [15] pour le cas d'un graphe de Dynkin de type  $A$ , puis dans [60] pour les catégories  $d$ -amassées pour un entier  $d$  quelconque ; les catégories  $d$ -amassées apparaissent comme catégories d'orbites des catégories dérivées bornées des catégories abéliennes héréditaires Ext-finies, et en vertu d'un résultat de Keller [46], on sait que les catégories  $d$ -amassées sont des catégories triangulées  $(d + 1)$ -Calabi-Yau (la catégorie amassée correspondant au cas où  $d = 1$ ). Les catégories triangulées de Calabi-Yau apparaissent alors comme des généralisations des catégories amassées. Dans [12] et ensuite dans [61] une théorie de l'inclinaison pour les catégories amassées est largement développée, et actuellement l'inclinaison amassée est étudiée dans le cadre plus général des catégories de Calabi-Yau.

Par ailleurs, la découverte des techniques propres aux catégories amassées dont l'étude captive tant d'auteurs trouve son origine dans un domaine complètement externe : il s'agit de la théorie des algèbres amassées inventées par Fomin et Zelevinsky dans les années 2000-2001 [28],[29], l'objectif initial visé par Fomin et Zelevinsky en inventant les algèbres amassées était de trouver un support algébrique pour l'étude de la positivité et des bases canoniques dans les groupes algébriques semisimples. Les algèbres amassées sont définies en partant d'un ensemble initial de générateurs (appelés variables amassées initiales) et en utilisant un procédé récursif appelé mutation, c'est ce dernier procédé de mutation qui caractérise les algèbres amassées. Les diverses catégorifications des algèbres amassées par les catégories amassées ou de Calabi-Yau consistent essentiellement à capturer le fameux procédé de mutation, d'où les structures amassées des catégories 2-Calabi-Yau et la mutation inclinante amassée.

Pour un objet inclinant amassé  $T$  dans une catégorie 2-Calabi-Yau  $\mathcal{C}$ , il s'avère intéressant d'étudier l'algèbre d'endomorphisme  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  appelé *algèbre inclinée 2-Calabi-Yau*, car les algèbres inclinées 2-Calabi-Yau généralisent dans un certain sens les algèbres inclinées ordinaires [3], et apparaissent comme interprétations des algèbres amassées à l'intérieur de la théorie des représentations des algèbres. Lorsqu'on étudie les algèbres inclinées 2-Calabi-Yau, il devient alors très intéressant de pouvoir comparer les représentations de deux algèbres inclinées 2-Calabi-Yau  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  et  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T')$  lorsque  $T$  et  $T'$  sont liés par une suite finie de mutations. On sait très bien que le carquois valué  $Q_A$  d'une algèbre  $A$  à lui tout seul ne contient en général que très peu d'information sur  $A$ , il faut considérer un carquois modulé lié  $(Q_A, R)$  pour représen-

ter complètement  $A$ . Ainsi, pour être capable de comparer  $\text{End}_C(T)$  et  $\text{End}_C(T')$ , on doit pouvoir capturer l'effet des mutations sur les relations dans un carquois modulé lié  $(Q, R)$  représentant  $\text{End}_C(T)$ . C'est dans cette optique que les carquois avec potentiels ainsi que leurs mutations et leurs représentations ont été introduits et étudiés dans [24] par Derksen, Weyman et Zelevinsky. Ceci nous amène au second objectif de cette thèse.

Une fois que l'existence des structures amassées est claire pour les catégories 2-Calabi-Yau non nécessairement simplement lacées, nous aimerions, dans un premier volet, proposer une notion adéquate de potentiel pour les carquois modulés, et dans un second volet, généraliser les mutations de carquois avec potentiels aux carquois modulés avec potentiels. Ici, nous commençons l'étude des carquois modulés avec potentiels et de leurs mutations et obtenons des versions généralisées de certains résultats de [24]. Le plus important et difficile à obtenir est le théorème de décomposition 3.4.2 ou de façon équivalente le théorème de réduction 3.4.4, généralisant [24, 4.6 (splitting theorem)], et selon lequel, la réduction des carquois modulés avec potentiels est toujours possible, au moins lorsque le corps de base est parfait. Le second résultat qui mérite aussi d'être mentionné est le corollaire 3.5.2 et le théorème 3.5.1, décrivant les mutations de carquois modulés avec potentiels à une équivalence droite faible près. Ce second résultat suit du premier en appliquant les mêmes arguments que ceux de [24] sans qu'ils soit nécessaire de développer des outils supplémentaires.

Après l'introduction des carquois avec potentiels, Buan, Iyama, Reiten et Smith ont montré dans [11] que la mutation des carquois avec potentiels est compatible avec la mutation des objets inclinants amassés dans les catégories 2-Calabi-Yau possédant une structure amassée. De plus les algèbres inclinées 2-Calabi-Yau sont étroitement liées aux algèbres jacobiniennes associées aux carquois avec potentiels, en particulier les algèbres inclinées amassées apparaissent comme algèbres jacobiniennes des carquois avec potentiels. Ce dernier fait, qui a d'ailleurs motivé notre intérêt d'introduire et d'étudier les carquois modulés avec potentiels, nous a amené à la question suivante : les algèbres inclinées amassées non-simplement lacées sont-elles aussi données par les algèbres jacobiniennes de carquois modulés avec potentiels ? En établissant une version généralisée de [11, 5.1], nous obtenons une réponse affirmative à la question précédente au moins lorsque le corps de base est parfait (Théorème 4.3.2). Et dans le cas particulier des algèbres de représentation finie, nous obtenons une caractérisation complète et explicite des algèbres inclinées amassées de types  $A$ ,  $B$  et  $C$  en termes d'algèbres jacobiniennes (Théorème 5.2.3). Une caractérisation similaire pour les algèbres inclinées amassées simplement lacées et de représentation finie (types  $A$ ,  $D$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ) est obtenue d'abord dans [13] en utilisant les carquois liés, puis dans [24] en utilisant les carquois avec potentiels.

Ayant maintenant à notre disposition le fait que les carquois modulés avec potentiels se comportent bien vis-à-vis des mutations et des objets inclinant amassés, nous n'avons pas pu résister à l'attrait de la plus récente construction des catégories amassées obtenue par C. Amiot dans sa thèse [1] (2008) : à un carquois avec potentiel Jacobi-fini  $(Q, W)$ , elle associe une catégorie amassée  $\mathcal{C}_{(Q,W)}$  généralisant la construction originelle de [12]. Nous proposons une version non-simplement lacée de la catégorie  $\mathcal{C}_{(Q,W)}$  en construisant pour chaque carquois modulé avec potentiel Jacobi-fini  $(Q, m)$  une catégorie amassée  $\mathcal{C}_{(Q,m)}$ . Et sous-réserve

que le résultat de Bernhard Keller se généralise au contexte des carquois modulés, il suit que les résultats de Claire Amiot [1, 7.9,7.10] admettent une généralisation immédiate comme suit : la catégorie amassée (non-simplement lacée)  $\mathcal{C}_{(\mathcal{Q},m)}$  est aussi Hom-finie 2-Calabi-Yau et les algèbres jacobiniennes de carquois modulés avec potentiels apparaissent elles aussi comme algèbres inclinées 2-Calabi-Yau.

Les différents thèmes abordés dans la présente thèse sont organisés comme suit : les cinq chapitres doivent en principe être lus dans un ordre chronologique, en allant du premier au cinquième. Le premier chapitre rappelle quelques concepts de base en théorie des représentations des algèbres, tels que les représentations de carquois modulés, les  $\tau$ -catégories et surtout divers concepts autour des catégories triangulées et des catégories 2-Calabi-Yau ; nous y fixons aussi une bonne partie des notations utilisées dans la suite. Le deuxième chapitre est dédié à la généralisation des structures amassées et peut toutefois être lu indépendamment des autres. Au troisième chapitre nous abordons l'étude des carquois modulés avec potentiels ainsi que leur mutations. Le quatrième chapitre vient alors généraliser les résultats de [11] et se termine par la construction de la catégorie amassée  $\mathcal{C}_{(\mathcal{Q},m)}$ . En fin au cinquième chapitre, la description des algèbres inclinées amassées de types  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$  et  $\mathbb{C}$  est obtenue en utilisant les carquois modulés avec potentiels, ce chapitre a d'ailleurs été le point de départ de cette thèse.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Une technique essentielle en théorie des représentations des algèbres est l'utilisation des carquois pour représenter les algèbres sur des corps algébriquement clos. Cependant lorsque le corps de base n'est plus algébriquement clos, comme  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ou les corps finis  $\mathbb{F}_q$ , les carquois ne suffisent plus pour représenter les algèbres. La solution à cette limitation est fournie par l'utilisation des carquois modulés ou des espèces. Dans ce chapitre et dans toute la suite,  $k$  désigne un corps commutatif,  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels tandis que  $\mathbb{N}_* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Un  $k$ -surcorps ou encore une  $k$ -algèbre à division est une  $k$ -algèbre  $E$  qui est aussi un corps, contenant donc  $k$  comme sous-corps central.

### 1.1 Quelques conventions pour les catégories additives et abéliennes

Pour une catégorie quelconque  $\mathcal{A}$ , la classe des objets sera souvent notée  $\text{obj}(\mathcal{A})$  et pour deux objets  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{A}$  nous utilisons les deux notations  $\mathcal{A}(X, Y)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  pour désigner l'ensemble des morphismes de  $X$  vers  $Y$ . La composition est définie et notée comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(Y, Z) \times \mathcal{A}(X, Y) & \longrightarrow & \mathcal{A}(X, Z) \\ (g, f) & \longmapsto & g \circ f = g \cdot f = gf \end{array}$$

La catégorie opposée de  $\mathcal{A}$  est notée  $\mathcal{A}^\circ$ , avec  $\text{obj}(\mathcal{A}^\circ) = \text{obj}(\mathcal{A})$  et  $\mathcal{A}^\circ(Y, X) = \mathcal{A}(X, Y)$  pour tous objets  $X, Y$ .

Soit  $I$  un ensemble, et  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'objets dans  $\mathcal{A}$ . Alors une somme directe (ou encore un coproduit) de la famille  $(X_i)_{i \in I}$  consiste en une paire  $(X = \bigoplus_{i \in I} X_i, (q_i)_{i \in I})$  avec  $X = \bigoplus_{i \in I} X_i \in \text{obj}(\mathcal{A})$  et où les  $q_i : X_i \longrightarrow X$ ,  $i \in I$ , sont des morphismes appelés injections ou inclusions canoniques possédant la propriété universelle suivante : pour toute paire  $(Y, (f_i)_{i \in I})$  où  $f_i \in \mathcal{A}(X_i, Y)$  pour chaque  $i \in I$ , il existe un unique morphisme  $f \in \mathcal{A}(\bigoplus_{i \in I} X_i, Y)$  tel que  $f_i = f \circ q_i$  pour chaque  $i \in I$ . De façon duale, un produit de la famille  $(X_i)_{i \in I}$  consiste en une paire  $(P = \prod_{i \in I} X_i, (p_i)_{i \in I})$  où  $P \in \text{obj}(\mathcal{A})$  et les morphismes  $p_i : P \longrightarrow X_i$ ,  $i \in I$ , sont appelés projections ou surjections canoniques possédant la propriété universelle suivante : pour

toute paire  $(Y, (f_i)_{i \in I})$  où  $f_i \in \mathcal{A}(Y, X_i)$  pour chaque  $i \in I$ , il existe un unique morphisme  $f \in \mathcal{A}(Y, \prod_{i \in I} X_i)$  tel que  $f_i = p_i \circ f$  pour chaque  $i \in I$ . Lorsque  $I$  est fini, un biproduit d'une famille finie d'objets  $(X_i)_{i \in I}$  est la donnée d'une paire  $(E, (p_i, q_i)_{i \in I})$  où  $E$  est un objet de  $\mathcal{A}$ ,  $p_i : X \longrightarrow X_i$  et  $q_i : X_i \longrightarrow X$  sont des morphismes respectivement appelés projections et injections (ou inclusions) canoniques du biproduit et satisfont aux deux identités ci-après :

$$\sum_{i \in I} q_i p_i = \mathbb{1}_X \text{ et } p_i q_i = \mathbb{1}_{X_i} \text{ et pour tous } i \neq j \text{ on a } p_i q_j = 0.$$

Soit  $k$  un anneau commutatif.  $\mathcal{A}$  est une  $k$ -catégorie si la condition suivante est satisfaite :

L1 Pour chaque paire d'objets  $X, Y \in \text{obj}(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A}(X, Y)$  est un  $k$ -module. Et de plus, la composition des morphismes est une opération  $k$ -bilineaire,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(Y, Z) \otimes_k \mathcal{A}(X, Y) & \longrightarrow & \mathcal{A}(X, Z) \\ (g \circ f) & \longmapsto & g \circ f = g \cdot f = gf. \end{array}$$

Une  $k$ -catégorie  $\mathcal{A}$  est dite *linéaire* ou bien *additive* si l'axiome suivant est satisfait :

L2  $\mathcal{A}$  admet des sommes directes finies (et ceci équivaut à dire que  $\mathcal{A}$  possède des biproduits). En particulier  $\mathcal{A}$  admet un objet nul  $0$ , le biproduit nul qui est nécessairement à la fois terminal et final.

Une  $\mathbb{Z}$ -catégorie linéaire est simplement appelée une catégorie additive.

### Notation matricielle

Considérons dans une catégorie additive  $\mathcal{A}$  un objet  $X = \bigoplus_{1 \leq j \leq n} X_j$  dont les injections canoniques sont notées  $q_j \in \mathcal{A}(X_j, X)$ , et un objet  $Y = \bigoplus_{i \leq i \leq m} Y_i$  dont les projections canoniques sont notées  $p_i \in \mathcal{A}(Y, Y_i)$ . Le morphisme noté sous la forme matricielle

$$\bigoplus_{1 \leq j \leq n} X_j \xrightarrow{h = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{bmatrix}} \bigoplus_{i \leq i \leq m} Y_i$$

désigne l'unique morphisme dans  $\mathcal{A}(X, Y)$  tel que  $h_{i,j} = p_i \circ h \circ q_j \in \mathcal{A}(X_j, Y_i)$ . Si  $m = 1$  alors on écrit simplement  $h = [h_1, \dots, h_n]$  avec  $h_j = h \circ q_j \in \mathcal{A}(X_j, Y)$ . Si on a plutôt  $n = 1$  alors on notera simplement  $h = {}^t[h_1, \dots, h_m] = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$  avec  $h_i = p_i \circ h \in \mathcal{A}(X, Y_i)$ .

### Catégories abéliennes ou exactes

Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme dans une  $k$ -catégorie  $\mathcal{A}$ . Un noyau de  $f$  est un objet universel  $\text{Ker} f$  muni d'un morphisme  $j : \text{Ker} f \longrightarrow X$  tel que  $f \circ j = 0$  et possédant la propriété universelle suivante : pour tout  $X' \in \text{obj}(\mathcal{A})$  et tout autre morphisme  $u \in \mathcal{A}(X', X)$  tel que  $fu = 0$ , il existe un unique  $u' \in \mathcal{A}(X', \text{Ker} f)$  tel que  $u = ju'$ . En particulier  $j$  est nécessairement un monomorphisme. D'une manière duale, un conoyau de  $f$  consiste en un objet  $\text{Coker} f$  muni d'un morphisme  $p : Y \longrightarrow \text{Coker} f$  tel que  $p \circ f = 0$  et possédant la propriété universelle suivante : pour tout  $Y' \in \text{obj}(\mathcal{A})$  et tout autre morphisme

$v \in \mathcal{A}(Y, Y')$  tel que  $vf = 0$ , il existe un unique  $v' \in \mathcal{A}(\text{Coker } f, Y')$  tel que  $v = v'p$ . Nécessairement  $p$  est un épimorphisme. Les objets universels précédents, lorsqu'ils existent, sont uniques à isomorphisme près. Si  $\mathcal{A}$  admet des noyaux et des conoyaux, alors la propriété universelle des noyaux et des conoyaux montre que chaque morphisme  $f \in \mathcal{A}(X, Y)$  possède une unique factorisation canonique  $f = u' \circ \bar{f} \circ p'$  donnée par un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{p} & \text{Coker } f \\ & & p' \downarrow & & \uparrow u' & & \\ & & \text{Coker } u & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Ker } p & & \end{array}$$

où  $u'$  est le noyau du conoyau  $p$  de  $f$ ,  $p'$  est le conoyau du noyau  $u$  de  $f$ . On pose alors  $\text{Im } f = \text{Ker } p$  et cet objet est appelé *l'image* de  $f$ . On pose aussi  $\text{Coim } f = \text{Coker } u$  et cet objet est appelé *la coimage* de  $f$ .

La catégorie  $\mathcal{A}$  est dite *abélienne* si  $\mathcal{A}$  est additive, admet des noyaux et des conoyaux, et pour chaque morphisme  $f \in \mathcal{A}(X, Y)$  le morphisme de la factorisation canonique de  $f$  est un isomorphisme  $\bar{f} : \text{Coim } f \xrightarrow{\sim} \text{Im } f$ . Dans ce cas l'objet conoyau sera aussi parfois noté  $Y/\text{Im } f$ .

Nous aimerions maintenant mentionner que les *catégories exactes* sont une généralisation des catégories abéliennes et de nombreuses constructions en algèbre homologique qui sont habituellement faites sur les catégories abéliennes se généralisent bien sur les catégories exactes. De façon informelle, une *catégorie exacte* est une paire  $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  formée d'une catégorie additive  $\mathcal{A}$  munie d'une *structure exacte*  $\mathcal{E}$  laquelle consiste en une famille de *paires noyaux-conoyaux* (ou *suites exactes courtes*)  $\xi = (i, p) : Y \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} X$  avec  $i = \ker(p)$  et  $p = \text{coker}(i)$ , assujettie à certains axiomes inspirés par certaines propriétés des suites exactes courtes dans les catégories abéliennes. Nous référons à Bühler [14] pour les axiomes des catégories exactes (attribués à Quillen) et pour un très bon survol des catégories exactes. Notons qu'une suite *exacte courte*  $\xi$  comme précédemment est aussi appelée une *extension* de l'objet  $X$  par l'objet  $Y$ .

Sauf mention contraire ou mention additionnelle, toutes les catégories sont supposées additives et chaque catégorie additive est toujours une  $\mathbb{k}$ -catégorie où  $\mathbb{k}$  vaudra le plus souvent le corps  $\mathbb{k}$  ou simplement l'anneau des entiers  $\mathbb{Z}$ . De plus, les foncteurs seront également  $\mathbb{k}$ -linéaires.

Les catégories de modules font partie des exemples les mieux étudiés des catégories abéliennes. Si  $A$  est une  $\mathbb{k}$ -algèbre, alors  $\text{Mod } A$  et  $A\text{-Mod}$  désignent respectivement les catégories de tous les  $A$ -modules à droite et de tous les  $A$ -modules à gauche, les sous-catégories pleines correspondantes pour les modules de type fini (finiment engendrés) sont notées  $\text{mod } A$  et  $A\text{-mod}$ . Sauf mention additionnelle, chaque algèbre sera implicitement supposée être une  $\mathbb{k}$ -algèbre de dimension finie sur un corps  $\mathbb{k}$  et les modules seront presque toujours de dimension finie. La nature droite ou gauche des modules ne retiendra pas tellement notre attention puisque nous aimerions les traiter comme des objets d'une catégorie abstraite; toutefois il s'agira le plus souvent des modules à droite. Pour deux  $\mathbb{k}$ -surcorps quelconques  $E$  et  $F$ , on notera  ${}_E\text{bimod}_F$  la catégorie des  $E$ - $F$ -bimodules de dimension finie, où un bimodule  ${}_E B_F$  est de dimension finie s'il est de dimension finie à la fois à gauche et à droite.

## 1.2 Algèbres de carquois modulés liés

Le but de cette section est de rappeler quelques concepts autour des carquois modulés qui apparaissent presque partout dans le présent travail. Certaines des notations utilisées ici sont empruntées de [8, chap 4] contenant un bref survol de la théorie des représentations des carquois modulés ; l'on peut aussi se référer à [25].

Commençons par introduire la notion suivante qui sera incorporée dans la définition de la modulation d'un carquois valué.

**Définition 1.2.1.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $k$ -surcorps.

- (i) Une *forme trace* (ou un *morphisme trace*) sur  $E$  est un morphisme  $k$ -linéaire  $t : E \rightarrow k$  tel que  $t(ae) = t(ea)$  pour tous  $a, e \in E$  ;  $t$  est dite *non-dégénérée* si son *radical*  $R_t := \{e \in E : \forall a \in E, t(ae) = 0\}$  est nul.
- (ii) Soit  $B$  un  $E$ - $F$ -bimodule. Le *dual gauche*, le  $k$ -*dual* et le *dual droit* du bimodule  $B$  sont respectivement donnés par,  ${}^1B = \text{Hom}_E({}_E B_F, {}_E E_E)$ ,  $\text{Hom}_k({}_E B_F, k)$  et  $B^r = \text{Hom}_F({}_E B_F, {}_F F_F)$  ; leurs différentes structures étant définies comme suit : pour tous scalaires  $e \in E, a \in F$  et pour tout éléments  $u \in {}^1B, \xi \in \text{Hom}_k({}_E B_F, k), v \in B^r$  et  $x \in B$  on a :  $(a \cdot u \cdot e)(x) = u(x \cdot a) \cdot e, (a \cdot \xi \cdot e)(x) = \xi(e \cdot x \cdot a)$  et  $(a \cdot v \cdot e)(x) = a \cdot v(e \cdot x)$ .

On dira que  $B$  est *dualisant* (ou admet un dual) si le dual gauche et le dual droit de  $B$  sont isomorphes.

- (iii) Une *paire dualisante* (et *symétrisable*) de bimodules est la donnée d'un ensemble  $\{B, B'; b, b'\}$  formé de deux bimodules dualisants et de deux formes bilinéaires non-dégénérées  $B \otimes_F B' \xrightarrow{b} E$  et  $B' \otimes_E B \xrightarrow{b'} F$ , symétrisables sur  $k$  via deux formes traces non-dégénérées  $t : E \rightarrow k$  et  $t' : F \rightarrow k$  au sens qui suit :  $t(b(x \otimes x')) = t'(b'(x' \otimes x))$  pour tous  $x \in B$  et  $x' \in B'$ . Les deux bimodules  $B$  et  $B'$  seront alors dits *mutuellement duals* et on écrira  $B' = B^*$  et  $B = B'^*$ .

Pour une paire dualisante de bimodules  $\{B, B'; b, b'\}$ , on omettra très souvent de préciser les deux formes bilinéaires  $b$  et  $b'$ . Au chapitre 3 de ce travail il sera nécessaire de mieux préciser comment construire de façon naturelle des paires dualisantes et symétrisables de bimodules. La condition de symétrisabilité que nous exigeons dans la définition 1.2.2 pour les carquois modulés est nécessaire uniquement à partir du chapitre 3 et un peu au chapitre 2, avant on peut se passer de cette condition.

**Définition 1.2.2.** Soit  $I$  un ensemble de points.

- ▷ Un *graphe valué* sur  $I$  est un graphe étiqueté  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \iota, d)$  avec  $\Gamma_0 = I, \Gamma_1$  désigne l'ensemble des arêtes et pour chaque arête  $\alpha \in \Gamma_1, \iota(\alpha)$  est sous-ensemble formé d'au plus deux points appelés extrémités de  $\alpha$  ou encore points d'incidence de  $\alpha$ , l'étiquetage  $d$  du graphe appelé dans ce cas *valuation* prescrit pour chaque arête  $\alpha \in \Gamma_1(i, j)$  d'extrémité  $i$  et  $j$  une paire non-ordonnée d'entiers naturels non nuls  ${}_i d_j^\alpha, {}_j d_i^\alpha \in \mathbb{N}$ . De plus, la valuation  $d$  doit être *symétrisable* (à gauche ou à droite), où une fonction symétrisante (à droite)  $\Gamma_0 \xrightarrow{d} \mathbb{N}_*$  pour  $d$  prescrit pour chaque point  $i \in I$  un entier naturel non nul  $n_i \in \mathbb{N}_*$  tel que  ${}_i d_j^\alpha n_j = {}_j d_i^\alpha n_i$  pour tout  $\alpha \in \Gamma_1(i, j)$ . Chaque arête valuée  $\alpha \in \Gamma_1(i, j)$  peut

alors être illustrée par  $i \xrightarrow{\alpha} j$  ou par  $\alpha : i \xrightarrow{i d_j^\alpha, j d_i^\alpha} j$  si l'on désire mettre en évidence la valuation, une

boucle  $\alpha \in \Gamma_1(i, i)$  est alors illustrée par  $i \xrightarrow{i d_i^\alpha} i$  (ou par  $\alpha : i \xrightarrow{i d_i^\alpha} i$ ).

- Un *carquois valué*  $Q = (\Gamma, s, t)$  de type  $\Gamma$  consiste en un graphe valué  $\Gamma$  muni d'une orientation donnée en prescrivant pour chaque arête  $\alpha \in \Gamma_1(i, j)$  sa *source*  $s(\alpha)$  et son but ou encore sa *terminaison*  $t(\alpha)$ , avec  $\{s(\alpha), t(\alpha)\} = \nu(\alpha) = \{i, j\}$ ,  $\alpha$  est alors appelée une *flèche valuée* de  $s(\alpha)$  vers  $t(\alpha)$  dans  $Q$  et on note :  $d_\alpha := s(\alpha) d_{t(\alpha)}^\alpha$ ,  $d_\alpha^* := t(\alpha) d_{s(\alpha)}^\alpha$  et  $d(\alpha) := (d_\alpha, d_\alpha^*) = (s(\alpha) d_{t(\alpha)}^\alpha, t(\alpha) d_{s(\alpha)}^\alpha)$ ; ainsi la flèche valuée  $\alpha$  est illustrée par  $s(\alpha) \xrightarrow{d_\alpha, d_\alpha^*} t(\alpha)$ .
- Un *carquois k-modulé*  $Q = (Q, \mathfrak{M})$  consiste en un carquois valué  $Q$  de type  $\Gamma$  muni d'une  $k$ -modulation, où une *k-modulation (symétrisable)*  $\mathfrak{M}$  de  $Q$  et de  $\Gamma$  prescrit pour chaque point  $i \in I$  une paire  $(k_i, t_i)$  formée d'un  $k$ -surcorps  $k_i$  de dimension finie muni d'une forme trace non-dégénérée  $t_i$ , et relativement à la famille de formes traces  $(t_i)_{i \in I}$ ,  $\mathfrak{M}$  prescrit pour chaque flèche valuée  $i \xrightarrow{\alpha} j$  une paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{ {}_i B_j^\alpha, {}_j B_i^{\alpha^*}; {}_i b_j^\alpha, {}_j b_i^{\alpha^*} \}$  où  ${}_i B_j^\alpha$  est dans  ${}_i \text{bimod}_{k_j}$  avec  ${}_i B_j^\alpha \otimes {}_j B_i^{\alpha^*} \xrightarrow{{}_i b_j^\alpha} k_i$  et on note aussi  ${}_i b_j^{\prime\alpha} := {}_j b_i^{\alpha^*}$ . En outre, la valuation de  $Q$  provient de la modulation  $\mathfrak{M}$  en exigeant pour chaque flèche  $\alpha \in Q_1(i, j)$  l'égalité ci-après :  $\dim_{k_j} {}_i B_j^\alpha = d_\alpha = {}_i d_j^\alpha$ . Au cas où le sous-ensemble  $\Gamma_1(i, j) = Q_1(i, j) \cup Q_1(j, i)$  est vide, on pose  ${}_i B_j = 0 = {}_j B_i$  et ainsi  ${}_i d_j = 0 = {}_j d_i$ . Le type de  $Q$  est le graphe  $k$ -modulé  $(\Gamma, \mathfrak{M})$ .
- $Q$  est dit *localement fini* si l'ensemble de ses flèches est fini, si de plus l'ensemble de ses points est aussi fini alors on dit que  $Q$  est *fini*.

Nous adopterons la convention suivante. Si  $Q$  est un carquois modulé localement fini, sa modulation sera toujours présentée sous la *forme compacte* : à chaque paire ordonnée de points  $i, j \in I$  correspond une unique paire dualisante et symétrisable de bimodules

$$\begin{aligned} & \{ {}_i B_j, {}_i B_j^*, {}_i b_j, {}_i b_j' \} \text{ avec } {}_i B_j := \bigoplus_{\alpha \in Q_1(i, j)} {}_i B_j^\alpha, {}_i B_j^* := \bigoplus_{\alpha \in Q_1(i, j)} {}_j B_i^{\alpha^*} \text{ où } {}_j B_i^{\alpha^*} = ({}_i B_j^\alpha)^*; \\ & {}_i b_j = \bigoplus_{\alpha \in Q_1(i, j)} {}_i b_j^\alpha : {}_i B_j \otimes {}_i B_j^* \longrightarrow k_i \text{ et} \tag{1.2.1} \\ & {}_i b_j' = \bigoplus_{\alpha \in Q_1(i, j)} {}_i b_j^{\prime\alpha} = \bigoplus_{\alpha \in Q_1(i, j)} {}_j b_i^{\alpha^*} : {}_i B_j^* \otimes {}_i B_j \longrightarrow k_j. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction (minimale) symétrisante pour la valuation  $d$  de  $Q$  étant notée  $I \xrightarrow{n} \mathbb{N}_*$ , à chaque paire ordonnée  $i, j \in I$  correspond également une unique flèche (pleinement) valuée

$$i \xrightarrow{{}_i d_j, {}_i d_j^*} j, \text{ avec } {}_i d_j = \sum_{\alpha \in Q_1(i, j)} d_\alpha = \sum_{\alpha \in Q_1(i, j)} {}_i d_j^\alpha, {}_i d_j^* = \sum_{\alpha \in Q_1(i, j)} d_\alpha^* \text{ et on a : } {}_i d_j n_j = n_i {}_i d_j^*. \tag{1.2.1'}$$

En particulier, pour une paire ordonnée  $i, j \in I$ , l'ensemble  $Q_1(i, j)$  est vide si et seulement si  ${}_i B_j = 0$ , si et seulement si  ${}_i d_j = 0$ , si et seulement si  ${}_i d_j^* = 0$ , si et seulement si l'unique flèche (pleinement) valuée représentant  $Q_1(i, j)$  est *0-valuée*. Dans toute la suite, les carquois modulés seront supposés localement fini, et présentés par les relations (1.2.1) et (1.2.1'), à moins qu'il soit nécessaire d'utiliser une forme non

compacte. Soient  $E, F$  et  $L$  trois  $k$ -algèbres (à division ou des produit directs de  $k$ -algèbres à division), dans la suite et sauf mention contraire, tout produit tensoriel  $M \otimes_F N$  d'un  $E$ - $F$ -bimodule  $M$  par un  $F$ - $L$ -bimodule  $N$  sera le plus souvent noté  $M \otimes N$  dès que la nature des bimodules considérés est clairement indiquée par le contexte.

Avec les notations précédentes, le *carquois valué opposé*  $Q^\circ$  de  $Q$  est par définition de même type que  $Q$  mais d'orientation opposée : pour tous  $i, j \in Q_0$  on peut poser  $Q_1^\circ(j, i) = \{\alpha^* : \alpha \in Q_1(i, j)\}$ . Le *dual*  $Q^* = (Q^\circ, \mathfrak{M}^*)$  du carquois modulé  $Q$  est essentiellement de même type  $\Gamma$  que  $Q$ , mais d'orientation opposée : si on nomme  $\alpha$  la flèche valuée représentant  $Q_1(i, j)$ , alors la paire dualisante et symétrisable de bimodules associée à  $\alpha^* \in Q_1^\circ(j, i)$  est la même que celle associée à  $\alpha$  et donnée par  $\{(iB_j^\alpha)^* = {}_jB_i^{\alpha^*}, {}_iB_j^\alpha = ({}_jB_i^{\alpha^*})^*\}$ , où on convient que  $\alpha^{**} = \alpha$ . Par ailleurs, l'*opposé*  $Q^\circ = (Q^\circ, \mathfrak{M}^\circ)$  de  $Q$  est tel que la modulation opposée  $\mathfrak{M}^\circ$  s'obtienne de  $\mathfrak{M}$  en remplaçant chaque surcorps  $k_i$  par son opposé  $k_i^\circ$ , et chaque  $k_i$ - $k_j$ -bimodule  ${}_iB_j$  dans  $Q$  est vu dans  $Q^\circ$  comme un  $k_j^\circ$ - $k_i^\circ$ -bimodule. À  $Q$  on peut aussi associer un carquois modulé donné par  $Q^\circ = (Q, \mathfrak{M}^\circ) = (Q^\circ)^*$  dont l'orientation des flèches reste inchangée, mais la modulation est la modulation opposée de la modulation initiale.

On fixe pour la suite un carquois modulé  $Q$  dont le carquois valué sous-jacent  $Q$  est de type  $\Gamma$  et de modulation  $\mathfrak{M}$  notée sous forme compacte  $\{k_i, \{{}_iB_j, {}_iB_j^*, {}_i\mathfrak{b}_j, {}_i\mathfrak{b}'_j\}\}$ ; on posera toujours  $I = Q_0 = Q_0$  l'ensemble des points, l'ensemble des flèches étant comme ci-dessus  $Q_1 = Q_1$ . Pour deux points  $i, j \in I$ , le sous-ensemble  $Q(i, j) = Q(i, j)$  désigne toujours l'ensemble de tous les chemins valués de  $i$  vers  $j$ , où un *chemin valué* non trivial dans  $Q(i, j)$  est une suite (non-vidée)  $\alpha_1 \cdots \alpha_m$  de flèches valuées telles que  $s(\alpha_1) = i$ ,  $t(\alpha_m) = j$  et  $t(\alpha_s) = s(\alpha_{s+1})$  pour  $1 \leq s \leq m - 1$ .

On fixe ensuite l'algèbre semisimple  $K = \prod_{i \in I} k_i$  donnée par le produit direct des  $k$ -surcorps  $k_i$ , chaque  $k_i$  étant vu comme un sous-corps de  $K$  ayant pour unité  $e_i$ , de sorte que  $\{e_i : i \in I\}$  est un système canonique d'idempotents primitifs orthogonaux pour  $K$ . De même le  $K$ -bimodule  $B := kQ_1 := \bigoplus_{i, j \in I} {}_iB_j$  est également fixé et appelé le bimodule des flèches valuées dans  $Q$ , on considère aussi le  $K$ -bimodule  $B^* = \bigoplus_{i, j \in I} {}_iB_j^*$ , si  $Q$  est fini alors on obtient une paire dualisante et symétrisable de  $K$ -bimodules  $\{B, B^*; \mathfrak{b}, \mathfrak{b}'\}$ . L'*algèbre (tensorielle) de chemins* de  $Q$  est par définition l'algèbre tensorielle du  $K$ -bimodule  $B$  : c'est donc une  $k$ -algèbre  $\mathbb{N}$ -graduée donnée par  $kQ = T_K(B) = \bigoplus_{m \geq 0} kQ_m$  où la  $m^{\text{ième}}$  puissance tensorielle du bimodule  $B$  donnée par  $kQ_m = B^{(m)}$  est par définition le  $K$ -bimodule des chemins de longueur  $m$ , avec  $B^{(0)} = K$ ,  $B^{(1)} = B$  et  $B^{(m+1)} = B^{(m)} \otimes_K B$  pour tout  $m \geq 1$ . Remarquons que si les valuations des flèches dans  $Q$  sont toutes de la forme  $(a, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , et si la modulation dans  $Q$  est trivialement induite par le corps de base  $k$  (c'est-à-dire, tous les  $k$ -surcorps coïncident avec  $k$  et les bimodules sont tous des  $k$ -espaces vectoriels  $k^a$  munis de multiplication ordinaire de  $k$ ), alors le carquois valué  $Q$  peut être vu comme un carquois ordinaire en remplaçant chaque flèche valuée  $\alpha : i \xrightarrow{a, a} j$  par  $a$  flèches de  $i$  vers  $j$ , et se faisant, l'algèbre (tensorielle)  $kQ$  coïncidera avec l'algèbre de chemin ordinaire d'un carquois non valué. On pose aussi  $kQ_{(t)} = \bigoplus_{m \geq t} kQ_m$  l'idéal des chemins de longueur au moins  $t$  dans  $kQ$ ;  $kQ_{(1)}$  est alors comme d'habitude l'idéal des flèches de  $kQ$  et on a bien  $kQ/kQ_{(1)} = \prod_{i \in I} k_i$ . Le bimodule le long d'un chemin  $\omega : i \xrightarrow{\alpha_1} i_1 \cdots i_t \xrightarrow{\alpha_j} j$  est le  $k_i$ - $k_j$ -bimodule défini par :  ${}_iB_j^\omega = {}_iB_{i_1}^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes {}_{i_t}B_j^{\alpha_j}$ . Pour  $P \subseteq Q(i, j)$ , le bimodule correspondant est

donné par  ${}_i B_j^P = \bigoplus_{\omega \in P} {}_i B_j^\omega$ ; on posera  ${}_i \tilde{B}_j = e_i kQ e_j = \bigoplus_{\omega \in Q(i,j)} {}_i B_j^\omega$  pour désigner le bimodule de tous les chemins de  $i$  vers  $j$ . On pose enfin  ${}_j B_i^{\omega^*} := ({}_i B_j^\omega)^* = {}_j B_{i_1}^{\alpha_j^*} \otimes \cdots \otimes {}_i B_{i_l}^{\alpha_1^*}$  le bimodule dual correspondant au chemin dual  $\omega^*$ . L'énoncé ci-après est bien connu.

**Proposition 1.2.1.** *L'algèbre de chemins  $kQ$  associée à un carquois  $k$ -modulé localement fini  $Q$  est associative héréditaire (et unitaire si en plus  $Q$  est fini);  $kQ$  est connexe si et seulement si c'est le cas pour  $Q$ ; elle est de dimension finie si et seulement si  $Q$  est fini et acyclique, dans ce cas l'idéal des flèches  $kQ_{(1)}$  coïncide avec le radical de  $kQ$ .  $\square$*

**Exemple 1.2.3.** Soit  $\mathbb{H} = \mathbb{R}\langle 1, u, v, w \rangle$  l'algèbre des quarternions réels, avec  $u^2 = v^2 = w^2 = -1$  et  $uv = -vu = w$ ,  $vw = -wv = u$  (et donc  $wu = -uw = v$ ). Comme trace  $\mathbb{R}$ -linéaire non dégénérée sur  $\mathbb{H}$  on prend la projection canonique  $\mathbb{H} \xrightarrow{t} \mathbb{R} : t(1) = 1$  et  $t(u) = t(v) = t(w) = 0$ . On considère la famille  $((\mathbb{H}, t), (\mathbb{C}, p), (\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}}))$  où  $p \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$  est aussi la projection canonique. Considérons le graphe valué  $\Gamma : 3 \xrightarrow{2,1} 2 \xrightarrow{1,4} 1$ , alors on a le graphe modulé :  $\mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}\mathbb{C}_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\mathbb{C}\mathbb{C}_{\mathbb{R}}} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbb{H}\mathbb{H}, \mathbb{H}\mathbb{H}} \mathbb{H}$ , où la structure de chaque bimodule est induite par la multiplication ordinaire des corps sous-jacents, le corps central de base étant  $\mathbb{R}$ ; ici  $k_3 = \mathbb{C}$ ,  $k_2 = \mathbb{R}$  et  $k_1 = \mathbb{H}$ . Une orientation linéaire de  $\Gamma$  nous donne le carquois modulé de type  $\Gamma$  suivant :  $\mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{C}\mathbb{C}_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\mathbb{C}\mathbb{C}_{\mathbb{R}}} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbb{H}\mathbb{H}, \mathbb{H}\mathbb{H}} \mathbb{H}$ , où les paires dualisantes et symétrisables de bimodules sont induites par les projections canoniques  $t \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ ,  $p \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$  et  $1_{\mathbb{R}}$ . Ici,  $K = \mathbb{H} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ ,  $B = {}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \oplus {}_{\mathbb{R}}\mathbb{H}_{\mathbb{H}}$  et  $B^{(m)} = 0$  pour  $m \geq 3$ . On obtient que  $kQ = K \oplus B \oplus B^{(2)} = (\mathbb{H} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}) \oplus ({}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \oplus {}_{\mathbb{R}}\mathbb{H}_{\mathbb{H}}) \oplus {}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \otimes {}_{\mathbb{R}}\mathbb{H}_{\mathbb{H}}$ , et on a un isomorphisme d'algèbres

$$kQ \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} \mathbb{H} & 0 & 0 \\ {}_{\mathbb{R}}\mathbb{H}_{\mathbb{H}} & \mathbb{R} & 0 \\ {}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \otimes {}_{\mathbb{R}}\mathbb{H}_{\mathbb{H}} & {}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}_{\mathbb{R}} & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$

La notion de relation peut être définie sur les carquois modulés comme suit. Soient  $i$  et  $j$  deux points dans  $Q$ ,  $P \subset Q_{(2)}(i, j)$  un sous-ensemble fini non vide formé de chemins de longueur au moins 2; nous appelons alors *relation sur  $Q$  de  $i$  vers  $j$  et de support contenu dans  $P$* , tout sous-bimodule non nul  ${}_i \tau_j \subset {}_i B_j^P$ . Si de plus  ${}_i \tau_j \not\subset {}_i B_j^{P'}$  pour tout sous-ensemble propre  $P' \subsetneq P$ , alors on dira que  ${}_i \tau_j$  est de support  $P$ . La *longueur* de  ${}_i \tau_j$  est l'entier  $l \geq 2$  donné par  $l = \max \{ \ell(\omega) : \omega \in P \}$ . On a également les notions usuelles suivantes pour une relation  ${}_i \tau_j$  de support  $P$ .

- (a)  ${}_i \tau_j$  est appelée une *relation-zéro* si elle coïncide avec  ${}_i B_j^P$  tout entier.
- (b)  ${}_i \tau_j$  est appelée une *relation monomiale* si  $P$  contient un seul chemin.
- (c)  ${}_i \tau_j$  sera appelée une *relation de commutativité* si  $P = \{ \omega_1, \omega_2 \} \subseteq Q(i, j)$  consiste en deux chemins distincts et  ${}_i \tau_j$  est un sous-bimodule diagonal de  ${}_i B_j^P = {}_i B_j^{\omega_1} \oplus {}_i B_j^{\omega_2}$  tel que  ${}_i \tau_j \cap {}_i B_j^{\omega_1} = 0 = {}_i \tau_j \cap {}_i B_j^{\omega_2}$ . Si en plus  ${}_i B_j^{\omega_1} \cong {}_i B_j^{\omega_2}$ , on parle alors de *relation de commutativité stricte*.

L'idéal de  $kQ$  engendré par un ensemble  $S = \{ \tau_1, \dots, \tau_m \}$  de relations sur  $Q$  est donné par  $\langle S \rangle = kQ \otimes (K \cdot S \cdot K) \otimes kQ$ , le produit tensoriel étant comme d'habitude pris sur  $K = \prod_{i \in I} k_i$ . Plus généralement, tout idéal

(bilatère)  $R$  de  $k\mathcal{Q}$  tel que  $R \subseteq k\mathcal{Q}_{(2)}$  est appelé un *idéal de relations* ; dans ce cas, la paire  $(\mathcal{Q}, R)$  est appelée un *carquois modulé lié* et l'algèbre  $k(\mathcal{Q}, R) = k\mathcal{Q}/R$  est appelée une *algèbre de carquois modulé lié*. Soit  ${}_i\tau_j \subseteq {}_iB_j^P$  une relation dans  $S$  de  $i$  vers  $j$  et de support  $P$ . Alors,  ${}_i\tau_j$  est dite *minimale* (pour  $R = \langle S \rangle$ ) si elle est de support minimal et de longueur minimale comme exprimé par les deux conditions ci-après :

- ▷  ${}_i\tau_j \not\subseteq (R \cap {}_iB_j^{P'}) \oplus (R \cap {}_iB_j^{P''})$  pour toute partition  $\{P', P''\}$  de  $P$ .
- ▷ Si  ${}_i\tau_j \subseteq \sum_{s=1}^m ({}_iB_{i_s}^{\omega_s} \otimes {}_{i_s}\tau_{j_s}^{(s)} \otimes {}_{j_s}B_j^{\omega'_s})$ , où  $\omega_s \in \mathcal{Q}(i, i_s)$ ,  $\omega'_s \in \mathcal{Q}(j_s, j)$  et  ${}_{i_s}\tau_{j_s}^{(s)} \in S$  est une relation, alors il existe un  $s$  fixé pour lequel  $\omega_s$  et  $\omega'_s$  sont des chemins triviaux, si bien que  ${}_iB_{i_s}^{\omega_s} = k_i$ ,  ${}_{j_s}B_j^{\omega'_s} = k_j$ .

Un système de relations sur  $\mathcal{Q}$  est juste un ensemble  $S$  de relations minimales sur  $\mathcal{Q}$ .

Supposons maintenant que  $(\mathcal{Q}, R)$  est un carquois modulé lié. L'idéal de relations  $R$  se décompose comme suit :  $R = \bigoplus_{i,j} e_i R e_j$ , chaque  ${}_iR_j = e_i R e_j = k_i \cdot R \cdot k_j$  est un sous- $k_i$ - $k_j$ -bimodule de  $e_i k Q e_j$ , appelé le bimodule des relations de  $i$  vers  $j$ .  $R$  étant engendré par un ensemble de relations, il est aisé de voir que tout idéal de relation  $R$  admet un système de relations minimales tel que défini plus haut. Remarquons ensuite que chaque sous-bimodule  ${}_iR_j$  est uniquement déterminé comme le noyau d'un épimorphisme de bimodules,  ${}_{i\pi_j} : e_i k Q e_j \longrightarrow e_i k Q e_j / {}_iR_j$ . De même chaque relation  ${}_i\tau_j \subseteq {}_iR_j \cap {}_iB_j^P$  est uniquement déterminée comme le noyau d'un épimorphisme de bimodules,  ${}_iB_j^P \xrightarrow{\rho} {}_iB_j^P / {}_i\tau_j$ . Une relation minimale  ${}_i\tau_j = \ker(\rho)$  sur  $\mathcal{Q}$  sera représentée par une ligne en pointillé entre  $i$  et  $j$ , étiquetée par  $\rho$ .

Pour représenter une  $k$ -algèbre  $A$  de dimension finie et de radical  $J_A$  on procède comme suit. Soit  $\{e_1, \dots, e_n\}$  un système d'idempotents primitifs orthogonaux pour  $A$ , et  $\bar{A} = A/J_A = \prod_{1 \leq i \leq n} M_{n_i}(k_i)$  la décomposition en produit direct de l'algèbre semisimple correspondant à  $A$ . Par exemple, si  $S_i$  est le  $A$ -module à droite simple correspondant à l'idempotent  $e_i$ , alors  $k_i = \text{End}_A(S_i)$  (si on considère plutôt le  $A$ -module à gauche simple  $S'_i$  alors  $k_i = \text{End}_A(S'_i)^\circ$ ). Noter que si  $A$  est sobre, alors  $k_i = e_i \bar{A} e_i = e_i (A/J_A) e_i$ . On peut alors associer à l'algèbre  $A$  un carquois  $k$ -modulé  $\mathcal{Q}_A$  dont l'ensemble des points est  $(\mathcal{Q}_A)_0 = \{1, \dots, n\}$ , et la modulation (qu'on peut prendre symétrisable d'après le lemme 3.1.4) prescrit pour chaque point  $i$  une paire  $(k_i, \mathfrak{t}_i)$  où  $\mathfrak{t}_i$  est une forme trace non-dégénérée sur le  $k$ -surcorps  $k_i$ , à chaque bimodule non nul  ${}_iB_j = e_i (J_A/J_A^2) e_j$  correspond une unique flèche valuée  $\alpha : i \xrightarrow{{}_i d_j, {}_i d_j^*} j$  avec  ${}_i d_j = \dim_{k_i}({}_iB_j)$  (et donc  ${}_i d_j^* = \dim_{k_i}({}_iB_j) = \dim_{k_i}({}_iB_j^*)$ , où le bimodule dual  ${}_iB_j^*$  peut être choisi comme étant le  $k$ -dual  $\text{Hom}_k({}_iB_j, k)$ ). La valuation qui vient d'être décrite est bien symétrisable : si on pose  $n_i = \dim_k(k_i)$ , alors pour tous  $i, j$ , on a :  ${}_i d_j n_j = \dim_k({}_iB_j) = n_i d_j^*$ .

Les algèbres admettant une présentation par un carquois modulé lié forment une assez large classe d'algèbres, comme le montrent les deux résultats qui suivent.

**Proposition 1.2.2** ([8, 4.1.10, 4.1.11]). *On suppose que  $A$  est une  $k$ -algèbre sobre de dimension finie de radical  $J_A$  et que les deux conditions suivantes sont vraies.*

- (i) *L'épimorphisme d'algèbres  $A \longrightarrow \bar{A} = A/J_A$  scinde, si bien qu'on peut choisir une copie du corps  $k_i$  dans  $e_i A e_i$  et écrire  $e_i A e_i = k_i \oplus J_{e_i A e_i} = k_i \oplus e_i J_A e_i$ .*
- (ii) *La suite exacte courte  $0 \longrightarrow e_i J_A^2 e_j \longrightarrow e_i J_A e_j \longrightarrow e_i (J_A/J_A^2) e_j \longrightarrow 0$  scinde en tant que suite de  $k_i$ - $k_j$ -bimodules.*

Alors  $A \cong k\mathcal{Q}_A/R$  pour un idéal de relations  $R$  de  $k\mathcal{Q}_A$ .  $\square$

**Corollaire 1.2.3.** *Toute algèbre sobre  $A$  de dimension finie sur un corps parfait  $k$  se présente comme une algèbre de carquois modulé lié :  $A = k\mathcal{Q}_A/R$  pour un certain idéal de relation  $R$  sur  $\mathcal{Q}_A$ . Par conséquent toute algèbre de dimension finie sur un corps parfait est Morita-équivalente à une algèbre de carquois modulé lié.*  $\square$

### 1.3 Représentations de carquois modulés liés

Comme dans la section précédente,  $(\mathcal{Q}, R)$  désigne un carquois modulé lié fixé. Une  $k$ -représentation à droite  $V$  de  $\mathcal{Q}$  associe à chaque point  $i$  dans  $\mathcal{Q}$  un  $k_i$ -espace vectoriel à droite  $V_i$ , et à chaque flèche  $i \xrightarrow{\alpha} j$  dans  $\mathcal{Q}$  une application  $k_j$ -linéaire  ${}_i\varphi_j^\alpha : V_i \otimes_{k_i} {}_iB_j^\alpha \longrightarrow V_j$ , on note  $V = (V_i, {}_i\varphi_j^\alpha)$ . Un morphisme de représentations  $f : V = (V_i, {}_i\varphi_j^\alpha) \longrightarrow W = (W_i, {}_i\psi_j^\alpha)$  consiste en une famille d'applications  $k_i$ -linéaires  $f_i : V_i \longrightarrow W_i$ ,  $i \in \mathcal{Q}_0$ , telle que chaque flèche  $i \xrightarrow{\alpha} j$  induit un carré commutatif de la forme :

$$\begin{array}{ccc} V_i \otimes_{k_i} {}_iB_j^\alpha & \xrightarrow{{}_i\varphi_j^\alpha} & V_j \\ f_i \otimes \mathbb{1}_{{}_iB_j^\alpha} \downarrow & & \downarrow f_j \\ W_i \otimes_{k_i} {}_iB_j^\alpha & \xrightarrow{{}_i\psi_j^\alpha} & W_j \end{array}$$

De façon analogue, une  $k$ -représentation à gauche  $V = (V_i, {}_i\psi_j^\alpha)$  de  $\mathcal{Q}$  est telle que  $V_i$  soit un  $k_i$ -espace vectoriel à gauche pour chaque point  $i$  dans  $\mathcal{Q}$ , et pour chaque flèche  $i \xrightarrow{\alpha} j$  dans  $\mathcal{Q}$ ,  ${}_i\psi_j^\alpha : {}_jB_i^{\alpha*} \otimes_{k_j} V_i \longrightarrow V_j$  est une application  $k_j$ -linéaire, on définit de la même manière les morphismes de représentations correspondants. Observons que pour un  $k_i$ -module à gauche  $V_i$  et pour un  $k_j$ -module à gauche  $V_j$ , il existe un isomorphisme fonctoriel  $\text{Hom}_{k_j}({}_jB_i^{\alpha*} \otimes_{k_i} V_i, V_j) \cong \text{Hom}_{k_i}(V_i, {}_iB_j^\alpha \otimes_{k_j} V_j)$ . En effet pour toute paire dualisante  $\{{}_iM_j, {}_jM_i\}$  de bimodules avec  ${}_iM_j \in {}_k_i \text{bimod}_{k_j}$ , on a un isomorphisme  $\text{Hom}_{k_j}({}_jM_i, V_j) \cong \text{Hom}_{k_j}({}_jM_i, {}_jB_i^{\alpha*} \otimes_{k_i} V_i) \cong \text{Hom}_{k_j}({}_jM_i, {}_jB_i^{\alpha*}) \otimes_{k_j} V_j \cong {}_iM_j \otimes_{k_j} V_j$ ; ainsi  $\text{Hom}_{k_j}({}_jB_i^{\alpha*}, V_j) \cong {}_iB_j^\alpha \otimes_{k_j} V_j$ . Et en vertu du théorème d'adjonction du produit tensoriel on a :

$$\text{Hom}_{k_j}({}_jB_i^{\alpha*} \otimes_{k_i} V_i, V_j) \cong \text{Hom}_{k_i}(V_i, \text{Hom}_{k_j}({}_jB_i^{\alpha*}, V_j)) \cong \text{Hom}_{k_i}(V_i, {}_iB_j^\alpha \otimes_{k_j} V_j).$$

On notera  $\text{Rep}(\mathcal{Q})$  la catégorie de toutes les  $k$ -représentations à droite de  $\mathcal{Q}$ , la sous-catégorie pleine de  $\text{Rep}(\mathcal{Q})$  formée des représentations de  $k$ -dimension finie est notée  $\text{rep}(\mathcal{Q})$ , où une représentation  $V = (V_i, {}_i\varphi_j^\alpha)$  est dite de dimension finie si chaque  $V_i$  est de  $k_i$ -dimension finie (par hypothèse, chaque  $k$ -surcorps  $k_i$  est de dimension finie sur  $k$ ). Les catégories correspondantes pour les représentations à gauche de  $\mathcal{Q}$  sont  $\text{Rep}_l(\mathcal{Q})$  et  $\text{rep}_l(\mathcal{Q})$ . Les modules sur les algèbres de chemins sont décrits au moyen des représentations comme suit :

**Proposition 1.3.1.** *Si  $\mathcal{Q}$  est un carquois modulé fini, alors on a de façon canonique des équivalences  $k$ -linéaires de catégories,  $\text{Rep}(\mathcal{Q}) \cong \text{Mod } k\mathcal{Q}$ ,  $\text{Rep}(\mathcal{Q}^\circ) \cong k\mathcal{Q}\text{-Mod}$  et*

$\text{Rep}_l(\mathcal{Q}) \equiv \text{k}\mathcal{Q}^*\text{-Mod}$ , dont les restrictions aux sous-catégories pleines des représentations de dimension finie restent encore des équivalences  $\text{k}$ -linéaires.

Dans toute la suite, les modules et les représentations sont supposés à droite et de dimension finie, sauf mention contraire ou sauf lorsque le contexte indique clairement la nature du module ou de la représentation.

Soit  $V = (V_i, {}_i\varphi_j^\alpha)$  une représentation  $\text{k}$ -linéaire de  $\mathcal{Q}$ , soient également  $i$  et  $j$  deux points dans  $\mathcal{Q}$  et  $\omega : i \xrightarrow{\alpha_1} i_1 \cdots i_t \xrightarrow{\alpha_j} j$  un chemin de  $i$  vers  $j$  tel que  $\ell(\omega) \geq 2$ . L'évaluation de  $V$  le long de  $\omega$  est le morphisme  $\text{k}_j$ -linéaire  ${}_i\varphi_j^\omega : V_i \otimes_{\text{k}_i} B_j^\omega \longrightarrow V_j$ , donné par la composition

$${}_i\varphi_j^\omega = {}_i\varphi_j^{\alpha_j} \cdot ({}_{i_{t-1}}\varphi_{i_t}^{\alpha_{t-1}} \otimes 1) \cdots ({}_{i_1}\varphi_{i_2}^{\alpha_2} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \cdot ({}_i\varphi_{i_1}^{\alpha_1} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1).$$

On étend cette évaluation sur le bimodule  ${}_i\tilde{B}_j = e_i \text{k}\mathcal{Q}e_j$  de tous les chemins de  $i$  vers  $j$  en considérant la somme directe :  ${}_i\tilde{\varphi}_j = \bigoplus_{\omega \in \mathcal{Q}(i,j)} {}_i\varphi_j^\omega : V_i \otimes_{\text{k}_i} {}_i\tilde{B}_j \longrightarrow V_j$ . Alors, la représentation  $V$  est appelée une *représentation du carquois modulé lié*  $(\mathcal{Q}, R)$  ou encore une *représentation liée* de  $\mathcal{Q}$  (relativement à  $R$ ) si l'évaluation de  $V$  s'annule sur chaque relation dans  $R$ , autrement dit si  ${}_i\tilde{\varphi}_j(V_i \otimes_{\text{k}_i} R_j) = 0$  pour tous  $i, j \in I$ , ce qui signifie également que le  $\text{k}\mathcal{Q}$ -module correspondant à  $V$  est annulé par l'idéal de relations  $R$ .  $\text{Rep}(\mathcal{Q}, R)$  désigne la catégorie des représentations de  $(\mathcal{Q}, R)$  tandis que la sous-catégorie formée des représentations de dimension finie est notée  $\text{rep}(\mathcal{Q}, R)$ . Une conséquence directe de la proposition 1.3.1 suit.

**Corollaire 1.3.2.** *Les équivalences  $\text{Rep}(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\cong} \text{Modk}\mathcal{Q}$  et  $\text{rep}(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\cong} \text{modk}\mathcal{Q}$  induisent des équivalences  $\text{k}$ -linéaires  $\text{Rep}(\mathcal{Q}, R) \xrightarrow{\cong} \text{Mod}(\text{k}\mathcal{Q}/R)$  et  $\text{rep}(\mathcal{Q}, R) \xrightarrow{\cong} \text{mod}(\text{k}\mathcal{Q}/R)$ .*

Les équivalences précédentes seront toujours vues comme des identifications. Supposons maintenant que  $R$  est *admissible*, de sorte qu'il existe un entier  $m \geq 2$  tel que  $\text{k}\mathcal{Q}_{(m)} \subset R \subset \text{k}\mathcal{Q}_{(2)}$  et l'algèbre de carquois modulé lié  $\text{k}(\mathcal{Q}, R)$  est de  $\text{k}$ -dimension finie. Dans cette situation il est aisé de dresser la liste complète des (classes d'isomorphismes des) représentations indécomposables projectives, injectives ou simples du carquois modulé lié  $(\mathcal{Q}, R)$ ; on les notera respectivement  $P(i)$ ,  $I(i)$  et  $S(i)$  avec  $i$  parcourant  $I$ . Aussi,  $P^\circ(i)$  désigne le  $\text{k}(\mathcal{Q}, R)$ -module à gauche indécomposable projectif. On a  $P(i) = e_i \text{k}(\mathcal{Q}, R)$  si bien que pour chaque  $j \in I$ , on a  $P(i)_j = e_i (\text{k}\mathcal{Q}/R) e_j = {}_i\tilde{B}_j R_j$ , tandis que pour chaque flèche  $j \xrightarrow{\alpha} l$  l'application  $\text{k}_l$ -linéaire  $P(i)_j \otimes {}_j B_l^\alpha \longrightarrow P(i)_l$  correspondante est induite par l'inclusion  ${}_i\tilde{B}_j \otimes {}_j B_l^\alpha \longrightarrow {}_i\tilde{B}_l$ . Par ailleurs,  $S(i) = P(i) / \text{rad} P(i) = (S(i)_j, 0)$  avec  $S(i)_i = \text{k}_i$  et pour  $j \neq i$   $S(i)_j = 0$ . La dualité standard étant donnée par

$$\text{rep}(\mathcal{Q}, R) = \text{modk}(\mathcal{Q}, R) \xrightarrow{D = \text{Hom}_{\text{k}}(-, \text{k})} \text{k}(\mathcal{Q}, R)\text{-mod} = \text{rep}(\mathcal{Q}^\circ, R),$$

on sait que  $I(i) = D(P^\circ(i)) = D(\text{k}(\mathcal{Q}, R)e_i)$  et  $I(i)_j = D(P^\circ(i))e_j = D(e_j P^\circ(i)) = D(P^\circ(i)_j) = \text{Hom}_{\text{k}}(e_j \text{k}(\mathcal{Q}, R)e_i, \text{k}) = \text{Hom}_{\text{k}}({}_j\tilde{B}_j R_i, \text{k})$ . Les applications linéaires accompagnant la représentation  $I(i)$  sont induites de celles de  $P^\circ(i)$  en appliquant la dualité  $D$ .

## 1.4 Représentations des algèbres héréditaires

Dans la section 1.3, nous avons vu que l'algèbre de chemins d'un carquois  $k$ -modulé fini est une  $k$ -algèbre héréditaire. Inversement, nous verrons que toute algèbre héréditaire de dimension finie sur un corps parfait est Morita-équivalente à une algèbre de chemins d'un carquois modulé fini et acyclique.

**Lemme 1.4.1** (Eilenberg et Nakayama [8, 27]). *Soit  $A$  un anneau de radical  $J_A$ , on suppose que  $I$  est un idéal (bilatère) de  $A$  contenu dans  $J_A^2$  et de type fini à la fois comme idéal à gauche et comme idéal à droite. Si  $A/I$  est héréditaire alors  $I = 0$ .*

*Démonstration.*  $I$  étant de type fini comme idéal à droite, il suit du lemme de Nakayama que si  $I \cdot J_A = I$  alors  $I = 0$ . Il suffit donc de travailler modulo  $I \cdot J_A$ , on peut alors supposer que  $I \cdot \text{rad} A = 0$ . En effet si  $I \cdot J_A \neq 0$ , alors le résultat s'obtient par récurrence sur le nombre d'éléments engendrant  $I$  comme idéal à droite et le fait que  $I/I \cdot J_A$  est un idéal bilatère de type fini de  $A/I \cdot J_A$  ayant moins de générateurs que  $I$  et tel que  $A/I \cong \frac{A/I \cdot J_A}{I/I \cdot J_A}$ .

On suppose alors que  $H = A/I$  est héréditaire avec  $I \subseteq J_A^2$  tel que  $I \cdot J_A = 0$ . Puisque  $I \cdot J_A = 0$ , le  $A$ -module  $J_A$  est aussi un  $H$ -module à gauche. Mais alors  $J_H = J_A/I$  étant projectif, la suite exacte courte,

$$(\xi) \quad 0 \longrightarrow I \longrightarrow J_A \longrightarrow J_A/I \longrightarrow 0,$$

est scindée comme suite de  $H$ -modules à gauche, et donc aussi comme suite de  $A$ -modules à gauche via la projection  $A \longrightarrow H$ , si bien que dans  $A\text{-mod}$  on a  $J_A = I \oplus I'$  pour  $I' \subseteq R$  tel que la restriction à  $I'$  de la projection canonique de  $J_A$  sur  $J_A/I$  est un isomorphisme de  $I'$  sur  $J_A/I$ . On obtient que  $I \subseteq J_A^2 = J_A \cdot J_A = (J_A \cdot I) \oplus (J_A \cdot I')$ , de sorte que  $I \subseteq J_A \cdot I$ . Ainsi  $I = \text{rad} A \cdot I$ , si bien qu'une autre application du lemme de Nakayama cette fois-ci à gauche montre que  $I = 0$ .  $\square$

**Proposition 1.4.2.** *Soit  $H$  une  $k$ -algèbre héréditaire de dimension finie et de radical  $J_H$ .*

- (1) *Soient  $i, j$  deux points quelconques dans le carquois modulé  $\mathcal{Q}$  de  $H$ , et  $e_i, e_j$  les idempotents primitifs correspondants. Alors,  $\mathcal{Q}(i, j)$  est non-vide et non trivial si et seulement si  $e_i J_H e_j \neq 0$ , si et seulement si le module à droite projectif indécomposable  $P_j = e_j H$  s'injecte proprement dans  $P_i = e_i H$ . Par conséquent,  $\mathcal{Q}$  de  $H$  est acyclique.*
- (2) *Si en plus  $H$  est sobre et  $k$  parfait, alors  $H$  est isomorphe à l'algèbre des chemins de son carquois modulé :  $H \cong k\mathcal{Q}$ .*

*Démonstration.*

- (1). D'abord on observe que tout morphisme non nul  $P \xrightarrow{f} P'$ , avec  $P$  projectif indécomposable et  $P'$  projectif, doit être nécessairement un monomorphisme. En effet l'image  $\text{Im}(f)$  de  $f$  est encore projectif comme sous-module d'un module projectif, de sorte que l'épimorphisme de  $P$  vers  $\text{Im} f$  induit par  $f$  scinde ; mais alors  $P$  étant indécomposable la projection précédente est un isomorphisme, si bien que  $f$  est un monomorphisme. Ainsi tout élément non nul dans  $\text{Hom}(P_j, P_i)$  est un monomorphisme.

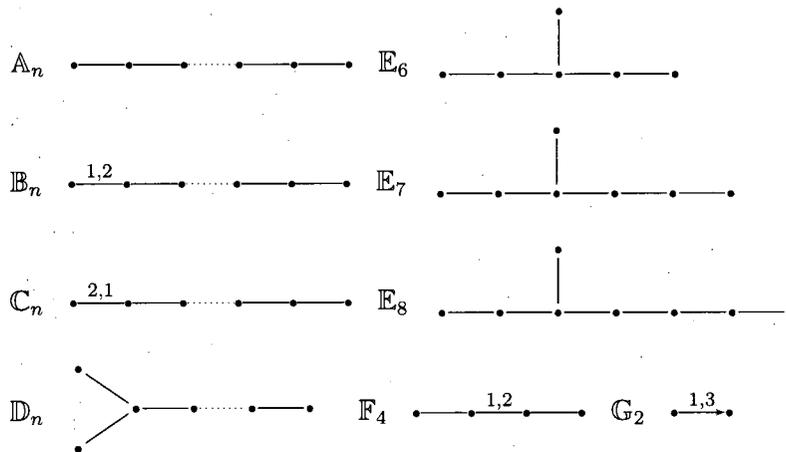
Par ailleurs, il suit clairement de la définition du carquois modulé d'une algèbre que  $\mathcal{Q}(i, j)$  est non-vide et non trivial si et seulement si  $e_i J_H e_j \neq 0$ . Or on a des isomorphismes canoniques,  $e_i J_H e_j \cong \text{Hom}(P_j, e_i J_H) = \text{Hom}(P_j, \text{rad} P_i)$ . On déduit donc aussi que  $e_i J_H e_j \neq 0$  si et seulement s'il existe un monomorphisme propre de  $P_j$  dans  $P_i$ .

Le fait que  $\mathcal{Q}$  soit acyclique découle de ce qui précède et de l'observation que pour tout projectif indécomposable  $P$  de dimension finie il n'existe pas de monomorphisme propre de  $P$  dans  $P$ .

(2). D'après le Corollaire 1.2.3,  $H \cong kQ/R$  avec  $R$  un idéal de  $kQ$  contenu dans  $J^2$  où  $J = kQ_{(1)}$  est l'idéal des flèches de  $\mathcal{Q}$ . Or dans le cas présent,  $\mathcal{Q}$  étant d'après (1) fini et acyclique, le radical de  $kQ$  coïncide avec  $J$ . Il découle alors du lemme 1.4.1 que  $R = 0$ . D'où le résultat.  $\square$

Nous voulons clore cette section par la caractérisation des types de représentation des algèbres héréditaires au moyen des systèmes de racines de certains graphes valués particuliers. Rappelons qu'une algèbre  $A$  (supposée de dimension finie sur un corps) est de *représentation finie* s'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de  $A$ -modules indécomposables (à gauche ou à droite).  $A$  est de type de représentation *docile* si  $A$  n'est pas de représentation finie, et pour chaque dimension  $d$ , il existe une famille finie de  $k[t]$ - $A$ -bimodule  $M_i$  libres comme  $k[t]$ -modules à gauche, ayant la propriété que tous les  $A$ -modules indécomposables de dimension  $d$ , sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, sont de la forme  $M \otimes_{k[t]} M_i$  pour un certain  $i$  et un certain  $k[t]$ -module indécomposable  $M$ .  $A$  est de type de représentation *sauvage* s'il existe un  $k\langle x, y \rangle$ - $A$ -bimodule de type fini  $M$ , libre comme  $k\langle x, y \rangle$ -module à gauche, tel que le foncteur  $-\otimes_{k\langle x, y \rangle} M : \text{mod} k\langle x, y \rangle \longrightarrow \text{mod} A$  préserve l'indécomposabilité et les classes d'isomorphismes. Ici,  $k\langle x, y \rangle$  désigne la  $k$ -algèbre libre sur deux variables  $x$  et  $y$ , en d'autres termes,  $k\langle x, y \rangle$  coïncide avec l'algèbre de chemins d'un carquois ayant un seul point et deux boucles. La classification des types de représentations des algèbres fait intervenir les graphes valués de type Dynkin et de type euclidien (voir [8, 4.5] pour la liste des graphes valués de type euclidien).

**Définition 1.4.1.** Les graphes valués ci-après sont connus comme *graphes de Dynkin*; ici  $n \geq 1$  désigne le nombre de points avec  $n \geq 2$  pour  $\mathbb{B}_n$  et  $\mathbb{C}_n$ , alors que  $n \geq 4$  pour  $\mathbb{D}_n$ .



Pour la suite,  $\Gamma$  désigne un graphe valué fini de valuation  $d$  et d'ensemble de points  $I = \{1, \dots, n\}$ .

**Définition 1.4.2.** La *matrice de Cartan* de  $\Gamma$  est la matrice  $C = (c_{ij})$  de  $M_I(\mathbb{Z})$  telle que  $c_{ij} = 2\delta_{ij} - \sum_i d_j^\alpha \delta_{i-\alpha}^j$ ,  $\delta_{ij}$  étant le symbole de Kronecker aux points  $i, j$ . En posant  $n : I \longrightarrow \mathbb{N}_*$  l'application symétrisante (minimale) pour laquelle  ${}_i d_j^\alpha n_j = {}_j d_i^\alpha n_i$  pour chaque arête  $i \xrightarrow{\alpha} j$ , la *matrice de Cartan symétrisée* de  $\Gamma$  est la matrice  $\tilde{C} = (\tilde{c}_{ij})$ , avec  $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}n_j = c_{ji}n_i$ .

Par exemple, la matrice de Cartan de  $\mathbb{B}_3 : \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{1,2} \bullet \xrightarrow{1} \bullet \\ \downarrow 3 \quad \downarrow 2 \quad \downarrow 1 \\ 3 \quad 2 \quad 1 \end{array}$  est  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ .

**Définition 1.4.3.** On suppose en plus que  $\Gamma$  est sans boucle, on forme le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $\mathbb{R}^\Gamma = \mathbb{R}^n$  et on choisit une base canonique constituée de vecteurs  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  correspondant aux  $n$  points du graphe. La matrice de Cartan symétrisée de  $\Gamma$  permet de munir  $\mathbb{R}^\Gamma$  d'une forme bilinéaire symétrique  $(-, -) : \mathbb{R}^\Gamma \times \mathbb{R}^\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que  $(\alpha_i, \alpha_j) = \tilde{c}_{ij}$ . Le *groupe de Weyl*  $W(\Gamma)$  est le sous-groupe du groupe des automorphismes de  $\mathbb{R}^\Gamma$  engendré par les *réflexions*  $s_i, i = 1, \dots, n$ , avec  $s_i(v) = v - \frac{2(v, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i$ . Les transformations  $s_i$  sont des involutions préservant la forme bilinéaire :  $s_i^2 = \mathbb{1}$  et  $(s_i v, s_i w) = (v, w)$  pour tous  $v, w \in W(\Gamma)$ .

Le *système de racines* associé à  $\Gamma$  est le sous-ensemble  $\Phi = \Phi(\Gamma) \subset \mathbb{R}^\Gamma$  formé des images  $x = w\alpha_i$ ,  $\alpha_i$  étant un vecteur de base et  $w$  dans  $W(\Gamma)$ . Les  $\alpha_i$  sont alors les  $n$  racines simples de  $\Gamma$ . Une racine non nulle  $x = \sum_{i \in I} x_i \alpha_i$  telle que chaque  $x_i \geq 0$  est dite *positive*, tandis que  $-x$  est dite *négative*.  $\Phi_+$  désigne le sous-ensemble des racines positives tandis que  $\Phi_-$  désigne le sous-ensemble des racines négatives.

Pour un carquois  $k$ -modulé acyclique  $\mathcal{Q}$  de type  $\Gamma$ , le *vecteur dimension* d'une représentation  $V = (V_i, {}_i \varphi_j^\alpha)$  de  $\mathcal{Q}$  est par définition le vecteur de  $\mathbb{R}^\Gamma$  donné par  $\dim V = \sum_{i=1}^n (\dim_k V_i) \cdot \alpha_i$ . On obtient ainsi une application additive  $\dim : \text{rep}(\mathcal{Q}) \longrightarrow \mathbb{R}^\Gamma$ , d'image égale à  $\mathbb{N}^n$ . On peut à présent énoncer la caractérisation des types de représentations des algèbres héréditaires.

**Proposition 1.4.3** (Dlab et Ringel, [25]). *Soit  $\mathcal{Q}$  un carquois  $k$ -modulé acyclique fini de type  $\Gamma$ .*

- (i) *L'algèbre  $k\mathcal{Q}$ , ou de façon équivalente la catégorie  $\text{rep}(\mathcal{Q})$ , est de représentation finie si et seulement si  $\Gamma$  est un graphe valué de Dynkin. De plus, si tel est le cas, l'application  $\dim : \text{rep}(\mathcal{Q}) \longrightarrow \mathbb{R}^\Gamma$  induit une bijection entre les classes d'isomorphismes des représentations indécomposables de  $\mathcal{Q}$  et l'ensemble  $\Phi_+$  des racines positives de  $\Gamma$ .*
- (ii)  *$k\mathcal{Q}$  (ou  $\text{rep}(\mathcal{Q})$ ) est docile si et seulement si  $\Gamma$  est un graphe valué euclidien.*

Lorsque  $\mathcal{H} = \text{rep}(\mathcal{Q})$  est de représentation finie comme dans le point (i) de la proposition 1.4.3, le nombre  $|\text{ind } \mathcal{H}| = |\Phi_+|$  est bien connu et donné comme suit : pour  $\Gamma$  prenant successivement les valeurs  $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, B_n, C_n, F_4$  et  $G_3$ , le nombre  $|\Phi_+|$  prend successivement les valeurs  $n(n+1)/2, n(n-1), 36, 63, 120, n^2, n^2, 24$  et  $6$ .

## 1.5 Carquois modulé d'une $k$ -catégorie

Le but de cette section étant essentiellement de présenter quelques outils autour des carquois modulés de  $k$ -catégories, on aura néanmoins besoin de rappeler quelques techniques autour des morphismes irréductibles et des suites ou des triangles presque scindés. On fixera aussi des notations supplémentaires nécessaires pour la suite du travail. Dans toute la suite de cette section et sauf mention supplémentaire,  $\mathcal{A}$  désignera une  $k$ -catégorie additive et toutes nos catégories seront supposées à petit squelette. Pour deux objets  $X, Y$  dans  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}(X, Y)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  désigneront l'espace des morphismes de  $X$  vers  $Y$ .

Rappelons que dans  $\mathcal{A}$ , les sommes directes finies, les produits finis et les biproduits coïncident. Soit  $(E, (p_i, q_i)_{i \in I})$  un biproduit d'une famille finie d'objets  $(X_i)_{i \in I}$ , les  $p_i : X \longrightarrow X_i$  et les  $q_i : X_i \longrightarrow X$  étant respectivement les projections et les injections (ou inclusions) canoniques du biproduit. On écrit alors  $E = \bigoplus_{i \in I} X_i$ , et chaque  $X_i$  est appelé *facteur direct* de  $E$ . Un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  est dit *indécomposable* si  $X \neq 0$  et toute décomposition  $X \cong X_1 \oplus X_2$  de  $X$  est triviale dans le sens qu'on a  $X_1 = X$  ou  $X_2 = X$ ; dans le cas contraire  $X$  est dit *décomposable*.  $\mathcal{A}$  est appelée une *catégorie de Krull-Schmidt* si en plus d'être additive elle satisfait au théorème de Remak-Krull-Schmidt-Azumaya suivant : chaque objet non-nul dans  $\mathcal{A}$  se décompose en une somme directe finie d'objets indécomposables, et de plus, l'algèbre d'endomorphismes de chaque objet indécomposable est locale ; cette dernière condition assure alors l'unicité à isomorphisme près et à l'ordre des facteurs près de la décomposition. La dernière condition est aussi équivalente à la condition que tout endomorphisme  $e \in \text{End}_{\mathcal{A}}(X)$  tel que  $e^2 = e$  se factorise en une section et une rétraction : on dit aussi que les idempotents dans  $\mathcal{A}$  scindent. On rappelle qu'une *section* est un morphisme admettant un inverse à gauche tandis qu'une *rétraction* est un morphisme admettant un inverse à droite. On note  $\text{ind } \mathcal{A}$  l'ensemble des classes d'isomorphismes des objets indécomposables dans  $\mathcal{A}$ ; et suivant le contexte on identifiera souvent  $\text{ind } \mathcal{A}$  à un sous-ensemble de  $\text{obj}(\mathcal{A})$  formé d'un ensemble fixé de représentants des classes d'isomorphismes des objets indécomposables dans  $\mathcal{A}$ . En particulier pour un objet  $X$  dans  $\mathcal{A}$ , on écrira très souvent  $X \in \text{ind } \mathcal{A}$  pour traduire que  $X$  est indécomposable. Pour un objet  $T$  dans  $\mathcal{A}$ ,  $\text{add } T$  désigne la sous-catégorie additive pleine de  $\mathcal{A}$  engendrée par les facteurs directs indécomposables de  $T$  : les objets de  $\text{add } T$  sont des sommes directes finies des facteurs directs de  $T$ .

Si l'on note  $\mathcal{A}b = \text{Mod } \mathbb{Z}$  la catégorie des groupes abéliens, alors le *radical* (de Jacobson) de  $\mathcal{A}$  est le sous-bifoncteur  $J = J_{\mathcal{A}} = \text{rad}_{\mathcal{A}}$  du bifoncteur  $\text{Hom} = \mathcal{A}(-, -) : \mathcal{A}^{\circ} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}b$  défini sur chaque paire d'objets  $X, Y \in \text{obj}(\mathcal{A})$  comme suit :

$$\begin{aligned} J(X, Y) &= \{f \in \mathcal{A}(X, Y) : \forall g \in \mathcal{A}(Y, X), \mathbf{1}_X - gf \text{ est inversible.}\} \\ &= \{f \in \mathcal{A}(X, Y) : \forall g \in \mathcal{A}(Y, X), \mathbf{1}_Y - fg \text{ est inversible.}\} \end{aligned}$$

On voit directement qu'aucun morphisme dans le radical ne peut être inversible ; de plus on a  $J(\bigoplus_i X_i, \bigoplus_j Y_j) = \bigoplus_{i,j} J(X_i, Y_j)$  pour deux familles d'objets  $X_1, \dots, X_m$  et  $Y_1, \dots, Y_n$  dans  $\mathcal{A}$ . Les morphismes dans le radical sont encore appelés *morphisme radiciels*. Le radical de  $\mathcal{A}$  est un idéal (bilatère) de  $\mathcal{A}$  dans le sens que tout morphisme de la forme  $h = v \cdot f \cdot u$  est radiciel dès que  $f$  l'est. De même on définit par

réurrence les idéaux  $J^n$  comme suit :  $J^0 = \text{Hom}$ ,  $J^1 = J$ , pour  $n \geq 2$  et pour deux objets  $X, Y$  dans  $\mathcal{A}$ ,  $J^n(X, Y)$  est constitué des compositions  $v \cdot u$  avec  $u \in J^n(X, Y')$  et  $v \in J(Y', Y)$  pour un certain objet  $Y'$  de  $\mathcal{A}$ . Dans le contexte des modules, si cela s'avère mieux adapté nous utiliserons quelques fois la notation  $\text{rad}_{\mathcal{A}}$  pour désigne le radical.

*Remarque 1.5.1.* Si  $\mathcal{A}$  est de Krull-Schmidt et si  $X$  et  $Y$  sont deux objets indécomposables, alors  $J(X, Y)$  est constitué de tous les morphismes non inversibles de  $X$  vers  $Y$ . En particulier,  $J(X, X) = \text{radEnd}(X)$  est l'idéal bilatère maximal de  $\text{End}(X)$  constitué de tous les endomorphismes non inversibles.

Nous aurons besoin du fait que les sections et les injections d'une part, les rétractions et les projections d'autre part, coïncident dans une catégorie de Krull-Schmidt.

**Lemme 1.5.1.** *Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie de Krull-Schmidt, alors on a les assertions suivantes :*

- (a) *Un morphisme entre deux objets indécomposables dans  $\mathcal{A}$  est une section si et seulement s'il est un isomorphisme, si et seulement s'il est une rétraction.*
- (b) *Soient  $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} E_i$  muni de la famille  $(p_i, q_i)_{1 \leq i \leq n}$  des projections et des injections canoniques correspondantes,  $f : X \longrightarrow E$  et  $g : E \longrightarrow Y$  deux morphismes. Alors  $f$  est une section si et seulement s'il existe  $i$  tel que  $f_i = p_i f$  soit une section. De façon duale,  $g$  est une rétraction si et seulement s'il existe  $i$  tel que  $g_i = g q_i$  soit une rétraction.  $\square$*

Un autre lemme technique donne une information supplémentaire sur les morphismes radiciels.

**Lemme 1.5.2.** *Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie de Krull-Schmidt.*

- (a) *Soit  $f : X \longrightarrow E$  un morphisme dont la source  $X$  est indécomposable, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*
  - (i)  *$f$  n'est pas une section.*
  - (ii)  *$\text{Im Hom}_{\mathcal{A}}(f, X) \subseteq J(X, X)$ .*
  - (iii)  *$f$  est radiciel.*
- (b) *Soit  $g : E \longrightarrow Y$  un morphisme dont le but  $Y$  est indécomposable, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*
  - (i)  *$g$  n'est pas une rétraction.*
  - (ii)  *$\text{Im Hom}_{\mathcal{A}}(Y, g) \subseteq J(Y, Y)$ .*
  - (iii)  *$g$  est radiciel.  $\square$*

Maintenant pour tout  $l \geq 1$  on pose  $\text{Irr}_{\mathcal{A}}^l = J_{\mathcal{A}}^l / J_{\mathcal{A}}^{l+1}$ , et pour tout objet  $X$  dans  $\mathcal{A}$ , on pose  $k_X = J^0(X, X) / J(X, X) = \text{End}_{\mathcal{A}}(X) / \text{radEnd}_{\mathcal{A}}(X)$ . Ainsi  $\text{Irr}(X, Y) = J(X, Y) / J^2(X, Y)$  est un  $k_Y$ - $k_X$ -bimodule. Notons que pour deux  $k$ -surcorps  $E$  et  $F$ , tout bimodule  $M \in {}_E \text{bimod}_F$  induit une paire dualisante et symétrisable  $\{M, \text{Hom}_k(M, k)\}$ , voir le lemme 3.1.4 pour une démonstration détaillée de ce fait. Soit  $F$  un foncteur de  $\mathcal{A}$  (ou de  $\mathcal{A}^\circ$ ) vers  $\text{Mod}(k)$ , nous disons que  $F$  est de dimension finie si  $F(X)$  est de dimension finie pour tout objet  $X$  dans  $\mathcal{A}$ . On dit que  $\mathcal{A}$  est Hom-finie si le bifoncteur  $\text{Hom} = \mathcal{A}(-, -)$  est de dimension finie sur  $k$ .

**Définition 1.5.2.** Supposons que  $\mathcal{A}$  est une catégorie  $k$ -linéaire ayant les propriétés suivantes : tout objet non-nul dans  $\mathcal{A}$  est une somme directe (finie ou non) d'objets indécomposables, pour tout  $X \in \text{ind } \mathcal{A}$  l'algèbre quotient  $k_X = \mathcal{A}(X, X)/J(X, X)$  est un  $k$ -surcorps de dimension finie, et le bi-foncteur  $J_{\mathcal{A}}/J_{\mathcal{A}}^2$  est aussi de dimension finie sur  $k$ . Alors le *carquois modulé*  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$  associé à  $\mathcal{A}$  possède une modulation symétrisable et est décrit comme suit :  $\mathcal{Q}_0$  est identifié à  $\text{ind } \mathcal{A}$  et à chaque point  $x \in \text{ind } \mathcal{A}$  est attachée une paire  $(k_x^\circ, \iota_x)$  où  $k_x^\circ$  est le  $k$ -surcorps opposé de  $k_x$  et  $k_x \xrightarrow{\iota_x} k$  est une forme trace non-dégénérée. À chaque paire  $x, y \in \text{ind } \mathcal{A}$ , on associe la flèche valuée  $\alpha_{x,y} : x \xrightarrow{x d_y, x d_y^*} y$  telle que  ${}_x d_y = \dim_{k_y}(\text{Irr}(x, y))$  et  ${}_x d_y^* = \dim_{k_x}(\text{Irr}(x, y))$ ; la paire dualisante et symétrisable  $\{ {}_x B_y, {}_x B_y^*; {}_x b_y, {}_x b_y' \}$  correspondant à la flèche  $\alpha_{x,y}$  est alors donnée en posant :  ${}_x B_y = \text{Irr}(x, y)$  vu comme  $k_x^\circ$ - $k_y^\circ$ -bimodule, dont le dual peut être choisi comme étant le  $k$ -dual  ${}_x B_y^* = \text{Hom}_k(\text{Irr}(x, y), k)$ , les deux formes bilinéaires non-dégénérées  ${}_x B_y \otimes {}_x B_y^* \xrightarrow{x b_y} k_x$  et  ${}_x B_y^* \otimes {}_x B_y \xrightarrow{x b_y'} k_y$  associées étant naturellement induites par les formes traces non-dégénérées  $\iota_x$  avec  $x$  décrivant  $\mathcal{Q}_0$  (voir le lemme 3.1.4).

En particulier si  $\mathcal{A}$  est une catégorie de Krull-Schmidt Hom-finie, alors  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$  (habituellement appelé carquois "modulé" d'Auslander-Reiten dans les catégories de modules ou dans leurs catégories dérivées) est correctement défini et possède une modulation symétrisable.  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$  décrit alors les morphismes irréductibles dans  $\mathcal{A}$ , où un morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  est *irréductible* si  $f$  n'est ni une section, ni une rétraction et si de plus toute factorisation  $f = v \cdot u$  de  $f$  par deux morphismes  $u \in \mathcal{A}(X, Z)$  et  $v \in \mathcal{A}(Z, Y)$  entraîne que  $u$  est une section ou  $v$  est une rétraction.

*Remarque 1.5.3.* Si  $\mathcal{A}$  est de Krull-Schmidt, alors un morphisme  $f$  dans  $\mathcal{A}$  est irréductible si et seulement si sa classe  $\bar{f} \in \text{Irr}$  est non nulle. Pour tous  $X, Y \in \text{obj}(\mathcal{A})$ , le  $k_Y$ - $k_X$ -bimodule  $\text{Irr}(X, Y)$  est alors appelé le *bimodule des morphismes irréductibles* de  $X$  vers  $Y$ .

## 1.6 Quelques généralités sur les morphismes minimaux dans les catégories additives

Nous dirons qu'une catégorie  $\mathcal{A}$  (non nécessairement de Krull-Schmidt) possède des *décompositions directes maximales finies* si pour tout objet  $X$  dans  $\mathcal{A}$  il existe un entier  $m_X \geq 0$  tel que le nombre de termes dans toute décomposition de  $X$  en somme directe non triviale soit inférieur ou égale à  $m_X$  (dans une décomposition non triviale on exige que tous les termes soient non-nuls). Les catégories de Krull-Schmidt ainsi que les catégories Hom-finies sont de bons exemples de catégories possédant des décompositions directes maximales finies ( $\mathcal{A}$  est Hom-finie si chaque  $\mathcal{A}(X, Y)$  est de longueur finie pour tout  $X, Y \in \text{obj}(\mathcal{A})$ ).

**Définition 1.6.1.** Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme dans  $\mathcal{A}$ . Alors  $f$  est dit *minimal à droite* s'il ne possède aucun facteur direct de la forme  $U \longrightarrow 0$  avec  $U \neq 0$ . De même,  $f$  est dit *minimal à gauche* s'il ne possède aucun facteur direct de la forme  $0 \longrightarrow U$  avec  $U \neq 0$ .

Le lemme suivant montre que pour une large classe de catégories, chaque morphisme est une somme directe d'un morphisme minimal (à droite ou à gauche) et d'un morphisme de source ou de but nul.

**Lemme 1.6.1.** *Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie additive arbitraire sur un anneau commutatif quelconque et possédant des décompositions directes maximales finies. Alors pour tout morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  dans  $\mathcal{A}$ , il existe deux décompositions  $X = X' \oplus X''$  et  $Y = Y_1 \oplus Y_2$  et un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix}} & Y_1 \oplus Y_2 \\ \downarrow & \searrow f & \downarrow \\ X' \oplus X'' & \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' & 0 \end{bmatrix}} & Y \end{array}$$

de telle sorte que  $f' : X' \longrightarrow Y$  soit minimal à droite et  $f_1 : X \longrightarrow Y_1$  minimal à gauche.

*Démonstration.* Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme dans  $\mathcal{A}$ . Commençons par montrer qu'il existe une décomposition de  $X = X' \oplus X''$  pour laquelle  $f = [f' \ 0] : X' \oplus X'' \longrightarrow Y$  avec  $f'$  minimal à droite. Par hypothèse sur  $\mathcal{A}$  on pose  $m_X$  comme étant la longueur maximale des décompositions en sommes directes non triviales de  $X$ . Si  $m_X \in \{0, 1\}$ , alors  $X$  est indécomposable ou nul et  $f$  est nécessairement minimal à droite. Supposons que  $m_X > 1$  et que  $f$  n'est pas minimal à droite et le résultat vrai pour tout  $h \in \mathcal{A}(X', Y)$  tel que  $m_{X'} < m_X$ . Il existe alors une décomposition non triviale  $X = X' \oplus X''$  pour laquelle  $f = [h \ 0] : X' \oplus X'' \longrightarrow Y$ , et la maximalité de  $m_X$  montre que  $m_{X'} < m_X$ . Mais l'hypothèse de récurrence montre que  $h$  se décompose en une somme directe d'un morphisme minimal à droite  $f'$  et d'un morphisme de but nul, il s'ensuit que  $f'$  est la composante minimale à droite cherchée pour  $f$ . Avec un argument semblable,  $f$  s'écrit aussi comme une somme directe d'un morphisme minimal à gauche et d'un morphisme dont la source est nulle.  $\square$

L'équivalence des énoncés (1) et (4) dans la proposition qui suit montre que pour les catégories de Krull-Schmidt, la définition 1.6.1 des morphismes minimaux est équivalente à la version plus forte habituellement utilisée dans les catégories de modules.

**Proposition 1.6.2.** *Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme dans une catégorie de Krull-Schmidt  $\mathcal{A}$ .*

(a) *Alors les assertions ci-après sont équivalentes :*

(1)  *$f$  est minimal à droite.*

(2) *Toute section  $s : X' \longrightarrow X$  telle que  $fs = 0$  doit être nulle ; et pour toute section  $s : X' \longrightarrow X$ , le morphisme  $fs$  est minimal à droite ainsi que tout facteur direct de  $f$ .*

(3) *Tout morphisme  $h : Z \longrightarrow X$  tel que  $fh = 0$  doit être radiciel.*

(4) *Tout endomorphisme  $h : X \longrightarrow X$  tel que  $fh = h$  est un automorphisme.*

(b) *De même, les assertions ci-après sont équivalentes :*

(1)  *$f$  est minimal à gauche.*

(2) *Toute rétraction  $r : Y \longrightarrow Y''$  telle que  $rf = 0$  doit être nulle ; et pour toute rétraction  $r : Y \longrightarrow Y'$ , le morphisme  $rf$  est minimal à gauche ainsi que tout facteur direct de  $f$ .*

- (3) *Tout morphisme  $h : Y \longrightarrow Z$  tel que  $hf = 0$  doit être radiciel.*  
 (4) *Tout endomorphisme  $h : Y \longrightarrow Y$  tel que  $hf = h$  est un automorphisme.*

*Démonstration.*  $\mathcal{A}$  étant de Krull-Schmidt on sait en vertu du lemme 1.5.1 que les sections et les injections canoniques coïncident, et il est de même des rétractions et les projections canoniques ; ainsi pour la preuve de proposition 1.6.2 on peut remplacer les termes sections et rétractions par facteurs directs. On montrera seulement les équivalences du point (a) puisque le volet (b) est le dual de (a).

Avec les observations précédentes, il est clair que le premier volet de l'énoncé (2) est juste la définition d'un morphisme minimal à droite. Il est aussi clair que la restriction d'un morphisme minimal à droite sur un facteur direct de sa source est encore minimal à droite. De plus, le fait que tout facteur direct d'un morphisme minimal à droite soit encore minimal à droite découle évidemment de l'observation suivante : tout morphisme de la forme  $\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} : X' \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2$  est minimal à droite si et seulement si c'est le cas pour le morphisme  $X' \xrightarrow{u} Y_1$ . Ainsi (1) et (2) sont deux énoncés équivalents. Supposons maintenant que l'énoncé (2) soit vrai, et vérifions que l'énoncé (3) l'est aussi. Pour cela, soit  $h$  dans  $\mathcal{A}(Z, X)$  un morphisme tel que  $fh = 0$ , pour montrer que  $h$  est radiciel, prenons un facteur direct indécomposable  $Z_1$  de  $Z$  et posons  $h = [h_1 \ h_2] : Z_1 \oplus Z_2 \longrightarrow X$  avec  $Z = Z_1 \oplus Z_2$  pour un certain supplément  $Z_2$  de  $Z_1$  dans  $Z$ . Nous affirmons que  $h_1$  est radiciel. En effet,  $Z_1$  étant un objet indécomposable d'une catégorie de Krull-Schmidt, en vertu du lemme 1.5.2 il suffira de vérifier que  $h_1$  n'est pas une section. Comme  $fh = 0$ , on a aussi  $fh_1 = 0$  avec  $Z_1 \neq 0$  ; il suit alors de l'énoncé (2) que  $h_1$  n'est pas une section, si bien que  $h_1$  est radiciel. On déduit que toute restriction de  $h$  à un facteur direct indécomposable de  $Z$  est radiciel, ainsi  $h$  est aussi radiciel. Alors (2) implique bien (3). On suppose maintenant que l'énoncé (3) est vrai, on veut vérifier que (4) l'est aussi. On prend pour cela  $h$  dans  $\mathcal{A}(X, X)$  tel que  $fh = f$ , alors  $f(\mathbb{1} - h) = 0$  et par hypothèse le morphisme  $\tilde{h} = \mathbb{1} - h$  doit être radiciel. Mais en vertu de la définition du radical de la catégorie  $\mathcal{A}$  il vient que le morphisme  $h = \mathbb{1} - \tilde{h}$  est un automorphisme. Donc (3) implique bien (4). Supposant finalement que l'énoncé (4) est vrai, pour montrer que  $f$  est minimal à droite, fixons arbitrairement un facteur direct  $X''$  de  $X$  tel que la restriction de  $f$  à  $X''$  s'annule. Sous forme matricielle on écrit  $f = [f' \ 0] : X' \oplus X'' \longrightarrow Y$  avec  $X = X' \oplus X''$  pour un certain supplémentaire  $X'$  de  $X''$  dans  $X$ . On doit montrer que  $X'' = 0$  ; pour cela, soit  $h = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{X'} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  dans  $\mathcal{A}(X' \oplus X'', X' \oplus X'')$ , on voit que  $fh = f$ . Il découle alors de (4) que  $h$  doit être un automorphisme, si bien que le morphisme nul est un automorphisme de  $X''$ , alors  $X'' = 0$ . Ce qui montre que  $f$  est minimal à droite, et établit la validité des équivalences des énoncés du volet (a) ; celles de (b) s'établissent pareillement.  $\square$

Nous rassemblons dans la prochaine proposition quelques propriétés des morphismes irréductibles dont on aura besoin dans la suite.

**Proposition 1.6.3** ([7]). *On suppose que  $\mathcal{A}$  est une catégorie de Krull-Schmidt.*

- (1) *Si  $f : X \longrightarrow E$  est un morphisme irréductible avec  $X$  indécomposable, alors il en est de même de  $pf$  pour toute rétraction  $p : E \longrightarrow Y$ . De même si  $f : E \longrightarrow Z$  est irréductible avec  $Z$  indécomposable, alors il en est de même de  $fq$  pour toute section  $q : Y \longleftarrow E$ .*

- (2) Soient  $X$  et  $Z$  deux objets indécomposables,  $Y_1$  et  $Y_2$  deux objets n'ayant aucun facteur direct commun. Alors un morphisme  $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} : X \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2$  est irréductible si et seulement si  $f_1$  et  $f_2$  le sont. De même, un morphisme  $g = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} : Y_1 \oplus Y_2 \longrightarrow Z$  est irréductible si et seulement si  $g_1$  et  $g_2$  le sont.
- (3) Pour  $X, Y$  indécomposables, un morphisme  $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} : X \longrightarrow Y^n$  est irréductible si et seulement si  $f_1, \dots, f_n \in J(X, Y)$  et sont tels que les classes résiduelles  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n \in \text{Irr}(X, Y)$  soient  $k_Y$ -linéairement indépendantes.
- De même, un morphisme  $g = \begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_n \end{bmatrix} : Y^n \longrightarrow Z$ , avec  $Y, Z$  indécomposables, est irréductible si et seulement si  $g_1, \dots, g_n \in J(Y, Z)$  et sont tels que les classes résiduelles  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \in \text{Irr}(X, Y)$  soient  $k_Y$ -linéairement indépendantes.
- (4) Si  $X$  et  $Y$  sont indécomposables tels que  $\text{Irr}(X, Y) \neq 0$ , alors les nombres  $a = \dim_{k_X} \text{Irr}(X, Y)$  et  $b = \dim_{k_Y} \text{Irr}(X, Y)$  sont maximaux pour la propriété qu'il existe des morphismes irréductibles  $X^a \longrightarrow Y$  et  $X \longrightarrow Y^b$ .  $\square$

## 1.7 Quelques généralités sur les $\tau$ -catégories

Les  $\tau$ -catégories sont introduites par Iyama dans [41, §2], comme généralisation des catégories ayant des suites semblables aux suites presque scindées que fournit la théorie classique d'Auslander-Reiten pour la catégories de modules. Rump reprend l'étude des  $\tau$ -catégories et définit aussi les  $\tau$ -anneaux dans [59, §1]. Pour la définition des  $\tau$ -catégories, nous suivons essentiellement [59, §1]. Il sera intéressant de voir le lien entre les carquois modulés (ou encore les morphismes irréductibles) d'une  $\tau$ -catégorie  $\mathcal{A}$  et les  $\tau$ -suites dans  $\mathcal{A}$ , ces dernières généralisent pour les catégories de Krull-Schmidt arbitraires la notion bien connue de suites presque scindées des catégories de modules.

Soit  $(\xi) : X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$  une suite de morphismes dans  $\mathcal{A}$ , induisant les suites suivantes dans  $\mathcal{A}b$  pour chaque objet  $M$  dans  $\mathcal{A}$  :

$$(\xi_1) : \mathcal{A}(M, X) \xrightarrow{f^-} \mathcal{A}(M, Z) \xrightarrow{g^-} \mathcal{A}(M, Y), (\xi_2) : \mathcal{A}(Y, M) \xrightarrow{-g} \mathcal{A}(Z, M) \xrightarrow{-f} \mathcal{A}(X, M).$$

Alors  $f$  est appelé un *pseudo-noyau* de  $g$  si la suite  $(\xi_1)$  est exacte dans  $\mathcal{A}b$  ;  $g$  est appelé un *pseudo-conoyau* de  $f$  si la suite  $(\xi_2)$  est exacte dans  $\mathcal{A}b$ . Nous dirons que  $(\xi)$  est *pseudo-exacte* dans  $\mathcal{A}$  si  $f$  est un pseudo-noyau de  $g$  tandis que  $g$  est un pseudo-conoyau de  $f$ , c'est-à-dire, si les suites  $(\xi_1)$  et  $(\xi_2)$  sont exactes dans  $\mathcal{A}b$ . Remarquons que dans les catégories abéliennes les pseudo-noyaux coïncident avec les noyaux tandis que les pseudo-conoyaux coïncident avec les conoyaux.

**Proposition 1.7.1.** Soit  $X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$  une suite donnée dans une catégorie de Krull-Schmidt  $\mathcal{A}$ .

(a) Supposons que  $g$  admet un pseudo-noyau  $f$ .

▷ Alors,  $g$  est minimal à droite si et seulement si son pseudo-noyau  $f$  est radiciel.

- ▷ De plus,  $f$  est à isomorphisme près l'unique pseudo-noyau de  $g$  si et seulement si  $f$  est aussi minimal à droite. Dans un tel cas on écrit alors  $f = \text{wker}(g)$  et on l'appelle le pseudo-noyau de  $g$ .
- (b) Supposons que  $f$  admet un pseudo-conoyau  $g$ .
  - ▷ Alors,  $f$  est minimal à gauche si et seulement si son pseudo-conoyau  $g$  est radiciel.
  - ▷ De plus,  $g$  est à isomorphisme près l'unique pseudo-conoyau de  $f$  si et seulement si  $g$  est aussi minimal à gauche. Dans un tel cas on écrit alors  $g = \text{wcoker}(f)$  et on l'appelle le pseudo-conoyau de  $f$ .

*Démonstration.* L'énoncé (b) étant le dual de (a), nous avons seulement besoin de prouver (a).

Pour le premier volet de (a), supposons que  $f$  est un pseudo-noyau radiciel de  $g$  et vérifions que  $g$  est minimal à droite. Notre hypothèse montre alors que pour tout facteur direct de  $g$  de la forme  $Z'' \xrightarrow{0} 0$ , l'injection canonique  $Z'' \xrightarrow{q''} Z$  doit se factoriser par  $f$ , si bien que  $q'' = fu$  pour un morphisme  $u$  dans  $\mathcal{A}(Z'', X)$ . Or si  $p''$  désigne la projection canonique de  $Z$  sur  $Z''$ , alors on obtient que  $\mathbb{1}_{Z''} = p''q'' = p''fu$  avec  $f$  radiciel, donc  $\mathbb{1}_{Z''}$  est aussi radiciel et cela entraîne que  $\mathbb{1}_{Z''} = 0$  et  $Z'' = 0$ . Donc  $g$  est minimal à droite. Inversement, si  $g$  n'est pas minimal à droite, on voit clairement que  $f$  ne saurait être radiciel. En effet, supposons que  $Z'' \xrightarrow{0} 0$  est un facteur direct de  $g$  tel que  $Z'' \neq 0$ ; on pose alors  $Z = Z' \oplus Z''$ ,  $f = \begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix} : X \longrightarrow Z' \oplus Z''$  et  $g = [g' \ 0] : Z' \oplus Z'' \longrightarrow Y$ . On considère le morphisme  $u' = \begin{bmatrix} f' & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{Z''} \end{bmatrix} : X \oplus Z'' \longrightarrow Z' \oplus Z''$ . Alors on a  $gu' = g'f' = gf = 0$  et comme  $f$  est un pseudo-noyau de  $g$  il vient que  $u$  se factorise par  $f$ , ainsi il existe  $u'' = [u' \ u''] : X \oplus Z'' \longrightarrow X$  tel que  $u' = fu''$ , si bien que  $\mathbb{1}_{Z''} = f''u''$ , et cette dernière égalité montre que  $f$  n'est pas radiciel. Nous avons donc prouvé que  $g$  est minimal à droite si et seulement si tout pseudo-noyau  $f$  de  $g$  est radiciel.

Maintenant pour le second volet de (a), supposons que  $f : X \longrightarrow Z$  est un pseudo-noyau de  $g$  qui soit aussi minimal à droite. Soit donc  $f' : X' \longrightarrow Z$  un autre pseudo-noyau de  $g$ , alors les égalités  $g \circ f = 0 = g \circ f'$  induisent l'existence de deux morphismes  $h : X' \longrightarrow X$  et  $h' : X \longrightarrow X'$  tels que  $f' = fh$  et  $f = f'h'$ . Il vient que  $f(hh') = f$  si bien que par l'équivalence (1) – (4) de la proposition 1.6.2-(a), le morphisme  $h$  est un isomorphisme dont l'inverse est forcément  $h'$ , induisant ainsi un isomorphisme entre  $f$  et  $f'$ . Inversement, supposons que  $f$  est l'unique pseudo-noyau de  $g$ , et vérifions que  $f$  est minimal à droite. Soit donc  $X = X' \oplus X''$  une décomposition de  $X$  telle qu'on ait une décomposition de  $f$  de la forme  $X = X' \oplus X'' \xrightarrow{[f' \ 0]} Z$ , nous devons montrer que  $X'' = 0$ . On voit clairement que comme  $f$ , le morphisme  $f'$  est nécessairement un autre pseudo-noyau de  $g$ , si bien que l'unicité de  $f$  entraîne que l'objet  $X = X' \oplus X''$  est isomorphe à  $X'$ . Or cela n'est possible dans une catégorie de Krull-Schmidt que si  $X'' = 0$ . On conclut que  $f$  est bien minimal à droite. Ce qui achève la preuve de la proposition 1.7.1  $\square$

**Définition 1.7.1.** (a) Soit  $h \in \mathcal{J}(A, A')$  un morphisme radiciel. Alors,  $h$  est dit presque scindé à droite si la suite  $\mathcal{A}(X, A) \xrightarrow{h} \mathcal{J}(X, A') \longrightarrow 0$  est exacte pour tout  $X \in \text{obj}(A)$ ; de même  $h$  est dit presque scindé à gauche si la suite  $\mathcal{A}(A', X) \xrightarrow{-h} \mathcal{J}(A, X) \longrightarrow 0$  est exacte pour tout  $X \in \text{obj}(A)$ .

(b) Soit  $(\xi) : X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$  une suite dans  $\mathcal{A}$  telle que  $f$  et  $g$  soient radiciels :  $f, g \in \mathcal{J} = \mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ .

- ▷  $(\xi)$  est appelée une  $\tau$ -suite à droite pour  $Y$  si  $f$  est presque scindé à gauche,  $g$  est presque scindé à droite et  $f = \text{wker}(g)$ . Si de plus  $f$  est un monomorphisme (si bien que  $f = \ker(g)$ ), alors on dit que

( $\xi$ ) est une  $\tau$ -suite à droite stricte ou encore une suite presque scindée à droite pour  $Y$ .

▷ ( $\xi$ ) est appelée une  $\tau$ -suite à gauche pour  $X$  si  $f$  est presque scindé à gauche,  $g$  est presque scindé à droite et  $g = \text{woker}(f)$ . Si de plus  $g$  est un épimorphisme (si bien que  $g = \text{coker}(f)$ ), on dit que ( $\xi$ ) est une  $\tau$ -suite à gauche stricte ou encore une suite presque scindée à gauche pour  $X$ .

▷ Une  $\tau$ -suite est une suite qui est à la fois une  $\tau$ -suite à droite et à gauche, et elle sera stricte si elle l'est à droite et à gauche. Ainsi une  $\tau$ -suite stricte est tout simplement une suite presque scindée (exacte courte).

(c) La catégorie  $\mathcal{A}$  est appelée une  $\tau$ -catégorie (stricte) si chaque objet  $M$  dans  $\mathcal{A}$  possède une  $\tau$ -suite à droite (stricte) et une  $\tau$ -suite à gauche (stricte).

Avec la proposition 1.7.1 on sait qu'à un isomorphisme près, chaque morphisme dans  $\mathcal{A}$  admet au plus un pseudo-noyau minimal à droite et au plus un pseudo-conoyau minimal à gauche. Ainsi pour une  $\tau$ -catégorie  $\mathcal{A}$ , chaque objet  $X$  possède une unique  $\tau$ -suite à droite notée  $\xi_X^+ : \tau X \xrightarrow{\nu_X} \theta X \xrightarrow{\mu_X} X$  et une unique  $\tau$ -suite à gauche notée  $\xi_X^- : X \xrightarrow{\nu_X} \theta^- X \xrightarrow{\mu_X} \tau^- X$ .  $X$  est dit  $\tau$ -projectif si  $\tau X = 0$ ;  $X$  est dit  $\tau$ -injectif si  $\tau^- X = 0$ .  $\text{ind}^+ \mathcal{A}$  désigne l'ensemble des objets indécomposables  $\tau$ -projectif et  $\text{ind}^- \mathcal{A}$  celui des objets indécomposables  $\tau$ -injectifs. Notons que  $X \in \text{obj}(\mathcal{A})$  est  $\tau$ -projectif (respectivement,  $\tau$ -injectif) si et seulement si  $X$  est projectif (respectivement injectif) au sens usuel. On pose ensuite  $\text{ind}^{\text{np}} \mathcal{A} = \text{ind} \mathcal{A} \setminus (\text{ind}^+ \mathcal{A})$  l'ensemble des objets indécomposables non-projectifs, et  $\text{ind}^{\text{ni}} \mathcal{A} = \text{ind} \mathcal{A} \setminus (\text{ind}^- \mathcal{A})$  l'ensemble des objets indécomposables non-injectifs.

On déduit aisément les observations suivantes :

**Proposition 1.7.2.** Soit  $\xi : X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$  une  $\tau$ -suite dans une catégorie de Krull-Schmidt  $\mathcal{A}$ . Alors  $f$  est nul si et seulement si c'est le cas pour  $g$ ;  $f$  et  $g$  sont tous deux à la fois minimaux à gauche et à droite. En particulier si  $\mathcal{A}$  est abélienne, alors  $\xi$  est une  $\tau$ -suite stricte.

*Démonstration.* Le premier volet suit trivialement de la proposition 1.7.1 et de la définition 1.7.1.

Maintenant supposons que  $\mathcal{A}$  soit abélienne et montrons que  $\ker(f) = 0$ . Considérons la factorisation canonique de  $f$  donnée par le diagramme commutatif suivant dans lequel  $j'$  va être construit :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \ker(f) & \longleftarrow & X & \xrightarrow{f} & Z & \longrightarrow & \text{coker}(f) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow p & & \uparrow j & & & & \\
 & & & & \text{Coim}(f) & \xrightarrow{\cong} & \text{Im}(f) & & & & 
 \end{array}$$

On sait que  $\ker(f) = \ker(p)$ . On a  $0 = gf = gj\bar{f}p$  et  $\bar{f}p$  est un épimorphisme puisque  $p$  en est un, il vient que  $gj = 0$  et comme  $f = \text{wker}(g)$ ,  $j$  se factorise par  $f$ , si bien que  $j = fj'$  pour un certain  $j'$ . On obtient donc  $f = fj'\bar{f}p$  et comme par définition  $f = \text{wker}(g)$  est en vertu du corollaire 1.7.1 minimal à droite on obtient que  $j'\bar{f}p$  est un isomorphisme, il en résulte que  $\ker(p) = 0$  si bien que  $f$  est un monomorphisme. De même on obtient que  $g$  est un épimorphisme. □

**Théorème 1.7.3** ([41, 2.3]). *Pour tous objets  $X, X'$  dans une  $\tau$ -catégorie  $\mathcal{A}$ , on a les égalités suivantes :  $\xi_{X \oplus X'}^+ = \xi_X^+ \oplus \xi_{X'}^+$  et  $\xi_{X \oplus X'}^- = \xi_X^- \oplus \xi_{X'}^-$  et,  $X$  est indécomposable si et seulement si le complexe  $\xi_X^+$  est indécomposable, si et seulement si  $\xi_X^-$  est indécomposable. De plus, pour tous  $X \in \text{ind } \mathcal{A} \setminus (\text{ind}^+ \mathcal{A})$  et  $Y \in \text{ind } \mathcal{A} \setminus (\text{ind}^- \mathcal{A})$  on a :  $\xi_X^+ \cong \xi_{\tau X}^-$  et  $\xi_Y^- \cong \xi_{\tau^{-1} Y}^+$ . Par conséquent,  $\tau$  induit une paire de bijections mutuellement inverses  $\text{ind}^{\text{np}} \mathcal{A} \xrightleftharpoons[\tau^-]{\tau} \text{ind}^{\text{ni}} \mathcal{A}$  entre objets indécomposables non-projectifs et objets indécomposables non-injectifs.  $\square$*

Comme conséquence immédiate du théorème précédent, on obtient que pour  $X \in \text{ind}^{\text{np}} \mathcal{A}$  et  $Y \in \text{ind}^{\text{ni}} \mathcal{A}$ ,  $\xi_X^+$  et  $\xi_Y^-$  sont en fait des  $\tau$ -suites. On obtient aussi que pour une  $\tau$ -catégorie  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$  possède une structure de *carquois modulé à translation* ([40]). Nous voulons à présent souligner que la connaissance des morphismes presque scindés permet de construire  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$  comme le montre le résultat ci-dessous dont la preuve est comme dans [56] ou suivant les lignes de [4] moyennant quelques légères modifications. Ici, par *morphisme minimal presque scindé à gauche* on entend un morphisme minimal à gauche et presque scindé à gauche. La notion duale de *morphisme minimal presque scindé à droite* est définie pareillement.

**Théorème 1.7.4.** *Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie de Krull-Schmidt,  $X$  et  $Z$  deux objets indécomposables tels qu'il existe un morphisme minimal presque scindé à gauche  $\varphi : X \longrightarrow \vartheta^- X$  et un morphisme minimal presque scindé à droite  $\psi : \vartheta Z \longrightarrow Z$ .*

- (1) *Alors,  $\varphi$  est irréductible et pour chaque objet  $Y \in \text{ind } \mathcal{A}$  la multiplicité de  $Y$  dans la décomposition de  $\vartheta^- X$  en facteurs directs indécomposables est égale à  $\dim_{k_Y} \text{Irr}(X, Y)$ .*
- (2) *De même  $\psi$  est irréductible et pour chaque objet  $Y \in \text{ind } \mathcal{A}$  la multiplicité de  $Y$  dans la décomposition de  $\vartheta Z$  en facteurs directs indécomposables est égale à  $\dim_{k_Y} \text{Irr}(Y, Z)$ .  $\square$*

## 1.8 Quelques généralités sur les catégories triangulées et les catégories de Calabi-Yau

### 1.8.1 Définition et quelques propriétés élémentaires des catégories triangulées

Soit  $\mathcal{T}$  une (petite) catégorie additive munie d'une auto-équivalence  $\mathcal{T} \xrightarrow{[1]} \mathcal{T}$ , on écrit :  $X[1] = [1](X)$ , pour  $d \in \mathbb{Z}$ ,  $[d] = ([1])^d$  désigne la  $d^{\text{ème}}$  puissance de  $[1]$ . Nous suivons Amnon Neeman dans [55; chp.1] pour la définition des catégories triangulées.

Un *triangle éligible* (relativement à  $[1]$ ) dans  $\mathcal{T}$  est un diagramme de la forme  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  qu'on représentera aussi par un sextuplet  $(X, Y, Z, u, v, w)$ .

Pour deux triangles éligibles  $(X, Y, Z, u, v, w)$  et  $(X', Y', Z', u', v', w')$  un *morphisme* du premier vers le second est la donnée d'un triplet  $(f, g, h)$  de trois morphismes  $f \in \mathcal{T}(X, X')$ ,  $g \in \mathcal{T}(Y, Y')$  et  $h \in \mathcal{T}(Z, Z')$  tels que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\
 f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \downarrow f[1] \\
 X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1]
 \end{array}$$

Étant donné un morphisme de triangles éligibles  $\phi = (f, g, h)$  comme ci-dessus, on peut former un nouveau triangle éligible

$$Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -v & 0 \\ g & u' \end{bmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -w & 0 \\ h & v' \end{bmatrix}} X[1] \oplus Z' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -u[1] & 0 \\ f[1] & w' \end{bmatrix}} Y[1] \oplus X'[1];$$

ce nouveau triangle éligible est appelé le *cône* du morphisme de triangles éligibles  $\phi$ .

On considère l'ensemble  $\widetilde{\Delta}$  de tous les triangles éligibles dans  $\mathcal{T}$ .

**Définition 1.8.1.** Une *catégorie pré-triangulée* est une catégorie  $k$ -linéaire  $\mathcal{T}$  munie d'une auto-équivalence  $\mathcal{T} \xrightarrow{[1]} \mathcal{T}$  (appelée foncteur de *translation* ou encore de *suspension*) et d'une sous-classe  $\Delta \subset \widetilde{\Delta}$  de triangles éligibles (par rapport à  $[1]$ ) nommés alors *triangles*, telles que les axiomes suivants soient satisfaits :

Tr0 : L'ensemble  $\Delta$  des triangles est stable par isomorphisme ; chaque objet  $X$  induit un triangle de la forme  $X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$ .

Tr1 : Chaque morphisme  $X \xrightarrow{f} Y$  est base d'un triangle :  $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$ .

Tr2 : Soient  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  et  $X \xrightarrow{-v} Y \xrightarrow{-w} Z \xrightarrow{-u[1]} X[1]$  deux triangles éligibles, si l'un est un triangle alors il en est de même de l'autre.

Tr3 : Pour tout diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\
 f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \downarrow f[1] \\
 X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1]
 \end{array}$$

où les lignes sont des triangles, il existe un morphisme  $h : Y \longrightarrow Y'$  (non nécessairement unique) complétant la paire  $(f, g)$  en un morphisme de triangles  $(f, g, h)$ .

Si de plus l'axiome Tr4' ci-après est vérifié, alors  $\mathcal{T}$  sera dite *triangulée*.

Tr4' : Avec les notations de Tr3, le cône

$$Y \oplus X' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -v & 0 \\ g & u' \end{bmatrix}} Z \oplus Y' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -w & 0 \\ h & v' \end{bmatrix}} X[1] \oplus Z' \xrightarrow{\begin{bmatrix} -u[1] & 0 \\ f[1] & w' \end{bmatrix}} Y[1] \oplus X'[1]$$

de tout morphisme de triangles est encore un triangle.

De façon équivalente (sous réserve que les axiomes Tr1 – Tr3 sont déjà satisfaits), l'axiome Tr4' peut être remplacé par l'axiome suivant :

Tr4 (Axiome de l'octaèdre) : Soient  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{x} Z \longrightarrow X[1]$ ,  $Y \xrightarrow{v} Y' \longrightarrow X' \xrightarrow{-w} Y[1]$  et  $X \xrightarrow{-v} Y' \xrightarrow{y} Z' \xrightarrow{-z} X[1]$  trois triangles de bases respectives  $u$ ,  $v$  et  $vu$ . Alors il existe deux morphismes  $Z \xrightarrow{h} Z'$  et  $Z' \xrightarrow{k} X'$  complétant les trois triangles précédents en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{x} & Z & \longrightarrow & X[1] \\
 \parallel & & \downarrow v & & \downarrow h & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{vu} & Y' & \xrightarrow{y} & Z' & \longrightarrow & X[1] \\
 & & \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow u[1] \\
 & & X' & = & X' & \xrightarrow{w} & Y[1] \\
 & & \downarrow w & & \downarrow & & \\
 & & Y[1] & \xrightarrow{x[1]} & Z[1] & & 
 \end{array}$$

dans lequel la troisième colonne est aussi un triangle.

Signalons que dans une catégorie (pré-)triangulée, la composition deux morphismes consécutifs d'un triangle est toujours nulle. La catégorie opposée  $\mathcal{T}^\circ$  de toute catégorie (pré-)triangulée est encore (pré-)triangulée. Signalons qu'une sous-catégorie triangulée d'une catégorie triangulée  $\mathcal{T}$  est une sous-catégorie pleine  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{T}$  telle que pour tout triangle  $(X, Y, Z, u, v, w)$  avec  $X, Z \in \mathcal{S}$ , le cône  $Y$  de ce triangle est isomorphe à un objet de  $\mathcal{S}$  (ainsi comme on le remarque un plus bas,  $\mathcal{S}$  contient un triangle isomorphe dans  $\mathcal{T}$  au triangle  $(X, Y, Z, u, v, w)$ ). Alors la sous-catégorie triangulée engendrée par une sous-classe  $\mathcal{X} \subset \text{obj}(\mathcal{T})$  est par définition la plus petite sous-catégorie pleine triangulée  $\text{tria}(\mathcal{X}) = \langle \mathcal{X} \rangle$  de  $\mathcal{T}$  contenant  $\mathcal{X}$  et stable pour les isomorphismes.

Les catégories dérivées des catégories abéliennes, les catégories stables des catégories de Frobenius [45, 35] ainsi que les catégories amassées qu'on rencontrera dans la section 1.10 sont des exemples de catégories triangulées. La référence [55] rassemble de très nombreuses propriétés des catégories triangulées, pour l'instant nous ne citerons que trois propriétés élémentaires les plus utilisées dans ce travail. Pour la suite on suppose que  $\mathcal{T}$  est une catégorie triangulée.

$\mathcal{A}$  étant une catégorie abélienne, on rappelle qu'un foncteur  $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$  est dit *homologique* si pour chaque triangle  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  la suite induite  $HX \xrightarrow{Fu} HY \xrightarrow{Hv} HZ$  est exacte ; si bien qu'en vertu de l'axiome Tr2, on a une suite exacte longue suivante dans laquelle on pose  $H^n = H \circ [n]$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$\cdots H^{-1}Z \xrightarrow{H^{-1}w} HX \xrightarrow{Hu} HY \xrightarrow{Fv} HZ \xrightarrow{Hw} H^1X \xrightarrow{H^1u} H^1Y \cdots$$

Un foncteur homologique  $H' : \mathcal{T}^\circ \rightarrow \mathcal{A}$  pour  $\mathcal{T}^\circ$  est dit *co-homologique* pour  $\mathcal{T}$ .

**Proposition 1.8.1.** *Pour chaque objet  $X$  dans  $\mathcal{T}$ , le foncteur représentable  $\mathcal{T}(X, -)$  est homologique, tandis que le foncteur représentable contravariant  $\mathcal{T}(-, X)$  est co-homologique. En particulier tout triangle dans  $\mathcal{T}$  est toujours exact.*

**Lemme 1.8.2.** *Les assertions suivantes sont valides dans  $\mathcal{T}$ .*

- (a) *Un triangle  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  scinde si et seulement si  $w = 0$ , si et seulement si  $v$  est une rétraction, si et seulement si  $u$  est une section.*

- (b) Le foncteur de translation préserve les produits et les coproduits (sommés directes) arbitraires. La somme directe et le produit d'une famille quelconque de triangles sont encore des triangles.
- (c) On suppose que le diagramme suivant est un morphisme de triangles et  $H$  est un foncteur homologique ou co-homologique.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

Pour chaque entier  $n \in \mathbb{Z}$ , si  $H^n f$  et  $H^n g$  sont des isomorphismes, alors il en est de même de  $H^n h$ . En particulier si  $Hf$  et  $Hg$  sont des isomorphismes, alors  $Hh$  l'est aussi.

Par conséquent, si deux des trois morphismes  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont des isomorphismes alors le troisième l'est aussi.

*Démonstration.* Le volet (a) suit du fait que le foncteur de translation  $[1]$  étant une auto-équivalence admet le foncteur  $[-1]$  comme adjoint à la fois à gauche et à droite, si bien qu'il préserve à la fois les produits et les sommes directes arbitraires. Le premier volet du point (c) suit du lemme des cinq dans les catégories abéliennes, tandis les autres volets restants du lemme suivent directement de ce qui précède, de la proposition 1.8.1 et de l'application des axiomes Tr1, Tr2 et Tr3.  $\square$

### Groupe de Grothendieck d'une catégorie triangulée ou exacte

On suppose que  $\mathcal{T}$  est *essentiellement petite* si bien que le squelette de  $\text{obj}(\mathcal{T})$  est un ensemble. Alors on définit  $\mathbb{Z}(\mathcal{T})$  comme étant le groupe abélien libre sur l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets de  $\mathcal{T}$ , on note  $[X]$  la classe d'un objet  $X$  de  $\mathcal{T}$ . Si  $\mathcal{T}$  est triangulée, on définit le sous-groupe  $T(\mathcal{T}) \subset \mathbb{Z}(\mathcal{T})$  comme étant le sous-groupe engendré par les expressions de la forme  $[Y] - [X] - [Z]$  où  $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$  est un triangle. De même si  $\mathcal{T}$  est une catégorie exacte ( $\mathcal{T}$  est additive et munie d'une structure exacte  $\mathcal{E}$  laquelle consiste en une famille de suites exactes courtes dans  $\mathcal{A}$  assujettie à des axiomes de Quillen [14, 45]), alors le sous-groupe  $T(\mathcal{T})$  est défini pareillement en remplaçant les triangles par des suites exactes courtes  $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$  dans  $\mathcal{E}$ . Alors le *groupe de Grothendieck* de  $\mathcal{T}$  est par définition le groupe quotient  $K_0(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}(\mathcal{T})/T(\mathcal{T})$ , on a donc en particulier défini le groupe de Grothendieck de toute catégorie abélienne.

### 1.8.2 Foncteur de Serre et condition de Calabi-Yau

Rappelons qu'une  $k$ -catégorie  $\mathcal{A}$  est dite *Hom-finie* si pour tous objets  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{A}$ , le  $k$ -espace vectoriel  $\mathcal{A}(X, Y)$  est de dimension finie. Soient  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  deux catégories triangulées (dont les foncteurs de translation sont indifféremment notés  $[1]$ ); un *foncteur exact* ou encore *triangulé* de  $\mathcal{T}$  vers  $\mathcal{T}'$  est une paire  $(F, \sigma)$  formée d'un foncteur  $k$ -linéaire  $F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  et d'un isomorphisme de  $F \circ [1] \xrightarrow{\sigma} [1] \circ F$  telle que pour tout triangle  $(X, Y, Z, u, v, w)$  dans  $\mathcal{T}$ , la suite suivante est un triangle dans  $\mathcal{T}'$  :  $FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{\sigma_X \cdot Fw} FX[1]$ . La composition de deux foncteurs triangulés  $(F, \sigma)$  et  $(G, \gamma)$

(avec  $F$  et  $G$  composables) est encore un foncteur triangulé et donné par la paire  $(GF, \gamma(F) \circ G(\sigma))$ . La paire  $(\mathbb{1}_{\mathcal{T}}, \mathbb{1}_{[1]})$  est le foncteur triangulé identité de  $\mathcal{T}$ . L'axiome Tr2 montre que la paire  $([1], -\mathbb{1}_{[2]})$  est aussi un foncteur triangulé, si bien que le foncteur  $[2]$  induit le foncteur triangulé  $([2], \mathbb{1}_{[3]})$ .

Notons que chaque morphisme  $f : X \longrightarrow X'$  dans  $\mathcal{T}$  induit un morphisme de foncteurs (transformation naturelle)  $f_* := \mathcal{T}(-, f) = f \circ (-) : \mathcal{T}(-, X) \longrightarrow \mathcal{T}(-, X')$  donné comme suit : pour tous  $Y \in \text{obj}(\mathcal{T})$  et  $u \in \mathcal{T}(Y, X)$  on a  $(f_*)_Y(u) = \mathcal{T}(Y, f)(u) = f \circ u$ . Soient donnés quatre foncteurs  $F \in \text{Fonct}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ,  $G, G' \in \text{Fonct}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  et  $H \in \text{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  et soit  $\alpha \in \text{Hom}(G, G')$  un morphisme fonctoriel. Rappelons qu'on a des morphismes fonctoriels  $\alpha \circ F \in \text{Hom}(GF, G'F)$  et  $H \circ \alpha \in \text{Hom}(HG, HG')$  donnés par :  $(\alpha \circ F)_X := \alpha_{FX} : GFX \longrightarrow G'FX$  et  $(H \circ \alpha)_Y := H(\alpha_Y) : HGY \longrightarrow HG'Y$  avec  $X \in \text{obj}(\mathcal{A})$  et  $Y \in \text{obj}(\mathcal{B})$ . Dans la définition 1.8.2 ci-après,  $D = \mathcal{T}(-, k) = \text{Hom}_k(-, k)$  désigne la  $k$ -dualité standard et le morphisme  $D[1]$  désigne le dual du morphisme  $[1] : \text{Morph}(\mathcal{T}) \longrightarrow \text{mod}(k)$ , si bien que pour chaque paire d'objets  $X, Y \in \text{obj}(\mathcal{T})$  la restriction  $D[1] : DT(X[1], Y[1]) \longrightarrow DT(X, Y)$  envoie chaque  $\xi \in DT(X[1], Y[1])$  sur  $\xi \circ [1]$  avec  $(\xi \circ [1])(u) = \xi(u[1])$  pour tout  $u \in \mathcal{T}(X, Y)$ .

**Définition 1.8.2** ([49]). Soit  $\mathcal{T}$  une  $k$ -catégorie triangulée Hom-finie, avec les notations précédentes.

- ▷ Un *foncteur de Serre à droite* pour  $\mathcal{T}$  est un foncteur triangulé  $(\nu, \sigma) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$  muni d'une famille d'isomorphismes de foncteurs  $t_X : \mathcal{T}(-, \nu X) \xrightarrow{\sim} DT(X, -)$  appelés *traces* (avec  $X \in \text{obj}(\mathcal{T})$ ) et possédant la propriété que la trace  $t = (t_X)_X$  soient fonctorielle et satisfait à la condition suivante de compatibilité :

$$t_X \circ [-1] \circ (\sigma_X)_* = -(D[1]) \circ (t_{X[1]} \circ [1]).$$

- ▷ Un *foncteur de Serre pour  $\mathcal{T}$*  est un foncteur de Serre à droite pour  $\mathcal{T}$  qui est aussi une auto-équivalence de  $\mathcal{T}$ . Dans ce cas on dit aussi que  $\mathcal{T}$  admet la *dualité de Serre*.

Notons qu'un foncteur de Serre pour  $\mathcal{T}$  peut aussi être défini comme un *foncteur de Serre à gauche* pour  $\mathcal{T}$  qui est en plus une auto-équivalence de  $\mathcal{T}$ . On sait que si  $\mathcal{T}$  admet un foncteur de Serre  $\nu$ , alors ce dernier est unique à isomorphisme près, et dans ce cas,  $\mathcal{T}$  admet aussi des *triangles presque scindés*, où un triangle  $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$  est presque scindé si la suite  $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$  est une suite presque scindée ou encore une  $\tau$ -suite suivant la définition 1.7.1-(b). Par analogie à la théorie d'Auslander-Reiten dans les catégories de modules, la translation d'Auslander-Reiten correspondant au foncteur de Serre  $\mathcal{T} \xrightarrow{\nu} \mathcal{T}$  est le foncteur  $\mathcal{T} \xrightarrow{\tau = \nu \circ [-1]} \mathcal{T}$ , si bien que  $\nu = \tau[1]$ . En particulier  $\mathcal{T}$  est une  $\tau$ -catégorie et chaque triangle presque scindé est de la forme  $\tau X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{e} \nu X = (\tau X)[1]$ . Par exemple, les catégories dérivées des catégories de modules sur des algèbres héréditaires de dimension finie possèdent la dualité de Serre. D'autres exemples de catégories ayant la dualité de Serre sont fournis par la proposition 1.8.3 ci-après.

$\mathcal{T}$  est *localement finie* si pour chaque  $X \in \text{ind } \mathcal{T}$  le nombre d'isoclasses (classes d'isomorphismes) d'objets  $Y \in \text{ind } \mathcal{T}$  tel que  $\mathcal{T}(X, Y) \neq 0$  est fini, ou de façon équivalente pour tout  $X \in \text{ind } \mathcal{T}$  le nombre d'isoclasses d'objets  $Y \in \text{ind } \mathcal{T}$  tel que  $\mathcal{T}(Y, X) \neq 0$  est fini.

**Proposition 1.8.3** ([1, 2.1]). Si  $\mathcal{T}$  est une catégorie de Krull-Schmidt triangulée et localement finie alors  $\mathcal{T}$  possède un foncteur de Serre et donc des triangles presque scindés.

De même si  $\mathcal{A}$  est une catégorie abélienne (ou exacte), on dira que  $\mathcal{A}$  satisfait à la *dualité de Serre faible* s'il existe un foncteur  $\mathcal{A} \xrightarrow{\tau} \mathcal{A}$  tel que pour tous objets  $X, Y$  dans  $\mathcal{A}$ , on a des isomorphismes  $\mathrm{DExt}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, \tau X)$ , fonctoriels en  $X$  et en  $Y$ . Soient  $\mathcal{A}_{np}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets n'ayant aucun facteur direct projectif, et  $\mathcal{A}_{ni}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets n'ayant aucun facteur direct injectif. Si en plus  $\tau$  induit une équivalence  $\mathcal{A}_{np} \xrightarrow{\tau} \mathcal{A}_{ni}$  on dira que  $\mathcal{A}$  satisfait à la *quasi-dualité de Serre*. Et dans le cas où  $\tau$  est une équivalence sur  $\mathcal{A}$ , on dit que  $\mathcal{A}$  satisfait à la *dualité de Serre*. Supposons que  $\mathcal{A}$  satisfait à la quasi-dualité de Serre et soit  $\mathcal{A}_{ni} \xrightarrow{\tau^{-1}} \mathcal{A}_{np}$  la quasi-inverse de  $\tau$ . Alors, un objet  $P \in \mathcal{A}$  est projectif si et seulement si  $\tau P = 0$ , et un objet  $I \in \mathcal{A}$  est injectif si et seulement si  $\tau^{-1} I = 0$ . Comme plus haut,  $\mathcal{A}$  admet des suites presque scindées et  $\tau$  agit comme la translation d'Auslander-Reiten. Les exemples classiques de catégories abéliennes possédant la quasi-dualité de Serre sont fournis par les catégories de modules sur des algèbres de dimension finie (ou plus généralement sur des algèbres d'Artin).

En présence de la dualité de Serre on peut alors définir les conditions de Calabi-Yau.

**Définition 1.8.3.** Soit  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée Hom-finie de foncteur de translation noté  $[1]$ .

- ▷ La catégorie  $\mathcal{T}$  est dite *faiblement  $d$ -Calabi-Yau* pour un entier  $d \in \mathbb{Z}$  si  $\mathcal{T}$  admet un foncteur de Serre  $(\nu, \sigma)$  tel qu'il existe un isomorphisme de foncteur  $\nu \xrightarrow{\sim} [d]$  entre  $\nu$  et la  $d^{\text{ième}}$  puissance du foncteur de translation de  $\mathcal{T}$
- ▷  $\mathcal{T}$  est dite  *$d$ -Calabi-Yau* si la paire  $([1], -\mathbb{1}_{[2]})^d = ([d], (-)^d \mathbb{1}_{[d+1]})$  est un foncteur de Serre pour  $\mathcal{T}$ , si bien qu'il existe une famille  $\mathfrak{t} = (\mathfrak{t}_X)$  de traces, où la trace en chaque  $X \in \mathrm{obj}(\mathcal{T})$  est un isomorphisme de foncteurs  $\mathfrak{t}_X : \mathcal{T}(-, \nu X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{DT}(X, -)$ , telle que la famille  $\mathfrak{t}$  soit fonctorielle (en  $X$ ) et satisfait à la condition suivante de compatibilité :

$$(-1)^d \mathfrak{t}_X \circ [-1] \circ (\sigma_X)_* = -(\mathrm{D}[1]) \circ (\mathfrak{t}_{X[1]} \circ [1]).$$

Les conditions de Calabi-Yau se traduisent en termes de formes traces comme suit :

**Proposition 1.8.4** ([49, Prop 2.2]). *On suppose que  $\mathcal{T}$  admet un foncteur de Serre.*

- (a)  $\mathcal{T}$  est faiblement  $d$ -Calabi-Yau si et seulement si il existe une famille de formes linéaires  $\mathfrak{t}_X : \mathcal{T}(X, X[d]) \longrightarrow \mathbb{k}$ ,  $X \in \mathcal{T}$ , telle que pour tous objets  $X$  et  $Y$ , la forme bilinéaire induite  $\mathcal{T}(Y, X[d]) \otimes \mathcal{T}(X, Y) \xrightarrow{(\cdot)}$   $\mathbb{k}$ ,  $f \otimes g \longrightarrow (f \otimes g) = \mathfrak{t}_X(f \circ g)$  soit non-dégénérée et pour tous morphismes  $X \xrightarrow{g} Y$  et  $Y \xrightarrow{f} X[d]$  dans  $\mathcal{T}$  on ait,  $\mathfrak{t}_X(f \circ g) = \mathfrak{t}_Y((g[d]) \circ f)$ .
- (b)  $\mathcal{T}$  est  $d$ -Calabi-Yau si et seulement si il existe une famille de formes linéaires  $\mathfrak{t}_X : \mathcal{T}(X, X[d]) \longrightarrow \mathbb{k}$ ,  $X \in \mathcal{T}$ , satisfaisant aux conditions du point (a) et telle qu'en plus, pour tous morphismes  $X \xrightarrow{g} Y[p]$  et  $Y \xrightarrow{f} X[q]$  dans  $\mathcal{T}$  avec  $p + q = d$ , on ait  $\mathfrak{t}_X((f[p]) \circ g) = (-1)^{pq} \mathfrak{t}_Y((g[q]) \circ f)$ .

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie exacte (munie implicitement d'une structure exacte  $\mathcal{E}$ ).

**Définition 1.8.4.** Une catégorie exacte  $\mathcal{C}$  est dite *stablement  $d$ -Calabi-Yau* si  $\mathcal{C}$  est de Frobenius et sa catégorie stable  $\underline{\mathcal{C}}$ , qui est triangulée d'après [35, 45], est Hom-finie  $d$ -Calabi-Yau.

On rappelle qu'une catégorie exacte  $\mathcal{C}$  est de Frobenius si  $\mathcal{C}$  possède assez de projectifs et assez d'injectifs et si de plus les projectifs et les injectifs coïncident [35, 45, 14]; par ailleurs une catégorie exacte  $\mathcal{C}$  possède assez de projectifs si pour tout objet  $X$  dans  $\mathcal{C}$ , il existe une suite exacte courte  $Y \longrightarrow P \longrightarrow X$  (dans la structure exacte  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{C}$ ) avec  $P$  projectif; la propriété d'avoir assez d'injectifs se définit de façon duale.

## 1.9 Quelques généralités sur les catégories dérivées

Dans cette section nous verrons que les catégories dérivées sont d'autres exemples classiques de catégories triangulées, possédant dans certains cas la dualité de Serre et donc des triangles presque scindés. On ne mentionnera que la construction des catégories dérivées associées aux catégories abéliennes, le cas encore plus général des catégories exactes est traité par Keller [45], pour un survol des catégories exactes on peut aussi se référer à Bühler [14].

### 1.9.1 Définitions et quelques propriétés

Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie additive. Alors un complexe  $(X, d)$  dans  $\mathcal{A}$  est une suite

$$\cdots X^p \xrightarrow{d^p} X^{p+1} \cdots \quad p \in \mathbb{Z}, \text{ telle que } d^p \circ d^{p-1} = 0 \text{ pour tout } p \in \mathbb{Z}.$$

$d$  est alors appelée la *différentielle* du complexe. Si  $\mathcal{A}$  admet aussi des sommes directes indexées sur  $\mathbb{Z}$ , alors un complexe dans  $\mathcal{A}$  est un objet différentiel gradué dans  $\mathcal{A}$  qui consiste en un objet  $\mathbb{Z}$ -gradué  $X = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} X^p$  muni d'un morphisme gradué de degré 1,  $d = (d^p)$ , tel que  $d^2 = 0$ . Un morphisme d'un complexe  $(X, d)$  vers un complexe  $(Y, \delta)$  est un morphisme gradué  $f = (f^p)$  de degré 0 ( $f^p \in \mathcal{A}(X^p, Y^p)$ ) tel que  $f^{p+1}d^p = \delta^p f^p$  pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ : autrement dit  $f$  complète les deux complexes  $X$  et  $Y$  en un diagramme commutatif dans  $\mathcal{A}$ . On note  $\mathcal{CA}$  la catégorie des complexes dans  $\mathcal{A}$  et des morphismes de complexes. Chaque objet  $X$  dans  $\mathcal{A}$  induit dans  $\mathcal{CA}$  un complexe concentré en degré zéro ( $X^0 = X$  et pour tout  $p \neq 0$  on a  $X^p = 0$ , et  $d_X = 0$ );  $\mathcal{A}$  peut alors être vue comme une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{CA}$ . Le translaté d'un complexe  $X = (X, d)$  est le complexe  $X[1]$  tel que  $(X[1])^p = X^{p+1}$  et dont la différentielle est donnée par  $-d$ . On obtient ainsi un automorphisme  $[1] : \mathcal{CA} \xrightarrow{\sim} \mathcal{CA}$  appelé foncteur de translation. Pour chaque  $n \in \mathbb{Z}$ , on posera  $[n] = ([1])^n$  et  $X[n] = ([1])^n(X)$ , la différentielle du  $n^{\text{ième}}$  translaté  $X[n]$  de  $X$  est donnée par  $d_{X[n]} = (-1)^n d_X$ . Pour un morphisme de complexes  $X \xrightarrow{f} Y$ , le cône de  $f$  est le complexe  $\text{cone}(f)$  tel que  $\text{cone}(f)^p = X^{p+1} \oplus Y^p$  et la différentielle  $d_f : X \longrightarrow Y$  est donnée par :

$$d_f^p = \begin{bmatrix} -d_X^{p+1} & 0 \\ f & d_Y^p \end{bmatrix}.$$

Supposons que  $\mathcal{A}$  est abélien. Alors l'homologie de  $\mathcal{A}$  est le foncteur  $H : \mathcal{CA} \longrightarrow \mathcal{CA}$  tel que pour chaque complexe  $X$  de différentielle  $d$ ,  $HX$  est le complexe de différentielle nulle et dont la  $p^{\text{ième}}$  composante est donnée par  $H^p X = \ker d^p / \text{Im } d^{p-1}$ . Pour chaque  $p \in \mathbb{Z}$  le foncteur  $H^p$  est appelé la  $p^{\text{ième}}$  homologie de  $\mathcal{A}$ . Un morphisme de complexes  $f \in \mathcal{CA}(X, Y)$  est appelé un *quasi-isomorphisme* si le morphisme  $Hf$ , induit

en homologie est un isomorphisme.  $f \in \mathcal{CA}(X, Y)$  est d'homotopie nulle (ou encore homotope à zéro) s'il existe un morphisme d'objet gradués de degré  $-1$ ,

$$r = (z^p)_{p \in \mathbb{Z}} : X \longrightarrow Y \text{ avec } z^p : X^p \longrightarrow Y^{p-1}, \text{ tel que } f^p = d_Y^{p-1} \circ r^p + r^{p+1} \circ d_X^p.$$

On obtient ainsi un idéal de  $\mathcal{CA}$  formé des morphismes de complexes d'homotopie nulle ; la catégorie d'homotopie  $\mathcal{HA}$  (encore appelée catégorie des complexes dans  $\mathcal{A}$  à homotopie près) est alors le quotient de  $\mathcal{CA}$  par l'idéal des morphismes de complexes d'homotopie nulle : ainsi  $\text{obj}(\mathcal{HA}) = \text{obj}(\mathcal{CA})$ , tandis que  $\mathcal{HA}(X, Y)$  est la classe des morphismes de complexes modulo les morphismes d'homotopie nulle. Notons que le foncteur d'homologie  $H : \mathcal{CA} \longrightarrow \mathcal{CA}$  induit un autre foncteur de même nom  $H : \mathcal{HA} \longrightarrow \mathcal{CA}$ , et un quasi-isomorphisme dans  $\mathcal{HA}$  est de même défini comme un morphisme  $f$  dans  $\mathcal{HA}$  tel que  $H(f)$  est un isomorphisme. Le foncteur de translation de  $\mathcal{CA}$  induit également pour  $\mathcal{HA}$  un foncteur de translation de même nom  $[1] : \mathcal{HA} \xrightarrow{\sim} \mathcal{HA}$ . On voit que pour chaque  $f \in \mathcal{CA}(X, Y)$ , l'objet gradué sous-jacent de  $\text{cone}(f)$  est donné par  $X[1] \oplus Y$  et on a deux morphismes canoniques de complexes  $Y \xrightarrow{h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \text{cone}(f) \xrightarrow{\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} X[1]$

**Fait 1.1.**  $\triangleright$   $\mathcal{HA}$  est une catégorie triangulée, de foncteur de translation  $[1]$ . Par définition chaque triangle de  $\mathcal{HA}$  est isomorphe à un triangle de la forme  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{\delta} X[1]$ , dit standard et où  $f$  est un morphisme de complexes et  $h$  et  $\delta$  sont canoniques comme ci-dessus.

$\triangleright$  Pour chaque  $p \in \mathbb{Z}$ , le  $p^{\text{ième}}$  foncteur d'homologie  $H^p : \mathcal{HA} \longrightarrow \mathcal{A}$  est co-homologique.

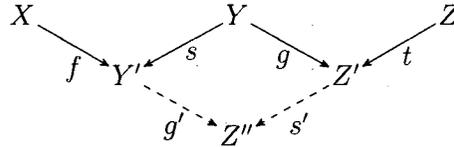
Pour deux catégories additives  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , posons  $\text{Fonct}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$  ;  $\text{Fonct}_{\text{qis}}(\mathcal{CA}, \mathcal{C})$  désigne la sous-catégorie pleine de  $\text{Fonct}(\mathcal{CA}, \mathcal{C})$  formée des foncteurs faisant de chaque quasi-isomorphisme un isomorphisme dans  $\mathcal{C}$ . La catégorie dérivée  $\mathcal{DA}$  de  $\mathcal{A}$  s'obtient en inversant formellement les quasi-isomorphismes dans  $\mathcal{CA}$ . Ainsi  $\mathcal{DA}$  est par définition la localisation de  $\mathcal{CA}$  suivant les classes des quasi-isomorphismes :  $\text{obj}(\mathcal{DA}) = \text{obj}(\mathcal{CA})$  et  $\mathcal{DA}$  satisfait à la propriété universelle suivante : il existe un foncteur canonique  $q : \mathcal{CA} \longrightarrow \mathcal{DA}$  (qui est une identité sur les objets) envoyant les quasi-isomorphismes sur les isomorphismes et qui est universel pour cette propriété, si bien que  $q$  induit pour chaque catégorie additive  $\mathcal{B}$  un isomorphisme de catégories de foncteurs

$$\text{Fonct}(\mathcal{DA}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Fonct}_{\text{qis}}(\mathcal{CA}, \mathcal{B}), F \longmapsto q \circ F.$$

La définition précédente met en évidence la propriété universelle des catégories dérivées.  $\mathcal{DA}$  peut donc être obtenue en ajoutant simplement des inverses formels pour tous les quasi-isomorphismes, si bien qu'un morphisme dans  $\mathcal{DA}$  serait toute expression de la forme  $s_1 \circ f_1 \circ \cdots \circ s_n \circ f_n$  où les  $f_i$  sont des morphismes de complexes et les  $s_i$  sont des quasi-isomorphismes dans  $\mathcal{CA}$ . Mais pour travailler avec une telle expression on a besoin de trouver une sorte de dénominateur commun, autrement dit, faire un "calcul de fractions". Pour cela une autre construction de  $\mathcal{DA}$  fait appel à la localisation de la catégorie triangulée  $\mathcal{HA}$  suivant un système multiplicatif tel qu'observé par Verdier. Nous référons à [55] pour la localisation des catégories triangulées. Selon le lemme 1.9.1 ci-après l'ensemble  $\text{qis}$  des quasi-isomorphismes dans  $\mathcal{HA}$  est un système multiplicatif dans la catégorie triangulée  $\mathcal{HA}$ , (voir par exemple [48, 2.2]).



grammes  $X \xrightarrow{f} Y' \xleftarrow{s} Y$  dans  $\mathcal{M}$ , suivant la relation d'équivalence  $\cong$  induite par les morphismes de diagrammes. La composition de deux fractions  $s^{-1} \cdot f : X \xrightarrow{f} Y' \xleftarrow{s} Y$  et  $t^{-1} \cdot g : Y \xrightarrow{g} Z' \xleftarrow{t} Z$  est définie par la classe  $(t^{-1} \cdot g) \circ (s^{-1} \cdot f) = ((s't)^{-1} \cdot g'f)$  où  $s' \in \text{qis}$  et  $g'$  sont construits en utilisant le lemme 1.9.1-(b) comme le montre le diagramme ci-après :



Notons que si  $X$  est un complexe exact alors dans  $\mathcal{DA}$  on a  $X = 0$ , car  $HX = 0$  si bien que le morphisme nul est un quasi-automorphisme de  $X$  et donc un automorphisme de  $X$  dans  $\mathcal{DA}$ . Ainsi, la structure de  $\mathcal{DA}$  mesure en quelque sorte l'homologie de chaque complexe dans  $\mathcal{CA}$ .

On s'intéresse beaucoup plus non pas à  $\mathcal{DA}$  tout entier, mais à une sous-catégorie triangulée  $\mathcal{D}^b\mathcal{A}$  de  $\mathcal{DA}$  formée de complexes homologiquement bornés. Un complexe  $X$  est dit borné (respectivement, homologiquement borné) si pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  on a  $X^p = 0$  (respectivement  $H^p X = 0$ ) pour tout  $p$  tel que  $|p| > n$ .  $X$  est dit borné à gauche (ou à droite respectivement) s'il existe  $n' \in \mathbb{Z}$  tel que  $X^p = 0$  pour tout  $p \leq 0$  (ou pour tout  $p \geq 0$  respectivement). Les notations  $\mathcal{H}^b\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{H}^-\mathcal{A}$  et  $\mathcal{H}^+\mathcal{A}$  désignent respectivement les catégories d'homotopie des complexes bornés, des complexes bornés à droite et des complexes bornés à gauche. Par définition  $\mathcal{D}^-\mathcal{A}$  est la catégorie dérivée des complexes homologiquement bornés à droite, il s'agit des complexes  $X$  tels qu'il existe un  $n \in \mathbb{N}$  avec  $H^p X = 0$  pour tout  $p \geq n$ . De façon duale on a la catégorie dérivée  $\mathcal{D}^+\mathcal{A}$  des complexes homologiquement bornés à gauche.

**Fait 1.2.**  $\mathcal{DA}$  est une catégorie triangulée (nécessairement additive), de foncteur de translation [1] induit par celui de  $\mathcal{HA}$ . Pour chaque symbole  $\diamond \in \{b, -, +\}$ , la catégorie dérivée  $\mathcal{D}^\diamond\mathcal{A}$  coïncide avec la localisation de la catégorie d'homotopie  $\mathcal{H}^\diamond\mathcal{A}$  relativement à la classe de quasi-isomorphismes de  $\mathcal{H}^\diamond\mathcal{A}$ , et  $\mathcal{D}^\diamond\mathcal{A}$  est une sous-catégorie triangulée de  $\mathcal{DA}$ .

### Groupes d'extension et morphismes dans $\mathcal{DA}$

Un objet  $P$  dans  $\mathcal{A}$  est *projectif* si tout épimorphisme  $X \xrightarrow{f} Y$  dans  $\mathcal{A}$  induit une suite exacte  $\mathcal{A}(P, X) \xrightarrow{f^*} \mathcal{A}(P, Y) \longrightarrow 0$  dans  $\mathcal{Ab}$ . De même un objet  $I$  dans  $\mathcal{A}$  est *injectif* si tout monomorphisme  $X \xrightarrow{m} Y$  dans  $\mathcal{A}$  induit une suite exacte  $\mathcal{A}(Y, I) \xrightarrow{m^*} \mathcal{A}(X, I) \longrightarrow 0$  dans  $\mathcal{Ab}$ . Ainsi une résolution projective d'un objet  $X \in \text{obj}(\mathcal{A})$  est un complexe descendant

$$P : \cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} X \longrightarrow 0, \text{ exact et tel que chaque } P_i \text{ soit projectif pour } i \in \mathbb{N}.$$

De même une résolution injective de  $Y$  est un complexe

$$I : 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{d^0} I_0 \xrightarrow{d^1} I_1 \xrightarrow{d^2} I_2 \cdots, \text{ exact et tel que chaque } I_i \text{ soit injectif pour } i \in \mathbb{N}.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. On sait que si  $\mathcal{A}$  admet assez d'injectifs, alors chaque objet dans  $\mathcal{A}$  admet une résolution injective et le foncteur  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$  est par définition le  $n^{\text{ième}}$  foncteur dérivé à droite du foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$  et dans ce cas  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$  coïncide avec le  $n^{\text{ième}}$  objet d'homologie  $H^n(\mathcal{A}(X, I_Y))$  où  $I$  est une résolution injective de  $Y$  comme plus haut et  $\mathcal{A}(X, I_Y)$  est le complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(X, I^0) \xrightarrow{d^1} \mathcal{A}(X, I^1) \xrightarrow{d^2} \mathcal{A}(X, I^2) \cdots$$

De même si  $\mathcal{A}$  admet assez de projectifs, alors tout objet dans  $\mathcal{A}$  admet une résolution projective et le foncteur  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(-, Y) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$  est par définition le  $n^{\text{ième}}$  foncteur dérivé à gauche du foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$  et dans ce cas  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$  coïncide avec le  $n^{\text{ième}}$  objet d'homologie  $H^n(\mathcal{A}(P_X, Y))$  où  $P$  est une résolution projective de  $X$  comme plus haut et  $\mathcal{A}(P_X, Y)$  est le complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(P_0, Y) \xrightarrow{-d_1} \mathcal{A}(P_1, Y) \xrightarrow{-d_2} \mathcal{A}(P_2, Y) \cdots$$

De façon générale, on a une autre interprétation des bifoncteurs  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(-, -)$  en termes de suites exactes, voir par exemple [39, III; IV : §9] sur les extensions de Yoneda et la composition de deux extensions. On pose  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(-, -) = 0$  pour tout  $k < 0$  (ceci est compatible avec ce qui précède), et pour  $X, Y \in \text{obj}(\mathcal{A})$  on sait qu'on peut regarder  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$  comme l'ensemble quotient des suites exactes ( $n$ -extensions) de la forme

$$\xi_{X,Y} : 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{u} Z^{-n} \cdots \longrightarrow Z^{-1} \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

modulo la relation d'équivalence définie comme suit : deux suites  $\xi_{X,Y}$  et  $\xi'_{X,Y}$  sont équivalentes s'il existe un isomorphisme de diagrammes de la forme  $f = (\mathbb{1}_Y, f^{-n}, \dots, f^{-1}, \mathbb{1}_X)$  entre  $\xi_{X,Y}$  et  $\xi'_{X,Y}$ . Regardant  $X$  et  $Y$  comme des complexes concentrés en degré 0 dans  $\mathcal{DA}$ , à chaque élément dans  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$  représenté par une suite exacte  $\xi_{X,Y}$  on associe dans  $\mathcal{DA}(X, Y[n])$  un morphisme

$$\begin{aligned} \partial(\xi_{X,Y}) \in \mathcal{DA}(X, Y[n]) \text{ représenté par la fraction } \partial(\xi_{X,Y}) = s^{-1} \cdot h : X \xrightarrow{h} Z \xleftarrow{s} Y \text{ où} \\ Z : 0 \longrightarrow Z^{-n} \cdots \longrightarrow Z^{-1} \longrightarrow X \longrightarrow 0 \text{ avec } h^0 = \mathbb{1}_X, s^{-n} = u \text{ et } h^m = 0, s^p = 0 \end{aligned} \quad (1.9.1)$$

pour tout  $m \neq 0$  et tout  $p \neq -n$ .

Les notions de résolutions projectives ou injectives se généralisent comme suit : soit  $I$  un complexe dans  $\mathcal{CA}$ , alors  $I$  est *fibrant* si le morphisme canonique  $\mathcal{HA}(X, I) \longrightarrow \mathcal{DA}(X, I)$  est un isomorphisme pour chaque  $X \in \text{obj}(\mathcal{CA})$ . De même un complexe  $P$  est *cofibrant* si le morphisme canonique  $\mathcal{HA}(P, Y) \longrightarrow \mathcal{DA}(P, Y)$  est un isomorphisme pour chaque  $Y \in \text{obj}(\mathcal{CA})$ . Lorsque  $\mathcal{A} = \text{Mod}A$  pour une  $k$ -algèbre  $A$  de dimension finie, on montre que pour chaque complexe  $M \in \text{obj}(\mathcal{A})$  il existe des quasi-isomorphismes  $pM \longrightarrow M$  et  $M \longrightarrow iM$  où  $pM$  est cofibrant et  $iM$  est fibrant. Si en particulier  $M \in \text{Mod}A$  alors  $pM$  s'obtient d'une résolution projective  $P$  de  $M$  en remplaçant dans  $P$  la composante de degré 0 par 0; de même si  $I$  est une résolution injective de  $M$  alors  $iM$  s'obtient de  $I$  en remplaçant la composante de degré 0 par 0. On obtient ainsi deux foncteurs  $p, i : \mathcal{DA} \longrightarrow \mathcal{HA}$  qui sont pleinement fidèles, de plus,  $p$  est adjoint à gauche du foncteur canonique  $q : \mathcal{HA} \longrightarrow \mathcal{DA}$  tandis que  $i$  est adjoint à droite de  $q$ .

Avec les données précédentes nous retenons aussi les propriétés suivantes des catégories dérivées :

**Lemme 1.9.2** ([38, I : Lem 4.5, §6], [48, Lem 2.4]). *Soient  $X, Y$  deux objets dans  $\mathcal{A}$ .*

- (a) *Si  $I$  est un complexe borné à gauche dont toutes les composantes sont injectives, alors  $I$  est fibrant. De même si  $P$  est un complexe borné à droite dont toutes les composantes sont projectives alors il est cofibrant.*
- (b) *On a les propriétés suivantes.*
- ▷  $\text{Hom}_{\mathcal{D}\mathcal{A}}(X[m], Y[n]) = \text{Hom}_{\mathcal{D}\mathcal{A}}(X, Y[n-m])$  pour tous  $m, n \in \mathbb{Z}$ .
  - ▷ Pour chaque  $n \in \mathbb{Z}$ , l'équation (1.9.1) donne l'existence d'un isomorphisme bi-fonctoriel canonique  $\partial : \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}\mathcal{A}}(X, Y[n])$ ; ainsi  $\text{Hom}_{\mathcal{D}\mathcal{A}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{D}\mathcal{A}}(X[n+t], Y[n]) = \text{Hom}_{\mathcal{D}\mathcal{A}}(X, Y[-t]) = 0 = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{-t}(X, Y)$  pour tout  $t > 1$ .
  - ▷ De plus le foncteur canonique  $q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{H}\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}\mathcal{A}$ , identifiant chaque objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  à un complexe concentré en degré 0 et envoyant chaque morphisme  $f \in \mathcal{A}(X, Y)$  sur la fraction  $1_X^{-1} \cdot f$ , est pleinement fidèle.

Les volets (a) et (b) du Lemme ci-dessus suivent de [38, I : Lem 4.5] et de [38, I : §6]; dans [48, Lem 2.4] une preuve du volet (b) est également donnée dans le cas où  $\mathcal{A}$  admet assez d'injectifs. De manière générale, pour une catégorie triangulée  $\mathcal{T}$  on définit pour chaque  $n \in \mathbb{Z}$  le bifoncteur  $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^n : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$  par :  $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^n(X, Y) = \mathcal{T}(X, Y[n])$  pour chaque paire d'objets  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{T}$ . Rappelons qu'une  $k$ -catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  est dite *Ext-finie* si pour tout entier  $n$  et pour tous objets  $X, Y \in \mathcal{A}$ , le  $k$ -espace  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$  est de dimension finie. On voit que pour les catégories triangulées, les notions de Ext-finie et de Hom-finie coïncident.

*Remarque 1.9.1.* Toute catégorie abélienne Ext-finie est de Krull-Schmidt ; en particulier la catégorie abélienne  $\text{mod } \mathcal{A}$  étant Ext-finie est de Krull-Schmidt.

On note  $D^b \mathcal{A}$  la sous-catégorie de  $\mathcal{D}\text{mod } \mathcal{A}$  formée des complexes  $M \in \mathcal{C}\text{mod } \mathcal{A}$  dont la dimension homologique  $\text{dh}(M) = \dim_k(\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H^p M)$  est finie ; il est clair que  $D^b \text{mod } \mathcal{A}$  coïncide avec  $D^b \mathcal{A}$ .

**Théorème 1.9.3** ([58, 36]).  *$D^b \mathcal{A}$  est une catégorie Hom-finie de Krull-Schmidt et les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $D^b \mathcal{A}$  possède un foncteur de Serre
- (ii)  $D^b \mathcal{A}$  possède des triangles presque scindés (ou de façon équivalente  $D^b \mathcal{A}$  est une  $\tau$ -catégorie stricte triangulée).
- (iii) L'algèbre  $\mathcal{A}$  est de dimension globale finie.

Si l'une des assertions équivalentes ci-dessus est satisfaite, alors le foncteur de Serre pour  $D^b \mathcal{A}$  est le foncteur dérivé à gauche  $\nu = -\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} D \mathcal{A}$  où  $D = \text{Hom}_k(-, k)$  et la translation d'Auslander-Reiten est donnée par  $\tau = \nu \circ [-1]$ , si bien que  $\nu = \tau[1]$ .

L'équivalence entre (i) et (ii) est démontrée dans [58] tandis que l'équivalence entre (i) et (iii) est prouvée dans [36].

### 1.9.2 La forme répétitive de la catégorie dérivée d'une catégorie héréditaire

Une raison fondamentale de l'étude des catégories héréditaires est la très simple description de leurs catégories dérivées. Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne. La *catégorie répétitive*  $\text{Rep}\mathcal{A} = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}[n]$  de  $\mathcal{A}$  est la fermeture additive de l'union disjointe des copies  $\mathcal{A}[n]$  de  $\mathcal{A}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , les objets de chaque copie  $\mathcal{A}[n]$  étant notés  $A[n]$  avec  $A$  objet de  $\mathcal{A}$ , les morphismes sont donnés par la formule :  $\text{Hom}(A[m], B[n]) = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n-m}(A, B)$ , et la composition des morphismes donnée par le produit de Yoneda pour les extensions, voir par exemple [39, IV : §9]. En identifiant  $\mathcal{A}[n]$  avec les complexes concentrés en degré  $n$ , la catégorie répétitive de  $\mathcal{A}$  devient une sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée bornée  $D^b\mathcal{A}$  de  $\mathcal{A}$ . En outre, avec les notations précédentes, le foncteur de translation de  $D^b\mathcal{A}$  envoie  $A[n]$  sur  $A[n+1]$ . Chaque objet  $X$  de la catégorie répétitive de  $\mathcal{A}$  a la forme  $X = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} X_n[n]$ , où  $X_n \in \mathcal{A}$  et le nombre des termes  $X_n$  non nuls est fini.

Une catégorie  $\mathcal{A}$  est dite *héréditaire* si le bifoncteur  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(-, -)$  s'annule, si bien que pour tout entier  $n$  tel que  $n \geq 2$  ou  $n < 0$ , le bifoncteur  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(-, -)$  s'annule.

**Théorème 1.9.4.** *Soit  $\mathcal{H}$  une catégorie abélienne héréditaire quelconque. Alors la catégorie répétitive  $\text{Rep}\mathcal{H}$  et la catégorie dérivée bornée  $D^b\mathcal{H}$  sont naturellement équivalentes.*

*Par conséquent, chaque restriction  $q[n] : \text{ind } \mathcal{H} \longrightarrow \text{ind } D^b\mathcal{H}, M \longmapsto M[n]$ , préserve les bimodules des morphismes irréductibles. Si  $\mathcal{H}$  est de Krull-Schmidt alors il en est de même de  $D^b\mathcal{H}$ .*

On peut alors décrire le carquois modulé de  $D^b\mathcal{H}$  si on connaît celui de  $\mathcal{H}$ . Soit  $Q$  un carquois valué de Dynkin de type  $\Delta$ . On lui associe un *carquois valué de translation stable*  $\mathbb{Z}Q$  ayant pour ensemble de points l'ensemble  $\mathbb{Z} \times Q_0$ . Et à chaque flèche valuée  $\alpha : i \xrightarrow{i^{\text{d}_j}, i^{\text{d}_i}^*} j$  dans  $Q$  correspondent deux flèches valuées  $(n, \alpha) : (n, i) \xrightarrow{i^{\text{d}_j}, i^{\text{d}_i}^*} (n, j)$  et  $(n, \alpha)' : (n, j) \xrightarrow{i^{\text{d}_j}, i^{\text{d}_i}^*} (n+1, i)$ . La *translation* sur  $\mathbb{Z}Q$  est donnée par :  $\tau(n, i) = (n-1, i)$ . Il est bien connu que  $\mathbb{Z}Q$  ne dépend pas de l'orientation de  $Q$  mais seulement du graphe  $\Delta$ , et ainsi il est aussi noté  $\mathbb{Z}\Delta$ . Soit maintenant  $\mathcal{Q}$  un carquois  $k$ -modulé de Dynkin, le carquois valué sous-jacent  $Q$  est alors de Dynkin. Posons  $\mathcal{H} = \text{rep}(Q)$  la catégorie abélienne héréditaire des représentations (à droite de dimension finie) de  $Q$ . On sait déjà que  $\mathcal{H}$  est équivalente à la catégorie  $\text{mod}(kQ)$  des  $kQ$ -modules (à droite de dimension finie). Posons  $D^b(Q) := D^b(\mathcal{H})$  la catégorie dérivée bornée de  $\mathcal{H}$ . En vertu du théorème 1.9.3 on sait que  $D^b(Q)$  satisfait à la dualité de Serre, et donc possède des triangles presque scindés ; en particulier  $D^b(Q)$  est une  $\tau$ -catégorie stricte triangulée. Il en découle que le carquois valué sous-jacent du carquois *modulé de translation*  $\mathcal{Q}_{D^b(Q)}$  est donné par le carquois valué de translation  $\mathbb{Z}\Delta$ .

## 1.10 Catégories amassées et sous-catégories inclinantes amassées

Il existe actuellement trois constructions des catégories amassées : la première construction introduit les catégories amassées comme catégories d'orbites des catégories dérivées bornées associées aux catégories abéliennes héréditaires [12], voir aussi [15] pour (une construction géométrique dans) le cas  $A_n$ . Celle-ci a connu et continue de connaître de très importantes applications en théorie des représentations ainsi que dans

la théorie des algèbres amassées dont l'étude a motivé l'introduction des catégories amassées. Dans [1] deux autres approches des catégories amassées apparaissent et font appel aux techniques des algèbres différentielles graduées et des catégories différentielles graduées. Une généralisation des catégories amassées pour les algèbres de dimension globale 2 y est introduite. La troisième approche associe à chaque *carquois avec potentiel* une catégorie amassée. Nous ne retiendrons pour l'instant que la construction des catégories amassées obtenue par Buan, Marsh, Reineke et Todorov dans [12], et au chapitre 4 nous montrerons comment la construction de Amiot se généralise pour les carquois modulés avec potentiels.

### 1.10.1 Catégories d'orbites d'une catégorie triangulée

Nous rappelons la construction des catégories d'orbites suivant [18]. Soit  $\mathcal{C}$  une (petite)  $k$ -catégorie, et  $G$  un groupe agissant sur  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}$  est alors appelée une  $G$ -catégorie. L'action de  $G$  sur  $\mathcal{C}$  consiste premièrement en une action de  $G$  sur les objets de  $\mathcal{C}$  et deuxièmement en une action  $k$ -linéaire de  $G$  sur les morphismes, compatible avec la composition des morphismes ; autrement dit, on a des morphismes de  $k$ -modules  $s : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(sX, sY)$ , avec  $s \in G$  et  $X, Y \text{ Obj} \in (\mathcal{C})$ , vérifiant la relation :  $ts(f) = t(sf)$  pour tous  $s, t \in G$  et tout morphisme  $f$ , et  $s(gf) = (sg)(sf)$  pour deux morphismes composables dans la catégorie  $\mathcal{C}$ . On exige en plus que  $1f = f$ ,  $1$  étant ici l'unité de  $G$ .  $\mathcal{C}$  est appelée une  $G$ -catégorie libre si l'action de  $G$  sur les objets est libre : pour tout objet  $X$  et tout  $s \in G$ ,  $sX = X$  implique  $s = 1$ . Si  $M$  est un  $kG$ -module et  $\epsilon : kG \longrightarrow k$  l'épimorphisme augmenté tel que  $\epsilon(s) = 1$  pour tout  $s \in G$ , alors on pose  $M/G = M/(\ker(\epsilon)M)$ .

**Définition 1.10.1** ([18]). Étant donné une  $G$ - $k$ -catégorie libre  $\mathcal{C}$ , la catégorie d'orbite  $\mathcal{C}/G$  a comme objets les  $G$ -orbites d'objets de  $\mathcal{C}$ . Pour deux orbites  $\alpha$  et  $\beta$ , le  $k$ -module des morphismes de  $\alpha$  vers  $\beta$  est donné par

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}/G}(\alpha, \beta) = \left( \bigoplus_{X \in \alpha, Y \in \beta} \mathcal{C}(X, Y) \right) / G.$$

On observe que  $\left( \bigoplus_{X \in \alpha, Y \in \beta} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \right)$  est un  $kG$ -module.

Le lemme suivant donne une description alternative des morphismes dans la catégorie d'orbites, où  $\tilde{X}$  désigne l'orbite d'un objet  $X \in \mathcal{C}$ .

**Lemme 1.10.1.** *Soit  $\mathcal{C}$  une  $G$ - $k$ -catégorie libre. Soient  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  deux orbites. Alors les espaces  $\text{Hom}_{\mathcal{C}/G}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ ,  $\bigoplus_{s \in G} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, sY)$  et  $\bigoplus_{s \in G} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(sX, Y)$  sont canoniquement isomorphes*

*Démonstration.* Considérons le morphisme "normalisant"  $\phi : \bigoplus_{X' \in \tilde{X}, Y' \in \tilde{Y}} \mathcal{C}(X', Y') \longrightarrow \bigoplus_{s \in G} \mathcal{C}(X, sY)$  donné sur chaque  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$  par  $\phi(f) = sf$  où  $s$  est l'unique élément de  $G$  tel que  $sX' = X$ . On vérifie facilement que  $\phi(tf) = \phi(f)$  pour tout  $t \in G$ , d'où  $\phi$  induit un morphisme correctement défini encore noté  $\phi : \text{Hom}_{\mathcal{C}/G}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \left( \bigoplus_{X' \in \tilde{X}, Y' \in \tilde{Y}} \mathcal{C}(X', Y') \right) / G \longrightarrow \bigoplus_{s \in G} \mathcal{C}(X, sY)$ . L'inverse  $\psi$  de  $\phi$  est alors donné

par la composition des deux morphismes canoniques du diagramme suivant :

$$\psi : \bigoplus_{s \in G} \mathcal{C}(X, sY) \longrightarrow \bigoplus_{X' \in \tilde{X}, Y' \in \tilde{Y}} \mathcal{C}(X', Y') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(\tilde{X}, \tilde{Y}).$$

L'autre partie du lemme suit de l'argument précédent en changeant seulement la place de  $s$ .  $\square$

Suivant le lemme 1.10.1, si on écrit  $\text{Hom}_{\mathcal{C}G}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \bigoplus_{s \in G} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, sY)$ , alors la composition dans  $\mathcal{C}G$  de deux morphismes  $f = (f_s)_{s \in G} \in \text{Hom}(\tilde{X}, \tilde{Y})$  et  $g = (g_t)_{t \in G} \in \text{Hom}(\tilde{Y}, \tilde{Z})$  est donnée par  $gf = \left( \sum_{r, t \in G; rt=s} (rg_t)f_r \right)_{s \in G}$ .

**Lemme 1.10.2.** *Soit  $\mathcal{C}$  une  $G$ - $k$ -catégorie libre. Il existe un foncteur  $\mathcal{C} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}G$  appelé projection canonique, envoyant chaque objet  $X \in \mathcal{C}$  sur son orbite  $\tilde{X}$  et induisant des identités*

$$\bigoplus_{s \in G} \mathcal{C}(X, sY) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}G}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \text{ pour tous } X, Y \in \mathcal{C}.$$

La paire  $(\mathcal{C}G, \pi)$  est alors universelle dans la catégorie  $k\text{-Cat}$  des petites catégories  $k$ -linéaires.  $\square$

Dans le lemme ci-dessus, précisons que l'universalité de la paire  $(\mathcal{C}G, \pi)$  signifie que cette dernière est une *objet  $G$ -orbite* dans la catégorie  $k\text{-Cat}$  des petites catégories  $k$ -linéaires, c'est-à-dire la colimite d'un foncteur  $G \xrightarrow{\rho} k\text{-Cat}$ , où le groupe  $G$  est vu comme une catégorie dont l'unique objet est l'identité de  $G$  et dont les morphismes sont donnés par  $G$ .

Suivant maintenant [46], soit  $(\mathcal{T}, F)$  une paire formée d'une catégorie triangulée munie d'un automorphisme  $F : \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$  (une construction standard permet de remplacer une catégorie munie d'une auto-équivalence par une catégorie munie d'un automorphisme); on pose  $F^{\mathbb{Z}} = \{F^t : t \in \mathbb{Z}\}$  le sous-groupe d'automorphismes de  $\mathcal{T}$  engendré par  $F$ . Alors on associe à la paire  $(\mathcal{T}, F)$  la catégorie d'orbites  $\mathcal{T}/F^{\mathbb{Z}}$  : pour deux  $F$ -orbites  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  avec  $X, Y \in \mathcal{T}$ , on a donc  $\text{Hom}_{\mathcal{T}/F^{\mathbb{Z}}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, F^n Y)$ , et dans  $\mathcal{T}/F^{\mathbb{Z}}$  la composition de deux morphismes  $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$  et  $g = (g_j)_{j \in \mathbb{Z}} : \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{Z}$  est donnée par  $gf = \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} F^j (g_{i-j}) f_j \right)_{i \in \mathbb{Z}}$ ,  $X, Y, Z$  étant des objets de  $\mathcal{T}$ .

Pour énoncer le théorème de Keller sur la structure triangulée des catégories d'orbites, on a besoin de la notion de *foncteur standard* entre deux catégories dérivées bornées de catégories abéliennes [46]. Par exemple pour une algèbre  $A$  et un complexe de  $A$ -bimodules  $T$ , tout foncteur isomorphe au foncteur dérivé (gauche) du produit tensoriel  $-\overset{L}{\otimes}_A T : D^b(A) \longrightarrow D^b(A)$  est une *équivalence standard*. Soit maintenant  $\mathcal{H}$  une catégorie abélienne héréditaire Ext-finie (les espaces  $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^n(X, Y)$  sont de dimension finie pour tous objets  $X, Y \in \mathcal{H}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ),  $\mathcal{H}$  est donc de Krull-Schmidt.

**Théorème 1.10.3** ([46, 4, 9.9]). *Soit  $F : D^b \mathcal{H} \longrightarrow D^b \mathcal{H}$  un foncteur standard tel que les conditions suivantes soient satisfaites :*

tro1 *Pour tout indécomposable  $U$  de  $\mathcal{H}$ , l'ensemble  $\{i \in \mathbb{Z} : F^i U \in \mathcal{H}\}$  est fini.*

tro2 Il existe un entier naturel  $N$  tel que  $S = \{F^n U : U \in \text{ind } \mathcal{H}, |n| \leq N\}$  contienne un représentant de la  $F$ -orbite de chaque objet indécomposable de  $D^b \mathcal{H}$ .

Alors la catégorie d'orbites  $D^b \mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$  admet une structure naturelle de catégorie triangulée telle que le foncteur de projection canonique  $\pi : D^b \mathcal{H} \longrightarrow D^b \mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$  soit un foncteur exact de revêtement.

Nous retiendrons trois conséquences immédiates du Théorème 1.10.3.

**Corollaire 1.10.4.** Soit  $F : D^b \mathcal{H} \longrightarrow D^b \mathcal{H}$  une auto-équivalence exacte, satisfaisant aux axiomes tro1 et tro2 du Théorème 1.10.3. Alors la catégorie d'orbite  $\mathcal{C} = D^b \mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$  est de Krull-Schmidt.

*Démonstration.* Soit  $\widetilde{X}$  dans  $\mathcal{C} = D^b \mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$  induit par  $X$  dans  $\mathcal{D}$ . On a une décomposition  $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$  en objets indécomposables de  $\mathcal{D}$ , avec l'algèbre d'endomorphismes de chaque  $X_i$  locale. Puisque le foncteur  $\pi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$  est exact, il commute avec les sommes directes finies ; on a donc  $\widetilde{X} = \widetilde{X}_1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{X}_n$ . On affirme que pour chaque  $i$ ,  $\text{End}_{\mathcal{C}}(\widetilde{X}_i)$  est aussi locale, ce qui impliquera le résultat. Pour voir que l'affirmation précédente tient, soit  $Y$  dans  $\text{ind } \mathcal{D}$ , par définition  $\text{End}_{\mathcal{C}}(\widetilde{Y}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, F^n Y)$ . On vérifie aisément que  $\text{rad}_{\mathcal{D}}(Y, Y) \oplus \left( \bigoplus_{n \neq 0} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, F^n Y) \right)$  est l'unique idéal maximal de  $\text{End}_{\mathcal{C}}(\widetilde{Y})$ , par conséquent  $\text{End}_{\mathcal{C}}(\widetilde{Y})$  une algèbre locale.  $\square$

Avec les notations et hypothèses précédentes, on suppose que  $D^b \mathcal{H}$  admet un foncteur de Serre  $D^b \mathcal{H} \xrightarrow{\nu} D^b \mathcal{H}$  (c'est par exemple le cas si  $\mathcal{H} = \text{rep}(\mathcal{Q})$  pour un carquois modulé  $\mathcal{Q}$ ). Alors  $\nu$  doit être standard ([46]). On note  $\mathcal{H}_p$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{H}$  formée des objets projectifs, et  $\mathcal{H}_i$  celle qui est formée des objets injectifs. De même  $\mathcal{H}_{np}$  désigne la sous-catégorie de  $\mathcal{H}$  formée des objets n'ayant aucun facteur direct projectif, et  $\mathcal{H}_{ni}$  désigne la sous-catégorie de  $\mathcal{H}$  formée des objets n'ayant aucun facteur direct injectif.

*Remarque 1.10.2.* La translation d'Auslander-Reiten  $D^b \mathcal{H} \xrightarrow{\tau = \nu \circ [-1]} D^b \mathcal{H}$  induit alors deux équivalences de catégories  $\mathcal{H}_i \xrightarrow{\tau^{-1}} \mathcal{H}_p[1]$  et  $\mathcal{H}_{ni} \xrightarrow{\tau^{-1}} \mathcal{H}_{np}$ .  $D^b \mathcal{H}$  est Hom-finie, de Krull-Schmidt et possède alors des triangles presque scindés.

**Corollaire 1.10.5.** Soit  $d \geq 2$  un entier. Avec les notions précédentes, le foncteur  $F = \tau^{-1}[d-1] = \nu^{-1} \circ [d]$  est une équivalence standard satisfaisant aux conditions tro1 et tro2. Par conséquent la catégorie d'orbites  $D^b \mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$  est naturellement triangulée et le foncteur de projection canonique est un foncteur exact. De plus le foncteur de Serre  $\nu \in \text{Fonct}(D^b \mathcal{H}, D^b \mathcal{H})$  induit clairement un foncteur de Serre  $\tilde{\nu} \in \text{Fonct}(D^b \mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}, D^b \mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}})$  dont la translation (d'Auslander-Reiten) correspondante  $\tilde{\tau}$  coïncide avec  $[d-1]$ . Ainsi  $D^b \mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$  est faiblement  $d$ -Calabi-Yau.

*Démonstration.* On a besoin de montrer seulement le deuxième volet du corollaire. Pour chaque objet  $X$  dans  $D^b \mathcal{H}$ , on a  $\widetilde{X}[1] = \widetilde{X}[1]$ ,  $\tilde{\nu}(\widetilde{X}) = \nu \widetilde{X}$  et  $\tilde{\tau} = \tilde{\nu} \circ [-1]$  si bien que  $\tilde{\tau}(\widetilde{X}) = (\tilde{\nu} X)[-1] = \tau \widetilde{X}$ . On utilise alors la description des morphismes dans  $D^b \mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$  donnée dans le lemme 1.10.1 pour voir que le foncteur de Serre  $\nu$  induit un foncteur de Serre  $\tilde{\nu}$  pour  $D^b \mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$ . Ayant en vue le fait que  $F = \tau^{-1}[d-1]$ , si bien que pour chaque objet  $X \in D^b \mathcal{H}$  les objets  $FX = \tau^{-1} X[d-1]$  et  $X$  sont égaux dans  $D^b \mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$ , il suit alors de

ce qui précède que  $\tilde{\tau} = [d - 1]$ . D'où  $[d] = \tilde{\tau}[1] = \tilde{\nu}$  est un foncteur de Serre pour  $D^b\mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$ , montrant que  $D^b\mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$  est faiblement  $d$ -Calabi-Yau.  $\square$

Dans la catégorie triangulée  $\mathcal{C} = D^b\mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$  on rappelle que pour tout entier  $n$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \mathcal{C}(\tilde{X}, \tilde{Y}[n])$ . La propriété de Calabi-Yau de  $\mathcal{C}$  s'écrit comme suit :  $\mathcal{C}(-, X[d]) \cong D\mathcal{C}(X, -)$  ou encore  $\mathcal{C}(-, \tilde{\tau}\tilde{X}) \cong D\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, -)$ .

Dans le contexte du théorème 1.10.3, le foncteur  $F$  étant une auto-équivalence exacte préserve en particulier les triangles presque scindés si bien qu'on aussi la conséquence suivante :

**Corollaire 1.10.6.** *Les triangles presque scindés de la catégorie triangulée faiblement  $d$ -Calabi-Yau  $\mathcal{C} = D^b\mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$  sont induits de ceux de  $D^b\mathcal{H}$ . Ainsi le carquois modulé  $\mathcal{Q}_{\mathcal{C}}$  de  $\mathcal{C}$  est égal au carquois modulé orbite  $\mathcal{Q}_{D^b\mathcal{H}/\varphi}$ , où  $\varphi = \varphi(F)$  est l'automorphisme de  $\mathcal{Q}_{D^b\mathcal{H}}$  induit par  $F$ .*

*Démonstration.* Soit  $\tilde{X}$  un objet indécomposable de  $\mathcal{C}$  induit par  $X$  dans  $\mathcal{D}$ , et soit  $\tau X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X \xrightarrow{e} \tau X[1]$  un triangle presque scindé dans  $\mathcal{D}$ . Comme  $F$  préserve les triangles presque scindés,  $F^i$  appliqué au triangle précédent donne encore un triangle presque scindé pour tout  $i$ . Le foncteur canonique et exact  $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  induit alors le triangle

$$(\xi) : \tau\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{E} \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{X} \xrightarrow{\tilde{e}} \tau\tilde{X}[1] = \widetilde{\tau X[1]}.$$

Comme  $e \neq 0$ , on a  $\tilde{e} \neq 0$ . Soit  $\tilde{Z} \in \text{ind}\mathcal{C}$  induit par  $Z \in \text{ind}\mathcal{D}$  tel que  $\tilde{Z} \not\cong \tilde{X}$ , et soit  $\tilde{h} : \tilde{Z} \rightarrow \tilde{X}$  un morphisme non nul. Alors  $\tilde{h} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} h_i$  avec  $h_i \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, F^i X)$ . Puisque  $\tilde{Z} \not\cong \tilde{X}$ , on a  $Z \not\cong F^i X$  pour tout  $i$ , et par conséquent, il existe un  $v_i : Z \rightarrow F^i E$  tel que  $F^i(g)v_i = h_i$ . On pose  $\tilde{v} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} v_i$ . On a donc  $\tilde{g}\tilde{v} = \tilde{h}$  et ainsi  $\tilde{g}$  est presque scindé à droite. On montre de même que  $\tilde{f}$  est presque scindé à gauche. Ainsi,  $(\xi)$  est un triangle presque scindé dans  $\mathcal{C}$ , et la translation (d'Auslander-Reiten)  $\tilde{\tau}$  correspondante est bien donnée par  $\tilde{\tau}\tilde{X} = \widetilde{\tau X}$ . Il en découle aussi que si  $\varphi : \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$  est l'automorphisme induit par  $F$ , alors  $\mathcal{Q}_{\mathcal{C}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}/\varphi$ .  $\square$

## 1.10.2 La catégorie amassée associée à une catégorie abélienne héréditaire

On garde les notations et hypothèses les plus récentes sur  $\mathcal{H}$ .

**Définition 1.10.3.** Soit  $m \geq 1$  un entier naturel. La *catégorie  $m$ -amassée* associée à  $\mathcal{H}$  est la catégorie d'orbites  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}^{(m)} = D^b\mathcal{H}/F^{\mathbb{Z}}$  où  $F = \tau^{-1}[m]$ . C'est donc une catégorie triangulée, faiblement  $(m+1)$ -Calabi-Yau, ayant la propriété de Krull-Schmidt. De plus  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}^{(m)}$  est aussi Hom-finie, et possède des triangles presque scindés induits par ceux de  $D^b\mathcal{H}$  via le foncteur canonique et exact  $\pi : D^b\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{H}}^{(m)}$ . Lorsque  $m = 1$ ,  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}^{(1)}$  est tout simplement appelée la *catégorie amassée* associée à  $\mathcal{H}$  et notée  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ .

Si on note  $\mathcal{H}_{\text{p}}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{H}$  formée des objets projectifs, l'ensemble  $\mathcal{S} = \text{ind}\mathcal{H} \vee \text{ind}\mathcal{H}[1] \vee \dots \vee \text{ind}\mathcal{H}[m-1] \vee \text{ind}\mathcal{H}_{\text{p}}[m]$  est un système fondamental pour l'action de  $F$  sur  $D^b\mathcal{H}$ . Dans

toute la suite, l'orbite  $\widetilde{X}$  d'un objet de  $\mathcal{D} = D^b\mathcal{H}$  sera le plus souvent identifié à son représentant dans un système fondamental  $\mathcal{S}$  pour la catégorie  $m$ -amassée  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}^{(m)}$  comme dans la définition 1.10.3 précédente. Ci-après, on rassemble quelques propriétés élémentaires des catégories amassées, on note désormais  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{H}}$  (et  $F = \tau^{-1}[1]$ ).

**Proposition 1.10.7** ([12]).  $\text{ind } \mathcal{C} = \{\widetilde{X} : X \in \mathcal{S}\}$  et pour deux objets  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{S}$  on a :

- (a)  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F^i Y) = 0$  pour tout  $i \notin \{0, 1\}$ .
- (b) Si  $X$  ou  $Y$  n'est pas sur un cycle dans  $\mathcal{D}$ , alors  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F^i Y) \neq 0$  pour au plus un entier  $i$ .

**Proposition 1.10.8** ([12]). Soient  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\mathcal{D} = D^b\mathcal{H}$ .

- (a)  $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^1(X, F^{-1}Y) \cong D \text{Ext}_{\mathcal{D}}^1(Y, X)$ , et la propriété 2-Calabi-Yau de  $\mathcal{C}$  s'écrit encore :  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \cong D \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\widetilde{Y}, \widetilde{X})$  pour tous objets  $\widetilde{X}$  et  $\widetilde{Y}$  dans  $\mathcal{C}$ .
- (b) Pour tous  $X, Y \in \text{ind } \mathcal{H}$  on a  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(X, Y) \oplus D \text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(Y, X)$ .
- (c) Pour tous objets  $X, Y \in \mathcal{H}$  avec  $X$  projectif ou  $Y$  injectif, on a  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{H}}(X, Y)$ .

### 1.10.3 Sous-catégories inclinantes amassées

Dans toute la suite du travail on n'utilisera que la version faible de la condition de Calabi-Yau, ainsi l'expression "*d-Calabi-Yau*" sera une abréviation de l'expression "*faiblement d-Calabi-Yau*", pour chaque  $d \in \mathbb{Z}$ . Dans cette sous-section  $\mathcal{C}$  désigne une catégorie 2-Calabi-Yau Hom-finie ou une catégorie *exacte stablement 2-Calabi-Yau* (Définition 1.8.4), dans laquelle les idempotents scindent.

La catégorie amassée  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ , associée à une catégorie abélienne héréditaire Ext-finie  $\mathcal{H}$ , est un exemple typique de catégorie 2-Calabi-Yau. Soit  $\mathcal{T}$  une catégorie triangulée, alors la catégorie  $\text{mod } \mathcal{T}$  des foncteurs de type fini de  $\mathcal{T}^\circ$  vers  $\text{Mod}(k)$  est une catégorie abélienne de Frobenius, voir [30] et [55]. Il suit de [46, §8.5] que si  $\mathcal{T}$  est *d-Calabi-Yau*, alors la catégorie stable  $\underline{\text{mod}} \mathcal{T}$  est  $(3d - 1)$ -Calabi-Yau. En particulier, si  $\Lambda$  est l'algèbre préprojective associée à un carquois (ordinaire) de type Dynkin, alors  $\underline{\text{mod}} \Lambda$  est Hom-finie 2-Calabi-Yau, voir [33] et [5, Propositions 3.1, 1.2], si bien que  $\text{mod } \Lambda$  est stablement 2-Calabi-Yau. Ce dernier fait peut aussi être déduit de [46, §8.5] et du fait qu'en vertu de [46, §8.4], la catégorie des modules projectifs sur l'algèbre préprojective  $\Lambda$  est 1-Calabi-Yau. Rappelons que dans une catégorie triangulée  $\mathcal{T}$  on a posé :  $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^n(-, X) = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X[n])$  pour tout entier  $n$  et pour tout objet  $X$  dans  $\mathcal{T}$ .

**Définition 1.10.4.** Supposons que  $\mathcal{T}$  est une catégorie exacte Ext-finie ou la catégorie triangulée  $D^b\mathcal{H}$ .

- ▷ Un objet  $E$  dans  $\mathcal{T}$  est *exceptionnel* si  $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^n(E, E) = 0$  pour tout  $n \geq 1$  et  $\text{End}_{\mathcal{T}}(E)$  est un  $k$ -surcorps.
- ▷ Un objet  $T \in \mathcal{T}$  est *inclinant* si
  - (i)  $T$  ne possède pas d'auto-extension propre, c'est-à-dire,  $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^n(T, T) = 0$  pour tout  $n > 0$ . Dans le cas où  $\mathcal{T}$  est exacte non-héréditaire on exige aussi que  $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^n(T, -) = 0$  pour  $n \geq 2$ .
  - (ii)  $T$  engendre  $\mathcal{T}$  dans un sens homologique : pour tout objet  $X \in \mathcal{T}$ , si  $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^n(T, X) = 0$  pour tout  $n \geq 0$ , alors  $X = 0$ .

On sait que si la catégorie abélienne héréditaire Ext-finie  $\mathcal{H}$  possède un objet inclinant, alors le groupe de Grothendieck  $K_0(\mathcal{H})$  est libre et de rang fini, si bien que  $K_0(\mathcal{H}) = \mathbb{Z}^n$  pour un certain entier  $n \in \mathbb{N}$ . Et dans ce cas, un objet  $T$  dans  $\mathcal{H}$  est inclinant si et seulement si  $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(T, T) = 0$  et le nombre  $|\text{ind}(\text{add } T)|$  vaut le rang  $n$  de  $K_0(\mathcal{H})$ , ou de façon équivalente  $T$  est sans auto-extension propre et maximale pour cette propriété dans le sens que pour tout objet  $X$  dans  $\mathcal{H}$ , si  $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(T \oplus X, T \oplus X) = 0$  alors  $X \in \text{add } T$ . De plus  $T$  est dit *sobre* si chaque facteur direct indécomposable de  $T$  apparaît avec la multiplicité 1 dans la décomposition de  $T$  en une somme directe de facteurs indécomposables. De même, un objet  $\bar{T}$  dans  $\mathcal{H}$  est *presque inclinant* s'il existe un objet indécomposable  $M$  pour lequel  $\bar{T} \oplus M$  est inclinant. Si  $\mathcal{H}$  est la catégorie de modules d'une  $k$ -algèbre héréditaire (par exemple  $\mathcal{H} = \text{rep}(\mathcal{Q})$  pour un carquois modulé fini et acyclique  $\mathcal{Q}$ ), alors en vertu d'un résultat de Happel et Unger ([37]), tout objet presque inclinant sobre de  $\mathcal{H}$  peut être complété en un objet inclinant d'au plus deux manières et, de deux manières exactement si l'objet presque inclinant est sincère ( $\bar{T}$  est sincère si tout objet simple dans  $\mathcal{H}$  est facteur de composition de  $\bar{T}$ ).

Suivant par exemple [51], on rappelle qu'une sous-catégorie  $\mathcal{B}$  d'une catégorie additive  $\mathcal{A}$  est *contravariamment finie* si la restriction  $\mathcal{A}(-, X)|_{\mathcal{B}}$  du foncteur représentable défini par  $X$  est de type fini pour tout objet  $X$  dans  $\mathcal{A}$ , de façon équivalente, pour chaque  $X$  dans  $\mathcal{A}$ , il existe une  $\mathcal{B}$ -approximation à droite  $f : B \longrightarrow X$  avec  $B$  dans  $\mathcal{B}$  (pour tout morphisme  $u : Z \longrightarrow X$  dans  $\mathcal{A}$ , il existe un morphisme  $u' \in \mathcal{A}(Z, B)$  tel que  $fu' = u$ ). La notion duale de contravariamment finie est celle de *covariamment finie*. Si  $\mathcal{B}$  est à la fois contravariamment finie et covariamment finie alors on dit que  $\mathcal{B}$  est *fonctoriellement finie*. On observe que dans les catégories 2-Calabi-Yau ou exactes stablement 2-Calabi-Yau, les trois notions précédentes sont équivalentes. Pour une sous-catégorie  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{C}$  et pour tout objet  $X \in \mathcal{C}$ , on écrira simplement  $\text{Ext}^n(\mathcal{T}, X) = 0$  pour traduire le fait que pour tout  $M \in \mathcal{T}$  on a  $\text{Ext}^n(M, X) = 0$ .

**Définition 1.10.5** ([51, 21, 12, 42]). Soit  $\mathcal{T}$  un sous-catégorie de  $\mathcal{C}$ . On dit que  $\mathcal{T}$  est *rigide* ou *1-orthogonale* si  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = 0$ .

▷  $\mathcal{T}$  est appelée une *sous-catégorie inclinante amassée* si  $\mathcal{T}$  est fonctoriellement finie et *rigide maximale* dans  $\mathcal{C}$ ; en d'autres termes  $\mathcal{T}$  vérifie les conditions ci-après.

- (a) La restriction  $\mathcal{C}(-, X)|_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \longrightarrow \text{mod}(k)$  du foncteur représentable  $\mathcal{C}(-, X)$  (ou de façon équivalente la restriction  $\mathcal{C}(X, -)|_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \longrightarrow \text{mod}(k)$  du foncteur  $\mathcal{C}(X, -)$ ) est de type fini pour tout  $X$  dans  $\mathcal{C}$ .
- (b) Soit  $X$  objet dans  $\mathcal{C}$ , alors  $X$  appartient à  $\mathcal{T}$  si et seulement si  $\text{Ext}^1(\mathcal{T}, X) = 0$  (ou de façon équivalente, si et seulement si  $\text{Ext}^1(X, \mathcal{T}) = 0$ ).

De même, Un objet  $T$  dans  $\mathcal{C}$  est dit *inclinant amassé* si  $\text{add } T$  est une sous-catégorie inclinante amassée. Dans ce cas, l'algèbre d'endomorphismes  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  est appelée *algèbre inclinée 2-Calabi-Yau* ou simplement *algèbre inclinée amassée* dans le cas où  $\mathcal{C}$  est une catégorie amassée.

▷ Un objet *presque inclinant amassé* est un objet  $\bar{T}$  pour lequel il existe un objet indécomposable  $M$  dans  $\mathcal{C}$  tel que  $\bar{T} \oplus M$  soit inclinant amassé.

Rappelons que deux catégories abéliennes  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont dites *dérivées-équivalentes* si  $D^b\mathcal{A}$  est équivalente à  $D^b\mathcal{A}'$ . On a alors le lien suivant entre les objets inclinants dans  $\mathcal{H}$  et les objets inclinants amassés

dans la catégorie amassée  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ .

**Proposition 1.10.9** ([12, 61]). (a) Soit  $T$  un objet inclinant amassé sobre dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ , on pose  $n$  le rang du groupe de Grothendieck de  $\mathcal{H}$ .

(i) Alors  $T$  est induit par un objet inclinant sobre dans une catégorie abélienne héréditaire  $\mathcal{H}'$  dérivée-équivalente à  $\mathcal{H}$ .

(ii)  $T$  possède exactement  $n$  facteurs directs indécomposables deux-à-deux non isomorphes.

(b) Tout objet inclinant sobre dans  $\mathcal{H}$  induit un objet inclinant amassé dans  $\mathcal{C}$ .  $\square$

Pour un objet inclinant amassé sobre  $T = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} T_i$  dans  $\mathcal{C}$  et pour un facteur direct  $T_k$  de  $T$ , on pose  $T/T_k = \bigoplus_{1 \leq i \leq n, i \neq k} T_i$ . Le résultat de Happel et Unger sur les compléments d'objets presque inclinants admet une généralisation dans les catégories (exactes stablement) 2-Calabi-Yau, comme le montre le volet (a) du théorème ci-après.

**Théorème 1.10.10** ([12, 61, 51, 43] et [10, II.1.5]). Soit  $T$  un objet inclinant amassé sobre dans une catégorie 2-Calabi-Yau ou stablement 2-Calabi-Yau  $\mathcal{C}$ .

(a) Pour chaque facteur direct indécomposable  $M$  de  $T$ , il existe un unique objet indécomposable  $M^* \in \text{ind } \mathcal{C}$  n'appartenant pas à  $T$  tel que l'objet  $T^* = (T/M) \oplus M^*$  soit inclinant amassé. En particulier, tout objet rigide  $\bar{T}$  dans une catégorie amassée  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$  peut être complété en un objet inclinant amassé, et si en plus  $\bar{T}$  est presque inclinant amassé sobre, alors il admet exactement deux compléments  $M$  et  $M^*$ .

(a') Suivant (a), on considère l'objet inclinant amassé  $T^* = (T/M) \oplus M^*$ . Alors il existe deux uniques suites  $M^* \xrightarrow{f^*} U \xrightarrow{f} M$  et  $M \xrightarrow{f'} U' \xrightarrow{f'^*} M^*$  avec  $U, U' \in \text{add } T/M$ , appelées suites d'échange (ou triangles d'échange), où  $f$  et  $f'^*$  sont minimaux à droite,  $f^*$  et  $f'$  sont minimaux à gauche et les suites suivantes sont exactes :

$$\begin{aligned} \text{add } T(-, U) \xrightarrow{f^*} \text{add}(T/M)(-, M) \longrightarrow 0, \quad \text{add } T^*(-, U') \xrightarrow{f'^*} \text{add}(T/M)(-, M^*) \longrightarrow 0, \\ \text{add } T^*(U, -) \xrightarrow{f^*} \text{add}(T/M)(M^*, -) \longrightarrow 0, \quad \text{add } T(U', -) \xrightarrow{f'} \text{add}(T/M)(M, -) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Si en particulier  $\mathcal{C}$  est la catégorie amassée, alors les morphismes  $f$  et  $f'^*$  sont minimaux presque scindés à droite respectivement dans  $\text{add } T$  et  $\text{add } T^*$ , tandis que les morphismes  $f^*$  et  $f'$  sont minimaux presque scindés à gauche respectivement dans  $\text{add } T^*$  et  $\text{add } T$ .

(b) Soit  $\tilde{\mathcal{A}} = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  l'algèbre inclinée 2-Calabi-Yau correspondant à  $T$ . Alors le foncteur  $\mathcal{C}(T, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{mod } \tilde{\mathcal{A}}$  induit une équivalence de catégories  $\mathcal{C} / \text{add}(\tau T) \xrightarrow{\cong} \text{mod } \tilde{\mathcal{A}}$ .  $\square$

Dans la situation (a') du théorème 1.10.10, en utilisant une terminologie à introduire dans la section 2.1, les suites d'échange sont des  $\text{add}(T/M)$ -approximations minimales. Dans [51], Bernhard Keller et Idun Reiten prouvent des versions plus générales du théorème 1.10.10 et de la proposition 1.10.9 pour toute sous-catégorie inclinante amassée non nécessairement induite par un objet dans  $\mathcal{C}$ . Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est stablement 2-Calabi-Yau, le théorème 1.10.10 suit de [10, II.1.5].

Il suit en particulier de la proposition 1.10.9 et du théorème 1.10.10-(b) que pour tout objet inclinant amassé  $T$  dans une catégorie amassée  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ , l'algèbre inclinée amassée  $\tilde{\mathcal{A}} = \text{End}_{\mathcal{C}_{\mathcal{H}}}(T)$  est de représentation

finie si et seulement s'il en est de même pour  $\mathcal{H}$ , et si tel est le cas, alors les cardinalités  $|\text{ind } \mathcal{H}|$  et  $|\text{ind}(\text{mod. } \widetilde{\mathcal{A}})|$  sont égales. Dans la situation du théorème 1.10.10 on écrit  $T^* = \mu_M(T)$  et  $T = \mu_{M^*}(T^*)$ ; cette opération est appelée *mutation inclinante amassée*. Rappelons aussi que le *graphe inclinant* de  $\mathcal{C}$  a pour points les objets inclinants amassés sobres dans  $\mathcal{C}$  (pris à isomorphisme près), et tel que deux objets inclinants amassés sobres  $T$  et  $T'$  sont adjacents s'ils ne diffèrent que par un facteur direct indécomposable, c'est-à-dire, s'il existe deux objets  $M \in \text{ind } T$  et  $M^* \in T^*$  tels que  $T^* = \mu_M(T)$  et  $T = \mu_{M^*}(T^*)$ . On définit de même le graphe inclinant de  $\mathcal{H}$ . On sait que le graphe inclinant d'une catégorie de modules sur une algèbre héréditaire n'est pas toujours connexe, sauf lorsque par exemple l'algèbre est de représentation finie. Cependant pour la catégorie amassée on a le résultat suivant :

**Proposition 1.10.11.** *Soit  $\mathcal{H}$  une catégorie abélienne héréditaire Ext-finie ayant des complexes inclinants, alors le graphe inclinant de  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$  est connexe. Par conséquent, tout objet inclinant sobre dans  $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$  peut être obtenu d'un objet inclinant dans  $\mathcal{H}$  par des suites finies de mutations.*  $\square$

Dans la situation de la proposition précédente, on retiendra que toutes les algèbres inclinées amassées s'obtiennent à partir des algèbres héréditaires par des mutations successives. En particulier toute algèbre inclinée amassée de rang 2 est héréditaire, c'est le cas par exemple pour les algèbres inclinées amassées de type  $\mathbb{G}_2$ .

## Chapitre 2

# Structures amassées pour les catégories 2-Calabi-Yau : Une généralisation non-simplement lacée

Dans ce chapitre, notre objectif primordial est de prouver l'existence d'une version généralisée des structures amassées pour les catégories (triangulées ou exactes stablement) 2-Calabi-Yau. La contribution principale pour la version non-simplement lacée des structures amassées est fournie par le théorème 2.3.2.

### 2.1 Approximations minimales, $\tau$ -suites reliant

Dans cette section nous rassemblons les résultats préliminaires dont nous aurons besoin pour la suite.

Soit  $\mathcal{M}$  une sous-catégorie pleine d'une catégorie  $\mathcal{A}$ ,  $X$  un objet dans  $\mathcal{A}$ . Un morphisme  $f : E \longrightarrow X$  est appelé une  $\mathcal{M}$ -approximation à droite si  $E \in \mathcal{M}$  et pour tout objet  $Z$  dans  $\mathcal{M}$  la suite  $\text{Hom}(Z, E) \xrightarrow{f} \text{Hom}(Z, X) \longrightarrow 0$  est exacte. Une  $\mathcal{M}$ -approximation à droite  $f$  est dite minimale si de plus  $f$  est minimal à droite. La notion duale de  $\mathcal{M}$ -approximation (minimale) à gauche se définit pareillement. Rappelons qu'une suite  $(\xi) : X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$  est pseudo-exacte si  $f$  est un pseudo-noyau de  $g$  et  $g$  est un pseudo-conoyau de  $f$ , de façon équivalente, tout objet  $M$  dans  $\mathcal{A}$  induit deux suites exactes dans  $\mathcal{A}$  données par :

$$\mathcal{A}(M, X) \xrightarrow{f} \mathcal{A}(M, Z) \xrightarrow{g} \mathcal{A}(M, Y) \text{ et } \mathcal{A}(Y, M) \xrightarrow{g} \mathcal{A}(Z, M) \xrightarrow{f} \mathcal{A}(X, M).$$

Nous dirons qu'une suite pseudo-exacte  $(\xi)$  est *minimale* si  $X$  et  $Y$  sont indécomposables et si  $f$  est minimal à gauche tandis que  $g$  est minimal à droite ; de même  $(\xi)$  est une  $\mathcal{M}$ -approximation minimale si de plus  $f$  est une  $\mathcal{M}$ -approximation minimale à gauche et  $g$  est une  $\mathcal{M}$ -approximation minimale à droite. Lorsque  $\mathcal{A}$  est une catégorie triangulée, un triangle  $(\xi) : X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{e} X[1]$  est minimal (ou est une  $\mathcal{M}$ -approximation minimale) si la sous-suite  $X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$  est minimale (ou respectivement, est une  $\mathcal{M}$ -approximation minimale).

Nous avons déjà signalé dans le lemme 1.8.2 que la somme directe d'une famille de triangles est encore un triangle, on sait aussi que la somme directe de deux suites exactes courtes dans une catégorie exacte est encore une suite exacte courte. Le lemme suivant montre comment construire à partir d'un triangle donné un qui soit minimal, et comment construire à partir d'une suite exacte courte (ou d'une suite pseudo-exacte en présence de la propriété de Krull-Schmidt) une qui soit minimale.

**Lemme 2.1.1.** *Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie triangulée ou exacte, possédant des décompositions directes maximales finies, soit  $(\xi)$  un triangle  $X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{e} X[1]$  (ou une suite exacte courte  $X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y$ ) dans  $\mathcal{A}$ .*

(a) *Si  $(\xi)$  est un triangle, alors il se décompose suivant un diagramme commutatif de la forme,*

$$(\xi) : \begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{\begin{bmatrix} f'_1 & \\ & 0 \end{bmatrix}} & E_1 \oplus Y_2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} g'_1 & 0 \\ & 1_{Y_2} \end{bmatrix}} & Y_1 \oplus Y_2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} e'_1 & 0 \end{bmatrix}} & X[1] \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{e} & X[1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 X' \oplus X'' & \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' & 0 \\ & 1_{X''} \end{bmatrix}} & E' \oplus X'' & \xrightarrow{\begin{bmatrix} g' & 0 \end{bmatrix}} & Y & \xrightarrow{\begin{bmatrix} e' \\ 0 \end{bmatrix}} & X'[1] \oplus X''[1]
 \end{array}$$

où la suite  $X \xrightarrow{f'_1} E_1 \xrightarrow{g'_1} Y_1 \xrightarrow{e'_1} X[1]$  est un triangle tel que  $f'_1$  soit minimal à gauche et la suite  $X' \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} Y \xrightarrow{e'} X'[1]$  est un triangle tel que  $g'$  soit minimal à droite.

De plus,  $(\xi) = (\xi_{\min}) \oplus (\xi_0)$  où  $(\xi_{\min}) : X_1 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{g_1} Y_1 \xrightarrow{e_1} X_1[1]$  est un triangle minimal et  $(\xi_0) : X_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} X_2 \oplus Y_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} Y_2 \xrightarrow{0} X_2[1]$  est un triangle scindé.

(a') *Si  $(\xi)$  est une suite exacte courte, alors elle se décompose comme dans (a) où on remplace les triangles par des suites exactes courtes. Par ailleurs, (a) est encore vrai pour les suites pseudo-exactes dans tout catégorie de Krull-Schmidt.*

*Démonstration.* Pour établir (a), la première ligne du diagramme commutatif du lemme 2.1.1 s'obtient comme suit. On applique le lemme 1.6.1 au morphisme  $f$  pour écrire  $f = \begin{bmatrix} f'_1 & \\ & 0 \end{bmatrix} : X \longrightarrow E_1 \oplus Y_2$  avec  $f'_1$  minimal à gauche. Soit  $X \xrightarrow{f'_1} E_1 \xrightarrow{g'_1} Y_1 \xrightarrow{e'_1} X[1]$  l'unique triangle de base  $f'_1$ , considérons le triangle trivial  $0 \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{1} Y_2 \longrightarrow 0$ . En vertu du lemme 1.8.2, la somme directe des deux triangles précédents est encore un triangle, or à isomorphisme près il existe un unique triangle dont la base est fixée, ainsi  $(\xi)$  est isomorphe à la somme directe

$$(\xi_1) : X \xrightarrow{\begin{bmatrix} f'_1 & \\ & 0 \end{bmatrix}} E_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} g'_1 & 0 \\ & 1_{Y_2} \end{bmatrix}} Y_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} e'_1 & 0 \end{bmatrix}} X[1].$$

De même la deuxième ligne dans le diagramme commutatif du lemme 2.1.1 est construite en décomposant  $g$  en une somme directe d'un morphisme minimal à droite et d'un morphisme de but nul. Maintenant pour compléter la preuve de (a), on utilise le fait que tout facteur direct d'un morphisme minimal à gauche (ou à droite) est encore minimal à gauche (ou respectivement à droite). Si on écrit  $g'_1$  comme une somme directe d'un morphisme minimal à droite et d'un morphisme de but nul, alors le triangle  $(\xi_1)$  précédent est isomorphe à un triangle de la forme

$$X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1_{X_2} \end{bmatrix}} E_1 \oplus X_2 \oplus Y_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{Y_2} \end{bmatrix}} Y_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} X_1[1] \oplus X_2[1], \text{ dans lequel}$$

$(\xi_{\min}) : X_1 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{g_1} Y_1 \xrightarrow{e_1} X_1[1]$  est le triangle minimal cherché.

Maintenant pour le cas d'une catégorie exacte comme en (a'), l'argument du paragraphe précédent s'applique sans aucun changement.

Par ailleurs dans le cas où  $\mathcal{A}$  est une catégorie de Krull-Schmidt et  $(\xi)$  est juste une suite pseudo-exacte  $X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y$ , l'argument du premier paragraphe s'adapte aisément si on se rappelle que dans une catégorie de Krull-Schmidt, les sections coïncident avec les injections canoniques et les rétractions coïncident avec les projections canoniques (Lemme 1.5.1). Partant comme précédemment d'une décomposition  $f = \begin{bmatrix} f'_1 \\ 0 \end{bmatrix} : X \longrightarrow E_1 \oplus Y_2$  de  $f$  avec  $f'_1$  minimal à gauche, on note  $q_1 \in \mathcal{A}(E_1, E)$ ,  $q_2 \in \mathcal{A}(Y_2, E)$ ,  $p_1 \in \mathcal{A}(E, E_1)$ ,  $p_2 \in \mathcal{A}(E, Y_2)$  les injections canoniques et les projection canoniques suivant lesquelles  $E$  est la somme directe  $E_1 \oplus Y_2$ , donc  $p_i q_j = \delta_{i,j}$  pour  $1 \leq i, j \leq 2$  et  $\mathbb{1}_E = q_1 p_1 + q_2 p_2$ . On a alors  $f = \begin{bmatrix} f'_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_E \circ f = q_1 f'_1 + 0$ , et comme  $p_2 f = 0$ , la projection canonique  $p_2$  doit se factoriser par le pseudo-conoyau  $g$  de  $f$ , si bien que  $p_2 = p'_2 g$  pour un morphisme  $p'_2 \in \mathcal{A}(Y, Y_2)$ ; en posant  $q'_2 = g q_2$ , il suit alors que  $p'_2 q'_2 = p_2 q_2 = \mathbb{1}_Y$ . Alors avec l'hypothèse que  $\mathcal{A}$  est de Krull-Schmidt,  $Y_2$  doit être un facteur direct de  $Y$  tel que  $q'_2$  et  $p'_2$  soient respectivement l'injection canonique et la projection canonique associées à  $Y_2$ . Ainsi  $Y$  est la somme directe  $Y_1 \oplus Y_2$  pour un facteur direct  $Y_1$  de  $Y$ , dont l'injection canonique et la projection canonique associées sont notées  $q'_1 \in \mathcal{A}(Y_1, Y)$  et  $p'_1 \in \mathcal{A}(Y, Y_1)$ . On obtient alors la décomposition suivante,  $g = \begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{bmatrix} : E_1 \oplus Y_2 \longrightarrow Y_1 \oplus Y_2$  où,  $g_{1,1} = p'_1 g q_1$ ,  $g_{2,1} = p'_2 g q_1 = p_2 q_1 = 0$ ,  $g_{1,2} = p'_1 g q_2 = p'_1 q'_2 = 0$  et  $g_{2,2} = p'_2 g q_2 = \mathbb{1}_Y$ . En posant  $g'_1 = g_{1,1}$ , on vient donc de montrer que la suite pseudo-exacte  $(\xi)$  est isomorphe à la somme directe  $X \xrightarrow{\begin{bmatrix} f'_1 \\ 0 \end{bmatrix}} E_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} g'_1 & 0 \\ 0 & 1_{Y_2} \end{bmatrix}} Y_1 \oplus Y_2$  dans laquelle la suite  $X \xrightarrow{f'_1} E_1 \xrightarrow{g'_1} Y_1$  est (nécessairement) pseudo-exacte avec  $f'_1$  minimal à gauche. La discussion précédente montre que l'argument du premier paragraphe pour le cas triangulé s'adapte bien pour les suites pseudo-exactes dans une catégorie de Krull-Schmidt quelconque.  $\square$

Pour tout objet  $M$  dans une catégorie triangulée ou exacte  $\mathcal{A}$ ,  $M^\perp$  désigne la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets  $Z$  tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, Z) = 0$ ; de même  ${}^\perp M$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets  $Z$  tels que  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(Z, M) = 0$ .

**Corollaire 2.1.2.** *Soit  $(\xi) : X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y$  un triangle non scindé ou une suite exacte courte non scindée dans une catégorie triangulée ou exacte  $\mathcal{A}$ .*

- (1) *Si  $X$  est indécomposable alors  $g$  est minimal à droite. De même si  $Y$  est indécomposable alors  $f$  est minimal à gauche.*
- (2) *Si  $X$  et  $Y$  sont indécomposables et  $E$  appartient à  ${}^\perp X \cap Y^\perp$ , alors  $(\xi)$  est l'unique triangle (ou suite exacte courte) qui soit une  $\mathcal{M}$ -approximation minimale pour chaque sous-catégorie  $\mathcal{M} \subseteq {}^\perp X \cap Y^\perp$  contenant  $E$ .*

*Démonstration.* Si  $g$  n'est pas minimal à droite, alors on peut écrire  $g = [g_1 \ 0] : E' \oplus X'' \longrightarrow Y$  avec

$X'' \neq 0$  et en vertu du lemme 2.1.1 la suite  $(\xi)$  sera isomorphe à un triangle (ou à une suite exacte courte) de la forme :  $X' \oplus X'' \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} E' \oplus X'' \xrightarrow{[g' \ 0]} Y$ . Puisque par hypothèse  $(\xi)$  ne scinde pas, l'objet  $X'$  est non nul, si bien que  $X$  n'est pas indécomposable. Ceci établit le premier volet de l'énoncé (1), et par dualité le second volet de (1). Supposons maintenant que  $\mathcal{M} \subseteq {}^\perp X \cap Y^\perp$  contienne  $E$ , alors on a  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, X) = 0$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(Y, M) = 0$  pour tout  $M$  dans  $\mathcal{M}$ , si bien que l'application des foncteurs  $\mathcal{A}(M, -)$  et  $\mathcal{A}(-, M)$  sur la suite  $(\xi)$  donne les deux suites exactes suivantes :  $\cdots \mathcal{A}(M, E) \longrightarrow \mathcal{A}(M, Y) \longrightarrow 0$ ,  $\cdots \mathcal{A}(E, M) \longrightarrow \mathcal{A}(X, M) \longrightarrow 0$ , montrant donc que  $(\xi)$  est une  $\mathcal{M}$ -approximation qui est minimale en vertu de (1); et l'unicité de  $(\xi)$  suit du lemme 2.1.3.  $\square$

**Définition 2.1.1.** Soit  $(\xi) : M' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} M$  une suite pseudo-exacte ou un triangle dans  $\mathcal{A}$ . Alors  $(\xi)$  est une  $\tau$ -suite reliante pour une paire  $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$  de sous-catégories pleines de  $\mathcal{A}$  si les conditions suivantes sont satisfaites.

(i)  $M \in \mathcal{T}$ ,  $M' \in \mathcal{T}'$ ,  $B \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ ,  $f, g \in J_{\mathcal{A}}$  et les deux suites suivantes sont exactes :

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}'}(B, -) \xrightarrow{-f} J_{\mathcal{T}'}(M', -) \longrightarrow 0, \quad \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, B) \xrightarrow{-g} J_{\mathcal{T}}(-, M) \longrightarrow 0.$$

(ii) De plus,  $f$  est minimal à gauche et  $g$  est minimal à droite.

Lorsque  $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$  on parle simplement de  $\tau$ -suite reliante dans  $\mathcal{T}$ .

Notons que pour toute  $\tau$ -suite reliante  $(\xi)$  comme ci-haut, si de plus  $M'$  et  $M$  sont indecomposables, alors  $f$  est *minimal presque scindé à gauche* dans  $\mathcal{T}'$  tandis que  $g$  est *minimal presque scindé à droite* dans  $\mathcal{T}$ . Ayant en vue la proposition 1.7.1 et le théorème 1.7.3, on déduit aisément l'observation suivante :

*Remarque 2.1.2.* On suppose que  $\mathcal{A}$  est une  $\tau$ -catégorie,  $M, M' \in \text{ind } \mathcal{A}$  et  $(\xi) : M' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} M$  est une suite quelconque dans  $\mathcal{A}$ . Alors  $(\xi)$  est une  $\tau$ -suite reliante dans  $\mathcal{A}$  si et seulement si  $(\xi)$  est une  $\tau$ -suite dans  $\mathcal{A}$ . Par conséquent, pour tout  $X \in \text{ind}^{\text{np}} \mathcal{A}$  indécomposable non-projectif et tout  $Y \in \text{ind}^{\text{ni}} \mathcal{A}$  indécomposable non-injectif, la  $\tau$ -suite à droite  $\xi_X^+ : \tau X \xrightarrow{-\nu_X} \theta X \xrightarrow{-\mu_X} X$  et la  $\tau$ -suite à gauche  $\xi_X^- : X \xrightarrow{-\nu_X} \theta^- X \xrightarrow{-\mu_X} \tau^- X$  sont des  $\tau$ -suites et donc aussi des  $\tau$ -suites reliantes pour  $\mathcal{A}$ .

**Lemme 2.1.3.** Soient  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  deux sous-catégories pleines d'une catégorie de Krull-Schmidt  $\mathcal{C}$  additive ou triangulée, et soient  $(\xi) : M' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} M \longrightarrow$  et  $(\zeta) : N' \xrightarrow{s} E \xrightarrow{t} N \longrightarrow$  deux  $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ -approximations minimales ou deux  $\tau$ -suites reliantes pour la paire  $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ , avec  $M$  et  $M'$  indécomposables, et avec  $B \neq 0$  et  $E \neq 0$  au cas où  $(\xi)$  et  $(\zeta)$  ne sont pas des triangles dans  $\mathcal{C}$ .

(1) Les énoncés ci-après sont vrais.

(i) Tout morphisme  $a \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$  se prolonge en un morphisme  $(a', b, a) \in \text{Hom}((\xi), (\zeta))$  de suites; de plus,  $a \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$  est un isomorphisme si et seulement s'il en est de même pour tout prolongement  $(a', b, a) \in \text{Hom}((\xi), (\zeta))$  de  $a$ .

(ii) Tout morphisme  $\alpha' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M', N')$  se prolonge en un morphisme  $(\alpha', \beta, \alpha) \in \text{Hom}((\xi), (\zeta))$  de suites; de plus,  $\alpha' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M', N')$  est un isomorphisme si et seulement s'il en est de même pour tout prolongement  $(\alpha', \beta, \alpha) \in \text{Hom}((\xi), (\zeta))$  de  $\alpha'$ .

En particulier,  $M \cong N$  si et seulement si  $(\xi)$  est isomorphe à  $(\zeta)$ , si et seulement si  $M' \cong N'$ .

(2) La correspondance définie par  $\phi(\bar{a}) = \bar{a}'$  pour tous endomorphismes  $a \in \text{End}_{\mathcal{C}}(M)$  et  $a' \in \text{End}_{\mathcal{C}}(M')$  se prolongeant en un endomorphisme de la suite (ou du triangle)  $(\xi)$  induit un isomorphisme naturel  $\phi : k_M \xrightarrow{\sim} k_{M'}$  de  $k$ -surcorps.

*Démonstration.* Observons d'abord que si  $(\xi)$  et  $(\zeta)$  sont deux triangles dont les termes médians sont nuls, alors on doit avoir  $M \cong M'[1] \cong M'$  et  $N \cong N'[1] \cong N'$ , si bien que le résultat est trivialement vrai. Il reste seulement à prouver que le résultat est vrai lorsque  $(\xi)$  et  $(\zeta)$  sont deux suites pseudo-exactes dont les termes médians sont non nuls ; ceci implique que  $f, g, s$  et  $t$  sont tous non nuls.

(1). On a besoin d'écrire la preuve uniquement pour (i) puisque (ii) est le dual de (i). Commençons par introduire la notation suivante pour tout morphisme  $X \xrightarrow{h} Y$  dans  $\mathcal{C}$  :  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^h(X, Z) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \cdot h = \{u \cdot h : \text{avec } Y \xrightarrow{u} Z\}$ . On observe que si  $h \in J_{\mathcal{C}}(X, Y)$  alors  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^h(X, Z) \subseteq J_{\mathcal{C}}(X, Z)$ .

Par hypothèse, les deux morphismes  $g$  et  $t$  sont soit deux  $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ -approximations minimales à droite, soit minimaux presque scindés à droite dans  $\mathcal{T}$ , par conséquent chaque élément dans  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^g(B, N)$  se factorise par le morphisme  $E \xrightarrow{t} N$  et chaque élément dans  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^t(E, M)$  se factorise par le morphisme  $B \xrightarrow{g} M$ . Ainsi, en utilisant aussi le fait que les suites  $(\xi)$  et  $(\zeta)$  sont pseudo-exactes il vient que chaque morphisme  $a \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$  doit se prolonger en un morphisme de suites  $(a', b, a) \in \text{Hom}((\xi), (\zeta))$  comme le montre le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} (\xi) : & M' & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & M \\ & a' \downarrow & & b \downarrow & & \downarrow a \\ (\zeta) : & N' & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{t} & N \end{array}$$

Ensuite nous voulons prouver que dans chaque diagramme commutatif comme ci-haut,  $a \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$  est un isomorphisme si et seulement si c'est le cas pour  $(a', b, a) \in \text{Hom}((\xi), (\zeta))$ , et pour cela on a seulement besoin de montrer l'implication non triviale suivante :  $a \in \text{Isom}(M, N)$  implique  $(a', b, a) \in \text{Isom}((\xi), (\zeta))$ . Ainsi supposons que  $a \in \text{Isom}(M, N)$ , alors en vertu de la "propriété de factorisation" de  $g$  et  $t$ , le morphisme  $a^{-1} \cdot t \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}^t(E, M)$  doit se factoriser par  $g$ , si bien qu'il existe un morphisme  $c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, B)$  avec  $a^{-1} \cdot t = gc$ . Mais alors,  $g(c \cdot b) = g$  et  $t(b \cdot c) = t$ , montrant ainsi en vertu de la minimalité des morphismes non nuls  $g$  et  $t$  que  $b \cdot c$  et  $c \cdot b$  sont des automorphismes, si bien que  $b$  est à la fois une section et une rétraction, et donc  $b$  est un isomorphisme. Comme les suites  $(\xi)$  et  $(\zeta)$  sont pseudo-exactes, le morphisme  $(b^{-1}, a^{-1}) \in \text{Hom}(t, g)$  induit un autre morphisme  $a'' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N', M')$  tel que  $b^{-1} \cdot s = f \cdot a''$ . On obtient que  $s \cdot (1 - a'' a') = 0$  et  $f \cdot (1 - a'' a') = 0$ , (rappelons que pour chaque élément  $u$  d'une algèbre locale  $\Lambda$ ,  $u$  ou  $1 - u$  est inversible). Alors, comme  $\text{End}_{\mathcal{C}}(M')$  et  $\text{End}_{\mathcal{C}}(N')$  sont locales tandis que  $f$  et  $s$  sont non nuls par hypothèse, il vient que les endomorphismes  $1_{N'} - a'' a'$  et  $1_{M'} - a' a''$  ne peuvent être inversibles, ainsi  $a' a''$  et  $a'' a'$  sont des automorphismes si bien que le morphisme  $a'$  du diagramme précédent est aussi un isomorphisme. Donc  $(a', b, a)$  est un isomorphisme entre  $(\xi)$  et  $(\zeta)$ , si bien que (i) tient comme espéré.

(2). Montrons que  $(\xi)$  induit un épimorphisme  $\text{End}_{\mathcal{C}}(M) \longrightarrow \text{k}_{M'} = \text{End}_{\mathcal{C}}(M')/\text{J}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(M')}$  correctement défini et envoyant chaque  $a \in \text{End}_{\mathcal{C}}(M)$  sur la classe résiduelle  $\bar{a}'$  d'un endomorphisme  $a' \in \text{End}_{\mathcal{C}}(M')$  tel qu'il existe un prolongement  $(a', b, a) \in \text{End}_{\mathcal{C}}((\xi))$ . Pour cela, soit  $(a', b, a)$  et  $(a'', c, a)$  deux prolongements arbitraires d'un endomorphisme  $a \in \text{End}_{\mathcal{C}}(M)$ , alors  $g \cdot b = a \cdot g = g \cdot c$ ,  $f \cdot a' = b \cdot f$  et  $f \cdot a'' = c \cdot f$ . On obtient  $g \cdot (b - c) = 0$  et  $f \cdot (a' - a'') = (b - c) \cdot f$ , montrant que  $(a' - a'', b - c, 0)$  est un endomorphisme non inversible de  $(\xi)$ , prolongeant l'endomorphisme nul de  $M$ . Ainsi en vertu de (i),  $a' - a''$  n'est pas un automorphisme, si bien que  $a' - a'' \in \text{J}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(M')}$ . D'où, on a un épimorphisme correctement défini  $\text{End}_{\mathcal{C}}(M) \longrightarrow \text{k}_{M'} : a \longmapsto \bar{a}'$ , qui de plus est surjective puisqu'en vertu de (ii) chaque endomorphisme de  $M'$  se prolonge aussi en un endomorphisme de la suite  $(\xi)$ . Observons maintenant que le noyau de l'épimorphisme précédent est égal au radical  $\text{J}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(M)}$  : en effet en vertu de (i), on sait que  $a$  est un automorphisme si et seulement si c'est le cas pour  $a'$ , ainsi  $a' \in \text{J}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(M')}$  si et seulement si  $a \in \text{J}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(M)}$ . Alors le morphisme induit  $\text{k}_M \xrightarrow{\phi} \text{k}_{M'} : \bar{a} \longmapsto \bar{a}'$  est l'isomorphisme naturel cherché. Ceci achève la preuve du lemme.  $\square$

Le résultat principal de cette sous-section donne un lien entre les  $\tau$ -suites reliantes, les bimodules de morphismes irréductibles et les paires dualisantes et symétrisables de bimodules introduites dans la définition 1.2.1.

**Théorème 2.1.4.** *Soient  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  deux sous-catégories pleines Hom-finies d'une catégorie de Krull-Schmidt  $\mathcal{C}$ , soit  $(\xi) : M' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} M \longrightarrow$  une  $\tau$ -suite reliante pour la paire  $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ , avec  $M$  et  $M'$  indécomposables, et avec  $B \neq 0$  au cas où  $(\xi)$  n'est pas un triangle dans  $\mathcal{C}$ . Alors les endomorphismes de la suite  $(\xi)$  induisent une identification naturelle  $\text{k}_M \cong \text{k}_{M'}$  de  $\text{k}$ -surcorps telle que, pour chaque objet indecomposable  $X \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ ,  $(\xi)$  induit naturellement une forme bilinéaire non-dégénérée  $\text{Irr}_{\mathcal{T}}(M', X) \otimes_{\text{k}_M} \text{Irr}_{\mathcal{T}'}(X, M) \xrightarrow{b} \text{k}_X$ , si bien que le  $\text{k}_M$ - $\text{k}_X$ -bimodule  $\text{Irr}_{\mathcal{T}}(X, M)$  et le  $\text{k}_X$ - $\text{k}_M$ -bimodule  $\text{Irr}_{\mathcal{T}'}(M', X)$  forment une paire dualisante et symétrisable de bimodules.*

*Démonstration.* On observe que si  $(\xi)$  est un triangle avec  $B = 0$ , alors on doit avoir  $M \cong M'[1] \cong M'$  si bien que (1) et (2) sont trivialement vrais. Ainsi on a seulement besoin de prouver le théorème lorsque  $(\xi)$  est une  $\tau$ -suite reliante pseudo-exacte avec  $B \neq 0$ , ceci entraîne que  $f$  et  $g$  sont non nuls.

En vertu du lemme 2.1.3-(2) on a un isomorphisme naturel de  $\text{k}$ -surcorps

$\phi : \text{k}_M := \text{End}_{\mathcal{C}}(M)/\text{J}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(M)} \xrightarrow{\sim} \text{k}_{M'} := \text{End}_{\mathcal{C}}(M')/\text{J}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(M')}$ , avec  $\phi(\bar{a}) = \bar{a}'$  pour chaque endomorphisme  $a \in \text{End}_{\mathcal{C}}(M)$  et  $a' \in \text{End}_{\mathcal{C}}(M')$  se prolongeant en un endomorphisme de la suite  $(\xi)$ .

Soit  $X \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$  un objet indécomposable, posons  ${}_1B_2 = \text{Irr}_{\mathcal{T}}(X, M)$  et  ${}_2B_1' = \text{Irr}_{\mathcal{T}'}(M', X)$ . Le  $\text{k}_X$ - $\text{k}_{M'}$ -bimodule  ${}_2B_1'$  est naturellement un  $\text{k}_X$ - $\text{k}_M$ -bimodule via l'identification de  $\text{k}_{M'}$  avec  $\text{k}_M$  suivant l'isomorphisme canonique  $\phi$ . Comme en vertu du lemme 3.1.4 tout bimodule de dimension finie  $B \in {}_E\text{bimod}_F$  (pour deux  $\text{k}$ -surcorps  $E$  et  $F$ ) induit toujours une paire dualisante et symétrisable de bimodules, pour montrer que la suite  $(\xi)$  induit une paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{{}_2B_1', {}_2B_1\}$  il suffit

de vérifier que  $(\xi)$  induit comme annoncé une forme bilinéaire non-dégénérée  ${}_2B_1' \otimes_{k_M} {}_1B_2 \xrightarrow{b} k_X$  (car dans ce cas,  ${}_2B_1'$  sera isomorphe au bimodule dual-droit  ${}_2B_1^R$ ).

Pour tous morphismes radiciels  $u' \in J_{\mathcal{T}'}(M', X)$ ,  $u \in J_{\mathcal{T}}(X, M)$ , la propriété de factorisation des morphismes  $f$  et  $g$  (ainsi que le lemme 2.1.3) induit deux morphismes  $\tilde{u}$  et  $\tilde{u}'$  ainsi qu'un endomorphisme  $(a', b, a)$  de la suite  $(\xi)$  comme le montrent les deux diagrammes commutatifs suivants.

$$\begin{array}{ccc}
 (\xi) : & \begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & & \downarrow \tilde{u} & \searrow u & \\ M' & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & M \\ & \searrow u' & \downarrow \tilde{u}' & & \\ & & X & & \end{array} & \quad \quad \quad \begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow \tilde{u} & \searrow u \\ M' & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & M \\ a' \downarrow & & \downarrow b & & \downarrow a \\ M' & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & M \\ & \searrow u' & \downarrow \tilde{u}' & & \\ & & X & & \end{array} & \quad (D1)
 \end{array}$$

**Fait 2.1.**  $\triangleright$  Avec les notation précédentes, le morphisme  $u$  appartient à  $J_{\mathcal{T}}^2(X, M)$  si et seulement si le morphisme  $\tilde{u}$  appartient à  $J_{\mathcal{T}}(X, B)$ ; ainsi en tant que  $k_M$ - $k_X$ -bimodules on a  $\mathcal{T}(X, B)/J_{\mathcal{T}}(X, B) \cong J_{\mathcal{T}}(X, M)/J_{\mathcal{T}}^2(X, M) = {}_1B_2$ . De même, le morphisme  $u'$  appartient à  $J_{\mathcal{T}'}^2(M', X)$  si et seulement si le morphisme  $\tilde{u}'$  appartient à  $J_{\mathcal{T}'}(B, X)$ ; ainsi en tant que  $k_X$ - $k_M$ -bimodules on a  $\mathcal{T}'(B, X)/J_{\mathcal{T}'}(B, X) \cong J_{\mathcal{T}'}(M', X)/J_{\mathcal{T}'}^2(M', X) = {}_2B_1'$ .

$\triangleright$  En particulier, les morphismes  $g$  et  $f$  sont irréductible, respectivement dans  $\mathcal{T}$  et dans  $\mathcal{T}'$ , et, la structure de  $k_M$ -module à droite sur  $\mathcal{T}'(B, X)/J_{\mathcal{T}'}(B, X)$  et la structure de  $k_M$ -module à gauche sur  $\mathcal{T}(X, B)/J_{\mathcal{T}}(X, B)$  sont données comme suit : soient  $\tilde{u}' \in \mathcal{T}'(B, X)$ ,  $\tilde{u} \in \mathcal{T}(X, B)$ ,  $a \in \text{End}_C(M)$  et  $(a', b, a)$  un endomorphisme quelconque de  $(\xi)$  prolongeant  $a$  comme dans le diagramme (D1), alors  $\overline{\tilde{u}' \cdot a} := \overline{\tilde{u}' \cdot \phi(\bar{a})} := \overline{\tilde{u}' \circ b}$  et  $\overline{a \cdot \tilde{u}} = \overline{b \circ \tilde{u}}$ .

Pour les implications non-triviales de la première partie du Fait 2.1, supposons que  $u \in J_{\mathcal{T}}^2(X, M)$  et posons  $u = w \circ v$  pour deux morphismes radiciels  $v \in J_{\mathcal{T}}(X, Z)$  et  $w \in J_{\mathcal{T}}(Z, M)$ . Alors, comme  $(\xi)$  est en vertu de l'hypothèse une  $\tau$ -suite reliante, la propriété de factorisation de  $g$  montre que  $w = g\tilde{w}$  avec  $\tilde{w} \in \mathcal{T}(Z, B)$ , on a donc :  $g \circ \tilde{u} = u = g\tilde{w} \circ v$  si bien que  $g \circ (\tilde{u} - \tilde{w} \circ v) = 0$  et la minimalité à droite de  $g$  montre que  $\tilde{u} - \tilde{w} \circ v$  est un morphisme radiciel et donc  $\tilde{u}$  est aussi un morphisme radiciel. De même, si  $u'$  appartient à  $J_{\mathcal{T}'}^2(M', X)$  alors  $\tilde{u}'$  sera aussi dans  $J_{\mathcal{T}'}(B, X)$ . D'où, la composition par le morphisme  $g$  donne un isomorphisme de bimodules  $\mathcal{T}(X, B)/J_{\mathcal{T}}(X, B) \cong {}_1B_2$ , la composition par le morphisme  $f$  donne un isomorphisme de bimodules  $\mathcal{T}'(B, X)/J_{\mathcal{T}'}(B, X) \cong {}_2B_1'$ ; par ailleurs, ces isomorphismes montrent clairement que la structure de  $k_M$ -module à droite sur  $\mathcal{T}'(B, X)/J_{\mathcal{T}'}(B, X)$  et la structure de  $k_M$ -module à gauche sur  $\mathcal{T}(X, B)/J_{\mathcal{T}}(X, B)$  sont données comme annoncé dans le second volet du Fait 2.1. Ainsi, le Fait 2.1 est clairement établi.

En vertu du Fait 2.1, il est maintenant clair que la composition de morphismes induit une forme bilinéaire

( qui est aussi  $k_X$ -linéaire)

$${}_2B_1' \otimes_{k_M} {}_1B_2 \cong \mathcal{T}'(B, X)/\mathcal{J}_{\mathcal{T}'}(B, X) \otimes_{k_M} \mathcal{T}(X, B)/\mathcal{J}_{\mathcal{T}}(X, B) \xrightarrow{\mathfrak{b}} k_X, \text{ avec } \mathfrak{b}(\overline{u'} \otimes \overline{u}) = \overline{u'} \cdot \overline{u}.$$

Enfin, nous montrons que  $\mathfrak{b}$  est aussi non-dégénérée. Pour ce faire, supposons que  $\overline{u} \neq 0$  pour un certain  $\tilde{u} \in \mathcal{T}(X, B)$ , alors,  $X$  étant indécomposable,  $\tilde{u}$  doit être une section. Ainsi, en choisissant un inverse à gauche  $B \xrightarrow{\tilde{v}'} X$  pour  $\tilde{u}$ , on a  $\mathfrak{b}(\overline{v}' \otimes \overline{u}) = 1$ . De même pour tout  $\overline{u'}$  non nul dans  $\mathcal{T}'(B, X)/\mathcal{J}_{\mathcal{T}'}(B, X)$  avec  $\tilde{u}' \in \mathcal{T}'(B, X)$ , le morphisme  $\tilde{u}'$  doit être une retraction, si bien qu'en choisissant un inverse à droite  $\tilde{v} \in \mathcal{T}(B, X)$  pour  $\tilde{u}'$  on obtient que  $\mathfrak{b}(\overline{u'} \otimes \overline{v}) = 1$ . On conclut que la forme bilinéaire  $\mathfrak{b}$  est non-dégénérée et ceci complète la preuve du théorème.  $\square$

## 2.2 Structures amassées faibles et structures amassées

### 2.2.1 Structures amassées faibles

Soient  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie pleine d'une catégorie exacte ou triangulée  $\mathcal{C}$  telle que  $\mathcal{T}$  soit rigide ( $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = 0$ ) et le foncteur  $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}/\mathcal{J}_{\mathcal{T}}^2$  soit de dimension finie sur  $k$ , soit  $M$  un objet indécomposable dans  $\mathcal{T}$ , on désigne par  $\mathcal{T}/M$  la sous-catégorie de  $\mathcal{T}$  engendrée par  $\text{ind } \mathcal{T} \setminus \{M\}$ . Supposons qu'il existe un autre objet indécomposable  $M^*$  n'appartenant pas à  $\mathcal{T}$  tel que la sous-catégorie donnée par  $\mathcal{T}' = (\mathcal{T}/M) \oplus \text{add}(M^*)$  soit aussi rigide. Alors une suite d'échange (suite exacte courte ou triangle) entre  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  est une  $(\mathcal{T}/M)$ -approximation minimale  $M^* \xrightarrow{f^*} B \xrightarrow{f} M \longrightarrow$ . Ainsi, chaque suite d'échange  $(\xi)$  (avec  $B \neq 0$  au cas où  $(\xi)$  n'est pas un triangle) doit être unique à isomorphisme près. Nous disons que  $\mathcal{T}$  est sans boucle si son carquois modulé est sans boucle. On observe qu'on a ainsi d'autres exemples de  $\tau$ -suites reliantées données par des suites d'échange entre  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  lorsque  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  sont sans boucle.

**Lemme 2.2.1.** *Supposons que  $\mathcal{C}$  est une catégorie de Krull-Schmidt exacte ou triangulée et qu'il existe une suite d'échange  $(\xi_{\text{ex}}) : M^* \xrightarrow{f^*} B \xrightarrow{f} M \longrightarrow$  entre deux sous-catégories pleines rigides  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}' = (\mathcal{T}/M) \oplus \text{add}(M^*)$ . Alors,  $\mathcal{T}$  n'a pas de boucle au point  $M$  si et seulement si  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, M^*) \cong k_M \cong k_{M^*}$ , si et seulement si  $\mathcal{T}'$  n'a pas de boucle au point  $M^*$ . Et si tel est le cas, alors toute suite exacte courte non-scindée ou tout triangle non-scindé  $(\xi) : M^* \longrightarrow U \longrightarrow M \longrightarrow$  est isomorphe à la suite d'échange  $(\xi_{\text{ex}})$ .*

*Démonstration.* Par hypothèse,  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = 0$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{T}', \mathcal{T}') = 0$  si bien que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, B) = 0 = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(B, M^*)$ , alors en appliquant les foncteurs  $\mathcal{C}(M, -)$  et  $\mathcal{C}(-, M^*)$  à la suite d'échange  $(\xi_{\text{ex}}) : M^* \xrightarrow{f^*} B \xrightarrow{f} M \longrightarrow$ , on obtient les deux suites exactes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(M, M^*) &\longrightarrow \mathcal{C}(M, B) \xrightarrow{h} \mathcal{C}(M, M) \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, M^*) \longrightarrow 0 \text{ avec } h := f \circ -, \\ \mathcal{C}(M, M^*) &\longrightarrow \mathcal{C}(B, M^*) \xrightarrow{h'} \mathcal{C}(M^*, M^*) \xrightarrow{\partial'} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, M^*) \longrightarrow 0 \text{ avec } h' := - \circ f^*. \end{aligned}$$

En vertu de la définition d'une suite d'échange, les morphismes  $f$  et  $f^*$  sont radiciels et clairement on a  $\text{Im}(h) \subseteq \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(M, M)$  et  $\text{Im}(h') \subseteq \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(M^*, M^*)$ . Mais en vertu du lemme 2.1.3-(2) on a un isomorphisme naturel de  $k$ -surcorps :  $k_M = \mathcal{C}(M, M)/\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(M, M) \cong k_{M^*} = \mathcal{C}(M^*, M^*)/\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(M^*, M^*)$ . Les observations

précédentes montrent que les équivalences ci-après sont valides : dans  $\mathcal{T}$  il n'existe pas de boucle au point  $M$  si et seulement si  $\text{Im}(h) = J_{\mathcal{C}}(M, M) = \ker(\partial)$ , si et seulement si  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, M^*) \cong k_M \cong k_{M^*}$ , si et seulement si  $\text{Im}(h') = J_{\mathcal{C}}(M^*, M^*) = \ker(\partial')$ , si et seulement si dans  $\mathcal{T}'$  il n'existe pas de boucle au point  $M^*$ . D'où, le premier volet du lemme 2.2.1 est prouvé.

Pour le second volet du lemme 2.2.1, supposons que  $\mathcal{T}$  ne possède aucune boucle au point  $M$  (ou de façon équivalente,  $\mathcal{T}'$  ne possède aucune boucle au point  $M^*$ ), et soit  $(\xi) : M^* \xrightarrow{g^*} U \xrightarrow{g} M \rightarrow$  une suite exacte courte non-scindée ou un triangle non-scindé dans  $\mathcal{C}$  (en particulier,  $M$  et  $M^*$  étant indécomposables le corollaire 2.1.2 montre que les morphismes  $g^*$  et  $g$  sont radiciels avec  $g^*$  minimal à gauche et  $g$  minimal à droite). Remarquons que les suites non scindées  $(\xi_{\text{ex}})$  et  $(\xi)$  correspondent à deux éléments non nuls dans le groupe d'extension  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, M^*)$ . Ayant en vue les observations du paragraphe précédent, en appliquant le foncteur  $\mathcal{C}(M, -)$  à la suite d'échange  $(\xi_{\text{ex}})$  on obtient une suite exacte  $\mathcal{C}(M, M^*) \rightarrow \mathcal{C}(M, B) \rightarrow \mathcal{C}(M, M) \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, M^*) \rightarrow 0$  dans laquelle  $\partial$  est le *morphisme de liaison* (en homologie) associé à  $(\xi_{\text{ex}})$ , et telle que  $\ker(\partial) = J_{\mathcal{C}}(M, M)$  est le radical de l'algèbre locale  $\mathcal{C}(M, M)$ . Ainsi, il existe un morphisme  $\alpha \in \text{End}_{\mathcal{C}}(M)$  n'appartenant pas à  $J_{\mathcal{C}}(M, M)$  tel que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\alpha, M^*) := \partial(\alpha) = (\xi)$ , si bien qu'on a un diagramme commutatif comme suit :

$$\begin{array}{ccccc}
 (\xi) = \partial(\alpha) : & M^* & \xrightarrow{g^*} & U & \xrightarrow{g} & M \\
 & \parallel & & \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\
 (\xi_{\text{ex}}) : & M^* & \xrightarrow{f^*} & B & \xrightarrow{f} & M
 \end{array}$$

Mais  $\alpha \notin \ker(\partial) = J_{\mathcal{C}}(M, M)$ , d'où  $\alpha$  est un automorphisme l'algèbre locale  $\mathcal{C}(M, M)$ . Alors en vertu du lemme-des-cinq, (ou aussi en vertu du fait que  $f$  et  $g$  sont minimaux à droite), il vient que dans le diagramme précédent  $\beta$  est un isomorphisme, et donc  $(\xi)$  est isomorphe à la suite d'échange  $(\xi_{\text{ex}})$ , ceci achève la preuve du lemme 2.2.1.  $\square$

Rappelons maintenant la notion de structure amassée faible sur une catégorie additive  $\mathcal{C}$ .

**Définition 2.2.1** ([10, §I.1]). Une *structure amassée faible* sur  $\mathcal{C}$  consiste en les données ci-après :

- ▷ La donnée d'une collection  $\underline{\mathbb{X}}$  de sous-ensembles  $\underline{X} \subset \text{ind } \mathcal{C}$  appelés *amas*, les objets indécomposables de l'union de tous les amas sont appelés *variables amassées*. En outre il existe un sous-ensemble  $\underline{P} \subset \text{ind } \mathcal{C}$  d'objets indécomposables appelés *coefficients* et qui ne sont pas des variables amassées. Pour chaque amas  $\underline{X}$ , l'objet  $T = \underline{X} \cup \underline{P}$  (vu comme un objet ou comme une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$ ) est alors appelé un *amas augmenté*. On exige que les données précédentes satisfassent aux deux conditions ci-après.

(c1) Toute variable amassée  $M$  induit une opération  $\mu_M$  appelée *échange* ou *mutation*, envoyant un amas augmenté  $T$  contenant  $M$  sur un autre amas augmenté  $\mu_M(T) = T^* = T/M \oplus M^*$  pour une certaine et unique variable amassée  $M^* \not\cong M$ . On dit alors que  $(M, M^*)$  une *paire d'échange*.

(c2) Il existe deux *suites d'échange*  $M^* \xrightarrow{f^*} B \xrightarrow{f} M \rightarrow$  et  $M \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g^*} M^* \rightarrow$  entre  $T$  et  $T^*$  : ces suites (suites exactes courtes ou triangles) sont des  $\text{add}(T/M)$ -approximations minimales.

*Remarque 2.2.2* ([Théorème 1.10.10] ou [12, 61, 51, 43, 10]). Dans toute catégorie (stablement) 2-Calabi-Yau  $\mathcal{C}$ , les sous-catégories inclinantes amassées, s'il en existe, déterminent une structure amassée faible pour  $\mathcal{C}$ . En particulier pour les catégories amassées, les sous-catégories inclinantes amassées existent et déterminent une structure amassée faible n'ayant ni boucle ni 2-cycle.

### 2.2.2 Structures amassées

#### Mutation de carquois valués

Rappelons qu'un carquois valué est *localement fini* si le nombre de ses flèches est fini, les carquois valués considérés pour toute la suite sont localement finis, et peuvent contenir des 2-cycles, où un 2-cycle est un cycle de longueur 2. Soit  $Q$  un carquois valué de type  $\Gamma$  et de valuation  $d$  sur un ensemble de points  $I$ , soit  $k \in I$  un point de  $Q$  n'appartenant pas à une boucle ou à un 2-cycle, en d'autres termes,  $k$  satisfait à la condition suivante :

$$\text{pour chaque point } i \in I, Q_1(i, k) = \emptyset \text{ ou } Q_1(k, i) = \emptyset. \quad (2.2.1)$$

Pour deux points  $i, j \in I$ , on pose  $Q_2^{(k)}(i, j)$  l'ensemble de tous les chemins valués de longueur 2 de  $i$  vers  $j$  passant à travers  $k$ . Alors avec la condition (2.2.1), on a  $Q_2^{(k)}(j, i) = \emptyset$  ou  $Q_2^{(k)}(i, j) = \emptyset$ .

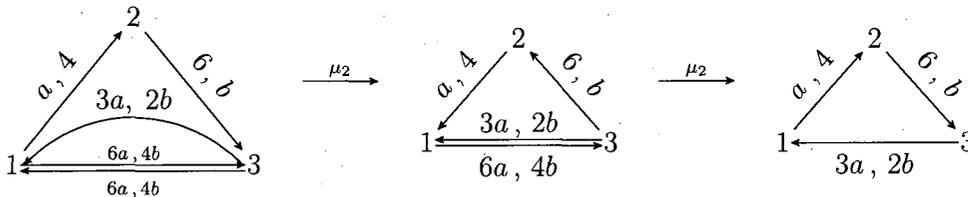
**Définition 2.2.3.** On suppose que la condition (2.2.1) est satisfaite, alors la mutation de  $Q$  au point  $k$  est le carquois valué sur  $I$  donné par  $Q' = \mu_k(Q)$  et dont la valuation  $d'$  est décrite comme suit :

- ▷ Pour toutes flèches valuées  $\alpha : x \xrightarrow{a,b} k$  et  $\beta : k \xrightarrow{c,d} y$  incidentes au point  $k$  dans  $Q$ , on a des flèches valuées correspondantes  $\alpha^* : x \xrightarrow{a,b} k$  et  $\beta^* : k \xrightarrow{c,d} y$  dans  $Q'$ .
- ▷ Soient  $i, j \in I - \{k\}$  tels que l'ensemble  $Q_2^{(k)}(j, i)$  soit vide (si bien que  ${}_j d_k \cdot k d_i = 0$ ), et  $\gamma : i \xrightarrow{{}_i d_k^*, {}_j d_i} j$  la flèche valuée (ou peut-être 0-valuée) représentant  $Q_1(j, i)$ . Alors  $Q_1(i, j) \subset Q'_1(i, j)$  en tant que sous-ensembles de flèches valuées, et toute arête valuée additionnelle dans  $Q'_1(i, j) \cup Q'_1(j, i)$  est donnée par :  $\gamma' : i \xrightarrow{|{}_i d_k \cdot k d_j - {}_j d_i^*|, |{}_i d_k^* \cdot k d_j^* - {}_j d_i|} j$  et l'orientation de  $\gamma$  est déterminée comme suit : posant  $\text{sign}_{\gamma'}(i, j) = \text{sign}({}_i d_k \cdot k d_j - {}_j d_i^*) = \text{sign}({}_i d_k^* \cdot k d_j^* - {}_j d_i)$ , si  $\text{sign}_{\gamma'}(i, j)$  vaut +1 alors  $\gamma'$  est orientée de  $i$  vers  $j$ , dans le cas contraire  $\gamma'$  est orientée de  $j$  vers  $i$ .

En particulier, si les trois points  $i, j$  et  $k$  induisent un sous-carquois valué (plein) acyclique dans  $Q$ , alors  $Q'_1(j, i) = \emptyset$  et  $Q'_1(i, j)$  s'identifie à l'union disjointe  $Q_1(i, j) \cup Q_2^{(k)}(i, j)$ .

Telle que définie, la mutation de carquois valués n'augmente pas le nombre de 2-cycles.

**Exemple 2.2.4.** Dans les carquois valués ci-après,  $a, b \in \mathbb{N}$  sont deux entiers naturels quelconques non nuls.



On voit donc que, sur les carquois ayant des 2-cycles, la mutation n'est pas nécessairement involutive. Toutefois on a les observations suivantes.

*Remarque 2.2.5.* Avec les notations de la définition précédente, si le voisinage de  $k$  ne comporte pas de 2-cycles, alors dans  $\mu(Q)$  le voisinage de  $k$  ne comporte pas non plus de 2-cycles et  $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$ . En particulier la mutation de carquois valués ne comportant pas de 2-cycles est involutive et coïncide avec la mutation matricielle, pour les matrices anti-symétrisables.

### Une version généralisée des structures amassées

Comme dans la section précédente, un carquois modulé  $\mathcal{Q}$  sera dit *augmenté* relativement à un sous-ensemble  $I \subset \mathcal{Q}_0$  si dans  $\mathcal{Q}$  il n'existe aucune flèche entre deux points dans  $\mathcal{Q}_0 \setminus I$ . Soit  $T$  un amas augmenté tel que pour chaque  $M$  dans  $\text{ind } T$  l'algèbre quotient  $k_M = \text{End}_{\mathcal{C}}(M)/J_T(M, M)$  soit un  $k$ -surcorps de dimension finie et le bifoncteur  $J_T/J_T^2$  soit de dimension finie sur  $k$  (ici  $J_T = J_{\text{add } T} = \text{rad}_{\text{add } T}$  est le radical de Jacobson de  $\text{add } T$ ). Alors, ayant en vue la définition 1.5.2, à  $T$  on associe un carquois modulé augmenté  $\mathcal{Q}_T = (\mathcal{Q}_T, \mathcal{M}_T)$  décrit comme suit : les points sont donnés par tous les objets indécomposables dans  $T$ , le  $k$ -surcorps attaché en un point  $M$  dans  $\mathcal{Q}_T$  est le  $k$ -surcorps opposé  $k_M^*$  et pour chaque paire de points  $X, Y$  dans  $\mathcal{Q}$  qui ne sont pas tous deux des coefficients, la flèche valuée (peut-être 0-valuée)  $\alpha = \alpha_{X,Y}$  représentant l'ensemble  $(\mathcal{Q}_T)_1(X, Y)$  et la paire dualisante de bimodules correspondante sont données comme suit :  $X \left\{ {}_X B_Y, {}_X B_Y^*; {}_X b_Y, {}_X b_Y^* \right\} Y$  où  ${}_X B_Y = \text{Irr}(X, Y)$  est le  $k_X^* \text{-} k_Y^*$ -bimodule des morphismes irréductibles de  $X$  vers  $Y$  dans  $\text{add } T$ , le bimodule dual  ${}_X B_Y^*$  peut être choisi comme étant le  $k$ -dual  $\text{Hom}_k({}_X B_Y, k)$ . La modulation de  $\mathcal{Q}$  est choisie symétrisable en fixant d'abord des formes traces non-dégénérées  $t_M \in \text{Hom}_k(k_M, k)$  pour chaque point  $M$ .

Dans la définition 2.2.6 ci-après, la condition (c4) est une généralisation non-simplement lacée de la condition (d) requise dans [10] pour les structures amassées. Notons que contrairement aux catégories simplement lacées pour lesquelles le carquois contient assez d'informations, ici dans le cas général des catégories sur des corps non nécessairement algébriquement clos, le carquois valué à lui-seul ne contient que bien peu d'information sur les morphismes irréductibles ; l'information correspondante doit être donnée par le carquois modulé. Ainsi nous attirons l'attention du lecteur qu'il est naturel d'exiger que la structure amassée puisse respecter dans un certain sens la modulation de chaque amas augmenté  $T$ , une telle exigence est d'ailleurs nécessaire si par exemple pour une variable amassée  $M$  dans  $T$ , on désire comparer les algèbres d'endomorphismes de  $T$  et de  $\mu_M(T)$  en utilisant leurs représentations par des carquois modulés liés (comme nous le ferons au chapitre 4 après l'introduction des carquois modulés avec potentiels).

**Définition 2.2.6.** On suppose que la catégorie  $\mathcal{C}$  est Hom-finie et de Krull-Schmidt, alors  $\mathcal{C}$  possède une *structure amassée* si  $\mathcal{C}$  admet une structure amassée faible et les conditions supplémentaires (c3) et (c4) ci-après sont vérifiées.

- (c3) La structure amassée faible de  $\mathcal{C}$  ne possède pas de boucles et de 2-cycles dans le sens suivant : le carquois valué augmenté de chaque amas augmenté ne possède ni boucle ni 2-cycle ; de façon

équivalente les suites d'échange sont des  $\tau$ -suites reliantes et il n'existe pas de 2-cycle.

(c4) Pour chaque variable amassée  $M$  dans un amas augmenté  $T$ , le carquois modulé augmenté  $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}, \mathfrak{M})$  de  $T$  et le carquois modulé augmenté  $\mathcal{Q}' = (\mathcal{Q}', \mathfrak{M}')$  de  $T^* = \mu_M(T)$  sont liés par la *mutation semi-modulée* suivante :

(c4.1)  $\mathcal{Q}' = \mu_M(\mathcal{Q})$  est la mutation du carquois valué  $\mathcal{Q}$  au point  $M$ .

(c4.2) Chaque paire d'échange  $(M, M^*)$  est munie d'un isomorphisme naturel de  $k$ -surcorps  $k_{M^*} \xrightarrow{\phi} k_M$  compatible avec les suites d'échange et l'identification  $k_{M^*} \cong_{\phi} k_M$  est telle que pour toute paire de points  $X, Y \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}'$ , les flèches valuées représentant les sous-ensembles  $\mathcal{Q}_1(X, M)$ ,  $\mathcal{Q}_1(M, Y)$ ,  $\mathcal{Q}'_1(M^*, X)$  et  $\mathcal{Q}'_1(Y, M^*)$  soient respectivement données par

$$\alpha : X \xrightarrow{x^{B_M}, x^{B_M^*}} M, \beta : M \xrightarrow{M^{B_Y}, M^{B_Y^*}} Y, \alpha^* : X \xleftarrow{x^{B_M}, x^{B_M^*}} M^* \text{ et } \beta^* : M^* \xleftarrow{M^{B_Y}, M^{B_Y^*}} Y,$$

où,  $\alpha$  et  $\alpha^*$  ( $\beta$  et  $\beta^*$ ) possèdent la même paire dualisante et symétrisable de bimodules.

En examinant la condition (c4.2) dans la définition 2.2.6, on note les observations suivantes : si on admet l'existence d'une structure amassée faible sans boucles, alors pour chaque variable amassée  $M$ , les deux suites d'échange  $M^* \xrightarrow{f^*} B \xrightarrow{f} M$  et  $M \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g^*} M^*$  sont des  $\tau$ -suites reliantes, et ayant en vue le théorème 2.1.4 on a deux isomorphismes de  $k$ -surcorps  $\phi_M : k_M \xrightarrow{\sim} k_{M^*}$  et  $\phi_{M^*} : k_{M^*} \xrightarrow{\sim} k_M$  qui peuvent ne pas coïncider ; sous l'identification  $k_M \cong_{\phi_M} k_{M^*}$  on a  $\text{Irr}_{T^*}(M^*, X) \cong_{\phi_M} \text{Irr}_T(X, M)^*$  pour chaque objet indécomposable  $X$  dans  $B$ , mais si plutôt on considère l'identification  $k_M \cong_{\phi_{M^*}} k_{M^*}$  alors on obtient que  $(\text{Irr}_T(M, X')) \cong_{\phi_{M^*}} \text{Irr}_{T^*}(X', M^*)$  pour chaque objet indécomposable  $X'$  dans  $B'$ . Ainsi prenant en compte le théorème 2.1.4, la condition (c4.2) dit précisément qu'il existe un "bon" choix des suites d'échange compatibles telles que  $\phi_M = \phi_{M^*}$ . Notons aussi que la condition (c4.2) est toujours trivialement satisfaite dans le cas simplement lacé où les bimodules se réduisent aux espaces vectoriels sur un corps algébriquement clos.

## 2.3 Catégories triangulées 2-Calabi-Yau avec structures amassées

On suppose pour la suite que  $\mathcal{C}$  est une catégorie Hom-fine de Krull-Schmidt (triangulée ou exacte stablement) 2-Calabi-Yau. Dans cette section notre objectif principal est de prouver qu'en présence de la propriété 2-Calabi-Yau la condition (c4) est satisfaite sous l'hypothèse que la condition (c3) tienne et qu'on a une structure amassée faible. Pour ce faire, la preuve que la condition (c4.1) est satisfaite est une adaptation relativement aisée de celle du résultat correspondant au cas simplement lacé obtenu dans [10]. Cependant, prouver que la condition (c4.2) est satisfaite s'avère être une tâche plus sophistiquée qui requiert en plus de la propriété 2-Calabi-Yau les concepts généraux développés dans la section précédente ainsi qu'un outil technique autour des  $k$ -surcorps (formes traces) que nous développons plus amplement au chapitre 3.

### 2.3.1 Énoncés principaux

Nous avons avant toute chose besoin du lemme technique qui suit.

**Lemme 2.3.1.** *Soit  $\Lambda$  une  $k$ -algèbre locale de dimension finie et de radical  $J_\Lambda$ . Alors il existe des formes traces  $k$ -linéaires non nulles  $t$  sur  $\Lambda$  telles que  $t \in \text{soc}({}_\Lambda \text{Hom}_k(\Lambda, k)) \cap \text{soc}(\text{Hom}_k(\Lambda, k)_\Lambda)$ . Chaque telle trace  $t$  est alors un élément central du  $\Lambda$ -bimodule  $D(\Lambda) = \text{Hom}_k(\Lambda, k) : a \cdot t = t \cdot a$  pour tout  $a \in \Lambda$ , le radical  $R_t$  de  $t$  est tel qu'on ait  $R_t = J_\Lambda$  et  $t$  induit une forme trace non-dégénérée sur le  $k$ -surcorps  $\Lambda/J_\Lambda$ .*

*Démonstration.* Ce lemme est entièrement contenu et prouvé dans le lemme 3.1.3 au chapitre 3 où les notions de morphismes traces et les paires dualisantes de bimodules sont plus largement exposées.  $\square$

Pour le résultat principal de cette section, on considère pour un triplet  $(T, M, T^*)$  dans  $\mathcal{C}$  la condition suivante :

- ▷  $T$  est un objet (ou une sous-catégorie) inclinante(e) amassée(e) dans  $\mathcal{C}$ ,
  - ▷  $M \in \text{ind } T$  et il n'existe pas de boucle au point  $M$  dans  $T$ ,
  - ▷  $T^* = (T/M) \oplus M^*$  est la mutation de  $T$  au point  $M$ .
- (2.3.1)

*Remarque 2.3.1.* En vertu du lemme 2.2.1, le triplet  $(T, M, T^*)$  satisfait à la condition (2.3.1) si et seulement si c'est le cas pour le triplet  $(T^*, M^*, T)$ .

Notre contribution principale pour la version non-simplement lacée des structures amassées s'énonce comme suit.

**Théorème 2.3.2.** *Soit  $(T, M, T^*)$  un triplet dans une catégorie (triangulée ou exacte stablement) 2-Calabi-Yau Hom-finie  $\mathcal{C}$  satisfaisant à la condition (2.3.1). Alors les énoncés suivants sont vrais.*

- (1) *Il existe une paire compatible de suites d'échange  $(\xi) : M^* \xrightarrow{f^*} B \xrightarrow{f} M \rightarrow$  et  $(\xi') : M \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g^*} M^* \rightarrow$  associées à la paire d'échange  $(M, M^*)$  telle que chaque endomorphisme  $a \in \text{End}_{\mathcal{C}}(M)$  se prolonge en un endomorphisme  $(b, a', a)$  de la suite  $(\xi)$  et en un endomorphisme  $(a, a'', b)$  de la suite  $(\xi')$  ayant une composante commune  $b \in \text{End}_{\mathcal{C}}(M^*)$ .*
- (2) *Les endomorphismes des deux suites d'échange compatibles  $(\xi)$  et  $(\xi')$  apparaissant comme dans (1) induisent un isomorphisme naturel de  $k$ -surcorps  $k_M \xrightarrow{\phi} k_{M^*}$  suivant lequel, pour tout  $X$  dans  $\text{ind}(T/M)$  on a des isomorphismes naturels suivants entre paires dualisantes et symétrisables de bimodules :*

$$\begin{aligned} \{\text{Irr}_{\text{add } T}(X, M), \text{Hom}_k(\text{Irr}_{\text{add } T}(X, M), k)\} &\cong \{\text{Hom}_k(\text{Irr}_{\text{add } T^*}(M^*, X), k), \text{Irr}_{\text{add } T^*}(M^*, X)\}, \\ \{\text{Irr}_{\text{add } T}(M, X), \text{Hom}_k(\text{Irr}_{\text{add } T}(M, X), k)\} &\cong \{\text{Hom}_k(\text{Irr}_{\text{add } T^*}(X, M^*), k), \text{Irr}_{\text{add } T^*}(X, M^*)\}. \end{aligned}$$

Un isomorphisme d'une paire dualisante et symétrisable  $\{{}_E N_F, ({}_E N_F)^*\}$  vers une paire dualisante et symétrisable  $\{{}_E N'_F, ({}_E N'_F)^*\}$  est une paire  $(f, f^*)$  où  $f : N \xrightarrow{\sim} N'$  est un isomorphisme de bimodules et  $f^* : N^* \xrightarrow{\sim} N'^*$  est l'isomorphisme dual correspondant (ici le dual de  $f$  existe à cause du fait que les paires dualisantes de bimodules considérées sont symétrisables, voir la section 3.1).

Maintenant sous l'hypothèse de l'existence d'une structure amassée faible et de la condition (c3), la version non-simplement lacée des la structures amassées s'énonce comme suit.

**Théorème 2.3.3.** *Soit  $\mathcal{C}$  une  $k$ -catégorie Hom-finie de Krull-Schmidt (triangulée ou exacte stablement) 2-Calabi-Yau pour un corps quelconque  $k$ , admettant des sous-catégories inclinantes amassées n'ayant ni*

boucle ni 2-cycle. Alors les sous-catégories inclinantes amassées déterminent une (version non-simplement lacée de) structure amassée pour  $\mathcal{C}$ .

Avant de prouver les théorèmes 2.3.2 et 2.3.3, nous dérivons la conséquence immédiate ci-après pour les algèbres inclinées 2-Calabi-Yau, où la condition de décomposition directe dans le point (iii) du corollaire 2.3.4 a du sens car le corps de base  $k$  n'est pas supposé parfait. Rappelons aussi que si un objet  $T$  dans  $\mathcal{C}$  ne possède pas de boucles et de 2-cycles, alors pour deux points  $i$  et  $j$  dans le carquois modulé  $\mathcal{Q}$  de  $\text{End}(T)$ , il existe une unique flèche valuée (et peut-être 0-valuée)  $k_i \xrightarrow{\alpha} k_j$  dont la paire dualisante et symétrisable de bimodules peut être notée  $\{ {}_i B_j, {}_i B_j^*; {}_i \mathfrak{b}_j, {}_i \mathfrak{b}'_j \}$ , les formes bilinéaires non-dégénérées et symétrisables  ${}_i B_j \otimes_{k_j} {}_i B_j^* \xrightarrow{{}_i \mathfrak{b}_j} k_i$  et  ${}_i B_j^* \otimes_{k_i} {}_i B_j \xrightarrow{{}_i \mathfrak{b}'_j} k_j$  étant induites par deux formes traces non-dégénérées  $\mathfrak{t}_i \in \text{Hom}_k(k_i, k)$  et  $\mathfrak{t}_j \in \text{Hom}_k(k_j, k)$  comme dans le lemme 3.1.4.

**Corollaire 2.3.4.** *Soit  $(T, T_k, T^*)$  comme en (2.3.1) et tel que  $T$  n'ait ni boucle ni 2-cycle, avec  $\text{ind } T = \{T_i : i \in I\}$  fini. Soit  $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}, \mathfrak{M}) = \mathcal{Q}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(T)}$ , où la modulation de  $\mathcal{Q}$  est choisie symétrisable sur  $k$  en fixant une famille  $(k_i, \mathfrak{t}_i)_{i \in I}$  de  $k$ -surcorps  $k_i$  munis de formes traces non-dégénérées  $\mathfrak{t}_i$ . Alors, le carquois modulé  $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(T^*)}$  est lié à  $\mathcal{Q}$  suivant la mutation semi-modulée suivante :*

- (i) *Le carquois valué sous-jacent de  $\mathcal{Q}'$  est égal à la mutation  $\mu_k(\mathcal{Q})$ .*
- (ii) *Suivant une identification naturelle des  $k$ -surcorps attachés aux point  $k$  dans  $\mathcal{Q}$  et dans  $\mathcal{Q}'$ , la famille de  $k$ -surcorps munis de formes traces non-dégénérées dans  $\mathcal{Q}'$  est encore donnée par  $(k_i, \mathfrak{t}_i)_{i \in I}$ . Et pour toute paire de points  $x, y$  dans  $I$  les flèches valuées représentant les sous-ensembles  $\mathcal{Q}_1(x, k)$ ,  $\mathcal{Q}_1(k, y)$ ,  $\mathcal{Q}'_1(k, x)$  et  $\mathcal{Q}'_1(y, k)$  sont respectivement données par*

$$\alpha : x \xrightarrow{{}_x B_k, {}_x B_k^*} k, \quad \beta : k \xrightarrow{{}_k B_y, {}_k B_y^*} y, \quad \alpha^* : x \xleftarrow{{}_x B_k, {}_x B_k^*} k \quad \text{et} \quad \beta^* : k \xleftarrow{{}_k B_y, {}_k B_y^*} y,$$
*où,  $\alpha$  et  $\alpha^*$  ( $\beta$  et  $\beta^*$ ) possèdent la même paire dualisante et symétrisable de bimodules.*

- (iii) *Soient  $i, j \in I - \{k\}$  tels que le sous-carquois modulé de  $\mathcal{Q}$  induit par les trois points  $i, j, k$  soit acyclique. Si  ${}_i B_k \otimes_k {}_k B_j$  est non nul on suppose aussi que  $J_{\text{add } T}(T_j, T_i) = \text{Irr}_{\text{add } T}(T_j, T_i) \oplus J_{\text{add } T}^2(T_j, T_i)$ . Alors,  $\text{Irr}_{\text{add } T^*}(T_j, T_i) = \text{Irr}_{\text{add } (T/T_k)}(T_j, T_i) = {}_i B_j \oplus ({}_i B_k \otimes_k {}_k B_j)$ . Et si  $\{ {}_i B'_j, {}_i B_j^*; {}_i \mathfrak{b}''_j, {}_i \mathfrak{b}'''_j \}$  désigne la paire dualisante et symétrisable de bimodules associée à  $\mathcal{Q}'_1(i, j)$  alors on a :*

$$\{ {}_i B'_j, {}_i B_j^*; {}_i \mathfrak{b}''_j, {}_i \mathfrak{b}'''_j \} = \{ {}_i B_j, {}_i B_j^*; {}_i \mathfrak{b}_j, {}_i \mathfrak{b}'_j \} \oplus \left( \{ {}_i B_k, {}_i B_k^*; {}_i \mathfrak{b}_k, {}_i \mathfrak{b}'_k \} \otimes \{ {}_k B_j, {}_k B_j^*; {}_k \mathfrak{b}_j, {}_k \mathfrak{b}'_j \} \right).$$

*Démonstration.* L'énoncé (i) est donné par le théorème 2.3.3-(c4.1) tandis que l'énoncé (ii) est donné par le théorème 2.3.2-(2) ; il reste seulement à montrer que (iii) est aussi valide.

Soit  $\mathcal{Q}_2^{(k)}(i, j) := \{ \alpha\beta : \alpha \in \mathcal{Q}_1(i, k), \beta \in \mathcal{Q}_1(k, j) \}$  le sous-ensemble des chemins valués de longueur 2 dans  $\mathcal{Q}_2(i, j)$  passant à travers le point  $k$  (comme dans la définition 2.2.3). En vertu de la définition de la mutation de  $T$  au point  $k$ , on sait que  $T^* = \mu_k(T) = (T/T_k) \oplus T_k^*$  avec  $T_k^* \not\cong T_k$ . On sait que  ${}_x B_y = \text{Irr}_{\text{add } T}(T_x, T_y)$  pour tout  $x, y \in \mathcal{Q}_0$ , posant aussi  ${}_i B'_j = \text{Irr}_{\text{add } T^*}(T_j, T_i)$ , on a clairement des suites exactes canoniques de  $k_i$ - $k_j$ -bimodules

$${}_i B_k \otimes_{k_k} {}_k B_j \longrightarrow \text{Irr}_{\text{add } (T/T_k)}(T_j, T_i) \longrightarrow {}_i B_j \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \text{Irr}_{\text{add } (T/T_k)}(T_j, T_i) \longrightarrow {}_i B'_j \longrightarrow 0.$$

Acceptant alors la condition de décomposition que :  $J_{\text{add } T}(T_j, T_i) = \text{Irr}_{\text{add } T}(T_j, T_i) \oplus J_{\text{add } T}^2(T_j, T_i)$  au cas où  ${}_i B_k \otimes_k {}_k B_j \neq 0$ , on voit que  ${}_i B_j \subset \text{Irr}_{\text{add } (T/T_k)}(T_j, T_i)$  et



naturellement à un morphisme non nul  $\varepsilon \in \text{soc}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M[2]))$  qui induit un triangle presque scindé  $(\xi_\varepsilon) : M[1] \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} M \xrightarrow{\varepsilon} M[2]$  dans  $\mathcal{C}$ .

Maintenant, en utilisant  $(\xi)$  et  $(\xi_\varepsilon)$  nous construisons un morphisme  $\delta' : M^* \longrightarrow M[1]$  tel que le diagramme ci-après commute :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\xi) : & M^* & \xrightarrow{f^*} & B & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\delta} & M^*[1] \\
 & \delta' \downarrow & & \downarrow f' & & \parallel & & \downarrow \delta'[1] \\
 (\xi_\varepsilon) : & M[1] & \xrightarrow{u} & E & \xrightarrow{v} & M & \xrightarrow{\varepsilon} & M[2].
 \end{array} \tag{\Sigma 1}$$

En effet la propriété de factorisation à droite de  $v$  montre que le morphisme radiciel  $f$  se factorise par  $v$  et par un certain morphisme  $f'$  rendant commutatif le carré qui est au milieu du diagramme  $(\Sigma 1)$  précédent. Ainsi la paire  $(f', \mathbb{1}_M)$  doit se prolonger en un morphisme de triangles  $(\delta', f', \mathbb{1}, \delta'[1])$  avec  $\delta' : M^* \longrightarrow M[1]$ , si bien qu'on obtient un diagramme commutatif de la forme  $(\Sigma 1)$  et dans lequel  $\delta' \neq 0$  puisque  $\varepsilon$  est non nul de par sa construction.

La suite de la preuve est donnée par les deux prochains faits ci-après.

**Fait 2.2.** *L'unique triangle non scindé  $(\xi') : M \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{\delta'} M[1]$  construit en utilisant le morphisme  $\delta'$  est un triangle d'échange.*

**Fait 2.3.** *Les deux triangles d'échange  $(\xi)$  et  $(\xi')$  sont compatibles dans le sens que la condition (2.3.2) est satisfaite.*

*Preuve du fait 2.2.* Comme  $(\xi')$  est non scindé, la preuve du Fait 2.2 est donnée par le lemme 2.2.1 lequel montre d'ailleurs que le résultat tient pour toute paire de sous-catégories rigides ne comportant pas de boucle au points  $M$  et  $M^*$ . Toutefois, ici nous vérifierons directement que  $B'$  est dans  $T \cap T^*$  : en effet posons  $\bar{T} = T/M$ , en appliquant le foncteur  $\mathcal{C}(\bar{T}, -)$  à  $(\xi')$  on obtient la suite exacte courte suivante :

$$\mathcal{C}(\bar{T}, M) \longrightarrow \mathcal{C}(\bar{T}, B') \longrightarrow \mathcal{C}(\bar{T}, M^*) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bar{T}, M) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bar{T}, B') \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bar{T}, M^*).$$

Puisque  $T = \bar{T} \oplus M$  et  $T^* = \bar{T} \oplus M^*$  sont rigides, on a  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bar{T}, M) = 0$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bar{T}, M^*) = 0$ , si bien que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bar{T}, B') = 0$ . Ensuite, en appliquant le foncteur  $\mathcal{C}(-, M)$  à  $(\xi')$  et ayant en vue le fait que dans  $T$  il n'existe pas de boucle au point  $M$ , on obtient (comme d'ailleurs dans la preuve du lemme 2.2.1) une suite exacte  $0 \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(M, M) \longrightarrow \mathcal{C}(M, M) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M^*, M) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(B', M) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, M) = 0$ , montrant que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(B', M) = 0$ , et à cause de la condition 2-Calabi-Yau on a aussi  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, B') = 0$ . De même en en appliquant le foncteur  $\mathcal{C}(M^*, -)$  à  $(\xi')$  et en utilisant le même argument que celui qui précède, on voit aussi que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M^*, B') = 0$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(B', M^*) = 0$ . Nous avons donc montré que  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T \cup T^*, B') = 0$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(B', T \cup T^*) = 0$ , montant alors que  $B'$  appartient à  $T \cap T^*$  car  $T$  et  $T^*$  sont rigides maximaux.  $\square$

*Preuve du fait 2.3.* Vérifions maintenant que les triangles d'échange  $(\xi)$  et  $(\xi')$  forment une paire de tri-

angles compatibles tels que la condition (2.3.2) soit satisfaite. Pour cela, soit  $M \xrightarrow{a} M$  un endomorphisme arbitraire de  $M$ . En utilisant le premier triangle d'échange  $(\xi)$  (et aussi la propriété de factorisation à droite de  $f$ ), il est clair que chaque endomorphisme  $a$  doit se prolonger en un endomorphisme  $(b, a', a, b[1])$  du triangle  $(\xi)$ . Maintenant pour obtenir un diagramme commutatif comme en (2.3.2), nous devons montrer que dans le diagramme  $(\Sigma 2)$  suivant,

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\xi) : & M & \xrightarrow{g} & B' & \xrightarrow{g^*} & M^* & \xrightarrow{\delta'} & M[1] \\
 & a \downarrow & & & & \downarrow b & & \downarrow a[1] \\
 (\xi') : & M & \xrightarrow{g} & B' & \xrightarrow{g^*} & M^* & \xrightarrow{\delta'} & M[1],
 \end{array} \tag{\Sigma 2}$$

la paire  $(b, a)$  se prolonge aussi en un endomorphisme  $(a, a'', b, a[1])$  du second triangle d'échange  $(\xi')$ . Pour ce faire, on a seulement besoin de montrer que le carré à droite de  $(\Sigma 2)$  commute, ou de manière équivalente que, pour le diagramme  $(\Sigma 3)$  suivant et dans lequel le carré de gauche commute, on a que le carré de droite commute aussi.

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\delta} & M^*[1] & \xrightarrow{\delta'[1]} & M[2] \\
 a \downarrow & & \downarrow b[1] & & \downarrow a[2] \\
 M & \xrightarrow{\delta} & M^*[1] & \xrightarrow{\delta'[1]} & M[2]
 \end{array} \tag{\Sigma 3}$$

Rappelons que par construction de  $\delta'$  on a  $\varepsilon = \delta'[1] \cdot \delta$ . Nous affirmons que  $a[2] \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot a$ .

En effet, soient  $M_1, M_2, M'_1, M'_2$  des noms distincts pour désigner l'objet  $M$ , alors pour toute paire de morphismes  $M_1 \xrightarrow{c} M'_1$  et  $M'_2 \xrightarrow{c'} M_2$  dans  $\mathcal{C}$ , nous avons le diagramme commutatif suivant et dans lequel les lignes horizontales sont données par les isomorphismes fonctoriels de la propriété 2-Calabi-Yau,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{D} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1, M_2) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_2, M_1[2]) & \text{avec } \psi(u) = c[2] \cdot u \cdot c' \text{ où } u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_2, M_1[2]), \\
 \eta \downarrow & \downarrow \psi & \eta(\alpha) = c \cdot \alpha \cdot c' \text{ et donc } \eta(\alpha)(v') = \alpha(c' \cdot v' \cdot c) \text{ où} \\
 \mathrm{D} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M'_1, M'_2) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M'_2, M'_1[2]) & \alpha \in \mathrm{D} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1, M_2) \text{ et } v' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M'_1, M'_2).
 \end{array}$$

Maintenant on doit se rappeler que l'isomorphisme  $\mathrm{D} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1, M_2) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_2, M_1[2])$  de la condition 2-Calabi-Yau envoie le morphisme trace  $t \in \mathrm{D} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1, M_2) = \mathrm{D} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M)$  sur le morphisme  $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_2, M_1[2])$ , si bien que  $\eta(t) = c \cdot t \cdot c'$  est envoyé sur la composition  $\psi(\varepsilon) = c[2] \cdot \varepsilon \cdot c'$ . En particulier pour chaque  $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M)$ , le morphisme  $a \cdot t$  est envoyé sur  $a[2] \cdot \varepsilon$  tandis que le morphisme  $t \cdot a$  est envoyé sur  $\varepsilon \cdot a$ , mais le morphisme trace  $t$  étant un élément central du bimodule  $\mathrm{D} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M)$ , on a  $t \cdot a = a \cdot t$ , et donc on a aussi  $a[2] \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot a$  comme annoncé.

Maintenant, puisque le carré gauche dans  $(\Sigma 3)$  est déjà commutatif, l'égalité  $a[2] \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot a$  (et le fait que  $\varepsilon = \delta'[1] \cdot \delta$ ) montre que  $(a[2] \delta'[1] - \delta'[1] b[1]) \cdot \delta = 0$ ; ainsi le morphisme  $a[2] \delta'[1] - \delta'[1] b[1]$  doit se factoriser par le terme  $B[1]$  du triangle de base  $\delta$ . Mais on a  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B[1], M[2]) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^1(B, M) = 0$  si bien que  $a[2] \delta'[1] - \delta'[1] b[1] = 0$ , induisant alors la commutativité du carré de droite dans  $(\Sigma 3)$ . Donc la paire  $(a, b)$

se prolonge en un endomorphisme du second triangle d'échange  $(\xi')$ , si bien que chaque endomorphisme  $a \in \text{End}_{\mathcal{C}}(M)$  se prolonge en un endomorphisme  $(b, a', a, b[1])$  de  $(\xi)$  et en un endomorphisme  $(a, a'', b, a[1])$  de  $(\xi')$  avec comme composante commune l'endomorphisme  $b \in \text{End}_{\mathcal{C}}(M^*)$ . Le fait 2.3 est donc établi et la preuve du Théorème 2.3.2 est maintenant complète.  $\square$

### Preuve du Théorème 2.3.3 : condition (c4.1)

Cette partie de la preuve est entièrement dérivée de sa version simplement lacée obtenue dans [10, Théorème 1.1.6]. Nous adaptions alors les arguments utilisés dans [10, Théorème 1.1.6] en utilisant le langage des carquois valués et nous fournissons des détails additionnels omis dans [10].

Soit  $T$  un objet inclinant amassé dans  $\mathcal{C}$  avec  $\text{ind} T = \{T_i : i \in I\}$ ,  $k \in I$  un point fixé,  $T^* = T/T_k \oplus T_k^* = \mu_k(T)$ ; on pose  $Q = Q_T$  et  $Q' = Q_{T^*}$ . On a deux triangles d'échange  $T_k^* \xrightarrow{f^*} B_k \xrightarrow{f} T_k \rightarrow T_k^*[1]$  et  $T_k \xrightarrow{f'} B'_k \xrightarrow{f'^*} T_k^* \rightarrow T_k[1]$ , montrant clairement que  $Q'_1(i, k) = \{\alpha^* : \alpha \in Q_1(k, i)\}$  et  $Q'_1(k, i) = \{\alpha^* : \alpha \in Q_1(i, k)\}$  pour tout  $i \in I$ .

Ensuite, on a besoin de considérer la situation où dans  $Q$  on a un sous-carquois valué plein de de la

forme :  $i \begin{array}{c} \xrightarrow{m, m'} \\ \text{---} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} a, b \\ c, d \end{smallmatrix}} \\ \xrightarrow{s, s'} \end{array} k$ , où  $(a, b) = (0, 0)$  ou  $(c, d) = (0, 0)$  car, en vertu de l'hypothèse,  $Q$  ne possède pas de 2-cycles. Alors la définition 2.2.3 montre que dans  $\mu_k(Q)$  on a le sous-carquois valué plein suivant :

$i \begin{array}{c} \xrightarrow{m, m'} \\ \text{---} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} a, b \\ | -c+ms|, | -d+m's'| \end{smallmatrix}} \\ \xrightarrow{s, s'} \end{array} k$ , où l'arête valuée  $i \xrightarrow{| -c+ms|, | -d+m's'|} j$  est orientée de  $j$  vers  $i$  si  $\text{sign}(-c + ms) = +1$ , dans le cas contraire elle est orientée de  $i$  vers  $j$ . Or, en vertu des hypothèses précédentes l'une des valuations  $(a, b)$  et  $(c, d)$  est égale à valuation nulle  $(0, 0)$ , il en résulte que l'arête (pleinement) valuée entre  $i$  et  $j$  dans  $\mu_k(Q)$  est donnée par  $\gamma : i \xrightarrow{| a-c+ms|, | b-d+m's'|} j$ , orientée de  $j$  vers  $i$  si  $\text{sign}(a - c + ms) = +1$  (ou de façon équivalente, si  $\text{sign}(b - d + m's') = +1$ , car la valuation est supposée symétrisable), dans le cas contraire elle est orientée de  $i$  vers  $j$ .

Ansi, pour prouver que  $Q' = \mu_k(Q)$ , on doit montrer que l'arête valuée attachée à la paire de points  $i, j$  dans  $Q' = Q_{T^*}$  est donnée par l'arête valuée  $\gamma$  précédente attachée à la paire  $i, j$  dans  $\mu_k(Q)$ . Pour ce faire, on commence par considérer les deux triangles d'échange associés au facteur direct  $T_i$  de  $T$  :  $T_i^* \rightarrow B_i \xrightarrow{g} T_i \rightarrow T_i^*[1]$  et  $T_i \rightarrow B'_i \rightarrow T_i^* \rightarrow T_i[1]$ , où  $T_k$  n'est pas un facteur direct de  $B'_i$  puisque qu'il n'existe aucune flèche de  $i$  vers  $k$  dans  $Q$ , car on n'a pas de 2-cycle. La flèche valuée  $i \xrightarrow{m, m'} k$  indique qu'on peut poser :  $B_i = D_i \oplus T_k^m$ , où  $T_k$  n'est pas un facteur direct de  $D_i$ .

On obtient alors les deux diagrammes commutatifs Diag1 et Diag2 ci-dessous, où la troisième ligne du diagramme Diag1 est un triangle construit en commençant par les trois triangles induits par les morphismes du sous-carré supérieur, et en appliquant ensuite l'axiome de l'octaèdre Tr4 des catégories triangulées (voir la définition 1.8.1).

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Diag1 :} & & \text{Diag2 :} \\
 \begin{array}{ccccc}
 (T_k^*)^m[1] \equiv (T_k^*)^m[1] & & & & (T_k^*)^m[1] \equiv (T_k^*)^m[1] \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 T_i[-1] \longrightarrow T_i^* \longrightarrow D_i \oplus (T_k)^m \xrightarrow{g} T_i & & & & T_i \longrightarrow B'_i \longrightarrow T_i^* \longrightarrow T_i[1] \\
 \parallel & \uparrow & & & \parallel & \uparrow & & & \parallel \\
 T_i[-1] \longrightarrow X \longrightarrow D_i \oplus (B_k)^m \xrightarrow{h} T_i & & & & T_i \xrightarrow{h''} Y \xrightarrow{h'} X \longrightarrow T_i[1] \\
 \uparrow & \uparrow w & & & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow \\
 (T_k^*)^m[1] \equiv (T_k^*)^m[1] & & & & (T_k^*)^m[1] \equiv (T_k^*)^m[1] & & & & (T_k^*)^m[1] \equiv (T_k^*)^m[1]
 \end{array}
 \end{array} ;
 \end{array}$$

Alors en appliquant une seconde fois l'axiome de l'octaèdre, Diag2 est un diagramme commutatif de triangles dans lequel la deuxième ligne est un triangle d'échange tandis que la troisième colonne est égale à la deuxième colonne Diag1. On observe que pour le diagramme Diag2, on doit avoir  $Y = B'_i \oplus (T_k^*)^m$  : ceci vient du fait que  $T_k$  n'est pas dans  $\text{add } B'_i$ , si bien qu'on a  $\mathcal{C}(B'_i, (T_k^*)^m[1]) = 0$  et alors le triangle de la première colonne de Diag2 scinde.

Posant  $\bar{T}^* = T^*/T_i = \bigoplus_{t \neq k, i} T_t$ , on affirme que dans les deux triangles ci-après les morphismes  $h$  et  $h'$  sont des  $\text{add } \bar{T}^*$ -approximations à droite,

$$(\xi) : X \longrightarrow D_i \oplus B_k^m \xrightarrow{h} T_i \longrightarrow X[1], \quad (\xi') : T_i \longrightarrow B'_i \oplus (T_k^*)^m \xrightarrow{h'} X \longrightarrow T_i[1]. \quad (*)$$

En effet,  $B'_i \oplus (T_k^*)^m$  est clairement dans  $\text{add } \bar{T}^*$  car  $T_k$  n'est pas un facteur direct de  $B'_i$ , mais  $T_i$  étant dans  $T \cap T^*$  on a  $\mathcal{C}(\bar{T}^*, T_i[1]) = 0$ , d'où  $h'$  est une  $\text{add } \bar{T}^*$ -approximation à droite. Maintenant, pour traiter le cas du morphisme  $h$ , commençons par observer que  $D_i \oplus B_k^m$  est dans  $\text{add } \bar{T}^*$ . On sait que  $B_i = D_i \oplus T_k^m \in \text{add } T$  tandis qu'en vertu du choix de  $D_i$ , on a  $D_i \in \text{add } \bar{T}$  pour  $\bar{T} = T/T_k$ ; et  $T_i$  n'est pas un facteur direct de  $D_i$  parce qu'il n'existe pas de boucle au point  $i$ . En outre,  $T_k$  et  $T_i$  ne sont pas des facteurs directs de  $B_k$  puisqu'il n'existe aucune boucle au point  $k$  et il n'existe aucune flèche de  $i$  vers  $k$  dans  $Q_T$ . D'où  $D_i \oplus B_k^m \in \text{add } \bar{T}^*$  comme espéré. Ensuite, pour chaque facteur direct indécomposable  $T_t$  de  $T$  non-isomorphe à  $T_k^*$ , on voit que tout morphisme  $u : T_t \longrightarrow T_i$  se factorise par  $h$  : puisque dans le diagramme Diag1 la deuxième ligne est un triangle d'échange,  $u$  se factorise par le morphisme  $g$  si bien que  $u = g \circ u'$  pour un certain  $u' \in \mathcal{C}(D_i \oplus T_k^m, T_i)$ . En utilisant maintenant le triangle de la deuxième colonne de Diag1 et aussi le fait qu'on a  $\mathcal{C}(T_t, (T_k^*)^m[1]) = 0$  car  $T_t \in \text{ind}(\text{add } T^*)$  avec  $T_t \not\cong T_k^*$ , il en découle alors que le morphisme  $u'$  se factorise nécessairement par  $w$  si bien que  $u' = w \circ u''$  pour un certain  $u'' \in \mathcal{C}(D_i \oplus B_k^m, D_i \oplus T_k^m)$ . Ainsi  $u = g \circ w \circ u'' = h \circ u''$  à cause de la commutativité du diagramme Diag1. Finalement soit  $v : T_k^* \longrightarrow T_i$ ; comme  $T_k^* \xrightarrow{f^*} B_k$  est une  $\text{add } \bar{T}$ -approximation minimale à gauche, il existe forcément un morphisme  $v' \in \mathcal{C}(B_k, T_i)$  tel que  $v = v' \circ f^*$ . Mais l'argument précédent montre que  $v'$  se factorise par  $h$  car aucun des objets indécomposables  $T_i, T_k, T_k^*$ , n'est facteur direct de  $B_k$ . Alors  $v$  se factorise aussi par  $h$ , et il en résulte que  $h$  est une  $\text{add } \bar{T}^*$ -approximation à droite comme annoncé.

Notons que les triangles  $(\xi)$  et  $(\xi')$  ne sont pas nécessairement minimaux. Mais en vertu du

lemme 2.1.1, on a une décomposition  $(\xi) : X = T_i^\circ \oplus W \xrightarrow{\begin{bmatrix} h_i^\circ & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} U_i \oplus W \xrightarrow{[h_i, 0]} T_i \xrightarrow{\begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}} T_i^\circ[1] \oplus W[1]$  du triangle  $(\xi)$  pour laquelle  $(\xi_{\text{ex}}) : T_i^\circ \xrightarrow{h_i^\circ} U_i \xrightarrow{h_i} T_i \xrightarrow{e} T_i^\circ[1]$  est un triangle non-scindé qui est aussi une  $\text{add } \bar{T}^*$ -approximation minimale, il découle alors du lemme 2.1.3 que  $(\xi_{\text{ex}})$  est nécessairement l'unique triangle d'échange associé à  $T_i \in T^*$  et  $T_i^\circ \in T^\circ = \mu_i(T^*)$ . De même, ayant déjà  $X = T_i^\circ \oplus W$ , l'argument précédent appliqué au triangle  $(\xi')$  montre qu'on a une décomposition  $(\xi') : T_i \xrightarrow{\begin{bmatrix} h_i'' \\ 0 \end{bmatrix}} U_i' \oplus W \xrightarrow{\begin{bmatrix} h_i' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} X = T_i^\circ \oplus W \xrightarrow{[e', 0]} T_i[1]$ , du triangle  $(\xi')$ , pour laquelle  $(\xi'_{\text{ex}}) : T_i \xrightarrow{h_i''} U_i' \xrightarrow{h_i'} T_i^\circ \xrightarrow{e'} T_i[1]$  est le second triangle d'échange associé à la paire  $(T_i, T_i^\circ)$ .

Maintenant pour tous objets  $M, U \in \mathcal{C}$  avec  $M$  indécomposable, on désigne par  $\alpha_M(U) \in \mathbb{N}$  la multiplicité de  $M$  comme facteur direct de  $U$ . Puisqu'il n'existe pas de 2-cycle dans  $\mathcal{Q}_{T^*}$ , l'un des deux entiers naturels  $\alpha_{T_j}(U_i) = \dim_{k_{T_j}} \text{Irr}_{T^*}(T_j, T_i)$  et  $\alpha_{T_j}(U_i') = \dim_{k_{T_j}} \text{Irr}_{T^*}(T_i, T_j)$  est égal à 0, il en résulte que l'arête valuée  $i \xrightarrow{c'', c'''} j$  entre les points  $i, j$  dans  $\mathcal{Q}_{T^*}$  est telle que  $c'' = |\alpha_{T_j}(U_i) - \alpha_{T_j}(U_i')|$ . Mais puisque  $B_i = D_i \oplus T_k^m$  et  $D_i \oplus B_k^m = U_i \oplus W$ , et  $B_i' \oplus (T_k^*)^m = U_i' \oplus W$ , on a donc  $\alpha_{T_j}(U_i) = \alpha_{T_j}(D_i \oplus B_k^m) - \alpha_{T_j}(W) = \alpha_{T_j}(B_i) + m \cdot \alpha_{T_j}(B_k) - \alpha_{T_j}(W) = a + ms - \alpha_{T_j}(W)$ , et  $\alpha_{T_j}(U_i') = \alpha_{T_j}(B_i' \oplus T_k^m) - \alpha_{T_j}(W) = \alpha_{T_j}(B_i') - \alpha_{T_j}(W) = c - \alpha_{T_j}(W)$ . D'où,  $c'' = |\alpha_{T_j}(U_i) - \alpha_{T_j}(U_i')| = |a - c + ms|$  comme espéré. Nous concluons donc que  $\mathcal{Q}_{T^*} = \mu_k(\mathcal{Q}_T)$ , et ceci achève la preuve que la condition (c4.1) est satisfaite.

### Preuve du Théorème 2.3.3 : condition (c4.2)

La preuve que la condition (c4.2) est satisfaite est déjà complètement donnée par le Théorème 2.3.2. Ainsi donc la preuve du Théorème 2.3.3 est complète  $\square$ .

### 2.3.3 Sous-structures amassées

Pour clôturer cette section, nous aimerions souligner qu'une notion de sous-structure pour les structures amassées est également introduite et largement étudiée par les auteurs de [10]. Aussi, le terme "*stablement 2-Calabi-Yau*" est utilisé dans un contexte plus général pour désigner toute catégorie Hom-finie  $\mathcal{B}$  telle que  $\mathcal{B}$  est soit une catégorie de Frobenius dont la catégorie stable  $\underline{\mathcal{B}}$  est 2-Calabi-Yau, soit une sous-catégorie fonctoriellement finie et fermée pour les extensions d'une catégorie triangulée 2-Calabi-Yau ([10, Thm II.2.1]).

Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie exacte ou triangulée,  $\mathcal{B}$  une sous-catégorie  $\mathcal{C}$  fermée pour les extensions, on suppose que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{B}$  possède une structure amassée faible. La structure amassée faible de  $\mathcal{B}$  est appelée une *sous-structure* de  $\mathcal{C}$  induite par un amas augmenté  $T$  dans  $\mathcal{B}$  si les conditions ci-après sont vérifiées. Il existe un ensemble  $\underline{X}$  d'objets indécomposables dans  $\mathcal{C}$  tel que pour tout amas augmenté  $T'$  dans  $\mathcal{B}$  obtenu de  $T$  par un nombre fini d'échanges l'objet  $\tilde{T}' = T' \cup \underline{X}$  est un amas augmenté dans  $\mathcal{C}$ . Soulignons enfin que les résultats s'appliquent pour toute sous-catégorie  $\mathcal{B}$  munie d'une sous-structure amassée de celle de  $\mathcal{C}$ .

## 2.4 Algèbres amassées, sous-algèbres amassées, fonctions d'amas

Dans cette section, en guise d'une première application de l'existence de structures amassées non-simplement lacées, nous réaliserons directement une large classe d'algèbres (et de sous-algèbres) amassées non-simplement lacées (encore dites anti-symétrisables) de type géométrique [28], avec la possibilité qu'un amas puisse avoir un nombre dénombrable de variables. Soulignons que le contexte traité ici généralise celui [10, §III.1] où les auteurs se limitent aux algèbres amassées anti-symétriques. Signalons aussi que les catégories 2-Calabi-Yau offrent un cadre général permettant de construire de nouveaux exemples d'algèbres amassées et de trouver de nouveaux modèles de catégorification pour les algèbres amassées. On peut se référer par exemple à [17, 16, 33, 31] pour de nombreux développements dans le cas simplement lacé. Pour le cas non-simplement lacé, une approche indirecte apparaît dans [22] où l'auteur utilise le pliage d'algèbres de groupes gauches tordus pour généraliser au cas non-simplement lacé un résultat de Geiss-Leclerc-Schröer [33] établissant l'existence de structures amassées sur des algèbres de fonctions sur les sous-groupes unipotents maximaux des groupes de Lie simples.

Suivant les lignes de [10, §III.1] et [28], nous rappelons la définition d'une algèbre amassée, avec la possibilité qu'un amas ait un nombre dénombrable de variables. On fixe deux cardinaux dénombrables non-nuls  $m$  et  $n$  avec  $m \geq n$ , ainsi, si  $m$  est fini alors  $m$  et  $n$  sont tous deux des entiers naturels non-nuls. Soit  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(u_1, \dots, u_m)$  le *corps ambiant* des fonctions rationnelles à  $m$  variables indépendantes sur le corps  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels. Une *graine* dans  $\mathbb{F}$  est une paire  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{B}})$ , où  $\tilde{\mathbf{x}} = \{x_1, \dots, x_n, \dots, x_m\} = \underline{\mathbf{x}} \cup \underline{\mathbf{c}}$  est une base transcendante de  $\mathbb{F}$  formée par l'union de deux sous-ensembles disjoints  $\underline{\mathbf{x}} = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $\underline{\mathbf{c}} = \{x_{n+1}, \dots, x_m\}$ , et où  $\tilde{\mathbf{B}} = (b_{ij})$  est une matrice  $m \times n$ -rectangulaire d'entiers pour laquelle la *partie principale*  $\mathbf{B}$  donnée par la sous-matrice carrée d'ordre  $n$  formée des  $n$  premières lignes est *anti-symétrisable* dans le sens qu'il existe une matrice diagonale  $\underline{\mathbf{m}} = (1, \dots, n_n)$  d'ordre  $n$  formée d'entiers naturels non-nuls telle qu'on ait  $b_{ij}n_j = -b_{ji}n_i$  pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ . Le sous-ensemble  $\underline{\mathbf{x}}$  est alors appelé *l'amas* de la graine tandis que  $\underline{\mathbf{c}}$  est *l'ensemble des coefficients*. Une *algèbre amassée* (de *type géométrique*) est une sous-algèbre  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathcal{S})$  de  $\mathbb{F}$  associée à une collection  $\mathcal{S}$  de graines dans  $\mathbb{F}$  construites d'une manière recursive comme suit. Pour une graine  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{B}})$  dans  $\mathbb{F}$  comme dans les lignes précédentes et pour chaque  $k$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , la *mutation de graine dans la direction  $k$*  produit une nouvelle graine  $\mu_k(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{B}}) = (\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{B}}')$ . Ici,  $\tilde{\mathbf{x}}' = (\tilde{\mathbf{x}} \setminus \{x_k\}) \cup \{x'_k\}$  et on a une *relation d'échange*

$$x'_k x_k = \prod_{b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}}, \quad \{x_k, x'_k\} \text{ étant alors appelée une } \textit{paire d'échange}.$$

Définissons le *signe commun* de chaque paire d'entiers  $a, b \in \mathbb{Z}$  par  $\text{sign}(a, b) = \text{sign}(\text{sign}(a) + \text{sign}(b))$  où  $\text{sign}(0) = 0$ ; ainsi pour  $a, b > 0$  ou pour  $a, b < 0$  on a  $\text{sign}(a, b) = \text{sign}(a) = \text{sign}(b) \in \{-1, +1\}$ , dans les autres cas on a  $\text{sign}(a, b) = 0$ . La matrice  $\tilde{\mathbf{B}}' = (b'_{ij})$  est donnée par la formule de mutation suivante :

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } k \in \{i, j\} \\ b_{ij} + \text{sign}(b_{ik}, b_{kj}) b_{ik} b_{kj} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il aisé de voir que la mutation de graine est une opération involutive induisant une relation d'équivalence sur l'ensemble de toutes les graines dans  $\mathbb{F}$ . Soit donc  $\mathbb{S}$  une classe d'équivalence obtenue d'une graine initiale  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{B}})$  par des suites de mutations de graines, on fixe ensuite un sous-ensemble  $\underline{\mathfrak{C}}_0 \subseteq \underline{\mathfrak{C}}$  et on considère le sous-ensemble  $\underline{\mathfrak{C}}_0^{-1} = \{c^{-1} : c \in \underline{\mathfrak{C}}_0\}$  appelé *sous-ensemble des coefficients inversibles*. L'union  $\mathbb{X}$  de tous les amas appartenant aux graines dans  $\mathbb{S}$  est définie comme étant l'ensemble des *variables amassées* pour l'algèbre amassée  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbb{S})$  dont le sous-ensemble des coefficients inversibles est  $\underline{\mathfrak{C}}_0$ , où  $\mathbb{A}$  est définie comme étant la sous- $\mathbb{Z}[\underline{\mathfrak{C}}, \underline{\mathfrak{C}}_0^{-1}]$ -algèbre de  $\mathbb{F}$  engendrée par  $\mathbb{X}$ .

Maintenant, soit  $\mathbb{A}$  une algèbre amassée dans un corps ambiant  $\mathbb{F}$ ,  $\mathbb{X}$  étant l'ensemble des variables amassées de  $\mathbb{A}$  et  $\underline{\mathfrak{C}}$  celui des coefficients. Alors une *sous-algèbre amassée*  $\mathbb{A}'$  de  $\mathbb{A}$  est une algèbre amassée telle qu'il existe une graine  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{B}})$  pour  $\mathbb{A}$  et une graine  $(\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{B}}')$  pour  $\mathbb{A}'$  telles que

(cs1)  $\tilde{\mathbf{x}}' = \underline{\mathbf{x}}' \cup \underline{\mathfrak{C}}'$  où  $\underline{\mathbf{x}}' = \{x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_p}\} \subseteq \underline{\mathbf{x}}$  et  $\underline{\mathfrak{C}}' = \{x_{\sigma_{p+1}}, \dots, x_{\sigma_q}\} \subseteq \underline{\mathfrak{C}}$  sont deux sous-ensembles donnés avec  $1 \leq p \leq n$ ,  $1 \leq q \leq m$  et où  $\sigma : \{1, \dots, q\} \longrightarrow \{1, \dots, m\}$  est une application injective envoyant chaque  $i$  sur  $\sigma_i$ .

(cs2) Pour chaque  $1 \leq i \leq p$  et pour tout  $1 \leq s \leq m$ , si  $b_{\sigma_i s} \neq 0$  alors  $s = \sigma_j$  est dans l'image de  $\sigma$  pour un unique entier  $j \in \{1, \dots, q\}$  et on a  $b'_{ij} = b_{\sigma_i \sigma_j}$ .

(cs3) Le sous-ensemble des coefficients inversibles  $\underline{\mathfrak{C}}'_0 \subseteq \underline{\mathfrak{C}}'$  est tel que  $\underline{\mathfrak{C}}_0 \cap \underline{\mathfrak{C}}' \subseteq \underline{\mathfrak{C}}'_0$ .

Signalons que les carquois valués 2-acycliques ne possédant pas de boucles correspondent aux matrices anti-symétrisables à coefficients entiers, et suivant cette correspondance la mutation de carquois valués et la mutation matricielle sont compatibles. Soit  $\mathbb{Q}$  un carquois valué 2-acyclique sur un ensemble de points  $I$  ne possédant pas de boucles, la matrice anti-symétrisable  $(b_{ij})_{i,j \in I}$  correspondante peut être définie de telle sorte que pour chaque  $i, j \in I$ , l'unique arête valuée  $\alpha$  entre  $i$  et  $j$  soit donnée par  $\alpha : i \xrightarrow{-|b_{ij}|, |b_{ji}|} j$ , avec  $\alpha$  orientée de  $i$  vers  $j$  si  $\text{sign}(b_{ij}) = +1$ , dans le cas contraire  $\alpha$  est orientée de  $j$  vers  $i$ . Maintenant, les cardinaux  $1 \leq n \leq m$  étant fixés comme au début de cette section, on suppose que  $I = \{1, \dots, m\}$  et on regarde  $\mathbb{Q}$  comme étant un carquois valué augmenté relativement au sous-ensemble  $I \setminus \{1, \dots, n\}$ , alors comme dans les lignes précédentes on peut associer à  $\mathbb{Q}$  une matrice  $m \times n$ -rectangulaire dont la partie principale est anti-symétrisable.

Pour le reste de cette section, on suppose que  $\mathcal{C}$  est une catégorie (triangulée ou exacte stablement) 2-Calabi-Yau possédant une structure amassée déterminée par les objets (ou les sous-catégories) inclinant(e)s amassé(e)s où les coefficients sont donnés par les objets indécomposables projectifs. On suppose aussi que chaque objet (sous-catégorie) inclinant(e) amassé(e) possède  $n$  variables amassées et  $c$  coefficients, avec  $1 \leq n \leq m \leq \infty$  et  $0 \leq c \leq \infty$ . Pour chaque objet inclinant amassé  $T$ , le carquois valué  $\mathbb{Q}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(T)}$  de l'algèbre d'endomorphismes de  $T$  est regardé comme un carquois valué augmenté relativement aux points projectifs (on ignore toute flèche valuée entre points projectifs), la matrice  $m \times n$ -rectangulaire correspondante est notée  $\mathbb{B}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(T)}$ .

Suivant [10, §III.1] on rappelle le concept ci-après qui est une généralisation de la notion de *caractère d'amas* dans [57]. Soit  $\Delta$  une composante connexe du graphe inclinant amassé de  $\mathcal{C}$ . Une *fonction d'amas* (respectivement, *fonction d'amas forte*) pour  $\Delta$  est la donnée d'une application

$\varphi : \mathcal{E} = \text{add} \{T : T \in \Delta\} \longrightarrow \mathbb{F}$  (respectivement,  $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{F}$ ) qui est invariante sur chaque classe d'isomorphismes d'objets dans  $\mathcal{C}$  et qui satisfait aux conditions qui suivent.

(cm1) Pour chaque objet inclinant amassé  $T$  dans  $\Delta$ ,  $\varphi(T)$  est une base transcendante pour  $\mathbb{F}$ .

(cm2) Pour toute paire d'objets indecomposables  $M$  et  $N$  dans  $\mathcal{E}$  (respectivement, dans  $\mathcal{C}$ ) avec  $\dim_{k_M} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N) = 1 = \dim_{k_N} \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N)$ , on a  $\varphi(M)\varphi(N) = \varphi(U) + \varphi(U')$  où  $U$  et  $U'$  sont les termes médians de deux triangles ou de deux suites exactes courtes  $N \longrightarrow U \longrightarrow M$  et  $M \longrightarrow U' \longrightarrow N$  non scindé(e)s.

(cm3)  $\varphi(X \oplus X') = \varphi(X)\varphi(X')$  pour tous  $X, X'$  dans  $\mathcal{E}$  (respectivement, dans  $\mathcal{C}$ ).

D'importants exemples de fonctions d'amas fortes apparaissent dans [17, 16, 33] et [32, 57]. Soulignons que la condition (cm2) est une version non-simplement lacée des conditions (M2) – (M2') requises dans [10, §III.1], ici pour chaque paire d'objets indecomposable  $M, N$  dans  $\mathcal{C}$  on doit considérer les dimensions de  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N)$  sur les  $k$ -surcorps  $k_M = \text{End}M/\text{rad} \text{End}M$  et  $k_N = \text{End}N/\text{rad} \text{End}N$  et non sur le corps de base  $k$ . On la caractérise suivante des paires d'échanges.

*Remarque 2.4.1* ([12, Thm 7.5]). Pour toute structure amassée faible sans boucle dans  $\mathcal{C}$ , une paire  $(M, N)$  d'objets indecomposables dans le graphe inclinant amassé de  $\mathcal{C}$  est une paire d'échange si et seulement si  $k_M \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N) \cong k_N$ .

Notons que si  $(M, N)$  est une paire d'échange, alors la conclusion " $k_M \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N) \cong k_N$ " découle aussi du lemme 2.2.1 où on a supposé seulement que les paires de sous-catégories impliquées soient rigides dans une catégorie de Krull-Schmidt exacte ou triangulée non nécessairement 2-Calabi-Yau.

Nous déduisons donc le résultat suivant réalisant une large classe d'algèbres amassées anti-symétrisables de type géométrique, la preuve de ce résultat, due à Buan-Iyama-Reiten-Scott dans le cas simplement lacée, repose totalement sur les propriétés des structures amassées.

**Théorème 2.4.1** ([10] pour le cas simplement lacé). Soit  $\varphi : \mathcal{E} = \text{add} \{T : T \in \Delta\} \longrightarrow \mathbb{F}$  une fonction d'amas. Alors les énoncés suivants sont vrais.

- (a) Soit  $\mathbb{A}$  la sous- $\mathbb{Z}$ -algèbre de  $\mathbb{F}$  engendrée par toutes les variables  $\varphi(X)$  avec  $X \in \mathcal{E}$ . Alors  $\mathbb{A}$  est une algèbre amassée et  $\varphi$  envoie chaque graine inclinante amassée  $(T, \mathbb{Q}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(T)})$  pour  $\Delta$  sur une graine  $(\varphi(T), \mathbb{B}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(T)})$  pour  $\mathbb{A}$ .
- (b) Soit  $\mathcal{B}$  une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  munie d'une sous-structure amassée, et  $\mathcal{E}'$  une sous-catégorie de  $\mathcal{B}$  associée à une composante connexe du graphe inclinant amassé de  $\mathcal{B}$ . Alors les variables  $\varphi(X)$ , avec  $X \in \mathcal{E}'$ , engendrent une sous-algèbre amassée de  $\mathbb{A}$ .

*Démonstration.* L'énoncé (a) est une conséquence directe du fait que  $\mathcal{C}$  possède une (version non-simplement lacée de) structure amassée et du fait que la mutation inclinante amassée dans  $\mathcal{C}$  est compatible avec la mutation de graine dans  $\mathbb{F}$ . L'énoncé (b) découle de (a) en vertu de l'argument qui suit. Soit  $T'$  un objet inclinant amassé dans  $\mathcal{B}$  qu'on peut compléter en un objet inclinant amassé  $T$  dans  $\mathcal{E}$ . Alors  $\varphi(T')$  est une base transcendante pour un sous-corps  $\mathbb{F}'$  du corps ambiant  $\mathbb{F}$ , et de plus  $(\varphi(T'), \mathbb{B}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(T')})$  est une graine dans une sous-algèbre amassée de  $\mathbb{A}$ .  $\square$

On suppose donc que  $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{F}$  est une fonction d'amas réalisant une algèbre amassée  $A$  comme dans le théorème 2.4.1, alors tout sous-ensemble de coefficients inversibles  $\underline{c}_0$  dans  $A$  induit une algèbre amassée  $A[\underline{c}_0^{-1}]$  qu'on appelle un *modèle* pour la fonction d'amas  $\varphi$ .

# Chapitre 3

## Carquois modulés avec potentiels et algèbres jacobiennes

### 3.1 Morphismes traces, formes bilinéaires non-dégénérées et paires dualisantes de bimodules

Dans cette section, nous rassemblons les résultats techniques utiles à la généralisation des potentiels sur les carquois modulés : pour cela, nous aurons à construire des morphismes traces sur des  $k$ -surcorps ou sur des  $k$ -algèbres locales, on construira aussi les paires dualisantes et symétrisables de bimodules et on en donnera les propriétés nécessaires pour la suite. Au chapitre 2, nous avons notamment eu besoin de recourir à l'existence des morphismes traces pour établir l'existence de la version non-simplement lacée des structures amassées pour les catégories 2-Calabi-Yau. Pour l'étude des corps gauches nous référons à [20, 19, 26].

Pour toute  $k$ -algèbre  $A$ , on rappelle que le  $k$ -dual de  $A$  est le  $A$ -bimodule  $\text{Hom}_k(A, k)$  dont la structure est donnée comme suit :  $(a \cdot u \cdot b)(x) = u(axb)$  pour tous  $a, b, x \in A$  et tout  $u \in \text{Hom}_k(A, k)$ . Comme en dans la définition 1.2.1-(i), on définit de façon générale la notion de trace comme suit.

**Définition 3.1.1.** Une *forme trace*  $k$ -linéaire (ou simplement une *trace*) sur la  $k$ -algèbre  $A$  est tout élément central dans le bimodule  $k$ -dual  $\text{Hom}_k(A, k)$  de  $A$ . Si  $C$  est le centre de  $A$ , alors  $\mathfrak{Tr}(A) = \mathfrak{Tr}_k(A)$  est le sous- $C$ -bimodule de  $\text{Hom}_k(A, k)$  formé de toutes les traces sur  $A$ . Ainsi chaque élément dans  $\mathfrak{Tr}(A)$  est un morphisme  $k$ -linéaire  $t$  tel que  $a \cdot t = t \cdot a$  pour tout  $a \in A$ , ou de façon équivalente,  $t(ab) = t(ba)$  pour tous  $a, b \in A$ , si bien que  $t$  s'annule sur chaque commutateur  $[a, b] = ab - ba$ .

Une trace  $t \in \mathfrak{Tr}(A)$  est non-dégénérée si elle induit morphisme injectif de bimodules  $A \xrightarrow{t(\cdot)} \text{Hom}_k(A, k)$ , ou de façon équivalente, si le radical  $R_t = \{a \in A : t(ab) = 0 \text{ pour tout } b \in A\}$  de  $t$  est nul.

*Remarque 3.1.2.* Si  $C$  est le centre de  $A$  alors les énoncés suivants sont vrais.

- (a) Soit  $A^a = A/[A, A]$  l'algèbre commutative associée à  $A$ , où  $[A, A]$  est le sous-espace engendré par tous les commutateurs  $[a, b] := ab - ba$  avec  $a, b \in A$ . Alors la projection canonique  $A \xrightarrow{\pi} A^a = A/[A, A]$  donne un isomorphisme de  $C$ -bimodules  $\text{Hom}_k(A^a, k) \xrightarrow{-\circ\pi} \mathfrak{Tr}(A)$ .
- (b) Comme  $R_t$  est un idéal de  $A$ , toute trace non nulle  $t$  sur une algèbre simple est non-dégénérée.

Une façon d'établir l'existence de formes traces non-dégénérées sur des  $k$ -algèbres simples est d'utiliser une certaine trace spéciale connue sous l'appellation de *trace réduite*, commençons par le concept suivant.

**Définition 3.1.3.** Soit  $A$  une  $C$ -algèbre pour un corps  $C$ .

- ▷  $A$  est une *algèbre simple centralement finie* si  $A$  ne possède aucun idéal (bilatère) non trivial et si de plus  $A$  est de dimension finie et son centre coïncide avec le corps  $C$ . Ainsi un  *$C$ -surcorps centralement fini* est juste une  $C$ -algèbre centralement finie dans laquelle tout élément non nul est inversible.
- ▷ On suppose que  $A$  une  $C$ -algèbre simple centralement finie, avec  $n = \dim_C(A)$ . Alors un *corps scindant* pour  $A$  est une extension de corps  $\overline{C}$  de  $C$  pour laquelle il existe un isomorphisme d'algèbres  $A \otimes_C \overline{C} \xrightarrow{\phi} \mathbb{M}_n(\overline{C})$ , qu'on appelle une *présentation* de  $A$ . En particulier, le centre  $\text{Cen}(\mathbb{M}_n(\overline{C}))$  étant formé des multiples de la matrice identité par les scalaires dans  $C$ , chaque présentation  $\phi$  induit un monomorphisme  $C$ -linéaire de corps  $C = \text{Cen}(A) \xrightarrow{\phi} \text{Cen}(\mathbb{M}_n(\overline{C}))$ .

Si  $\phi$  est une présentation de  $A$  comme ci-haut, alors il est clair que  $[A, A] \otimes_C \overline{C} = [A \otimes_C \overline{C}, A \otimes_C \overline{C}]$ , car pour tous  $a, b \in A$  et  $\nu, \nu' \in \overline{C}$  on a :  $(ab - ba) \otimes \nu = (a \otimes \nu)(b \otimes 1) - (b \otimes 1)(a \otimes \nu) = [a \otimes \nu, b \otimes 1]$ , et aussi  $[a \otimes \nu, b \otimes \nu'] = ab \otimes \nu\nu' - ba \otimes \nu\nu' = (ab - ba) \otimes (\nu\nu') = [a, b] \otimes (\nu\nu')$ . Ainsi, en tenant compte de la remarque 3.1.2, signalons que si la caractéristique de  $A$  divise  $n$ , alors le centre  $C$  de  $A$  sera inclus dans  $[A, A]$  si bien que chaque forme trace dans  $\mathfrak{Tr}(A)$  sera identiquement nulle sur  $C$ . En effet, soit  $e_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\overline{C})$  la matrice dont la composante en position  $(i, j)$  vaut 1 tandis toutes les autres sont nulles pour  $1 \leq i, j \leq n$ . Posons  $\mathbb{I}_n = \phi(1 \otimes 1) = \sum_{k=1}^n e_{k,k}$  la matrice identité. On sait que pour tout  $1 \leq k \leq n$  on a la relation :

$e_{i,j} = e_{i,k}e_{k,j}$ . Alors avec l'hypothèse que  $n$  est nul dans  $A$  on dérive le calcul qui suit :  $\mathbb{I}_n = \sum_{k=1}^{n-1} e_{k,k} + e_{n,n} = \sum_{k=1}^{n-1} e_{k,k} - (n-1)e_{n,n} = \sum_{k=1}^{n-1} e_{k,n}e_{n,k} - \sum_{k=1}^{n-1} e_{n,k}e_{k,n} = \sum_{k=1}^{n-1} (e_{k,n}e_{n,k} - e_{n,k}e_{k,n}) = \sum_{k=1}^{n-1} [e_{k,n}, e_{n,k}]$ , si bien que  $\mathbb{I}_n \in [\mathbb{M}_n(\overline{C}), \mathbb{M}_n(\overline{C})] = \phi([A \otimes_C \overline{C}, A \otimes_C \overline{C}]) = \phi([A, A] \otimes_C \overline{C})$ , montrant ainsi que  $1 \in [A, A]$  et donc  $C \subset [A, A]$ .

**Lemme 3.1.1.** Toute  $C$ -algèbre centralement finie quelconque  $A$  admet toujours au moins un corps scindant.

*Démonstration.* Il est bien connu que pour tout corps commutatif  $\overline{C}$  contenant  $C$ , l'algèbre  $A \otimes_C \overline{C}$  est encore simple et de dimension finie (voir par exemple [54, 15.1]). Ainsi la clôture algébrique de  $C$  est alors d'après le théorème de Wedderburn un corps scindant pour  $A$ .  $\square$

Alors, l'existence de la *trace réduite* non nulle sur  $A$  dans l'énoncé (1) ci-dessous est bien garantie.

**Lemme 3.1.2.** [26, §22 : Def 2, Lem 2&4] Soit  $A$  une  $C$ -algèbre simple centralement finie, soit  $A \otimes_C \overline{C} \xrightarrow{\phi} \mathbb{M}_n(\overline{C})$  une présentation de  $A$ . Alors,  $\text{tr}$  désignant la trace usuelle sur l'algèbre matricielle  $\mathbb{M}_n(\overline{C})$ , les énoncés suivants sont vrais.

- (1) Le morphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire  $\text{tr} : A \longrightarrow \mathbb{C}$  tel que  $\text{tr}(a) = \text{tr}(\phi(a \otimes 1))$  pour chaque  $a \in A$  est une forme trace sur la  $\mathbb{C}$ -algèbre  $A$ , appelée trace réduite sur  $A$ . La trace réduite  $\text{tr} \in \mathfrak{Tr}(A) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C})$  est non nulle (et donc non-dégénérée), et ne dépend ni du choix du corps scindant  $\overline{\mathbb{C}}$ , ni du choix de la présentation  $\phi$  pour  $A$ .
- (2) Le sous- $\mathbb{C}$ -module  $\mathfrak{Tr}(A)$  est de dimension 1, si bien que chaque trace  $\mathbb{C}$ -linéaire sur  $A$  est un multiple de la trace réduite de la forme  $c \cdot \text{tr} = \text{tr} \cdot c$  avec  $c \in \mathbb{C}$ . Par conséquent, toutes les traces  $\mathbb{C}$ -linéaires sur  $A$  s'annulent identiquement sur le centre  $\mathbb{C}$  de  $A$  si et seulement si la caractéristique de  $A$  est un nombre premier divisant  $n$ .

*Démonstration.* Dans le volet (1), l'existence de la trace réduite (non nulle) dans  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C})$  découle directement du lemme 3.1.1 et de ce que la trace usuelle sur une algèbre matricielle est toujours non nulle. On renvoie à [26, §22 : Lem 2] pour l'unicité de la trace réduite. Passons donc à la preuve du volet (2). La trace réduite  $\text{tr}$ , étant non nulle sur algèbre simple, est non-dégénérée ; mais  $A$  étant de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ ,  $\text{tr}$  induit un isomorphisme de  $A$ -bimodules  $A \xrightarrow{\text{tr}(\cdot)} \text{Hom}_k(A, k)$ , si bien que chaque trace  $t \in \mathfrak{Tr}(A)$  est donnée par  $t = c \cdot \text{tr} = \text{tr} \cdot c$  pour un certain  $c \in A$ , ainsi pour tout  $x \in A$  on a que  $t(x) = \text{tr}(cx) = \text{tr}(xc)$ . Montrons que  $c$  est dans le centre  $\mathbb{C}$  de  $A$ . Soient donc  $a, b \in A$ , on a :  $\text{tr}(b(ac - ca)) = \text{tr}(bac) - \text{tr}((bc)a) = \text{tr}(bac) - \text{tr}(abc) = t(ba) - t(ab) = t(ba) - t(ba) = 0$ . D'où,  $\text{tr}$  étant non-dégénérée, on déduit que  $ac - ca = 0$  pour tout  $a \in A$ , et donc  $c$  appartient à  $\mathbb{C}$ . Maintenant, posant  $\mathbb{I}_n$  la matrice identité de  $\mathbb{M}_n(\overline{\mathbb{C}})$  on voit que  $\text{tr}(1) = \text{tr}(\mathbb{I}_n) = n$ . D'après ce qui précède,  $\mathfrak{Tr}(A)$  étant un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1, on obtient l'équivalence suivante : chaque trace  $t \in \mathfrak{Tr}(A)$  s'annule sur  $\mathbb{C}$  si et seulement si  $n = \text{tr}(1) = 0$ , si et seulement si la caractéristique  $\text{car}(A)$  de  $A$  est un nombre premier divisant  $n$ .  $\square$

Pour une algèbre de dimension finie  $A$ , rappelons que le socle  $\text{soc } M$  d'un  $A$ -module de dimension finie  ${}_A M$  coïncide avec le sous-module  $J \cdot M$  où  $J$  est le radical de Jacobson de  $A$ . Nous pouvons maintenant dériver le premier lemme technique important de cette sous-section, qui joue un rôle crucial dans cette thèse.

**Lemme 3.1.3.** *On suppose que  $\Lambda$  est une  $k$ -algèbre simple ou locale de dimension finie, et dont le radical de Jacobson est  $J$ ,  $\rho : \Lambda \longrightarrow \Lambda/J$  la projection canonique et  $\mathbb{C} = \text{Cen}(\Lambda/J)$ . Alors la forme trace réduite  $\mathbb{C}$ -linéaire  $\text{tr} \in \mathfrak{Tr}_{\mathbb{C}}(\Lambda/J)$  sur  $\Lambda/J$  induit un monomorphisme de  $\mathbb{C}$ -bimodules  $\text{Hom}_k(\mathbb{C}, k) \xrightarrow{(-) \circ \text{tr}} \mathfrak{Tr}_k(\Lambda/J)$ , si bien que  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{Tr}_k(\Lambda/J)) \geq \dim_k(\mathbb{C}) \geq 1$  et on a un monomorphisme  $k$ -linéaire  $\text{Hom}_k(\mathbb{C}, k) \xrightarrow{(-) \circ \text{tr} \circ \rho} \mathfrak{Tr}_k(\Lambda)$ . Par conséquent  $\mathfrak{Tr}_k(\Lambda)$  possède des formes traces non nulles (ou non-dégénérées si  $J = 0$ ) de la forme  $t = \lambda \circ \text{tr} \circ \rho$  avec  $\lambda \in \text{Hom}_k(\mathbb{C}, k)$  ; chaque telle trace vérifie alors la relation suivante :  $a \cdot t = t \cdot a$  pour tout  $a \in \Lambda$ , et  $t \in \text{soc}({}_{\Lambda} \text{Hom}_k(\Lambda, k)) \cap \text{soc}(\text{Hom}_k(\Lambda, k)_{\Lambda})$  avec  $R_t = J$ .*

*Démonstration.* Posons  $A = \Lambda/J$ , alors le centre  $\mathbb{C}$  de  $A$  est un corps commutatif qui est aussi une extension du corps  $k$  de degré fini et  $A$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre simple centralement finie. Comme la trace réduite  $\text{tr} : A \longrightarrow \mathbb{C}$  est surjective on a évidemment un monomorphisme  $k$ -linéaire  $\text{Hom}_k(\mathbb{C}, k) \xrightarrow{(-) \circ \text{tr}} \mathfrak{Tr}_k(\Lambda/J)$ . Pour voir que l'application  $(-) \circ \text{tr}$  est aussi un morphisme de  $\mathbb{C}$ -bimodules, prenons  $c, c' \in \mathbb{C}$  et  $\lambda \in \text{Hom}_k(\mathbb{C}, k)$  ; alors pour tout  $a \in A$ , en utilisant le fait que  $\text{tr}$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire et que  $c, c'$  sont centraux on a :

$(c \cdot \lambda \cdot c')(\text{tr}(a)) = \lambda(c' \text{tr}(a)c) = \lambda(\text{tr}(c'ac)) = (c \circ \text{tr} \cdot c')(a)$ , montrant alors que  $(c \cdot \lambda \cdot c') \circ \text{tr} = \lambda \circ (c \cdot \text{tr} \cdot c') = \lambda \circ (cc' \cdot \text{tr})$ , et ainsi le morphisme  $k$ -linéaire ci-dessus est un morphisme de  $C$ -bimodules.

Pour le dernier volet du lemme, la projection canonique  $\rho : \Lambda \longrightarrow \Lambda/J$  étant un morphisme d'algèbres, pour chaque trace  $t' \in \mathfrak{Tr}_k(\Lambda/J)$  non nulle la composition  $t = t' \circ \rho : \Lambda \longrightarrow k$  est une forme trace non nulle sur  $\Lambda$  telle que  $Jt = 0 = t \cdot J$ , et qui sera non-dégénérée dès que  $J = 0$ , puisque pour  $J = 0$ ,  $\Lambda$  est une algèbre simple et toute trace non nulle sur une algèbre simple est nécessairement non-dégénérée. En vertu du paragraphe précédent on a un monomorphisme  $k$ -linéaire correctement défini  $\text{Hom}_k(C, k) \xrightarrow{(-) \circ \text{tr} \rho} \mathfrak{Tr}_k(\Lambda)$ , complétant ainsi la preuve du lemme.  $\square$

Le prochain lemme donne une première application cruciale des morphismes traces pour construire les paires dualisantes et symétrisables de bimodules apparaissant dans la définition 1.2.1, on prouve aussi (Lemme 3.1.4-(2)) que tout morphisme de bimodules donné est *dualisant* relativement aux paires dualisantes et symétrisables de bimodules (pour une même paire de morphismes traces); signalons que ce dernier fait important dans la suite n'est plus vrai si on n'exige pas que les paires dualisantes de bimodules soient symétrisables.

**Lemme 3.1.4.** *Soient  $E$  et  $F$  deux  $k$ -surcorps de dimension finie, alors il existe des formes traces non-dégénérées sur  $E$  et sur  $F$  et, relativement à chaque choix de deux formes traces non-dégénérées  $t \in \text{Hom}_k(E, k)$  et  $t' \in \text{Hom}_k(F, k)$ , les énoncés ci-après sont valides.*

- (1) *Chaque bimodule  $B$  dans  ${}_{E}\text{bimod}_F$  est dualisant et on a des isomorphismes naturels  ${}^1B \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(B, k)$  et  $B^r \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(B, k)$ , si bien que pour tout bimodule  $B^* \in {}_F\text{bimod}_E$  isomorphe à l'un des duals  ${}^1B$ ,  $\text{Hom}_k(B, k)$  et  $B^r$ , on a une paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{B, B^*; \mathfrak{b}_E, \mathfrak{b}_F\}$ .*
- (2) *Soient  $\{B, B^*; \mathfrak{b}_E, \mathfrak{b}_F\}$  et  $\{B', B'^*; \mathfrak{b}'_E, \mathfrak{b}'_F\}$  deux paires dualisantes et symétrisables de bimodules (relativement à la paire de traces  $t$  et  $t'$  fixée), avec  $B \otimes B^* \xrightarrow{\mathfrak{b}_E} E$ ,  $B^* \otimes B \xrightarrow{\mathfrak{b}_F} F$ ,  $B' \otimes B'^* \xrightarrow{\mathfrak{b}'_E} E$  et  $B'^* \otimes B' \xrightarrow{\mathfrak{b}'_F} F$ . Alors pour tout morphisme de bimodules  $f : B \longrightarrow B'$ , le dual  $f^* : B'^* \longrightarrow B^*$  de  $f$  existe (coïncide avec le dual gauche et le dual droit de  $f$ ) et est caractérisé par la propriété suivante :*

$$\mathfrak{b}_E(- \otimes f^*(-)) = \mathfrak{b}'_E(f(-) \otimes -) \quad \text{et} \quad \mathfrak{b}_F(f^*(-) \otimes -) = \mathfrak{b}'_F(- \otimes f(-)). \quad (3.1.1)$$

De façon équivalente, on a le diagramme commutatif ci-après, dans lequel les flèches horizontales sont des isomorphismes naturels (adjoints à gauche et adjoints à droite) associés aux formes bilinéaires non-dégénérées :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_E({}_E B'_F, E) & = & {}^1B' & \xleftarrow{\sim} & B'^* & \xrightarrow{\sim} & B'^r & = & \text{Hom}_F({}_E B'_F, F) \\ & & \downarrow - \circ f & & \downarrow f^* & & \downarrow - \circ f & & \\ \text{Hom}_E({}_E B_F, E) & = & {}^1B & \xleftarrow{\sim} & B^* & \xrightarrow{\sim} & B^r & = & \text{Hom}_F({}_E B_F, F) \end{array}$$

Par conséquent, en fixant pour chaque bimodule  $B$  dans  ${}_{E}\text{bimod}_F$  une paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{B, B^*; \mathfrak{b}_E, \mathfrak{b}_F\}$ , on obtient une correspondance fonctorielle

$(-)^* : {}_E\text{bimod}_F \xrightarrow{\sim} {}_F\text{bimod}_E, B \longmapsto B^*$  qui induit une dualité telle que  $(-)^* \circ (-)^* = 1$ .

*Démonstration.* L'existence des traces non-dégénérées  $t \in \text{Hom}_k(E, k)$  et  $t' \in \text{Hom}_k(F, k)$  est donnée par le lemme 3.1.3, on suppose donc pour la suite que  $t$  et  $t'$  sont fixées et que la symétrisabilité des paires dualisantes de bimodules apparaissant dans cette preuve est exprimée relativement aux traces  $t$  et  $t'$ .

(1). Vérifions qu'on a deux isomorphismes de bimodules  ${}^1B \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(B, k)$  et  $B^R \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(B, k)$ . Soit en effet  $u \in {}^1B, a \in E, b \in F$ , alors pour tout  $x \in B$  on a  $[t \circ (b \cdot u \cdot a)](x) = t((b \cdot u \cdot a)(x)) = t(u(xb)a) = t(au(xb)) = t(u(axb)) = [t \circ u](axb) = [b \cdot (t \circ u) \cdot a](x)$ . Ainsi  $t \circ (b \cdot u \cdot a) = b \cdot (t \circ u) \cdot a$ , si bien que  $t \circ -$  est un morphisme de bimodules. Mais ce morphisme est injectif : en effet,  $t$  étant non-dégénérée, son radical  $R_t := \{e \in E : \forall a \in E, t(ae) = 0\}$  est nul, si donc  $t \circ u = 0$  pour un morphisme  $u \in {}^1B$ , alors pour tous  $a \in E$  et  $x \in B$  on a  $t(a \cdot u(x)) = t(u(ax)) = 0$  montrant que  $u(x)$  est dans le radical de  $t$  pour tout  $x \in B$ , si bien que  $u$  est nul. Comme  ${}^1B$  et  $\text{Hom}_k(B, k)$  sont de dimension finie et de même dimension sur  $k$ , on conclut que  $t \circ -$  est un isomorphisme. De même,  $t' \circ -$  est un isomorphisme.

Pour le second volet de (1), soit  $\phi : B^* \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(B, k)$  un isomorphisme de bimodule donné, on construit une paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{B, B^*, \mathfrak{b}_E, \mathfrak{b}_F\}$  comme suit : les formes bilinéaires non-dégénérées

$$B \otimes_F B^* \xrightarrow{\mathfrak{b}_E = \langle - \otimes (t \circ -)^{-1} \phi(-) \rangle} E \text{ et } B^* \otimes_E B \xrightarrow{\mathfrak{b}_F = \langle (t' \circ -)^{-1} \phi(-) \otimes - \rangle} F,$$

sont telles que pour tous  $x \in B, u \in B^*$ , en posant  $t \circ u_1 = \phi(u) = t' \circ u_2$  avec  $u_1 \in {}^1B$  et  $u_2 \in B^R$ , on a :  $\mathfrak{b}_E(x \otimes u) = \langle x \otimes \phi(u) \rangle := u_1(x)$  et  $\mathfrak{b}_F(u \otimes x) = \langle \phi(u) \otimes x \rangle := u_2(x)$ . Clairement, la paire  $\{\mathfrak{b}_E, \mathfrak{b}_F\}$  est symétrisable sur  $k$  ; en effet avec les notations précédentes on a :  $t(\mathfrak{b}_E(x \otimes u)) = t(u_1(x)) = \phi(u)(x) = t'(u_2(x)) = t'(\mathfrak{b}_F(u \otimes x))$  pour tous  $x \in B, u \in B^*$ .

(2). Soient  $\{B, B^*; \mathfrak{b}_E, \mathfrak{b}_F\}$  et  $\{B', B'^*; \mathfrak{b}'_E, \mathfrak{b}'_F\}$  deux paires dualisantes et symétrisables de bimodules données, avec  $B \otimes B^* \xrightarrow{\mathfrak{b}_E} E, B^* \otimes B \xrightarrow{\mathfrak{b}_F} F, B' \otimes B'^* \xrightarrow{\mathfrak{b}'_E} E$  et  $B'^* \otimes B' \xrightarrow{\mathfrak{b}'_F} F$ . Nous devons seulement montrer que pour tout morphisme de bimodules  $f : B \longrightarrow B'$ , on a le diagramme commutatif ci-après, permettant de définir le dual  $f^* : B'^* \longrightarrow B^*$  de  $f$  comme étant la valeur commune du dual gauche  ${}^1f$  et du dual droit  $f^R$  de  $f$  :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_E({}_E B'_F, E) = {}^1B' & \xleftarrow{\mathfrak{b}'_E(- \otimes -)} & B'^* & \xrightarrow{\mathfrak{b}'_F(- \otimes -)} & B'^R = \text{Hom}_F({}_E B'_F, F) \\ - \circ f \downarrow & & \downarrow f^* & & \downarrow - \circ f \\ \text{Hom}_E({}_E B_F, E) = {}^1B & \xleftarrow{\mathfrak{b}_E(- \otimes -)} & B^* & \xrightarrow{\mathfrak{b}_F(- \otimes -)} & B^R = \text{Hom}_F({}_E B_F, F). \end{array}$$

Ici,  ${}^1f := (\mathfrak{b}_E(- \otimes -))^{-1} \circ (- \circ f) \circ \mathfrak{b}'_E(- \otimes -) = (\mathfrak{b}_E(- \otimes -))^{-1} \circ \mathfrak{b}'_F(f(-) \otimes -)$  si bien que  $\mathfrak{b}_E(- \otimes {}^1f(-)) = \mathfrak{b}'_E(f(-) \otimes -)$ , et  $f^R = (\mathfrak{b}_F(- \otimes -))^{-1} \circ (- \circ f) \circ \mathfrak{b}'_F(- \otimes -) = (\mathfrak{b}_F(- \otimes -))^{-1} \circ \mathfrak{b}'_F(- \otimes f(-))$  si bien que  $\mathfrak{b}_F(f^R(-) \otimes -) = \mathfrak{b}'_F(- \otimes f(-))$ . En appliquant le fait que les paires dualisantes de bimodules considérées ici sont symétrisables sur  $k$  via les formes traces non-dégénérées  $t \in$

$\text{Hom}_k(E, k)$  et  $t' \in \text{Hom}_k(F, k)$ , on déduit les identités ci-après pour chaque  $\xi' \in B'^*$  :  
 $t' \circ b_F({}^l f(\xi') \otimes -) = t \circ b_E(- \otimes {}^l f(\xi')) = t \circ b'_E(f(-) \otimes \xi') = t' \circ b'_F(\xi' \otimes f(-)) = t' \circ b_F(f^R(\xi') \otimes -)$ ,  
 ainsi,  $t' \circ b_F({}^l f(\xi') \otimes -) = t' \circ b_F(f^R(\xi') \otimes -)$  et comme en vertu de (1), l'application  $(t' \circ -)$  est un isomorphisme de bimodules et comme  $b_F$  est non-dégénérée, on obtient que  ${}^l f(\xi') = f^R(\xi')$  pour tout  $\xi' \in B'^*$ , donc  ${}^l f = f^R$  et la preuve de l'énoncé (2) est complète.  $\square$

Comme signaler avant, pour une paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{B, B^*; b_E, b_F\}$ , on omettra souvent d'écrire explicitement les formes bilinéaires associées et ainsi la paire sera simplement notée  $\{B, B^*\}$  et en utilisant le même symbole " $\langle(-)-$ " les deux formes bilinéaires non-dégénérées  $b_E$  et  $b_F$  notées  $B \otimes_F B^* \xrightarrow{\langle(-)-\rangle} E$  et  $B^* \otimes_E B \xrightarrow{\langle(-)-\rangle} F$ , ; et si nécessaire des précisions peuvent données en indices comme dans dans les notations suivantes :  ${}_B \langle(-)-\rangle_{B^*}$  et  ${}_{B^*} \langle(-)-\rangle_B$ .

On peut former les *produits des paires dualisantes et symétrisables de bimodules* pour obtenir d'autres paires dualisantes et symétrisables de bimodules.

**Lemme 3.1.5.** *Soient  $k_1, k_2$  et  $k_3$  des  $k$ -surcorps. Soient  $\{{}_1B_2, {}_1B_2^*; {}_1b_2, {}_2b_1\}$  et  $\{{}_2B_3, {}_2B_3^*; {}_2b_3, {}_3b_2\}$  deux paires dualisantes et symétrisables de bimodules, avec  ${}_iB_j \in {}_k \text{bimod}_k$ , et avec  ${}_iB_j \otimes_{k_j} {}_iB_j^* \xrightarrow{{}_i b_j} k_i$  pour  $(i, j) = (1, 2), (2, 3)$ . Alors le produit donné par  $\{{}_1B_2, {}_1B_2^*; {}_1b_2, {}_2b_1\} \otimes \{{}_2B_3, {}_2B_3^*; {}_2b_3, {}_3b_2\} := \{{}_1B_2 \otimes {}_2B_3, {}_2B_3^* \otimes {}_1B_2^*; {}_1b_3, {}_3b_1\}$  est une paire dualisante et symétrisable de bimodules dans laquelle les formes bilinéaires associées sont canoniquement induites : pour tous  $x \in {}_1B_2, y \in {}_2B_3, u \in {}_1B_2^*$  et  $v \in {}_2B_3^*$  on a :  ${}_1b_3((x \otimes y) \otimes (v \otimes u)) = {}_1b_2(x \otimes {}_2b_3(y \otimes v) \cdot u)$  et  ${}_3b_1((v \otimes u) \otimes (x \otimes y)) = {}_3b_2(v \otimes {}_2b_1(u \otimes x) \cdot y)$ .  $\square$*

### Bases mutuellement duales

Soit  $\{B, B^*; b_E, b_F\}$  une paire dualisante et symétrisable de bimodules, avec  $B \otimes B^* \xrightarrow{b_E} E$  et  $B^* \otimes B \xrightarrow{b_F} F$ , soient  $X = \{x_1, \dots, x_p\}$  une  $E$ -base à gauche pour  $B$  et  $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$  une  $F$ -base à droite pour  $B$ . Alors,  $\widehat{X} := \{\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_p\}$  étant la base duale du dual gauche  ${}^l B = \text{Hom}_k(B, k)$ , le long de l'isomorphisme adjoint à gauche de  $b_E$  donné par  $B^* \xrightarrow{b_E \langle(-)-\rangle} {}^l B$ , la base  $\widehat{X}$  correspond à un sous-ensemble  $X^* = \{x_1^*, \dots, x_p^*\}$  de  $B^*$  qu'on définit comme étant la *base duale* correspondant à la base gauche  $X$  de  $B$ , ainsi  $X^*$  est caractérisée par la propriété suivante :  $\langle x_i \otimes x_j^* \rangle = \delta_{ij}$  pour tous  $1 \leq i, j \leq p$ ; et la paire  $\{X, X^*\}$  est appelée une *paire de bases mutuellement duales*. De même la pour une paire de bases mutuellement duales  $\{Y, Y^*\}$ , la *base duale*  $Y^* = \{y_1^*, \dots, y_q^*\}$  de  $Y$  correspond à la base duale  $\widehat{Y} = \{\widehat{y}_1, \dots, \widehat{y}_q\}$  du dual droit  $B^R = \text{Hom}_E(B, E)$  suivant l'isomorphisme  $B^* \xrightarrow{b_E \langle(-)-\rangle} B^R$  adjoint à droite de  $b_F$ ;  $Y^*$  est donc caractérisée par la propriété suivante :  $\langle y_s^* \otimes y_t \rangle = \delta_{st}$  pour tous  $1 \leq s, t \leq q$ . Ici  $\delta_{kl}$  désigne le symbole de Kronecker.

En gardant les notations précédentes, notons que  $\{E, E\}$  et  $\{F, F\}$  sont canoniquement des paires dualisantes (trivialement symétrisables) de bimodules pour lesquelles les formes bilinéaires associées coïncident respectivement avec la multiplication des  $k$ -surcorps  $E$  et  $F$ . Relativement aux paires dualisantes et symétrisables  $\{E, E\}, \{F, F\}, \{B \otimes B^*, B \otimes B^*\} := \{B, B^*; b_E, b_F\} \otimes \{B, B^*; b_E, b_F\}$  et  $\{B^* \otimes B, B^* \otimes B\} :=$

$\{B^*, B; \mathfrak{b}_E, \mathfrak{b}_F\} \otimes \{B^*, B; \mathfrak{b}_E, \mathfrak{b}_F\}$  dans lesquelles  $B \otimes B^*$  et  $B^* \otimes B$  sont des bimodules auto-duals, le prochain lemme technique donne une simple observation, mais cruciale pour la généralisation des potentiels sur les carquois modulés.

**Lemme 3.1.6.** *Le morphisme dual  $E \xrightarrow{\mathfrak{b}_E^*} B \otimes B^*$  de la forme bilinéaire non-dégénérée  $B \otimes B^* \xrightarrow{\mathfrak{b}_E} E$  envoie l'identité de  $E$  sur l'élément central  $\mathfrak{z}_{B \otimes B^*} := \mathfrak{b}_E(1) = \sum_{i=1}^m y_i \otimes y_i^*$  du bimodule auto-dual  $B \otimes B^*$  donné en choisissant une paire quelconque  $\{Y, Y^*\}$  de bases mutuellement duales où  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$  est une  $F$ -base à droite pour  $B$ . De même, le morphisme dual  $F \xrightarrow{\mathfrak{b}_F^*} B^* \otimes B$  de la forme bilinéaire non-dégénérée  $B^* \otimes B \xrightarrow{\mathfrak{b}_F} F$  envoie l'identité de  $F$  sur l'élément central  $\mathfrak{z}_{B^* \otimes B} := \mathfrak{b}_F(1) = \sum_{s=1}^m x_s^* \otimes x_s$  du bimodule auto-dual  $B^* \otimes B$  donné en choisissant une paire quelconque  $\{X, X^*\}$  de bases mutuellement duales où  $X = \{x_1, \dots, x_p\}$  est une  $F$ -base à gauche pour  $B$ .*

(2) *Pour le produit  $\{B, B^*\} \otimes \{B', B'^*\} = \{B \otimes B', B'^* \otimes B^*\}$  de deux paires dualisantes et symétrisables de bimodules, les deux éléments centraux correspondants comme dans (1) sont donnés par  $\mathfrak{z}_{(B \otimes B') \otimes (B'^* \otimes B^*)} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{q'} (y_i \otimes y'_j) \otimes (y_j'^* \otimes y_i^*)$  et  $\mathfrak{z}_{(B'^* \otimes B^*) \otimes (B \otimes B')} = \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^{p'} (x_t'^* \otimes x_s^*) \otimes (x_s \otimes x_t')$ , où  $\{Y, Y^*\}, \{Y', Y'^*\}, \{X, X^*\}, \{X', X'^*\}$  sont des paires quelconques de bases mutuellement duales où  $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$  est une base droite de  $B$ ,  $Y' = \{y'_1, \dots, y'_q\}$  est une base droite de  $B'$ ,  $X = \{x_1, \dots, x_p\}$  est une base gauche de  $B$  et  $X' = \{x'_1, \dots, x'_p\}$  est une base gauche de  $B'$ .*

*Démonstration.* L'énoncé (1) suit directement de la définition du dual d'un morphisme comme en (3.1.1), tandis que (2) suit directement de (1) et de la définition du produit de paires dualisantes donnée dans le lemme 3.1.5.  $\square$

Enfin, les deux prochains lemmes sont cruciaux pour la compréhension des potentiels dans le cas non-simplement lacé. Pour certaines paires dualisantes et symétrisables de bimodules apparaissant dans le lemme suivant les formes bilinéaires associées ne sont pas explicitement spécifiés et seront indifféremment notés en utilisant un même symbole (" $\cdot$ ") comme convenu un peu plutôt dans cette section.

**Lemme 3.1.7.** *Soient  $\{B, B^*; \mathfrak{b}_E; \mathfrak{b}_F\}$  et  $\{B', B'^*; \mathfrak{b}'_E; \mathfrak{b}'_F\}$  deux paires dualisantes et symétrisables de bimodules, avec  $B, B' \in {}_E \text{bimod}_F$ , où chacun des  $k$ -surcorps  $E$  et  $F$  est muni d'une forme trace non-dégénérée fixée. Soit  $f : B' \rightarrow B$  un morphisme de bimodules et  $f^* : B^* \rightarrow B'^*$  le morphisme dual de  $f$ , on pose  $U = \text{Im}(f)$ ,  $V = \text{Im}(f^*)$ ,  $\overline{V}^* = \ker(f)$  et  $\overline{U}^* = \ker(f^*)$ .*

(1) *Alors, on a des paires dualisantes et symétrisables de bimodules  $\{U, V\}$ ,  $\{\overline{U}, \overline{U}^*\}$  et  $\{\overline{V}, \overline{V}^*\}$  dont les structures sont canoniquement induites par les paires dualisantes  $\{B, B^*; \mathfrak{b}_E; \mathfrak{b}_F\}$  et  $\{B', B'^*; \mathfrak{b}'_E; \mathfrak{b}'_F\}$  et par  $(f, f^*)$ , et telles qu'on ait aussi les suites exactes courtes suivantes formées d'injections et de projections canoniques,*

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow \overline{V}^* \xrightarrow{j} B' \xrightarrow{p} U \longrightarrow 0, & 0 \longrightarrow \overline{U}^* \xrightarrow{q} B^* \xrightarrow{r} V \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow V \xrightarrow{p^*} B'^* \xrightarrow{j^*} \overline{V} := \text{coker } p^* \longrightarrow 0, & 0 \longrightarrow U \xrightarrow{r^*} B \xrightarrow{q^*} \overline{U} := \text{coker } r^* \longrightarrow 0. \end{array}$$

*Les deux formes bilinéaires induites pour la paire  $\{U, V\}$  sont données comme suit : pour tous  $u = p(x') = f(x') \in U$  et  $v = r(\xi) = f^*(\xi) \in V$  avec  $x' \in B'$  et  $\xi \in B^*$  on a :  $\langle u \otimes v \rangle := \mathfrak{b}_E(f(x') \otimes \xi) =$*

$b'_E(x' \otimes f^*(\xi))$  et  $(v \otimes u) := b_F(\xi \otimes f(x')) = b'_F(f^*(\xi) \otimes x')$ . Pour la paire  $\{\bar{U}, \bar{U}^*\}$  et pour tous  $\bar{u} \in \bar{U}$  et  $\xi \in \bar{U}^*$  on a :  $\langle \bar{u} \otimes \xi \rangle := b_E(u \otimes \xi)$  et  $\langle \xi \otimes \bar{u} \rangle := b_F(\xi \otimes u)$ . Et pour la paire  $\{\bar{V}, \bar{V}^*\}$  et pour tous  $\bar{v} \in \bar{V}$  et  $\xi' \in \bar{V}^*$  on a :  $\langle \bar{v} \otimes \xi' \rangle := b'_F(v \otimes \xi')$  et  $\langle \xi' \otimes \bar{v} \rangle := b'_E(\xi' \otimes v)$ .

(2) Soient  $\{Y, Y^*\}$  et  $\{X, X^*\}$  deux paires de bases mutuellement duales pour  $\{U, V\}$  où  $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$  est une F-base droite de  $U$  et  $X = \{x_1, \dots, x_p\}$  une E-base gauche de  $U$ . Soient  $\{Y_1, Y_1^*\}$  et  $\{X_1, X_1^*\}$  deux paires de bases mutuellement duales pour  $\{B, B^*\}$  où  $Y_1$  est une F-base droite de  $B$  contenant  $Y$  et où  $X_1$  est une E-base gauche de  $B$  contenant  $X$ ; soient également  $\{Y'_1, Y_1'^*\}$  et  $\{X'_1, X_1'^*\}$  deux paires de bases mutuellement duales pour  $\{B', B'^*\}$  où  $Y_1'^*$  est une F-base gauche de  $B'^*$  contenant  $Y^*$  et où  $X_1'^*$  est une E-base droite de  $B'^*$  contenant  $X^*$ . Alors la paire  $(f, f^*)$  vérifie les propriétés qui suivent.

(i) pour  $1 \leq s \leq q$  et  $1 \leq k \leq p$  on a :  $f(y'_s) = y_s$ ,  $f^*(y_s) = y'_s$ ,  $f(x'_k) = x_k$  et  $f^*(x_k) = x'_k$ .

(ii)  $\bar{U}^* := \ker(f^*) = F \cdot \{y^* \in Y_1^* : y \in Y_1 \setminus Y\} = \{x^* \in X_1^* : x \in X_1 \setminus X\} \cdot E$ ;

$\bar{V}^* := \ker(f) = \{y' \in Y_1' : y^* \in Y_1'^* \setminus Y^*\} \cdot F = E \cdot \{x' \in X_1' : x^* \in X_1'^* \setminus X^*\}$ .

*Démonstration.*

(1). Pour la paire  $\{U, V\}$  les deux formes bilinéaires associées sont indifféremment notées  $U \otimes V \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} E$  et  $V \otimes U \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} F$ ; pour tous  $u = p(x') = f(x') \in U$  et  $v = r(\xi) = f^*(\xi) \in V$  avec  $x' \in B'$  et  $\xi \in B^*$ , comme dans l'énoncé du lemme on pose :  $\langle u \otimes v \rangle := b_E(f(x') \otimes \xi) = b'_E(x' \otimes f^*(\xi))$  et  $\langle v \otimes u \rangle := b_F(\xi \otimes f(x')) = b'_F(f^*(\xi) \otimes x')$ . On voit clairement que les égalités précédentes définissent correctement deux formes bilinéaires, et de plus, les formes bilinéaires  $b_E$ ,  $b_F$ ,  $b'_E$  et  $b'_F$  étant non-dégénérées et symétrisables sur  $k$ , il est de même de la paire  $\{U, V\}$ .

On considère la paire  $\{\bar{U}, \bar{U}^*\}$  avec  $\bar{U} = B/U$  et  $\bar{U}^* = \ker(f^*)$ . Pour tous  $\bar{u} \in \bar{U}$  et  $\xi \in \bar{U}^*$ , dans le lemme on a posé :  $\langle \bar{u} \otimes \xi \rangle := b_E(u \otimes \xi)$  et  $\langle \xi \otimes \bar{u} \rangle := b_F(\xi \otimes u)$ . Or si  $\bar{u} = 0$  alors  $u \in U = f(B')$  si bien que  $u = f(x')$  pour un  $x' \in B'$  et on aura  $b_E(u \otimes \xi) = b_E(f(x') \otimes \xi) = b'_E(x' \otimes f^*(\xi)) = 0$  puisque  $\xi \in \bar{U}^* := \ker(f^*)$ , et de même on aura  $b_F(\xi \otimes u) = b_F(\xi \otimes f(x')) = b'_F(f^*(\xi) \otimes x') = 0$ . On obtient ainsi deux formes bilinéaires induites  $\bar{U} \otimes \bar{U}^* \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} E$  et  $\bar{U}^* \otimes \bar{U} \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} F$  correctement définies et, comme dans le premier paragraphe, ces formes bilinéaires sont trivialement non-dégénérées et symétrisables sur  $k$ .

Avec la même démarche que précédemment, on vérifie qu'on a une paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{\bar{V}, \bar{V}^*\}$  dont la structure est induite par  $(f, f^*)$  comme dans le lemme.

Maintenant, pour la suite exacte courte  $0 \rightarrow \bar{V}^* \xrightarrow{j} B'^* \xrightarrow{p^*} U \rightarrow 0$ , on desire vérifier que la suite exacte courte duale associée est donnée par la suite  $0 \rightarrow V \xrightarrow{p^*} B'^* \xrightarrow{j^*} \bar{V} := \text{coker } p^* \rightarrow 0$ , dans laquelle  $p^*$  est l'inclusion canonique et  $j^*$  la projection canonique correspondante. Pour cela, soit  $v = f^*(\xi) \in V \subset B'^*$  avec  $\xi \in B^*$ , alors  $b'_F(p^*(v) \otimes -) = {}_V(f^*(\xi) \otimes p(-))_U := b'_F(f^*(\xi) \otimes -) = b'_F(v \otimes -)$ , d'où  $p^*(v) = v$ . De même pour tout  $\xi' \in B'^*$  vérifions que  $j^*(\xi') = \bar{\xi}' \in \bar{V} = B'^*/V$  où  $\bar{\xi}'$  est la classe résiduelle de  $\xi'$  dans  $\bar{V}$ . Ayant en vue le fait que  $j$  est une inclusion canonique, on a :  ${}_V(j^*(\xi') \otimes -)_{\bar{V}^*} = b'_F(\xi' \otimes -) := b'_F(\bar{\xi}' \otimes -)$  montrant que  $j^*(\xi') = \bar{\xi}'$ .

On vérifie de même que les suites exactes courtes  $0 \rightarrow \bar{U}^* \xrightarrow{q} B^* \xrightarrow{r} V \rightarrow 0$  et

$0 \longrightarrow U \xrightarrow{r^*} B \xrightarrow{q^*} \overline{U} := \text{cokerr}^* \longrightarrow 0$  sont mutuellement duales et les paires de morphismes  $(q, r)$  et  $(r^*, q^*)$  sont des paires inclusions-projections canoniques. Ceci achève la preuve de (1).

(2). En vertu des hypothèses et notations du point (2) dans le lemme, les paires de bases mutuellement duales  $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$  et  $Y'^* = \{y_1'^*, \dots, y_q'^*\}$ ,  $\{Y_1, Y_1^*\}$  et  $\{Y_1', Y_1'^*\}$  sont telles que  $Y \subseteq Y_1$  et  $Y'^* \subseteq Y_1'^*$ . Posons  $Y_1 = Y \cup \{y_{q+1}, \dots, y_m\}$  et  $Y_1'^* = Y'^* \cup \{y_{q+1}'^*, \dots, y_m'^*\}$ . Alors pour  $1 \leq s \leq n$  et  $1 \leq t \leq q$ , sachant que  $f(y') = \rho(y') \in U$  pour tout  $y' \in B'$ , on a :  $v(y_t'^* \otimes f(y_s'))_U = v(y_t'^* \otimes \rho(y_s'))_U = \mathfrak{b}'_F(\rho^*(y_t'^*) \otimes y_s') = \mathfrak{b}'_F(y_t'^* \otimes y_s') = \delta_{s,t}$  montrant que pour tout  $1 \leq s \leq q$  on a  $f(y_s') = y_s$  tandis que pour tout  $s > q$  on a  $f(y_s') = 0$ . De même, on sait que  $f^*(\xi) = r(\xi) \in V$  pour tout  $\xi \in B^*$ , et ainsi pour  $1 \leq s \leq q$  et  $1 \leq t \leq m$  on a :  $v(f^*(y_t^*) \otimes y_s)_U = v(r(y_t^*) \otimes y_s)_U = \mathfrak{b}_F(y_t^* \otimes r^*(y_s)) = \mathfrak{b}_F(y_t^* \otimes y_s) = \delta_{s,t}$  montrant que pour tout  $1 \leq t \leq q$  on a  $f^*(y_t^*) = y_t$  tandis que pour tout  $t > q$  on a  $f^*(y_t^*) = 0$ . Ceci établit une partie de l'énoncé (2), pour l'autre partie concernant les paires de bases mutuellement duales  $\{X, X'^*\}$  (pour  $\{U, V\}$  où  $X$  est une E-base gauche de  $U$ ),  $\{X_1, X_1^*\}$  (pour  $\{B, B^*\}$  où  $X_1$  est une E-base gauche de  $B$  contenant  $X$ ) et  $\{X_1', X_1'^*\}$  (pour  $\{B', B'^*\}$  où  $X_1'^*$  est une E-base gauche de  $B'^*$  contenant  $X'^*$ ), on vérifie exactement de la même manière que les points (i) et (ii) de (2) sont vérifiés. Ceci achève la preuve.  $\square$

Le lemme suivant donne maintenant une propriété satisfaisante pour généraliser les potentiels.

**Lemme 3.1.8.** *Soit  $\{M, M^*; \mathfrak{b}, \mathfrak{b}'\}$  une paire dualisante et symétrisable de bimodules où  $M$  est un E-E-bimodule cyclique avec  $M \otimes M^* \xrightarrow{\mathfrak{b}} E$  et  $M^* \otimes M \xrightarrow{\mathfrak{b}'} E$ . Alors tout morphisme de bimodule  $E \xrightarrow{\mathfrak{m}} M$  vérifie la relation symétrique :  $\mathfrak{b}(\mathfrak{m}(1) \otimes -) = \mathfrak{m}^* = \mathfrak{b}'(- \otimes \mathfrak{m}(1))$ . En particulier  $\mathfrak{m}$  est cycliquement stable dans le sens suivant : les morphismes de bimodules  $\varepsilon_r \mathfrak{m} := (\mathbb{1}_M \otimes \mathfrak{b}) \circ (\mathbb{1}_M \otimes \mathfrak{m} \otimes \mathbb{1}_{M^*}) \circ \mathfrak{b}^*$  et  $\varepsilon_l \mathfrak{m} := (\mathfrak{b}' \otimes \mathbb{1}_M) \circ (\mathbb{1}_{M^*} \otimes \mathfrak{m} \otimes \mathbb{1}_M) \circ \mathfrak{b}^*$  coïncident avec  $\mathfrak{m}$ , en d'autres termes les deux diagrammes suivants sont commutatifs.*

$$\begin{array}{ccc} M \otimes M^* \xrightarrow{\mathbb{1} \otimes \mathfrak{m} \otimes \mathbb{1}} M \otimes M \otimes M^* & & M^* \otimes M \xrightarrow{\mathbb{1} \otimes \mathfrak{m} \otimes \mathbb{1}} M^* \otimes M \otimes M \\ \mathfrak{b}^* \uparrow & \downarrow \partial^r = \mathbb{1} \otimes \mathfrak{b} & \mathfrak{b}'^* \uparrow & \downarrow \partial^r = \mathfrak{b}' \otimes \mathbb{1} \\ E \xrightarrow{\mathfrak{m}} M & & E \xrightarrow{\mathfrak{m}} M \end{array}$$

*Démonstration.* Soit  $E \xrightarrow{\mathfrak{m}} M$  un morphisme de bimodules, relativement aux paires dualisantes et symétrisables  $\{M, M^*; \mathfrak{b}, \mathfrak{b}'\}$  et  $\{E, E\}$ , le dual  $\mathfrak{m}^* : M^* \longrightarrow E$  de  $\mathfrak{m}$  existe en vertu du lemme 3.1.4-(2) et vérifie la relation suivante :  $\mathfrak{b}(\mathfrak{m}(1) \otimes -) = {}_E(1 \otimes \mathfrak{m}^*(-))_E = \mathfrak{m}^* = {}_E(\mathfrak{m}^*(-) \otimes 1)_E = \mathfrak{b}'(- \otimes \mathfrak{m}(1))$ . Maintenant, pour calculer le morphisme  $\varepsilon_r \mathfrak{m} := (\mathbb{1}_M \otimes \mathfrak{b}) \circ (\mathbb{1}_M \otimes \mathfrak{m} \otimes \mathbb{1}_{M^*}) \circ \mathfrak{b}^*$ , prenons une paire de bases mutuellement duales  $\{Y, Y^*\}$  où  $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$  est une E-droite de  $M$ , alors en vertu du lemme 3.1.6 le morphisme dual  $\mathfrak{b}^*$  s'exprime comme suit :  $\mathfrak{b}^*(1) = \sum_{t=1}^q y_t \otimes y_t^*$ . D'après ce qui précède on sait que  $\mathfrak{b}(\mathfrak{m}(1) \otimes -) = \mathfrak{b}'(- \otimes \mathfrak{m}(1))$  et tenant compte de cette relation dans les calculs suivants on a :  $\varepsilon_r \mathfrak{m}(1) = (\mathbb{1}_M \otimes \mathfrak{b}) \circ (\mathbb{1}_M \otimes \mathfrak{m} \otimes \mathbb{1}_{M^*}) \left( \sum_{t=1}^q y_t \otimes y_t^* \right) = \sum_{t=1}^q y_t \cdot \mathfrak{b}(\mathfrak{m}(1) \otimes y_t^*) = \sum_{t=1}^q y_t \cdot \mathfrak{b}'(y_t^* \otimes \mathfrak{m}(1)) = \mathfrak{m}(1)$ ,

où la dernière égalité suit de ce que pour tout  $x = \sum_{t=1}^q y_t a_t \in M$  avec  $a_t \in E$ , on voit clairement que  $b'(y_t^* \otimes x) = \sum_{s=1}^q b'(y_t^* \otimes y_s) a_t = a_t$ . On a donc montré que  $\varepsilon_r m(1) = m(1)$  si bien que  $\varepsilon_r m = m$ .

De même, en utilisant une paire de bases mutuellement duales  $\{X, X^*\}$  pour  $\{M, M^*\}$  où  $X$  est une  $E$ -base gauche de  $M$ , on vérifie aisément que  $\varepsilon_l m := (b' \otimes \mathbb{1}_M) \circ (\mathbb{1}_{M^*} \otimes m \otimes \mathbb{1}_M) \circ b'^* = m$ .  $\square$

## 3.2 Approche non-simplement lacée aux potentiels et aux algèbres jacobiniennes

Notre principal objectif dans cette section est d'étendre au contexte des carquois modulés les concepts de potentiels, de dérivées (partielles et surtout cycliques) et d'algèbres jacobiniennes correspondantes. Dans cette section comme dans tout le travail,  $k$  désigne toujours un corps commutatif quelconque,  ${}_E \text{bimod}_F$  la catégorie des  $E$ - $F$ -bimodules de dimension finie pour chaque paire de  $k$ -surcorps  $E$  et  $F$ ,  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels et  $I$  un ensemble de points.

### 3.2.1 Rappels de quelques terminologies

Pour cette section,  $\mathcal{Q}$  désignera un carquois  $k$ -modulé fini sur un ensemble de points  $I = \mathcal{Q}_0$ , de carquois valué sous-jacent  $\mathcal{Q}$  de type  $\Gamma$  pour un graphe valué  $\Gamma$  et de modulation  $\mathfrak{M}$ . En vertu des notations (1.2.1) et (1.2.1') la modulation de  $\mathcal{Q}$  est décrite sous forme compacte comme suit :  $\mathfrak{M}$  prescrit pour l'ensemble des points  $I$  une famille  $(k_i, t_i)_{i \in I}$  où chaque  $k_i$  est un  $k$ -surcorps (toujours de dimension finie) et (implicitement) muni d'une forme trace non-dégénérée  $t_i$ ; et pour chaque paire ordonnée de points  $i, j \in I$ ,  $\mathfrak{M}$  prescrit une unique paire dualisante et symétrisable de bimodules

$$\{ {}_i B_j, {}_i B_j^*; {}_i b_j, {}_i b_j' \} \text{ où } {}_i B_j \in {}_{k_i} \text{bimod}_{k_j}, {}_i B_j \otimes {}_i B_j^* \xrightarrow{{}_i b_j} k_i \text{ et } {}_i B_j^* \otimes {}_i B_j \xrightarrow{{}_i b_j'} k_j,$$

$$\text{ et si } d \text{ désigne la valuation de } \mathcal{Q}, \text{ on a une unique flèche (pleinement valuée) : } i \xrightarrow{{}_i d_j, {}_i d_j^*} j;$$

$$K = \prod_{i \in I} k_i, B = \bigoplus_{i, j \in I} {}_i B_j, B^* = \bigoplus_{i, j \in I} {}_i B_j^* \text{ et } \{B, B^*; b, b'\} \text{ est la paire dualisante et}$$
(3.2.1)

symétrisable de  $K$ -bimodules induite, voir la sous-section 3.2.4 pour plus de détails.

Si on convient que  $\mathcal{Q}_1(i, j)$  se compose de plusieurs flèches valuées (partielles)  $i \xrightarrow{d_\alpha, d_\alpha^*} j$ , alors on a posé  ${}_i d_j = \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}_1(i, j)} d_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}_1(i, j)} {}_i d_j^\alpha$ ,  ${}_i d_j^* = \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}_1(i, j)} d_\alpha^*$  et on a :  ${}_i d_j n_j = n_i {}_i d_j^*$  où  $I \xrightarrow{n} \mathbb{N}_*$  est la fonction (minimale) symétrisante pour la valuation  $d$  de  $\mathcal{Q}$ ; et dans ce cas  $\{ {}_i B_j, {}_i B_j^*; {}_i b_j, {}_i b_j' \}$  est la somme directe des paires dualisantes et symétrisables de bimodules  $\{ {}_i B_j^\alpha, {}_j B_i^{\alpha*}; {}_i b_j^\alpha, {}_j b_i^{\alpha*} \}$  avec  $\alpha \in \mathcal{Q}_1(i, j)$ ,  ${}_i B_j^\alpha \otimes {}_j B_i^{\alpha*} \xrightarrow{{}_i b_j^\alpha} k_i$  et  ${}_j B_i^{\alpha*} \otimes {}_i B_j^\alpha \xrightarrow{{}_j b_i^{\alpha*}} k_j$ . En particulier, si dans un souci de précision on note  $i \xrightarrow{\alpha} j$  l'unique flèche (pleinement) valuée de  $i$  vers  $j$  dans  $\mathcal{Q}$ , alors on adoptera aussi les notations précédentes pour la paire dualisante et symétrisable de bimodules attachée à la paire ordonnée  $i, j \in I$ . Comme dans la section précédente,

lorsque nous omettons de nommer explicitement les deux formes bilinéaires d'une paire dualisante de bi-modules, alors ces dernières seront notées en utilisant indifféremment le symbole " $\langle \cdot \rangle$ " avec des précisions en indices si nécessaires.

L'algèbre semisimple  $K = \prod_{i \in I} k_i$  donnée par le produit direct des  $k$ -surcorps  $k_i$  étant fixée, chaque  $k_i$  est vu comme un sous-corps de  $K$  ayant pour unité  $e_i$ , de sorte que  $\{e_i : i \in I\}$  est un système canonique d'idempotents primitifs orthogonaux pour  $K$ . L'algèbre (tensorielle) de chemins de  $\mathcal{Q}$  est par définition l'algèbre tensorielle du  $K$ -bimodule  $B$  : c'est donc une  $k$ -algèbre  $\mathbb{N}$ -graduée donnée par  $k\mathcal{Q} = T_K(B) = \bigoplus_{m \geq 0} k\mathcal{Q}_m$  où la  $m^{\text{ième}}$  puissance tensorielle du bimodule  $B$  donnée par  $k\mathcal{Q}_m = B^{(m)}$  est par définition le  $K$ -bimodule des chemins de longueur  $m$ , avec  $B^{(0)} = K$ ,  $B^{(1)} = B$  et  $B^{(m+1)} = B^{(m)} \otimes_K B$  pour tout  $m \geq 1$ . On pose  $k\mathcal{Q}_{(t)} = \bigoplus_{m \geq t} k\mathcal{Q}_m$  l'idéal des chemins de longueur au moins  $t$  dans  $k\mathcal{Q}$ ;  $k\mathcal{Q}_{(1)}$  est alors l'idéal des flèches de  $k\mathcal{Q}$  et on a bien  $k\mathcal{Q}/k\mathcal{Q}_{(1)} = \prod_{i \in I} k_i$ . Notons en passant que l'idéal des flèches  $k\mathcal{Q}_{(1)}$  n'est en général pas le radical de Jacobson de  $k\mathcal{Q}$ , sauf lorsque  $\mathcal{Q}$  ne comporte pas de cycle. De plus pour tout chemin  $\omega \in \mathcal{Q}(i, j)$ , le bimodule le long de  $\omega$  est le produit tensoriel des bimodules des flèches le long du chemin  $\omega$ , il est noté  ${}_i B_j^\omega$  (ou simplement  $B^\omega$ ). Et, le bimodule associé à un ensemble  $P$  de chemins est juste la somme directe  $B^P$  de tous les bimodules de chemin  $B^\omega$  avec  $\omega$  parcourant  $P$ . Comme d'habitude,  $\mathcal{Q}_m(i, j)$  désigne l'ensemble des chemins de longueur  $m$  de  $i$  vers  $j$ , tandis que  $\mathcal{Q}(i, j)$  désigne l'ensemble de tous les chemins de  $i$  vers  $j$ . Parfois nous disons simplement "chemin" pour désigner un chemin valué.

En plus de l'algèbre de chemins de  $\mathcal{Q}$ , on travaillera aussi avec l'algèbre (tensorielle) complète de chemins  $\widehat{k\mathcal{Q}} = \prod_{m \geq 0} B^{(m)}$  pour laquelle le radical de Jacobson coïncide bien avec l'idéal fermé des flèches et donnée par  $J_{\widehat{k\mathcal{Q}}} = \prod_{m \geq 1} B^{(m)}$ . On vérifie aisément que pour tous  $x \in \prod_{m \geq 1} B^{(m)}$  et  $u \in \widehat{k\mathcal{Q}}$ , l'élément  $1 - x \cdot u$  est inversible ; il suffit de voir que pour tout élément cyclique  $u \in e_i \cdot (\prod_{m \geq 1} B^{(m)}) \cdot e_i$ , l'élément  $(1 - u)^{-1} := \sum_{m=0}^{\infty} u^m$  est correctement défini dans  $\widehat{k\mathcal{Q}}$ . Pour chaque paire de points  $i, j \in I$ , le  $k_i$ - $k_j$ -bimodule  $e_i \widehat{k\mathcal{Q}} e_j$  sera regardé comme étant le bimodule de tous les éléments homogènes  $\xi$  de source  $s(\xi) = i$  et de terminaison  $t(\xi) = j$ , et pour chaque  $l \geq 0$ , la  $l^{\text{ième}}$  puissance tensorielle  $B^{(l)}$  est aussi regardée comme étant le  $K$ -bimodule des éléments de degré homogène  $l$ . On aura besoin de la notion suivante : soit  $\mathcal{Q}_{\text{cyc}}$  l'ensemble de tous les chemins cycliques dans  $\mathcal{Q}$ , alors la partie cyclique de  $k\mathcal{Q}$  (ou de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$ ) est le sous- $K$ -bimodule  $k\mathcal{Q}_{\text{cyc}} = \bigoplus_{m > 1} k\mathcal{Q}_{m, \text{cyc}}$  (ou respectivement  $\widehat{k\mathcal{Q}}_{\text{cyc}} = \prod_{m > 1} \widehat{k\mathcal{Q}}_{m, \text{cyc}}$ ) de tous les chemins cycliques (sans les boucles) dans  $\mathcal{Q}$ . De même, la partie acyclique de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  est donnée par le  $K$ -bimodule  $\widehat{k\mathcal{Q}}_{\text{acyc}} = \sum_{i \neq j \in I} e_i \widehat{k\mathcal{Q}} e_j$ .

Si  $\mathcal{Q}'$  est un autre carquois modulé sur  $I$  tel que  $k\mathcal{Q}'_0 = K = k\mathcal{Q}_0$ , alors on supposera implicitement que la famille de formes traces non-dégénérées accompagnant la modulation de  $\mathcal{Q}'$  est la même que celle donnée par la modulation de  $\mathcal{Q}$ ; autrement dit la condition suivante est vérifiée :

$$\text{Si } k\mathcal{Q}'_0 = K = k\mathcal{Q}_0, \text{ alors la famille } (k_i, t_i)_{i \in I} \text{ est la même pour } \mathcal{Q} \text{ et pour } \mathcal{Q}'. \quad (3.2.2)$$

Cette condition assure que les composantes de tout morphisme de bimodules entre  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  et  $\widehat{k\mathcal{Q}'}$  sont toutes

dualisantes comme exposé dans la section précédente (voir aussi le lemme 3.1.4-(2)).

On rappelle que pour une  $k$ -algèbre  $A$  ayant pour radical de Jacobson  $J_A$ , la topologie  $J_A$ -adique de  $A$  pour pour système de voisinages ouverts de 0, la famille  $\{J_A^l\}_{l \geq 0}$ . La fermeture (ou l'adhérence) de chaque sous-ensemble  $S$  est donnée par,

$$\bar{S} = \bigcap_{l \geq 0} (S + J_A^l) \text{ avec la convention que } J_A^0 = A. \quad (3.2.3)$$

Les algèbres sur lesquelles on travaillera dans cette section sont toujours supposées satisfaire aux deux conditions suivantes :

(ax1)  $A$  est sobre, si bien que  $A/J_A = \prod_i F_i$  est un produit fini de  $k$ -surcorps. De plus le  $K$ -bimodule  $J_A/J_A^2$  est de dimension finie sur  $k$ .

(ax2)  $A$  coïncide avec la limite projective  $\varprojlim_{l \geq 0} A/J_A^l$  : autrement dit, la topologie  $J_A$ -adique de  $A$  est complète et séparée.

Les algèbres de chemins ainsi que les algèbres complètes de chemins associées aux carquois modulés sur un ensemble fini de points  $I$  satisfont aux conditions précédentes. Pour voir comment les éléments d'une telle algèbre  $A$  se présentent, munissons l'ensemble  $\mathbb{N}^m$  de l'ordre suivant : pour  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ ,  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m) \in \mathbb{N}^m$  on pose  $\lambda \leq \lambda'$  si et seulement si  $\lambda_i \leq \lambda'_i$  pour  $1 \leq i \leq m$ . On retient alors la description suivante.

*Remarque 3.2.1.* Soit  $A$  une  $k$ -algèbre arbitraire (non nécessairement de dimension finie) et satisfaisant aux axiomes (ax1) et (ax2),  $A$  étant munie de sa topologie  $J_A$ -adique. On suppose que  $A$  est aussi un  $K$ -bimodule. Soit  $m \geq 1$  un entier arbitraire, alors pour toute série formelle (non commutative)  $F = \sum_{\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{N}^m} a_\lambda t_1^{\lambda_1} \cdots t_m^{\lambda_m}$  sur  $K$  et pour tout  $u = (u_1, \dots, u_m)$  avec  $u_1, \dots, u_m \in J_A$ , la somme infinie  $F(u) = \sum_{\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{N}^m} a_\lambda u_1^{\lambda_1} \cdots u_m^{\lambda_m}$  représente un unique élément correctement défini dans  $A$  donné comme la limite  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F_\lambda(u)$  de la suite des sommes partielles  $F_\lambda(u) := \sum_{\theta \leq \lambda} h_\theta(u)$  où  $h_\theta(u) = a_\theta u_1^{\theta_1} \cdots u_m^{\theta_m}$  pour chaque  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{N}^m$ .  $\square$

Il suffit d'observer avec les notations ci-dessus que la suite des sommes partielles  $(F_\lambda(u))_{\lambda \in \mathbb{N}^m}$  doit effectivement converger dans  $A$ . En effet, pour  $\lambda \in \mathbb{N}^m$  fixé et pour chaque  $1 \leq i \leq m$ , en posant  $\lambda - \epsilon_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_m)$ , on voit que  $F_\lambda(u) - F_{\lambda - \epsilon_i}(u) = h_\lambda(u) \in J_A^{\ell(\lambda)}$ , où  $\ell(\lambda) = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$ . Or comme en vertu de (ax2) la topologie  $J_A$ -adique de  $A$  est séparée, la limite de la suite  $(F_\lambda(u))_{\lambda \in \mathbb{N}^m}$  est unique.

Rappelons la propriété universelle suivante de l'algèbre tensorielle de chemins  $k\mathcal{Q} = T_K(B)$  : pour toute  $k$ -algèbre  $A$  qui est aussi un  $K$ -bimodule tel que  $a \cdot 1_A = 1_A a$  pour chaque  $a \in K$ , tout morphisme de  $K$ -bimodules  $f_{(1)} : B \longrightarrow A$  admet un prolongement unique  $f : k\mathcal{Q} \longrightarrow A$  sur  $k\mathcal{Q}$ , comme illustré par le triangle commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\quad} & k\mathcal{Q} = T_K(B) \\
 & \searrow f^{(1)} & \downarrow f \\
 & & A
 \end{array}$$

On aura besoin de la description suivante des morphismes de  $k$ -algèbres topologiques.

**Proposition 3.2.1.** *Soient  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}'$  deux carquois modulés tels que  $k\mathcal{Q}_0 = K = k\mathcal{Q}'_0$ ,  $B = k\mathcal{Q}_1$  et  $B' = k\mathcal{Q}'_1$ . Alors les deux énoncés suivants sont vrais.*

- (a) *Toute famille  $(\phi_l)_{l \geq 1}$  de morphismes de  $K$ -bimodules  $\phi_l : B \longrightarrow B'^{(l)}$  induit un unique morphisme continu de  $k$ -algèbres topologiques  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}'}$  tel que  $\phi|_K = 1_K$  et  $\phi|_B = (\phi_l)_{l \geq 1}$ . De plus,  $\phi$  est un isomorphisme si et seulement si  $\phi_1 : B \longrightarrow B'$  est un isomorphisme de  $K$ -bimodules.*
- (b) *Soit  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}'}$  un morphisme d'algèbres tel que  $\phi|_K = 1_K$ . Alors  $\phi$  est automatiquement continu. Si de plus  $\phi$  est un épimorphisme, alors pour tout  $I \subset \widehat{k\mathcal{Q}}$  tel que  $\ker \phi \subset \bar{I}$  on a  $\phi(\bar{I}) = \overline{\phi(I)}$ . Par conséquent tout isomorphisme d'algèbres  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}'}$  tel que  $\phi|_K = 1_K$  est un homéomorphisme de  $k$ -algèbres topologiques.*

*Démonstration.*

**Énoncé (a).** Pour le premier volet de (a), remarquons qu'on a un morphisme de bimodules  $\phi^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \phi_l : B \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}'}$  avec  $\phi^{(1)}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \phi_l(x) = (\phi_l(x))_{l \geq 1} \in \prod_{l \geq 1} B'^{(l)}$ . En vertu de la propriété universelle de  $k\mathcal{Q}$ ,  $\phi^{(1)}$  se prolonge en un unique morphisme  $\phi : k\mathcal{Q} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}'}$ . Mais il est clair que  $\phi(B^{(l)}) \subset J_{\widehat{k(B')}}^l$  pour tout  $l \geq 0$ , si bien que pour tout  $x = (x_l)_{l \geq 0} \in \widehat{k\mathcal{Q}}$  avec  $x_l \in B^{(l)}$ , la remarque 3.2.1 montre qu'en posant  $\phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \phi(x_l) = \lim_{l \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^l \phi(x_k))$ , on obtient un élément correctement défini dans  $\widehat{k\mathcal{Q}'}$ ; on a ainsi construit un morphisme  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}'}$  tel que  $\phi|_K = 1_K$  et  $\phi|_B = (\phi_l)_{l \geq 1}$ , et aussi la continuité de  $\phi$  découle du point (b). Et comme tout morphisme continu préserve les limites on voit que le prolongement continu  $\phi$  doit être unique.

Pour le second volet de (a), si  $\phi$  est un isomorphisme d'algèbres, alors clairement  $\phi_1 : B \longrightarrow B'$  est un isomorphisme de  $K$ -bimodules. Inversement, supposons que  $\phi_1$  est un isomorphisme de  $K$ -bimodules, de sorte qu'on peut sans perte de généralité poser  $B' = B$  et  $\phi_1 = 1_B$ . Comme dans la définition 3.2.3 plus loin, on considère un système gauche de flèches  ${}_L\mathcal{Q}_1 = \bigcup_{i,j \in I} {}_L\mathcal{Q}_1(i,j)$  pour le  $K$ -bimodule  $B$  (ou encore pour  $\mathcal{Q}$ ) : pour chaque paire  $i, j \in I$ ,  ${}_L\mathcal{Q}_1(i,j)$  est une  $k_i$ -base gauche du  $k_i$ - $k_j$ -bimodule  ${}_iB_j$ . On considère aussi le système de chemins  $\widehat{{}_L\mathcal{Q}_1} = \bigcup_{i,j \in I, \omega \in \mathcal{Q}(i,j)} {}_L\mathcal{Q}_\omega$  pour  $k\mathcal{Q}$  "et pour  $\widehat{k\mathcal{Q}}$ ", donné comme union de toutes les bases gauches des bimodules de chemins pleinement valués dans  $\mathcal{Q}$ , pour chaque chemin pleinement valué  $\omega = \gamma_1 \cdots \gamma_m$  dans  $\mathcal{Q}$  on a  ${}_L\mathcal{Q}_\omega = {}_L\mathcal{Q}_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes {}_L\mathcal{Q}_{\gamma_m}$  où pour chaque flèche pleinement valuée  $s(\gamma) \xrightarrow{\gamma} t(\gamma)$  on a posé  ${}_L\mathcal{Q}_\gamma := {}_L\mathcal{Q}_1(s(\gamma), t(\gamma))$ . Ensuite, pour chaque  $i \in I$  on choisit une  $k$ -base  $\Lambda_i$  du  $k$ -surcorps de dimension finie  $k_i$ . Alors le système  $S = \bigcup_{i \in I} \Lambda_i \widehat{{}_L\mathcal{Q}_1}$  est une " $k$ -base de chemins" pour  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  : tout élément  $x \in \widehat{k\mathcal{Q}}$  s'écrit de façon unique comme une combinaison  $k$ -linéaire infinie  $x = \sum_{\chi \in S} c_\chi \chi$ . Maintenant on peut

appliquer le même argument que celui utilisé dans [24, prop 2.4] pour voir que le morphisme  $\phi$  est bijectif : En effet, (les éléments de  $S$  étant ordonnés suivant l'ordre croissant de leur degré), la matrice infinie de  $\phi$  relativement à  $S$  est triangulaire inférieure n'ayant que des "1" sur sa diagonale, si bien qu'elle est inversible, et par conséquent  $\phi$  est bijectif.

**Énoncé (b).** Posons  $J = J_{\widehat{k\mathcal{Q}}} = \prod_{l \geq 1} B^{(l)}$  et  $J' = J_{\widehat{k\mathcal{Q}'}} = \prod_{l \geq 1} B'^{(l)}$ , notons que  $J \cap K = 0 = J' \cap K$ . En vertu de la définition de la topologie  $J$ -adique, une base de voisinages de 0 est donnée par les puissances  $J^l$  de  $J$ , avec  $l \geq 0$ , et tout sous-ensemble de la forme  $X + J^l$  est un ouvert dans  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  pour tout  $X \subset \widehat{k\mathcal{Q}}$  et pour tout  $l \geq 0$ . Il s'en suit que si  $U \subset \widehat{k\mathcal{Q}}$  est tel  $J^m \subset U$  pour un certain  $m \geq 0$ , alors  $U$  est un ouvert, car dans un tel cas on aura  $U = (U \cap (\bigoplus_{0 \leq l < m} B^{(l)})) + J^m$ , avec  $B^{(0)} = K$ .

Soit  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}'}$  un morphisme d'algèbres tel que  $\phi|_K = 1_K$ . Pour montrer que  $\phi$  est continu, nous commençons par prouver que  $\phi(B) \subset J'$ . On sait que  $K = \prod_{i \in \mathcal{Q}_0} k_i$ ,  $e_i \in k_i \subset K$  désigne l'unité de  $k_i$ . Soit donc  $x \in e_i B e_j$  pour deux points  $i, j \in \mathcal{Q}_0$  et posons  $\phi(x) = a + u$  avec  $a \in K$  et  $u \in J'$ , on montrera que  $a = 0$ . Comme  $x = e_i x e_j$  on a  $\phi(x) = e_i \phi(x) e_j = e_i a e_j + e_i u e_j$ , si bien que  $a = e_i a e_j$  et  $u = e_i u e_j$ . Ainsi, si  $i \neq j$  alors on a directement que  $a = e_i a e_j = 0$ . Supposons maintenant que  $i = j$  et en procédant par l'absurde supposons en plus que  $a \neq 0$ . Alors  $a$  est un élément inversible de  $k_i$  et pour l'élément  $y = a^{-1}x$  on voit que  $\phi(y) = e_i + v$  avec  $v = a^{-1}u \in J'$ , si bien que  $\phi(e_i - y) = -v \in J'$ . Or, pour l'élément  $z = e_i + y + y^2 + \dots + y^l + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} y^l$  où on a posé  $y^0 = e_i$ , on voit que  $(e_i - y)z = \sum_{l=0}^{\infty} e_i y^l - \sum_{l=0}^{\infty} y \cdot y^l = e_i + \sum_{l=1}^{\infty} y^l - \sum_{l=1}^{\infty} y^l = e_i$ . Comme  $v \in J'$  il s'ensuit que,  $e_i = \phi(e_i) = \phi(e_i - y)\phi(z) = -v\phi(z) \in J'$ , menant ainsi à une contradiction puisque  $J' \cap K = 0$ . On conclut que dans l'expression " $\phi(x) = a + u$ ", on a nécessairement  $a = 0$ , si bien que  $\phi(x) = u \in J'$ . L'argumentation précédente montre alors que  $\phi(B) \subset J'$ . Il suit maintenant de ce qui précède que  $\phi(J) \subset J'$ , si bien que  $J \subset \phi^{-1}(J')$  et ainsi,  $\phi^{-1}(J') = (K \cap \phi^{-1}(J')) + J = J$  puisque  $\phi(K) = K$  et  $K \cap J' = 0$ . Et pour chaque  $l \geq 1$  fixé, on a  $\phi(J^l) \subset J'^l$  si bien que  $J^l \subset \phi^{-1}(J'^l) \subset J$  et donc  $\phi^{-1}(J'^l)$  est un ouvert et ainsi  $\phi$  est continu.

Ensuite, supposons que  $\phi$  est surjectif, alors en vertu du paragraphe précédent on déduit que  $\phi(J) = J'$  et ainsi  $\phi(J^l) = J'^l$  pour tout  $l \geq 1$ , en particulier  $\phi^{-1}(J'^l) = \phi^{-1}(\phi(J^l)) = J^l + \ker(\phi)$ . Soit donc  $I \subset \widehat{k\mathcal{Q}}$  tel que  $\ker \phi \subset \bar{I}$ . Comme  $\phi$  est continu, on sait que  $\phi(\bar{I}) \subset \overline{\phi(I)}$  (ce fait étant toujours vrai pour toute application continue entre espaces topologiques). Pour l'inclusion inverse, on utilise le fait que  $\phi^{-1}(V \cap V') = \phi^{-1}(V) \cap \phi^{-1}(V')$  et  $\phi^{-1}(\phi(U)) = U + \ker(\phi)$  pour tous  $V, V' \subset \widehat{k\mathcal{Q}'}$  et tout  $U \subset \widehat{k\mathcal{Q}}$ . On a donc :  $\phi^{-1}(\overline{\phi(I)}) = \phi^{-1}(\bigcap_{l=1}^{\infty} (\phi(I) + J'^l)) = \bigcap_{l=1}^{\infty} \phi^{-1}(\phi(I) + J'^l) = \bigcap_{l=1}^{\infty} (I + \ker(\phi) + J^l) \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} (\bar{I} + J^l) = \bar{I}$ . Par conséquent,  $\phi^{-1}(\overline{\phi(I)}) \subset \bar{I}$  si bien que,  $\overline{(\phi(I))} \subset \phi(\bar{I})$ . Ceci complète le preuve de la proposition.  $\square$

Les morphismes spéciaux suivants jouent un rôle important dans l'étude des carquois modulés avec potentiels.

**Définition 3.2.2** ([24, 2.5]). Soit  $\phi$  un automorphisme de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  correspondant à une famille  $(\phi_l)_{l \geq 1}$  de morphismes de  $K$ -bimodules  $\phi_l : B \longrightarrow B^{(l)}$ . Alors  $\phi$  est appelé un *changement de flèches* si  $\phi_{(2)} := (\phi_l)_{l \geq 2} =$

0. Si plutôt  $\phi_1 = \mathbb{1}_B$  alors on dit que  $\phi$  est automorphisme *unitriangulaire*.  $\phi$  sera dit de *profondeur*  $d \geq 1$  si  $\phi_k = 0$  pour tout  $k \leq d$ , et dans ce dernier cas on a  $\phi(u) - u \in J_{kQ}^{l+d}$  pour tout  $u \in J_{kQ}^l$ .

### 3.2.2 Système gauche de flèches et système droite de flèches pour un carquois modulé

Les algèbres de chemins simplement lacées possèdent de façon canonique une  $k$ -base de chemins, cette sous-section donne une version semblable pour les algèbres de chemins non-simplement lacées. On aura besoin de tels systèmes de flèches pour accéder à certaines propriétés des potentiels et des algèbres jacobiniennes.

Dans la définition ci-dessous,  $A$  est une  $k$ -algèbre sobre ayant comme radical de Jacobson  $J_A$  et l'ensemble  $\{e_i : i \in I\}$  comme système d'idempotents primitifs orthogonaux, ( $A$  étant toujours supposée satisfaire aux axiomes (ax1) et (ax2)).

**Définition 3.2.3.** ▸ Un sous-ensemble non-vide  $S$  d'un  $A$ -module (à gauche ou à droite)  $M$  est appelé un *système générateur élémentaire* pour  $M$  si  $M$  est la somme directe  $\bigoplus_{x \in S} \langle x \rangle$  de sous-modules cycliques : de manière équivalente,  $M = \langle S \rangle$  et, pour tous éléments deux à deux distincts  $x_1, \dots, x_m \in S$  et pour tous  $a_1, \dots, a_m \in A$ , l'égalité  $\sum_{i=1}^m a_i x_i = 0$  entraîne que  $a_i x_i = 0$  pour chaque  $i$ . En particulier si  $M$  est aussi un  $A/J_A$ -module (c'est-à-dire,  $J_A M = 0$ ) avec  $A/J_A = \prod_i F_i$ , alors pour chaque idempotent primitif  $e_i$  l'ensemble  $e_i S = \{e_i x : x \in S \text{ et } e_i x \neq 0\}$  est une  $F_i$ -base pour le facteur direct  $M_i = e_i M$ .

▸ Un *système gauche de flèches* pour le carquois modulé  $Q$  est tout système générateur élémentaire  ${}_L Q_1 = \bigcup_{i,j \in I} {}_L Q_1(i,j) \subset B$  pour le  $K$ -module à gauche  $B = kQ_1$ , où si on note  $i \xrightarrow{\alpha} j$  la flèche valuée représentant  $Q_1(i,j)$ , alors  ${}_L Q_\alpha := {}_L Q_1(i,j) = e_i {}_L Q_1 e_j$  est une  $k_i$ -base gauche pour le bimodule  ${}_i B_j$ ; de même  ${}_L Q_1(i,-) = \bigcup_{t \in I} {}_L Q_1(i,t)$  désigne la  $k_i$ -base gauche correspondante pour  $e_i B$ . On se référera à ces ensembles comme étant les *bases gauches de flèches* dans  $Q$  pour les bimodules correspondants. De même, les *bases droites de flèches*  ${}_R Q_\alpha := {}_R Q_1(i,j)$  et  ${}_R Q_1(-,j) = \bigcup_{s \in I} {}_R Q_1(s,j)$  correspondant respectivement au bimodule  ${}_i B_j$  et au  $K$ - $k_j$ -bimodule  $B e_j$ , ainsi que le *système droite de flèches*  ${}_R Q_1$  pour  $Q$  se définissent de façon duale.

▸ Pour tout chemin valué  $\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_m$  et pour  $s \in \{L, R\}$ , on note  ${}_s Q_\omega = {}_s Q_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes {}_s Q_{\alpha_m}$  le produit des bases de flèches le long de  $\omega$ ; et pour  $m \geq 1$  on pose  ${}_s Q_m = \bigcup_{\omega \in Q_m} {}_s Q_\omega$  où  $Q_m$  est le sous-ensemble des chemins valués de longueur  $m$ , on pose aussi  ${}_s Q_0 = \{e_i : i \in I\}$ . Alors les ensembles  $\widehat{{}_L Q_1} = \bigcup_{m=0}^{\infty} {}_L Q_m$  et  $\widehat{{}_R Q_1} = \bigcup_{m=0}^{\infty} {}_R Q_m$  sont des systèmes générateurs élémentaires gauche et droite pour le  $K$ -bimodule  $kQ$ ; on se référera à  $\widehat{{}_L Q_1}$  comme étant un *système gauche de chemins* et à  $\widehat{{}_R Q_1}$  comme étant un *système droite de chemins* pour  $kQ$ .

Par un léger abus de langage, nous dirons aussi que  $\widehat{{}_L Q_1}$  est un système gauche de chemins pour  $\widehat{kQ}$  et que  $\widehat{{}_R Q_1}$  est un système droite de chemins pour  $\widehat{kQ}$ ; dans ce cas chaque élément  $x = (x_l)_{l \geq 0}$  s'écrit de

façon unique comme une combinaison linéaire infinie  $x = \sum_{\chi \in \widehat{LQ_1}} a_\chi \chi = \sum_{\chi' \in \widehat{RQ_1}} \chi' b_{\chi'}$  avec  $a_\chi, b_{\chi'} \in \bigcup_{i \in I} k_i$  pour chaque  $\chi \in {}_L Q_1$  et chaque  $\chi' \in {}_R Q_1$ . Si on fixe un système gauche de flèches  ${}_L Q_1$  et un système droite de flèches  ${}_R Q_1$  dans  $Q$ , ainsi que le système gauche de chemins  $\widehat{{}_L Q_1}$  et le système droite de chemins  $\widehat{{}_R Q_1}$  pour  $\widehat{kQ}$ , alors on a aussi les systèmes de flèches duals correspondants pour le bimodule dual  $B^*$ , notamment le système droite de flèches  ${}_L Q_1^* = \{x^* : x \in {}_L Q_1\}$  et le système gauche de flèches  ${}_R Q_1^* = \{y^* : y \in {}_R Q_1\}$ . De même on a les systèmes de chemins duals  $\widehat{{}_L Q_1^*} := \bigcup_{m=0}^{\infty} {}_L Q_m^*$  et  $\widehat{{}_R Q_1^*} := \bigcup_{m=0}^{\infty} {}_R Q_m^*$  pour  $kQ$  et  $\widehat{kQ}$ , où pour tout chemin valué  $\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_m$  et pour  $s \in \{L, R\}$  le système dual correspondant au système de chemin  ${}_s Q_\omega = {}_s Q_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes {}_s Q_{\alpha_m}$  est donné par

$${}_s Q_\omega^* = {}_s Q_{\alpha_m}^* \otimes \cdots \otimes {}_s Q_{\alpha_1}^*.$$

Nous signalons que toutes les définitions que nous aurons à poser autour des potentiels auront l'avantage de ne pas utiliser explicitement un système de flèches ou de chemins quelconque pour  $Q$ . Mais plus tard on utilisera alors les systèmes de flèches et de chemins pour  $Q$  dans l'établissement de certaines propriétés.

### 3.2.3 Généralisation non-simplement lacée des potentiels

Avant de proposer une version généralisée des potentiels, il nous apparaît intéressant de signaler les observations préliminaires qui suivent. Dans la cas simplement lacé, la définition des algèbres jacobiniennes est basée sur la possibilité de pouvoir appliquer la permutation cyclique sur les potentiels et ensuite prendre leur dérivées. dans le cas d'un carquois ordinaire  $\Sigma$ , un potentiel pour l'algèbre de chemins simplement lacée  $k\Sigma$  est juste un élément de la partie cyclique  $k\Sigma_{cyc}$ . Nous signalons toutefois que la permutation cyclique ordinaire des éléments cycliques dans les algèbres de chemins simplement lacées échoue si on la porte telle quelle dans le contexte des carquois modulés, cela est dû au fait que la structure des bimodules des flèches valuées n'est généralement plus symétrique, même si les  $k$ -surcorps dans  $Q$  étaient commutatifs. Et ainsi durant une "permutation-cyclique ordinaire", il ne fera aucun sens de "transporter vers la gauche ou vers la droite" les scalaires dans une expression de la forme  $ax_1 \cdot a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m-1} \cdot x_m b$  avec  $x_i \in B$  et  $a, a_i, b \in K$  pour  $1 \leq i \leq m$ . Posant  $k^I = \prod_{i \in I} k$  l'algèbre commutative semisimple donnée par le produit indexé par  $I$  des copies du corps  $k$ , on pourrait penser naïvement qu'une façon de parer à la limitation précédente est d'attacher à  $\widehat{kQ}$  l'algèbre complète de chemins  $H = \widehat{T_{k^I}(B)}$  simplement lacée, où  $B$  est simplement vu comme un  $k$ -espace vectoriel, et ensuite considérer les potentiels dans  $H$  et la permutation cyclique ordinaire dans  $H$ , et enfin prendre les projections dans  $\widehat{kQ}$  des potentiels de  $H$  (pour la construction des algèbres jacobiniennes). Mais, cette approche échouera lorsque viendra le moment d'appliquer les mutations. Pour donc généraliser la permutation cyclique et les potentiels, nous aurons besoin des résultats techniques de la section 3.1 sur les paires dualisantes et symétrisables de bimodules.

Soit  $\{M, M^*; b_E, b_F\}$  une paire dualisante et symétrisables de bimodules,  $M \in {}_E \text{bimod}_F$  pour deux  $k$ -surcorps  $E$  et  $F$ . Lorsque nous omettrons de spécifier explicitement les formes bilinéaires  $M \otimes_F M^* \xrightarrow{b_E} E$  et  $M^* \otimes_E M \xrightarrow{b_F} F$  (et alors notés indifféremment en utilisant le symbole " $\langle \cdot, \cdot \rangle$ "), on adoptera aussi la notation

suivante :

$$\mathfrak{z}_{M \otimes M^*} := \mathfrak{b}_E^* \text{ et } \mathfrak{z}_{M^* \otimes M} := \mathfrak{b}_F^*, \quad (3.2.4)$$

et pour raison de simplicité, les deux morphismes canoniques  $\mathfrak{z}_{M \otimes M^*}$  et  $\mathfrak{z}_{M^* \otimes M}$  seront indifféremment notés  $\mathfrak{z}$  sans indiquer en indice le bimodule auto-dual associé, dès lors que la paire dualisante est clairement indiquée par le contexte.

En vertu du lemme 3.1.6, le morphisme dual  $\mathfrak{z}_{M \otimes M^*} := \mathfrak{b}_E^*$  envoie l'unité de  $E$  sur l'élément central  $\sum_{y \in Y} y \otimes y^*$  du bimodule auto-dual  $M \otimes M^*$  donné en choisissant une paire quelconque  $\{Y, Y^*\}$  de deux bases mutuellement duales où  $Y$  est une  $F$ -base droite pour  $M$ . De même, le morphisme dual  $\mathfrak{z}_{M^* \otimes M} := \mathfrak{b}_F^*$  envoie l'unité de  $F$  sur l'élément central  $\sum_{x \in X} x^* \otimes x$  du bimodule auto-dual  $M^* \otimes M$  où  $X$  est une  $E$ -base gauche de  $M$ .

En vertu du lemme 3.1.5, le produit d'un nombre fini quelconque de paires dualisantes et symétrisables de bimodules est naturellement défini. En particulier, soient  $k_1, k_2$  et  $k_3$  des  $k$ -surcorps,  $\{ {}_1B_2, {}_1B_2^*; {}_1\mathfrak{b}_2, {}_1\mathfrak{b}'_2 \}$  et  $\{ {}_2B_3, {}_2B_3^*; {}_2\mathfrak{b}_3, {}_2\mathfrak{b}'_3 \}$  deux paires dualisantes et symétrisables de bimodules, avec  ${}_iB_j \in {}_k\text{bimod}_k$  et avec  ${}_iB_j \otimes_k {}_iB_j^* \xrightarrow{{}_i\mathfrak{b}_j} k_i$  pour  $(i, j) = (1, 2), (2, 3)$ . Alors le produit donné par  $\{M, M^*\} := \{ {}_1B_2, {}_1B_2^*; {}_1\mathfrak{b}_2, {}_1\mathfrak{b}'_2 \} \otimes \{ {}_2B_3, {}_2B_3^*; {}_2\mathfrak{b}_3, {}_2\mathfrak{b}'_3 \} := \{ {}_1B_2 \otimes {}_2B_3, {}_2B_3^* \otimes {}_1B_2^* \}$ , avec  $M = {}_1B_2 \otimes {}_2B_3$  et  $M^* = {}_2B_3^* \otimes {}_1B_2^*$ , est une paire dualisante et symétrisable de bimodules dans laquelle les formes bilinéaires associées sont canoniquement induites : pour tous  $x \in {}_1B_2, y \in {}_2B_3, u \in {}_1B_2^*$  et  $v \in {}_2B_3^*$  on a :  $\langle (x \otimes y) \otimes (v \otimes u) \rangle = {}_1\mathfrak{b}_2(x \otimes {}_2\mathfrak{b}_3(y \otimes v) \cdot u)$  et  $\langle (v \otimes u) \otimes (x \otimes y) \rangle = {}_2\mathfrak{b}'_3(v \otimes {}_1\mathfrak{b}'_2(u \otimes x) \cdot y)$ . Les morphismes canoniques duaux correspondants,  $k_1 \xrightarrow{\mathfrak{z}_{M \otimes M^*}} M \otimes M^*$  et  $k_3 \xrightarrow{\mathfrak{z}_{M^* \otimes M}} M^* \otimes M$ , sont donnés comme suit :  $\mathfrak{z}_{M \otimes M^*}(1) = \sum_{y \in Y_{1,2}, z \in Y_{2,3}} (y \otimes z) \otimes (z^* \otimes y^*)$  et  $\mathfrak{z}_{M^* \otimes M}(1) = \sum_{x \in X_{1,2}, x' \in X_{2,3}} (x'^* \otimes x^*) \otimes (x \otimes x')$ , pour toutes paires  $\{Y_{i,j}, Y_{i,j}^*\}, \{X_{i,j}, X_{i,j}^*\}$  de bases mutuellement duales, où  $Y_{i,j}$  est une base droite pour  ${}_iB_j$  et  $X_{i,j}$  est une base gauche pour  ${}_iB_j$ , avec  $(i, j) = (1, 2), (2, 3)$ . Ainsi on a toujours la relation qui suivante :

$$\mathfrak{z}_{({}_1B_2 \otimes {}_2B_3) \otimes ({}_2B_3^* \otimes {}_1B_2^*)} = \mathfrak{z}_{{}_1B_2 \otimes {}_1B_2^*} \circ (\mathbb{1} \otimes \mathfrak{z}_{{}_2B_3 \otimes {}_2B_3^*} \otimes \mathbb{1}). \quad (3.2.5)$$

Les observations précédentes s'étendent aisément à tout produit fini quelconque de paires dualisantes de bimodules. En particulier dans  $k\mathcal{Q}$ , pour chaque chemin  $\omega \in \mathcal{Q}(i, j)$  on a une paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{ {}_iB_j^\omega, ({}_iB_j^\omega)^*; {}_i\mathfrak{b}_j^\omega, {}_j\mathfrak{b}_i^{\omega*} \}$  donnée comme produit des paires dualisantes de bimodules des flèches valués le long de  $\omega$ , avec  ${}_iB_j^\omega \otimes ({}_iB_j^\omega)^* \xrightarrow{{}_i\mathfrak{b}_j^\omega} k_i$  et  $({}_iB_j^\omega)^* \otimes {}_iB_j^\omega \xrightarrow{{}_j\mathfrak{b}_i^{\omega*}} k_j$ . Notons que, si  $\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_l \in \mathcal{Q}(i, j)$  et  $\omega^* = \alpha_l^* \cdots \alpha_1^* \in \mathcal{Q}^*(j, i)$  est le chemin dual correspondant à  $\omega$  dans  $\mathcal{Q}^*$ , alors  $({}_iB_j^\omega)^* = {}_jB_i^{\omega*}$  est donné par le produit des bimodules duaux  $B^{\alpha^*} = (B^\alpha)^*$  le long de  $\omega^*$ .

À présent, un autre fait technique donne une propriété intéressante des morphismes canoniques  $\mathfrak{z}$ .

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $\{M, M^*\}$  une paire dualisante et symétrisable de bimodules où  $M$  est dans  ${}_{\mathbb{E}}\text{bimod}_F$  pour deux  $k$ -surcorps  $E, F$ . Alors les énoncés suivants sont valides.*

- (1) *Pour deux paires quelconques de bases mutuellement duales  $\{X, X^*\}$  et  $\{Y, Y^*\}$  où  $X = \{x_1, \dots, x_p\}$  est une  $E$ -base gauche de  $M$  et  $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$  est une  $F$ -base droite de  $M$ ,*

on a les identités valides ci-après :

$$\sum_{s=1}^q y_s \cdot \langle y_s^* \otimes - \rangle = \mathbb{1}_M = \sum_{k=1}^p \langle - \otimes x_k^* \rangle \cdot x_k \text{ et } \sum_{k=1}^p x_k^* \cdot \langle x_k \otimes - \rangle = \mathbb{1}_{M^*} = \sum_{s=1}^q \langle - \otimes y_s \rangle \cdot y_s^*$$

(2) Soient  $E \xrightarrow{\mathfrak{z}=\delta_{M \otimes M^*}} M \otimes M^*$  et  $F \xrightarrow{\mathfrak{z}'=\delta_{M^* \otimes M}} M^* \otimes M$  les morphismes canoniques duals associés à la paire dualisante  $\{M, M^*\}$ . On considère les morphismes de bimodules suivants appelés respectivement permutations gauches ou droites de  $\mathfrak{z}'$  et de  $\mathfrak{z}$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_r \mathfrak{z}' &= (\mathbb{1}_{M \otimes M^*} \otimes \langle - \rangle) \circ (\mathbb{1}_M \otimes \mathfrak{z}' \otimes \mathbb{1}_{M^*}) \circ \mathfrak{z}, \quad \varepsilon_l \mathfrak{z}' = \langle - \rangle \otimes \mathbb{1}_{M \otimes M^*} \circ (\mathbb{1}_M \otimes \mathfrak{z}' \otimes \mathbb{1}_{M^*}) \circ \mathfrak{z}, \\ \varepsilon_l \mathfrak{z} &= \langle - \rangle \otimes \mathbb{1}_{M^* \otimes M} \circ (\mathbb{1}_{M^*} \otimes \mathfrak{z} \otimes \mathbb{1}_M) \circ \mathfrak{z}' \text{ et } \varepsilon_r \mathfrak{z} = (\mathbb{1}_{M^* \otimes M} \otimes \langle - \rangle) \circ (\mathbb{1}_{M^*} \otimes \mathfrak{z} \otimes \mathbb{1}_M) \circ \mathfrak{z}'. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Alors  $\mathfrak{z}$  et  $\mathfrak{z}'$  sont cycliquement équivalents : on a les identités ci-après :  $\varepsilon_l \mathfrak{z}' = \mathfrak{z} = \varepsilon_r \mathfrak{z}'$  et  $\varepsilon_l \mathfrak{z} = \mathfrak{z}' = \varepsilon_r \mathfrak{z}$ , comme le montrent les deux diagrammes commutatifs suivants.

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes M^* & \xrightarrow{\mathbb{1} \otimes \mathfrak{z}' \otimes \mathbb{1}} & M \otimes M^* \otimes M \otimes M^* & \xrightarrow{\mathbb{1} \otimes \mathfrak{z} \otimes \mathbb{1}} & M^* \otimes M \otimes M^* \otimes M \\ \mathfrak{z} \uparrow & & \langle - \rangle \otimes \mathbb{1} \downarrow \downarrow \mathbb{1} \otimes \langle - \rangle & & \langle - \rangle \otimes \mathbb{1} \downarrow \downarrow \mathbb{1} \otimes \langle - \rangle \\ E & \xrightarrow{\mathfrak{z}} & M \otimes M^* & \xrightarrow{\mathfrak{z}'} & M^* \otimes M \end{array}$$

Par conséquent,  $\mathfrak{z}$  et  $\mathfrak{z}'$  sont cycliquement stables : les permutations complètes gauches et droites

$\varepsilon_l^2 \mathfrak{z} := \varepsilon_l(\varepsilon_l \mathfrak{z})$  et  $\varepsilon_r^2 \mathfrak{z} := \varepsilon_r(\varepsilon_r \mathfrak{z})$  de  $\mathfrak{z}$  coïncident avec  $\mathfrak{z}$ , et de même les permutations complètes  $\varepsilon_l^2 \mathfrak{z}' := \varepsilon_l(\varepsilon_l \mathfrak{z}')$  et  $\varepsilon_r^2 \mathfrak{z}' := \varepsilon_r(\varepsilon_r \mathfrak{z}')$  de  $\mathfrak{z}'$  coïncident avec  $\mathfrak{z}'$ .

*Démonstration.*

**Énoncé (1).** Cet énoncé suit aisément de la définition des bases mutuellement duales en 3.1. En effet, posons  $X = \{x_1 \dots x_p\}$  et  $Y = \{y_1 \dots y_q\}$  comme dans la proposition. Alors en vertu de la définition de bases duales, pour tous  $1 \leq i, j \leq p$  et  $1 \leq s, t \leq q$  on a :  $\langle x_i \otimes x_j^* \rangle = \delta_{i,j}$  et  $\langle y_s^* \otimes y_t \rangle = \delta_{s,t}$ , où  $\delta_{s,t}$  est le symbole de Kronecker. Il découle immédiatement que  $\sum_{s=1}^q y_s \cdot \langle y_s^* \otimes - \rangle = \mathbb{1}_M = \sum_{k=1}^p \langle - \otimes x_k^* \rangle \cdot x_k$  et  $\sum_{k=1}^p x_k^* \cdot \langle x_k \otimes - \rangle = \mathbb{1}_{M^*} = \sum_{s=1}^q \langle - \otimes y_s \rangle \cdot y_s^*$ .

**Énoncé (2).** La preuve de (2) découle clairement de (1) et du fait que pour chaque choix de bases mutuellement duales  $\{X, X^*\}$  et  $\{Y, Y^*\}$  comme ci-haut, les morphismes canoniques  $\mathfrak{z}$  et  $\mathfrak{z}'$  sont donnés par :

$$\mathfrak{z}(1) = \sum_{s=1}^q y_s \otimes y_s^* \in M \otimes M^*, \text{ et } \mathfrak{z}'(1) = \sum_{k=1}^p x_k^* \otimes x_k \in M^* \otimes M. \text{ On a donc,}$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_l \mathfrak{z}')(1) &:= \left( (\langle - \rangle \otimes \mathbb{1}_{M \otimes M^*}) \circ (\mathbb{1} \otimes \mathfrak{z}' \otimes \mathbb{1}) \circ \mathfrak{z} \right)(1) = \langle - \rangle \otimes \mathbb{1}_{M \otimes M^*} \left( \sum_{s=1}^q \sum_{k=1}^p y_s \otimes x_k^* \otimes x_k \otimes y_s^* \right) = \\ &= \sum_{s=1}^q \left( \sum_{k=1}^p \langle y_s \otimes x_k^* \rangle \cdot x_k \right) \otimes y_s^* = \sum_{s=1}^q y_s \otimes y_s^* = \mathfrak{z}(1), \text{ donc } \varepsilon_l \mathfrak{z}' = \mathfrak{z}. \text{ De même on a,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_r \mathfrak{z})(1) &:= \left( (\mathbb{1}_{M \otimes M^*} \otimes \langle - \rangle) \circ (\mathbb{1} \otimes \mathfrak{z} \otimes \mathbb{1}) \circ \mathfrak{z}' \right)(1) = (\mathbb{1}_{M \otimes M^*} \otimes \langle - \rangle) \left( \sum_{s=1}^q \sum_{k=1}^p y_s \otimes x_k^* \otimes x_k \otimes y_s^* \right) = \\ &= \sum_{s=1}^q y_s \left( \sum_{k=1}^p x_k^* \cdot \langle x_k \otimes y_s^* \rangle \right) = \sum_{s=1}^q y_s \otimes y_s^* = \mathfrak{z}(1), \text{ et donc } \varepsilon_r \mathfrak{z} = \mathfrak{z}. \end{aligned}$$

Ainsi on a montré que  $\varepsilon_L \mathfrak{z}' = \mathfrak{z} = \varepsilon_R \mathfrak{z}'$ . On vérifie de même que  $\varepsilon_L \mathfrak{z} = \mathfrak{z}' = \varepsilon_R \mathfrak{z}$ .

En vertu du lemme 3.1.8, les morphismes canoniques  $E \xrightarrow{\mathfrak{z}} M \otimes M^*$  et  $F \xrightarrow{\mathfrak{z}'} M^* \otimes M$  sont automatiquement cycliquement stables, ce fait suit aussi trivialement de qui précède.  $\square$

Nous pouvons maintenant donner une version non-simplement lacée des potentiels comme suit.

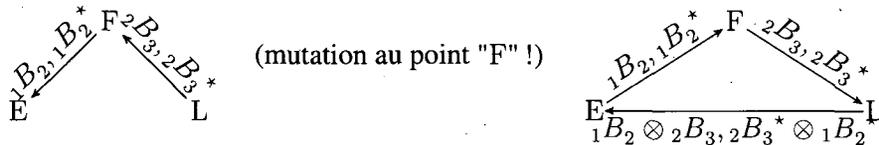
**Définition 3.2.4.** Un *potentiel* dans  $\mathcal{Q}$  est un morphisme de bimodules  $K \xrightarrow{m} \widehat{k\mathcal{Q}}_{cyc}$  ou, de façon équivalente, un élément  $K$ -central dans  $\widehat{k\mathcal{Q}}_{cyc}$ . On note  $\text{pot}(\mathcal{Q})$  la sous-algèbre non unifère de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  formée des potentiels sur  $\mathcal{Q}$ .

En vertu du lemme 3.1.8 chaque potentiel  $m$  est *cycliquement stable* dans le sens que, pour chaque point  $i$  et chaque chemin cyclique  $w \in \mathcal{Q}(i, i)$ , la composante correspondante  $k_i \xrightarrow{m_w} {}_iB_i^w$  est *cycliquement stable* : les *permutations complètes* gauche ou droite de  $m_w$  coïncident avec  $m_w$ , ce fait est exprimé par les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 {}_iB_i^w \otimes ({}_iB_i^w)^* \xrightarrow{\mathbb{1} \otimes m \otimes \mathbb{1}} & {}_iB_i^w \otimes {}_iB_i^w \otimes ({}_iB_i^w)^* & \\
 \mathfrak{z} \uparrow & \downarrow \partial_w^r := \mathbb{1} \otimes {}_i\mathfrak{b}_i^w & \\
 k_i \xrightarrow{m_w} & {}_iB_i^w & \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 ({}_iB_i^w)^* \otimes {}_iB_i^w \xrightarrow{\mathbb{1} \otimes m \otimes \mathbb{1}} & ({}_iB_i^w)^* \otimes {}_iB_i^w \otimes {}_iB_i^w & \\
 \mathfrak{z}' \uparrow & \downarrow \partial_w^l := {}_i\mathfrak{b}_i^{w*} \otimes \mathbb{1} & \\
 k_i \xrightarrow{m_w} & {}_iB_i^w & \\
 \end{array}$$

où le morphisme  $\partial_w^r = \mathbb{1}_{{}_iB_i^w} \otimes {}_i\mathfrak{b}_i^w$  est induit par la forme bilinéaire non-dégénérée  ${}_iB_i^w \otimes ({}_iB_i^w)^* \xrightarrow{{}_i\mathfrak{b}_i^w} k_i$  dont le dual a été noté  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{{}_iB_i^w \otimes ({}_iB_i^w)^*}$ , et le morphisme  $\partial_w^l = {}_i\mathfrak{b}_i^{w*} \otimes \mathbb{1}_{{}_iB_i^w}$  est induit par la forme bilinéaire non-dégénérée  $({}_iB_i^w)^* \otimes {}_iB_i^w \xrightarrow{{}_i\mathfrak{b}_i^{w*}} k_i$  dont le dual a été noté  $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}_{({}_iB_i^w)^* \otimes {}_iB_i^w}$ . On observe que l'existence d'un potentiel non nul dans  $\mathcal{Q}$  exige néanmoins quelques conditions sur la forme de  $\mathcal{Q}$ . En vertu de la proposition 3.2.2 on peut déjà construire des carquois modulés possédant des potentiels non-triviaux.

**Exemple 3.2.5.** Soient  $E, F, L$  trois  $k$ -surcorps (toujours de dimension finie). Ci-après on se donne deux carquois modulés, le second étant obtenu du premier par une transformation (qu'on nommera plus tard mutation) !



Alors un potentiel sur le deuxième carquois modulé est donné par :

$$\mathfrak{z}_{(2B_3^* \times 1B_2^*) \times (1B_2 \times 2B_3)} = \sum_{x \in {}_1X_2, z \in {}_2X_3} (z^* \otimes x^*) \otimes x \otimes z,$$

qui a été vu comme étant à valeur dans l'algèbre de chemins du second carquois modulé, et où  ${}_iX_j$  est une base gauche de  ${}_iB_j$  à laquelle on a associé la base duale correspondante, pour  $(i, j) = (1, 2), (2, 3)$ .

Pour mieux comprendre la forme des potentiels, on a besoin de la notion de dérivée droite ou gauche d'un potentiel le long d'un chemin : soient  $\omega \in \mathcal{Q}(i, j)$  et  $\omega' \in \mathcal{Q}(j, i)$  deux chemins valués dans  $\mathcal{Q}$ , on considère les paires dualisantes et symétrisables de bimodules  $\{ {}_i B_j^\omega, ({}_i B_j^\omega)^*; {}_i \mathfrak{b}_j^\omega, {}_j \mathfrak{b}_i^{\omega*} \}$  et  $\{ {}_j B_i^{\omega'}, ({}_j B_i^{\omega'})^*; {}_j \mathfrak{b}_i^{\omega'}, {}_i \mathfrak{b}_j^{\omega'*} \}$ , pour un potentiel  $k_i \xrightarrow{\mathfrak{m}} {}_i B_i^{\omega\omega'} = {}_i B_j^\omega \otimes {}_j B_i^{\omega'}$  le long du cycle  $\omega\omega'$ , on pose  $\partial_\omega^r \mathfrak{m} := (\mathbb{1}_{{}_i B_j^\omega} \otimes {}_j \mathfrak{b}_i^{\omega'}) \circ (\mathfrak{m} \otimes \mathbb{1}_{({}_j B_i^{\omega'})^*})$  la dérivée droite de  $\mathfrak{m}$  le long de  $\omega'$ , et  $\partial_\omega^l \mathfrak{m} := ({}_j \mathfrak{b}_i^{\omega*} \otimes \mathbb{1}_{({}_j B_i^{\omega'})^*}) \circ (\mathbb{1}_{({}_i B_j^\omega)^*} \otimes \mathfrak{m})$  la dérivée gauche de  $\mathfrak{m}$  le long de  $\omega$ , comme illustré par les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 ({}_j B_i^{\omega'})^* \xrightarrow{\mathfrak{m} \otimes \mathbb{1}} {}_i B_j^\omega \otimes {}_j B_i^{\omega'} \otimes ({}_j B_i^{\omega'})^* & & ({}_i B_j^\omega)^* \xrightarrow{\mathbb{1} \otimes \mathfrak{m}} ({}_i B_j^\omega)^* \otimes {}_i B_j^\omega \otimes {}_j B_i^{\omega'} \\
 \parallel & \searrow \partial_\omega^r = \mathbb{1} \otimes {}_j \mathfrak{b}_i^{\omega'} & \parallel \\
 ({}_j B_i^{\omega'})^* \xrightarrow{\quad} \partial_\omega^r \mathfrak{m} \xrightarrow{\quad} {}_i B_j^\omega & & ({}_i B_j^\omega)^* \xrightarrow{\quad} \partial_\omega^l \mathfrak{m} \xrightarrow{\quad} {}_j B_i^{\omega'} \\
 & & \downarrow \partial_\omega^l = {}_j \mathfrak{b}_i^{\omega*} \otimes \mathbb{1}
 \end{array} \quad (3.2.7)$$

On reviendra plus amplement sur les dérivées partielles dans la prochaine sous-section.

À présent, le lemme 3.1.7 de la section précédente montre que les potentiels sont en réalité donnés comme morphismes duals des formes bilinéaires non-dégénérées associées à aux paires dualisantes et symétrisables de bimodules, cette caractérisation des potentiels est établie par la proposition suivante.

**Proposition 3.2.3.** Soient  $K \xrightarrow{W} \widehat{k\mathcal{Q}_{\text{cyc}}}$  un potentiel dans  $\mathcal{Q}$  et  $k_i \xrightarrow{\mathfrak{m}} {}_i B_i^w$  une composante homogène de  $W$  le long d'un cycle valué  $w \in \mathcal{Q}(i, i)$ , soient  $\omega \in \mathcal{Q}(i, j)$  et  $\omega' \in \mathcal{Q}(j, i)$  une partition de  $w$  tels que  $w = \omega\omega'$ . Alors, la dérivée droite  $({}_j B_i^{\omega'})^* \xrightarrow{\partial_\omega^r \mathfrak{m}} {}_i B_j^\omega$  de  $\mathfrak{m}$  le long de  $\omega'$  et la dérivée gauche  $({}_i B_j^\omega)^* \xrightarrow{\partial_\omega^l \mathfrak{m}} {}_j B_i^{\omega'}$  de  $\mathfrak{m}$  le long de  $\omega$  forment une paire de morphismes de bimodules mutuellement duals :  $\partial_\omega^l \mathfrak{m} = (\partial_\omega^r \mathfrak{m})^*$  et  $\partial_\omega^r \mathfrak{m} = (\partial_\omega^l \mathfrak{m})^*$ . Par conséquent, si on pose  $U = \text{Im}(\partial_\omega^r \mathfrak{m})$ ,  $V = \text{Im}(\partial_\omega^l \mathfrak{m}) = \text{Im}((\partial_\omega^r \mathfrak{m})^*)$ ,  $\overline{V}^* = \ker(\partial_\omega^r \mathfrak{m})$  et  $\overline{U}^* = \ker(\partial_\omega^l \mathfrak{m}) = \ker((\partial_\omega^r \mathfrak{m})^*)$ , alors on a des paires dualisantes et symétrisables de bimodules  $\{U, V\}$ ,  $\{\overline{U}, \overline{U}^*\}$  et  $\{\overline{V}, \overline{V}^*\}$  dont les structures sont canoniquement induites par les paires dualisantes et symétrisables de bimodules  $\{ {}_i B_j^\omega, ({}_i B_j^\omega)^*; {}_i \mathfrak{b}_j^\omega, {}_j \mathfrak{b}_i^{\omega*} \}$  et  $\{ {}_j B_i^{\omega'}, ({}_j B_i^{\omega'})^*; {}_j \mathfrak{b}_i^{\omega'}, {}_i \mathfrak{b}_j^{\omega'*} \}$  et par la paire de morphismes mutuellement duals  $(\partial_\omega^r \mathfrak{m}, \partial_\omega^l \mathfrak{m})$ , et telles qu'on ait aussi les suites exactes courtes suivantes formées d'injections et de projections canoniques,

$$\begin{array}{ccc}
 0 \longrightarrow \overline{V}^* \xrightarrow{j} ({}_j B_i^{\omega'})^* \xrightarrow{p} U \longrightarrow 0, & & 0 \longrightarrow \overline{U}^* \xrightarrow{q} ({}_i B_j^\omega)^* \xrightarrow{r} V \longrightarrow 0, \\
 0 \longrightarrow V \xrightarrow{p^*} {}_j B_i^{\omega'} \xrightarrow{j^*} \overline{V} := \text{coker } p^* \longrightarrow 0, & & 0 \longrightarrow U \xrightarrow{r^*} {}_i B_j^\omega \xrightarrow{q^*} \overline{U} := \text{coker } r^* \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

De plus, le potentiel  $\mathfrak{m}$  coïncide avec le dual de la forme bilinéaire non-dégénérée  $U \otimes V \xrightarrow{(\cdot)} E$  associée à la paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{U, V\} : \mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{U \otimes V}$ .

*Démonstration.* En vertu du lemme 3.1.7 on a seulement besoin de montrer que le tout premier volet de la proposition 3.2.3 est vrai, à savoir que les dérivées partielles  $\partial_\omega^r \mathfrak{m}$  et  $\partial_\omega^l \mathfrak{m}$  sont deux morphismes de bimodules mutuellement duals. On considère alors les paires dualisantes et symétrisables de bimodules  $\{ {}_i B_j^\omega, ({}_i B_j^\omega)^*; {}_i \mathfrak{b}_j^\omega, {}_j \mathfrak{b}_i^{\omega*} \}$  et  $\{ {}_j B_i^{\omega'}, ({}_j B_i^{\omega'})^*; {}_j \mathfrak{b}_i^{\omega'}, {}_i \mathfrak{b}_j^{\omega'*} \}$ , avec  ${}_i B_j^\omega \otimes ({}_i B_j^\omega)^* \xrightarrow{{}_i \mathfrak{b}_j^\omega} k_i$ ,  $({}_i B_j^\omega)^* \otimes {}_i B_j^\omega \xrightarrow{{}_j \mathfrak{b}_i^{\omega*}} k_j$ ,  ${}_j B_i^{\omega'} \otimes ({}_j B_i^{\omega'})^* \xrightarrow{{}_j \mathfrak{b}_i^{\omega'}} k_j$  et  $({}_j B_i^{\omega'})^* \otimes {}_j B_i^{\omega'} \xrightarrow{{}_i \mathfrak{b}_j^{\omega'*}} k_i$ . Posons aussi  $f := \partial_\omega^r \mathfrak{m} : ({}_j B_i^{\omega'})^* \longrightarrow {}_i B_j^\omega$  la dérivée droite de  $\mathfrak{m}$  le long de  $\omega'$  et  $f' := \partial_\omega^l \mathfrak{m} : ({}_i B_j^\omega)^* \longrightarrow {}_j B_i^{\omega'}$  la dérivée gauche de  $\mathfrak{m}$ .

On veut montrer que  $f^* = f'$ , (notons que la famille  $(k_i, t_i)_{i \in I}$ , où  $t_i$  est la forme trace non-dégénérée attachée au  $k$ -surcorps  $k_i$ , ayant été fixée dans  $\mathcal{Q}$ ) l'existence du dual  $f^*$  de  $f$  est garantie en vertu du lemme 3.1.4-(2) et  $f^*$  est la valeur commune du dual droit  $f^r$  et du dual gauche  ${}^l f$  de  $f$ . Le dual droit  $f^r$  de  $f$  est défini par l'identité suivante :  ${}_j b_i^{\omega'}(f^r(-) \otimes -) = {}_j b_i^{\omega'}(- \otimes f(-))$ . Par ailleurs,  $f := \partial_{\omega}^r m := (\mathbb{1}_{{}_i B_j^{\omega}} \otimes {}_j b_i^{\omega'}) \circ (m \otimes \mathbb{1}_{({}_j B_i^{\omega'})^*})$  et  $f' := \partial_{\omega}^l m := ({}_j b_i^{\omega'} \otimes \mathbb{1}_{({}_j B_i^{\omega'})^*}) \circ (\mathbb{1}_{({}_i B_j^{\omega})^*} \otimes m)$ . Soit maintenant  $\{Y, Y^*\}$  une paire de bases mutuellement duales pour la paire dualisante de bimodules  $\{{}_i B_j^{\omega}, ({}_i B_j^{\omega})^*; {}_i b_j^{\omega}, {}_j b_i^{\omega'}\}$ , où  $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$  est une  $k_j$ -base droite de  ${}_i B_j^{\omega}$ . On peut donc écrire  $m(1) = \sum_{s=1}^q y_s \otimes v_s$  avec  $v_s \in {}_j B_i^{\omega'}$  pour  $1 \leq s \leq q$ , et ainsi pour tous  $\xi' \in ({}_j B_i^{\omega'})^*$  et  $\xi \in ({}_i B_j^{\omega})^*$ , on a :  $f(\xi') = \sum_{t=1}^q y_t \cdot {}_j b_i^{\omega'}(v_t \otimes \xi')$  et  $f'(\xi) = \sum_{t=1}^q {}_j b_i^{\omega'}(\xi \otimes y_t) \cdot v_t$ . Pour montrer que  $f^* = f^r = f'$ , il suffit de vérifier que  $f^r(y_s^*) = f'(y_s^*)$  pour chaque élément  $y_s^*$  dans la base duale  $Y^*$ . Pour cela, soit  $y_s^* \in Y^*$  avec  $s$  fixé, soit  $\xi' \in ({}_j B_i^{\omega'})^*$  un élément arbitraire, on a :  ${}_j b_i^{\omega'}(f^r(y_s^*) \otimes \xi') := {}_j b_i^{\omega'}(y_s^* \otimes f(\xi')) = \sum_{t=1}^q {}_j b_i^{\omega'}(y_s^* \otimes y_t \cdot {}_j b_i^{\omega'}(v_t \otimes \xi')) = {}_j b_i^{\omega'}(v_s \otimes \xi')$ . On a aussi :  ${}_j b_i^{\omega'}(f'(y_s^*) \otimes \xi') = \sum_{t=1}^q {}_j b_i^{\omega'}({}_j b_i^{\omega'}(y_s^* \otimes y_t) \cdot v_t \otimes \xi') = {}_j b_i^{\omega'}(v_s \otimes \xi')$ . On vient donc de montrer que  ${}_j b_i^{\omega'}(f^r(y_s^*) \otimes \xi') = {}_j b_i^{\omega'}(f'(y_s^*) \otimes \xi')$  pour tout  $\xi' \in ({}_j B_i^{\omega'})^*$ ; autrement dit,  ${}_j b_i^{\omega'}(f^r(y_s^*) \otimes -) = {}_j b_i^{\omega'}(f'(y_s^*) \otimes -)$ , si bien que  $f^r(y_s^*) = f'(y_s^*)$  pour chaque  $y_s^*$  dans la  $k_j$ -base gauche  $Y^*$  de  $({}_i B_j^{\omega})^*$ . On conclut que  $f^* = f^r = f'$ .  $\square$

### 3.2.4 Dérivées partielles, permutation tordue, dérivée cyclique et algèbres jacobiniennes

Commençons par introduire les dérivées partielles gauches et droites sur les éléments de  $J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}$ . Rappelons en vertu de (3.2.1) que  $\{B, B^*; b, b'\}$  est une paire dualisante et symétrisables de  $K$ -bimodules, induite par la somme directe des paires dualisantes et symétrisables de bimodules  $\{{}_i B_j, {}_i B_j^*; {}_i b_j, {}_i b_j'\}$  pour  $i, j \in I$ , avec  ${}_i B_j \otimes {}_i B_j^* \xrightarrow{{}_i b_j} k_i$  et  ${}_i B_j^* \otimes {}_i B_j \xrightarrow{{}_i b_j'} k_j$ . Les deux formes bilinéaires non-dégénérées induites  $B \otimes_K B^* \xrightarrow{b} K$  et  $B^* \otimes_K B \xrightarrow{b'} K$  sont données comme suit : soient  $i, j, s, t \in I$  arbitraires,  $i \xrightarrow{\alpha} j$  l'unique flèche (pleinement) valuée de  $i$  vers  $j$  et  $s \xrightarrow{\gamma} t$  l'unique flèche (pleinement) valuée de  $s$  vers  $t$ ; pour chaque  $x \in {}_i B_j = {}_i B_j^{\alpha}$  et  $u \in {}_s B_t^* = ({}_s B_t^{\gamma})^* = {}_t B_s^{\gamma'}$ ,

- ▷ si  $(i, j) \neq (s, t)$  alors  $b(u \otimes x) = 0$  et  $b'(x \otimes u) = 0$ ;
- ▷ et pour  $(i, j) = (s, t)$  on a :  $b'(u \otimes x) = {}_i b_j'(u \otimes x) = {}_j b_i^{\alpha'}(u \otimes x) \in k_i$  et  $b(x \otimes u) = {}_i b_j(x \otimes u) = {}_i b_j^{\alpha}(x \otimes u) \in k_j$ .

Les formes bilinéaires non-dégénérées  $b$  et  $b'$  précédentes induisent les deux morphismes canoniques suivants,

$$B^* \otimes J_{\widehat{k\mathcal{Q}}} \xrightarrow{\partial^l} \widehat{k\mathcal{Q}}_{\widehat{k\mathcal{Q}}} \text{ et } J_{\widehat{k\mathcal{Q}}} \otimes B^* \xrightarrow{\partial^r} \widehat{k\mathcal{Q}}_{\widehat{k\mathcal{Q}}}, \text{ avec } \partial^r := \mathbb{1}_{\widehat{k\mathcal{Q}}} \cdot b \text{ et } \partial^l := b' \cdot \mathbb{1}_{\widehat{k\mathcal{Q}}},$$

qu'on appellera opérateur de *dérivée gauche* et opérateur de *dérivée droite*. Ainsi,  $\partial^l$  est un morphisme de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$ -modules à droite alors que  $\partial^r$  est un morphisme de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$ -modules à gauche. Pour chaque  $u \in {}_i B_j^* \subset B^*$ ,

la *dérivée gauche* au point  $u$  est alors le morphisme continu de  $\widehat{kQ}$ -modules à droite  $\partial_u^l : J_{\widehat{kQ}} \longrightarrow \widehat{kQ}_{\widehat{kQ}}$  tel que pour tout  $\xi \in J_{\widehat{kQ}}$  et tout  $x = \sum_{s,t \in I} x_{s,t} \in B$  avec  $x_{s,t} \in {}_s B_t$  pour chaque  $s, t \in I$ , on ait  $\partial_u^l(x \otimes \xi) = b'(u \otimes x) \cdot \xi = {}_i b'_j(u \otimes x_{i,j}) \cdot \xi$ . De même, la *dérivée droite* au point  $u$  est le morphisme continu de  $\widehat{kQ}$ -modules à gauche  $\partial_u^r : J_{\widehat{kQ}} \longrightarrow \widehat{kQ}_{\widehat{kQ}}$  tel que pour tout  $\xi \in J_{\widehat{kQ}}$  et tout  $y = \sum_{s,t \in I} y_{s,t} \in B$  avec  $y_{s,t} \in {}_s B_t$  pour chaque  $s, t \in I$ , on ait  $\partial_u^r(\xi \otimes y) = \xi \cdot b(y \otimes u) = \xi \cdot {}_i b_j(y_{i,j} \otimes u)$ .

Ensuite, soit  $K \xrightarrow{m} \widehat{kQ}_{\text{cyc}}$  un potentiel. L'action de l'opérateur de dérivée gauche et celle l'opérateur de dérivée droite sur  $m$  donnent les deux morphismes suivants de bimodules,

$$B^* \xrightarrow{\partial^l m = \partial^l \circ (\mathbb{1} \otimes m)} J_{\widehat{kQ}} \quad \text{et} \quad B^* \xrightarrow{\partial^r m = \partial^r \circ (m \otimes \mathbb{1})} J_{\widehat{kQ}},$$

comme le montre la diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc} B^* \otimes J_{\widehat{kQ}}^2 & \xleftarrow{\mathbb{1} \otimes m} & B^* & \xrightarrow{m \otimes \mathbb{1}} & J_{\widehat{kQ}}^2 \otimes B^* \\ \partial^l \downarrow & & \parallel & & \downarrow \partial^r \\ J_{\widehat{kQ}} & \xleftarrow{\partial^l m} & B^* & \xrightarrow{\partial^r m} & J_{\widehat{kQ}} \end{array}$$

Bien sûr, lorsqu'on identifie  $m$  à  $m(1)$ , alors pour chaque  $u \in B^*$  on a :  $(\partial^l m)(u) = \partial_u^l m = \partial_u^l m(1)$  et  $(\partial^r m)(u) = \partial_u^r m = \partial_u^r m(1)$ . Mentionnons que pour un potentiel  $k_i \xrightarrow{m} {}_i B_i^w$  le long d'un chemin  $w$  avec  $\alpha \omega_1 = w = \omega \gamma$  et  $\alpha \in Q_1(i, k)$ ,  $\gamma \in Q_1(j, i)$ , les dérivées gauche et droite de  $m$  sont des morphismes de bimodules à valeur dans un bimodule de chemin, données comme suit.

$${}_k B_i^{\alpha^*} = ({}_i B_k^\alpha)^* \xrightarrow{\partial^l m} {}_k B_i^{\omega_1} \quad \text{et} \quad {}_i B_j^{\gamma^*} = ({}_j B_i^\gamma)^* \xrightarrow{\partial^r m} {}_i B_j^\omega.$$

*Remarque 3.2.6.* La composition ci-après étant appliquée composante par composante, on a clairement que  $\partial^l \circ \partial^r = \partial^r \circ \partial^l$ . Soit  $i, j \in I$  une paire ordonnée quelconque, on suppose que  $\{{}_R Q_1(i, j), {}_R Q_1^*(i, j)\}$  et  $\{{}_R Q_1(i, j), {}_R Q_1^*(i, j)\}$  sont deux paires de bases mutuellement duales pour la paire dualisante et symétrisable de bimodule  $\{{}_i B_j, {}_i B_j^*; {}_i b_j, {}_i b'_j\}$ , où  ${}_R Q_1(i, j)$  est une  $k_j$ -base droite pour  ${}_i B_j$  et  ${}_L Q_1(i, j)$  est une  $k_i$ -base gauche pour  ${}_i B_j$ . Alors dans le langage des dérivées partielles introduites plus haut, la proposition 3.2.2-(1) donne les identités suivantes :

$$\sum_{y \in {}_R Q_1(i, j)} y \cdot \partial_y^l = \mathbb{1}_{{}_i B_j} = \sum_{x \in {}_L Q_1(i, j)} \partial_{x^*}^r(-) \cdot x \quad \text{et} \quad \sum_{x \in {}_L Q_1(i, j)} x^* \cdot \partial^r(x \otimes -) = \mathbb{1}_{{}_i B_j^*} = \sum_{y \in {}_R Q_1(i, j)} \partial^l(- \otimes y) \cdot y^*.$$

Afin d'introduire la version cyclique des dérivées partielles gauches ou droites, nous aurons besoin d'une sorte de *permutation tordue* dans  $\widehat{kQ}_{\text{cyc}}$  (nous avons déjà utilisé les termes de permutations gauche ou droite un peu plus haut). On aura aussi besoin des dérivées partielles gauche ou droite d'ordre supérieur. Soit donc  $m \geq 1$ , en vertu du lemme 3.1.5 et des observations qui suivent immédiatement l'équation (3.2.5), on a la paire dualisante et symétrisable de  $K$ -bimodules  $\{B^{(m)}, B^{*(m)} = (B^{(m)})^*\}$  donnée comme la  $m^{\text{ième}}$  puissance de la paire dualisante et symétrisable de  $K$ -bimodules  $\{B, B^*, b, b'\}$ , on a donc comme précédemment

deux opérateurs

$$B^{*(m)} \otimes J_{k\mathcal{Q}}^m \xrightarrow{\partial_{B^{*(m)}}^L = \partial^{L^m}} \widehat{k\mathcal{Q}}_{k\mathcal{Q}} \text{ et } J_{k\mathcal{Q}}^m \otimes B^{*(m)} \xrightarrow{\partial_{B^{*(m)}}^R = \partial^{R^m}} \widehat{k\mathcal{Q}}_{k\mathcal{Q}},$$

appelés respectivement opérateur de  $m^{\text{ième}}$  *dérivée gauche* et opérateur de  $m^{\text{ième}}$  *dérivée droite*. Pour  $u_1 \otimes \dots \otimes u_m \in B^{*(m)}$  on a  $\partial_{u_1 \otimes \dots \otimes u_m}^L = \partial_{u_1 \otimes \dots \otimes u_m}^{L^m} = \partial_{u_1}^L \circ \dots \circ \partial_{u_m}^L$ , tandis que  $\partial_{u_1 \otimes \dots \otimes u_m}^R = \partial_{u_1 \otimes \dots \otimes u_m}^{R^m} = \partial_{u_m}^R \circ \dots \circ \partial_{u_1}^R$ . Pour tout chemin  $\omega \in \mathcal{Q}(i, j)$  de longueur  $m$ , les composantes correspondantes de  $\partial^{L^m}$  et de  $\partial^{R^m}$  sur  $({}_i B_j^\omega)^*$  seront simplement notées  $\partial_\omega^L$  et  $\partial_\omega^R$ , si bien que pour tout  $\xi = \xi_\omega + \xi' \in B^{*(m)}$  où  $\xi_\omega \in ({}_i B_j^\omega)^*$  et  $\xi'$  appartient au supplémentaire de  $({}_i B_j^\omega)^*$  dans  $B^{*(m)}$ , on a  $\partial_\omega^L(\xi \otimes -) = \partial_{\xi_\omega}^L = \partial_{\xi_\omega}^{L^m}$  et  $\partial_\omega^R(- \otimes \xi) = \partial_{\xi_\omega}^R = \partial_{\xi_\omega}^{R^m}$ . De même sur tout potentiel homogène  $K \xrightarrow{-m} \widehat{k\mathcal{Q}}_{cyc, l}$  de longueur  $l \geq m$ , l'action de l'opérateur de  $m^{\text{ième}}$  *dérivée gauche* et celle de l'opérateur de  $m^{\text{ième}}$  *dérivée droite* sont données par les deux morphismes de bimodules suivants,

$$B^{*(m)} \xrightarrow{\partial^{L^m} m = \partial^{L^m} \circ (\mathbb{1} \otimes \mathbb{m})} J_{k\mathcal{Q}} \text{ et } B^{*(m)} \xrightarrow{\partial^{R^m} m = \partial^{R^m} \circ (\mathbb{m} \otimes \mathbb{1})} J_{k\mathcal{Q}}.$$

Les discussions précédentes mènent à la définition ci-après, où pour chaque paire dualisante  $\{M, M'\}$  le morphisme canonique dual de chacune des deux formes bilinéaires non-dégénérée associées a été indifféremment noté  $\mathfrak{z}$ .

**Définition 3.2.7** (Permutations tordues). Soit  $k_i \xrightarrow{-m} {}_i B_i^w$  un potentiel homogène pour un certain chemin cyclique  $w \in \mathcal{Q}(i, i)$ .

- (a) Supposons que  $w = \omega_s \omega'_s$  est une partition de  $w$  en deux sous-chemins  $\omega_s \in \mathcal{Q}(i, k)$  et  $\omega'_s \in \mathcal{Q}(k, i)$  avec  $\ell(\omega_s) = s$ , et posons  $w' = \omega'_s \omega_s \in \mathcal{Q}(k, k)$  la permutation cyclique correspondante de  $w$ . Alors l'action de l'opérateur de *permutation gauche le long du sous-chemin source*  $\omega_s$  sur le potentiel  $\mathbb{m}$  est le nouveau morphisme donné par

$$\varepsilon_L^{\omega_s}(\mathbb{m}) = \partial_{\omega_s}^L \circ (\mathbb{1}_{({}_i B_k^{\omega_s})^*} \otimes \mathbb{m} \otimes \mathbb{1}_{{}_i B_k^{\omega_s}}) \circ \mathfrak{z} : k_k \longrightarrow {}_k B_k^{w'} = {}_k B_i^{\omega'_s} \otimes {}_i B_k^{\omega_s},$$

comme le montre le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} ({}_i B_k^{\omega_s})^* \otimes {}_i B_k^{\omega_s} & \xrightarrow{\mathbb{1} \otimes \mathbb{m} \otimes \mathbb{1}} & ({}_i B_k^{\omega_s})^* \otimes {}_i B_k^{\omega_s} \otimes {}_k B_i^{\omega'_s} \otimes {}_i B_k^{\omega_s} \\ \mathfrak{z} \uparrow & & \downarrow \partial_{\omega_s}^L \\ k_k & \xrightarrow{\varepsilon_L^{\omega_s}(\mathbb{m}) = \varepsilon_L^s \mathbb{m}} & {}_k B_k^{w'} \end{array}$$

On convient que  $\varepsilon_L^0 = \mathbb{1}_{\text{pot}(\mathcal{Q})}$ ; si  $s = 1$  de sorte que  $\omega_s$  est une flèche  $\alpha \in \mathcal{Q}_1(i, k)$ , on note simplement  $\varepsilon_L = \varepsilon_L^1 = \varepsilon_L^\alpha$  et donc  $\varepsilon_L(\mathbb{m}) = \partial^\alpha \circ (\mathbb{1}_{({}_i B_k^\alpha)^*} \otimes \mathbb{m} \otimes \mathbb{1}_{{}_i B_k^\alpha}) \circ \mathfrak{z} : k_k \longrightarrow {}_k B_k^{\omega'_s \alpha}$ .

- (b) De même, supposons que  $w = \omega'_t \omega_t$  est une partition de  $w$  en deux sous-chemins  $\omega'_t \in \mathcal{Q}(i, j)$  et  $\omega_t \in \mathcal{Q}(j, i)$  avec  $\ell(\omega_t) = t$ , posons  $w' = \omega_t \omega'_t \in \mathcal{Q}(j, j)$  la permutation cyclique correspondante de  $w$ . Alors l'action de l'opérateur de *permutation droite de  $\mathbb{m}$  le long du sous-chemin terminant*  $\omega_t$  est le nouveau morphisme donné par

$$\varepsilon_R^{\omega_t}(\mathbb{m}) = \partial_{\omega_t}^R \circ (\mathbb{1}_{{}_j B_i^{\omega'_t}} \otimes \mathbb{m} \otimes \mathbb{1}_{({}_j B_i^{\omega_t})^*}) \circ \mathfrak{z} : k_j \longrightarrow {}_j B_j^{w'} = {}_j B_i^{\omega_t} \otimes {}_i B_j^{\omega'_t},$$

comme le montre le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 {}_j B_i^{\omega_t} \otimes ({}_j B_i^{\omega_t})^* & \xrightarrow{\mathbb{1} \otimes \mathfrak{m} \otimes \mathbb{1}} & {}_j B_i^{\omega_t} \otimes {}_i B_j^{\omega_t'} \otimes {}_j B_i^{\omega_t} \otimes ({}_j B_i^{\omega_t})^* \\
 \uparrow \mathfrak{z} & & \downarrow \partial_{\omega_t}^R \\
 k_j & \xrightarrow{\varepsilon_R^{\omega_t}(\mathfrak{m}) = \varepsilon_R^t \mathfrak{m}} & {}_j B_j^{\omega_t'}
 \end{array}$$

On convient que  $\varepsilon_R^0 = \mathbb{1}_{\text{pot}(\mathcal{Q})}$  ; si  $t = 1$  de sorte que  $\omega_t$  est une flèche  $\gamma \in \mathcal{Q}_1(j, i)$ , on écrit simplement  $\varepsilon_R = \varepsilon_R^1 = \varepsilon_R^\gamma$  et  $\varepsilon_R(\mathfrak{m}) = \partial^R \circ (\mathbb{1}_{{}_j B_i^\gamma} \otimes \mathfrak{m} \otimes \mathbb{1}_{({}_j B_i^\gamma)^*}) \circ \mathfrak{z} : k_j \longrightarrow {}_j B_j^{\gamma\omega_t}$ .

Comme annoncé ci-haut, pour chaque chemin  $\omega$  de longueur  $m$  on a :  $\varepsilon_L^\omega = \varepsilon_L^m$ ,  $\varepsilon_R^\omega = \varepsilon_R^m$ , et comme on l'a vu un peu plus haut, ce fait découle directement de la définition du produit de paires dualisantes et des morphismes canoniques  $\mathfrak{z}$  associés (voir (3.2.5)).

Nous obtenons également certaines propriétés cruciales entre nos notions de *permutations tordues* non-simplement lacées et de dérivées partielles gauche et droite, ces propriétés fournissent une autre justification que les généralisations que nous avons jusqu'ici introduites sont bien appropriées.

#### Proposition 3.2.4.

(1) Les deux morphismes suivants,  $(\mathbb{1}_B \otimes \partial^L) \circ \mathfrak{z}$ ,  $(\partial^R \otimes \mathbb{1}_B) \circ \mathfrak{z}' : J_{\widehat{k\mathcal{Q}}} \longrightarrow J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}$  coïncident avec le morphisme identité de  $J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}$ , où  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{B^* \otimes B}$  et  $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}_{B \otimes B^*}$ . Ainsi pour toutes paires  $\{ {}_R \mathcal{Q}_1, {}_R \mathcal{Q}_1^* \}$  et  $\{ {}_L \mathcal{Q}_1, {}_L \mathcal{Q}_1^* \}$  de systèmes de flèches mutuellement duals où  ${}_R \mathcal{Q}_1$  est un système droite de flèches et  ${}_L \mathcal{Q}_1$  est un système gauche de flèches pour  $\mathcal{Q}$ , les identités suivantes sont valides.

$$(\mathbb{1}_B \otimes \partial^L) \circ \mathfrak{z} = \sum_{y \in {}_R \mathcal{Q}_1} y \otimes \partial^L(y^* \otimes -) = \mathbb{1}_{J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}} = \sum_{x \in {}_L \mathcal{Q}_1} \partial^R(x^* \otimes -) \otimes x = (\partial^R \otimes \mathbb{1}_B) \circ \mathfrak{z}'.$$

(2) Soit  $k_i \xrightarrow{\mathfrak{m}} {}_i B_i^\omega$  un un potentiel le long d'un chemin dans  $\mathcal{Q}$ , on suppose que  $\alpha\omega = \omega = \nu\gamma$  avec  $\alpha \in \mathcal{Q}_1(i, k)$  et  $\gamma \in \mathcal{Q}_1(j, i)$ . Alors la dérivée droite  $({}_i B_k^\alpha)^* \xrightarrow{\partial^R(\varepsilon_L(\mathfrak{m}))} {}_k B_i^\omega$  de la permutation gauche de  $\mathfrak{m}$  est égale à la dérivée gauche  $({}_i B_k^\alpha)^* \xrightarrow{\partial^L \mathfrak{m}} {}_k B_i^\omega$  de  $\mathfrak{m}$  :  $\partial^R(\varepsilon_L(\mathfrak{m})) = \partial^L \mathfrak{m}$ . De même, la dérivée gauche  $({}_j B_i^\gamma)^* \xrightarrow{\partial^L(\varepsilon_R(\mathfrak{m}))} {}_i B_j^\nu$  de la permutation droite de  $\mathfrak{m}$  est égale à la dérivée droite  $({}_j B_i^\gamma)^* \xrightarrow{\partial^R \mathfrak{m}} {}_i B_j^\nu$  de  $\mathfrak{m}$  :  $\partial^L(\varepsilon_R(\mathfrak{m})) = \partial^R \mathfrak{m}$ .

(3) Les opérateurs de permutations tordues gauche et droite sont deux automorphismes inverses l'un l'autre,  $\text{pot}(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\varepsilon_L, \varepsilon_R} \text{pot}(\mathcal{Q}) : \varepsilon_L \circ \varepsilon_R = \mathbb{1}_{\text{pot}(\mathcal{Q})} = \varepsilon_R \circ \varepsilon_L$ . De plus, sur chaque potentiel  $\mathfrak{m}$  le long d'un cycle de longueur  $m \geq 2$ , on a  $\varepsilon_L^m \mathfrak{m} = \mathfrak{m} = \varepsilon_R^m \mathfrak{m}$ , si bien que  $\varepsilon_L^m$  et  $\varepsilon_R^m$  agissent comme des identités sur les potentiels le long des  $m$ -cycles dans  $\mathcal{Q}$ .

*Démonstration.*

**Énoncé (1).** Les identités dans (1) découlent directement de la définition des morphismes canoniques  $\mathfrak{z}$  et des identités  $\sum_{y \in {}_R \mathcal{Q}_1(i, j)} y \cdot \partial_y^L = \mathbb{1}_{{}_i B_j} = \sum_{x \in {}_L \mathcal{Q}_1(i, j)} \partial_x^R(-) \cdot x$  données par la remarque 3.2.6, avec  $i, j$  parcourant l'ensemble des points  $I$ . Pour la suite, si  $\gamma$  est une flèche pleinement valuée ou non dans  $\mathcal{Q}$ , comme dans la définition 3.2.3 on sait que  ${}_R \mathcal{Q}_\gamma \subseteq {}_R \mathcal{Q}_1$  est une  $k_{t(\gamma)}$ -base de  ${}_{s(\gamma)} B_{t(\gamma)}^\gamma$  et  ${}_L \mathcal{Q}_\gamma \subseteq {}_L \mathcal{Q}_1$  est une  $k_{s(\gamma)}$ -base de  ${}_{s(\gamma)} B_{t(\gamma)}^\gamma$ .

**Énoncé (2).** Comme dans la remarque 3.2.6, les systèmes de flèches  ${}_R\mathcal{Q}_1$  et  ${}_L\mathcal{Q}_1$  étant fixés, on sait que les deux éléments centraux associés aux deux morphismes canoniques  $k_i \xrightarrow{\mathfrak{z}} {}_iB_k^\alpha \otimes ({}_iB_k^\alpha)^*$  et  $k_k \xrightarrow{\mathfrak{z}'} ({}_iB_k^\alpha)^* \otimes {}_iB_k^\alpha$  sont donnés par :

$$\mathfrak{z}(1) = \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_\alpha} y \otimes y^* \in {}_iB_k^\alpha \otimes ({}_iB_k^\alpha)^* \text{ et } \mathfrak{z}'(1) = \sum_{x \in {}_L\mathcal{Q}_\alpha} x^* \otimes x \in ({}_iB_k^\alpha)^* \otimes {}_iB_k^\alpha.$$

Par définition,  $\partial^R(\varepsilon_L(\mathbf{m})) = \partial^R \circ (\varepsilon_L(\mathbf{m}) \otimes \mathbb{1})$  et la définition 3.2.7 donne que,  $\varepsilon_L(\mathbf{m}) = \partial^L \circ (\mathbb{1} \otimes \mathbf{m} \otimes \mathbb{1}) \circ \mathfrak{z}'$ . D'où pour tout  $u \in ({}_iB_k^\alpha)^*$  on a :

$$\begin{aligned} (\partial^R(\varepsilon_L(\mathbf{m}))) (u) &= \partial^R(\varepsilon_L(\mathbf{m})(1) \otimes u) = \partial^R \left( \partial^L \left( \sum_{x \in {}_L\mathcal{Q}_\alpha} x^* \otimes \mathbf{m}(1) \otimes x \right) \otimes u \right) \\ &= \partial^L \left( \sum_{x \in {}_L\mathcal{Q}_\alpha} x^* \otimes \mathbf{m}(1) \cdot \partial^R(x \otimes u) \right) = \partial^L \left( \sum_{x \in {}_L\mathcal{Q}_\alpha} x^* \cdot \partial^R(x \otimes u) \otimes \mathbf{m}(1) \right), \\ (\partial^R(\varepsilon_L(\mathbf{m}))) (u) &= \partial^L \left( \left( \sum_{x \in {}_L\mathcal{Q}_\alpha} x^* \cdot \partial^R(x \otimes u) \right) \otimes \mathbf{m}(1) \right) = \partial^L(u \otimes \mathbf{m}(1)) = (\partial^L \mathbf{m})(u). \end{aligned}$$

Ainsi  $\partial^R(\varepsilon_L(\mathbf{m})) = \partial^L \mathbf{m}$ . De façon similaire, en utilisant le morphisme canonique  $\mathfrak{z}$  nous obtenons que  $\partial^L(\varepsilon_R(\mathbf{m})) = \partial^R \mathbf{m}$ , et ceci complète la preuve de (2).

**Énoncé (3).** Il découle des énoncés (1) et (2) et de la définition des opérateurs de permutation gauche et droite que, pour tout potentiel  $\mathbf{m}$  le long d'un chemin dans  $\mathcal{Q}$  on a les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_R \circ \varepsilon_L(\mathbf{m}) &= \partial^R(\mathbb{1} \otimes \varepsilon_L(\mathbf{m}) \otimes \mathbb{1}) \circ \mathfrak{z}' = (\mathbb{1} \otimes \partial^R(\varepsilon_L(\mathbf{m}) \otimes \mathbb{1})) \circ \mathfrak{z}' = (\mathbb{1} \otimes \partial^R \varepsilon_L(\mathbf{m})) \circ \mathfrak{z}' \\ &= (\mathbb{1} \otimes \partial^L \mathbf{m}) \circ \mathfrak{z}' = \mathbf{m}, \\ \varepsilon_L \circ \varepsilon_R(\mathbf{m}) &= \partial^L(\mathbb{1} \otimes \varepsilon_R(\mathbf{m}) \otimes \mathbb{1}) \circ \mathfrak{z} = (\partial^L \varepsilon_R(\mathbf{m}) \otimes \mathbb{1}) \circ \mathfrak{z} = (\partial^L(\varepsilon_R(\mathbb{1} \otimes \mathbf{m})) \otimes \mathbb{1}) \circ \mathfrak{z} \\ &= (\partial^R \mathbf{m} \otimes \mathbb{1}) \circ \mathfrak{z} = \mathbf{m}. \end{aligned}$$

Ensuite, le fait que  $\varepsilon_L^m \mathbf{m} = \mathbf{m} = \varepsilon_R^m \mathbf{m}$  vient du fait que le potentiel  $k_i \xrightarrow{\mathbf{m}} {}_iB_i^w$ , avec  $\ell(w) = m$ , est déjà cycliquement stable et,  $\varepsilon_L^m = \varepsilon_L^w$  et  $\varepsilon_R^m = \varepsilon_R^w$ . D'où (3) est également valide.  $\square$

Maintenant le dernier point de cette section fournit la version cyclique des dérivées partielles précédemment introduites, ainsi que les algèbres jacobiennes correspondantes. Pour cela, si  $w = \alpha_0 \cdots \alpha_m$  est un chemin cyclique indexé par le groupe cyclique  $\mathbb{Z}_{m+1}$ , alors nous posons  $\text{cyc}(w) = \{w_s = \alpha_s \cdots \alpha_{s+m} : s \in \mathbb{Z}_{m+1}\}$  l'ensemble de toutes les permutations cycliques de  $w$ ; on posera aussi  $\partial w = \{\partial_{\alpha_s}^L w_s = \alpha_{s+1} \cdots \alpha_{s+m} : s \in \mathbb{Z}_{m+1}\}$ .

**Proposition 3.2.5.** On a un opérateur  $\text{pot}(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\varepsilon_c} \text{pot}(\mathcal{Q})$  de permutation cyclique totale défini sur chaque potentiel  $\mathbf{m}$  le long d'un  $(d+1)$ -cycle  $w$  par :  $\varepsilon_c \mathbf{m} = \sum_{t=0}^d \varepsilon_L^t \mathbf{m} = \sum_{t=0}^d \varepsilon_R^t \mathbf{m}$ . Il s'ensuit alors que l'opérateur de dérivée cyclique existe et est donné comme valeur commune  $B^* \otimes \text{pot}(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\partial^{\text{cl}} = \partial = \partial^{\text{cr}}} \mathcal{J}_{\widehat{\mathcal{Q}}}$  des opérateurs de dérivée cyclique gauche et de dérivée cyclique droite, dont les actions sur chaque potentiel  $k_i \xrightarrow{\mathbf{m}} {}_iB_i^w$  le long d'un  $(d+1)$ -cycle  $w = \alpha_0 \cdots \alpha_d$  dans  $\mathcal{Q}$  sont données par le morphisme de bimodules suivant :

$$B^* \supset \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}_{d+1}} (B^{\alpha_s})^* \xrightarrow{\partial^{\text{cl}} \mathbf{m} = \sum_{t=0}^d \partial^L(\varepsilon_L^t \mathbf{m}) = \partial \mathbf{m} = \sum_{t=0}^d \partial^R(\varepsilon_R^t \mathbf{m}) = \partial^{\text{cl}} \mathbf{m}} B^{\partial w}.$$

Ainsi pour tout  $u \in B^*$  on a :

$$\partial_u^{\text{cl}} \mathbf{m} = (\partial^{\text{cl}} \mathbf{m})(u) = \sum_{t=0}^d (\partial^{\text{L}}(\varepsilon_{\text{L}}^t \mathbf{m}))(u) = \partial_u \mathbf{m} = \sum_{t=0}^d (\partial^{\text{R}}(\varepsilon_{\text{R}}^t \mathbf{m}))(u) = \partial_u^{\text{cr}} \mathbf{m} = (\partial^{\text{cr}} \mathbf{m})(u).$$

*Démonstration.* Il suffit d'observer qu'en vertu de la proposition 3.2.4-(3), l'opérateur de permutation cyclique  $\varepsilon_c$  est correctement défini : en effet, comme  $\varepsilon_{\text{L}} \circ \varepsilon_{\text{R}} = \mathbb{1}_{\text{pot}(\mathcal{Q})} = \varepsilon_{\text{R}} \circ \varepsilon_{\text{L}}$  et  $\varepsilon_{\text{L}}^{d+1} \mathbf{m} = \mathbf{m} = \varepsilon_{\text{R}}^{d+1} \mathbf{m}$ , on a immédiatement que :  $\sum_{t=0}^d \varepsilon_{\text{L}}^t \mathbf{m} = \sum_{t=0}^d \varepsilon_{\text{L}}^t \varepsilon_{\text{R}}^{d+1}(\mathbf{m}) = \sum_{t=0}^d \varepsilon_{\text{R}}^{d+1-t} \mathbf{m} = \sum_{t=0}^d \varepsilon_{\text{R}}^t \mathbf{m}$ , montrant que  $\varepsilon_c$  est correctement défini. Le volet (2) de la proposition 3.2.4 montre que  $\partial^{\text{L}} \varepsilon_{\text{R}} \mathbf{m} = \partial^{\text{R}} \mathbf{m}$ . On déduit que  $\partial^{\text{cl}} \mathbf{m} = \partial^{\text{L}}(\sum_{t=0}^d \varepsilon_{\text{L}}^t \mathbf{m}) = \partial^{\text{L}}(\sum_{t=1}^{d+1} \varepsilon_{\text{R}}^t \mathbf{m}) = \sum_{t=1}^d \partial^{\text{L}} \varepsilon_{\text{R}} \varepsilon_{\text{R}}^{t-1} \mathbf{m} = \sum_{t=1}^{d+1} \partial^{\text{R}} \varepsilon_{\text{R}}^{t-1} \mathbf{m} = \sum_{t=0}^d \partial^{\text{R}} \varepsilon_{\text{R}}^t \mathbf{m} = \partial^{\text{cr}} \mathbf{m}$ , établissant ainsi l'existence de l'opérateur de dérivée cyclique.  $\square$

**Définition 3.2.8.** Étant donné un potentiel  $\mathbf{m} \in \text{pot}(\mathcal{Q})$  tel que  $\mathcal{Q}$  soit sans boucle, la paire  $(\mathcal{Q}, \mathbf{m})$  est alors appelée un *carquois modulé avec potentiel*. La fermeture de l'idéal  $\langle \text{Im}(\partial \mathbf{m}) \rangle = \langle \text{Im}(\partial^{\text{cl}} \mathbf{m}) \rangle = \langle \text{Im}(\partial^{\text{cr}} \mathbf{m}) \rangle$  est appelée *l'idéal jacobien* associé au potentiel  $\mathbf{m}$  et noté  $J_{\mathbf{m}} = \overline{\langle \text{Im}(\partial \mathbf{m}) \rangle}$ , et *l'algèbre jacobienne* correspondante est par définition l'algèbre quotient  $\mathcal{J}_{\mathbf{m}} = \mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m}) = \widehat{k\mathcal{Q}}/J_{\mathbf{m}}$  de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  par l'idéal jacobien de  $\mathbf{m}$ .

On veut maintenant introduire la notion d'équivalence cyclique entre les potentiels ; il s'ensuivra que l'algèbre jacobienne  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m})$  ne dépend que de la classe de  $\mathbf{m}$  suivant l'équivalence cyclique. Le sous-K-bimodule  $\widehat{k\mathcal{Q}}_{\text{acyc}} := \sum_{i \neq j \in I} e_i \widehat{k\mathcal{Q}} e_j$  étant la partie acyclique de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$ , on commence par les notions suivantes.

**Définition 3.2.9.** Soit  $(\mathcal{Q}, \mathbf{m})$  un carquois modulé avec potentiel.

- ▷ Si  $W \in \text{pot}(\mathcal{Q})$ , alors les éléments  $W - \varepsilon_{\text{L}} W$  et  $W - \varepsilon_{\text{R}} W$  sont appelés *commutateurs tordus* ; le k-espace  $\text{skew}[\widehat{k\mathcal{Q}}, \widehat{k\mathcal{Q}}]$  des commutateurs tordus de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  est le sous-k-espace engendré par les commutateurs tordus et la partie acyclique  $\widehat{k\mathcal{Q}}_{\text{acyc}}$  de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$ . On note  $\text{skew}\{\widehat{k\mathcal{Q}}, \widehat{k\mathcal{Q}}\} = \overline{\text{skew}[\widehat{k\mathcal{Q}}, \widehat{k\mathcal{Q}}]}$  la fermeture du k-espace des commutateurs tordus. Le k-espace *trace tordu*  $\text{sTr}(\widehat{k\mathcal{Q}})$  de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  est donné par  $\text{sTr}(\widehat{k\mathcal{Q}}) := \widehat{k\mathcal{Q}}/\text{skew}\{\widehat{k\mathcal{Q}}, \widehat{k\mathcal{Q}}\}$ .
- ▷ De même, le k-espace des *commutateurs tordus de l'algèbre jacobienne*  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m})$  est donné par  $\text{skew}[\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m}), \mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m})] := (\text{skew}[\widehat{k\mathcal{Q}}, \widehat{k\mathcal{Q}}] + J_{\mathbf{m}})/J_{\mathbf{m}}$  ; l'espace *trace tordu de*  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m})$  est donné par  $\text{sTr}(\mathcal{Q}, \mathbf{m}) = \mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m})/\text{skew}\{\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m}), \mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m})\}$ , avec  $\text{skew}\{\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m}), \mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m})\} := (\text{skew}[\widehat{k\mathcal{Q}}, \widehat{k\mathcal{Q}}] + J_{\mathbf{m}})/J_{\mathbf{m}}$ .
- ▷ Le k-espace  $\text{Def}(\mathcal{Q}, \mathbf{m}) := \text{sTr}(\mathcal{Q}, \mathbf{m})/K$  est appelé *espace de déformation* de  $(\mathcal{Q}, \mathbf{m})$ . On dit que  $(\mathcal{Q}, \mathbf{m})$  est *rigide* si l'espace de déformation de  $(\mathcal{Q}, \mathbf{m})$  est nul, en d'autres termes, si  $\text{sTr}(\mathcal{Q}, \mathbf{m}) = K$ .

Observons que  $\text{skew}\{\widehat{k\mathcal{Q}}, \widehat{k\mathcal{Q}}\} + J_{\mathbf{m}} \subset \overline{\text{skew}[\widehat{k\mathcal{Q}}, \widehat{k\mathcal{Q}}] + J_{\mathbf{m}}}$ , mais l'inclusion inverse n'est en général pas vraie. Comme on le verra au chapitre 5, les algèbres inclinées amassées de types  $\mathbb{A}_n$ ,  $\mathbb{B}_n$  et  $\mathbb{C}_n$  sont données par des algèbres jacobiniennes associées aux carquois modulés avec potentiels rigides.

**Définition 3.2.10.** Deux potentiels  $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \text{pot}(\mathcal{Q})$  sont dits *cycliquement équivalents* si  $\mathbf{m} - \mathbf{m}' \in \text{skew}\{\widehat{k\mathcal{Q}}, \widehat{k\mathcal{Q}}\}$ . Si tel est le cas, alors pour tout  $\xi \in B^*$  on a,  $\partial_{\xi} \mathbf{m} = \partial_{\xi} \mathbf{m}'$ , si bien que  $J_{\mathbf{m}} = J_{\mathbf{m}'}$  et  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m}) = \mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m}')$ .

Le prochain résultat introduit l'opérateur dérivée cyclique double ainsi que d'autres propriétés intéressantes des potentiels, ces dernières propriétés jouent un rôle crucial dans la caractérisation des algèbres jacobiniennes via les suites faiblement 2-presque scindées introduites.

**Proposition 3.2.6.** (a) Il existe un opérateur de dérivée cyclique seconde  $B^* \otimes B^* \xrightarrow{\partial} \text{Hom}(\text{pot}(\mathcal{Q}), \widehat{k\mathcal{Q}})$ , (indifféremment noté avec le même symbole que l'opérateur de dérivée cyclique), donné par la valeur commune représentée par les identités valides suivantes où la composition est appliquée point par point :

$$(\partial^l \cdot \partial^l) \circ \varepsilon_c = \partial^l \cdot (\partial) = \partial^r \cdot (\partial) = (\partial^r \cdot \partial^r) \circ \varepsilon_c.$$

Ainsi pour tout potentiel  $m$  et toute paire de points  $u, v \in B^*$ , l'action de la dérivée cyclique seconde sur  $m$  aux points  $u$  et  $v$  est donnée par les identités valides ci-après :

$$(\partial_u^l \circ \partial_v) m = \partial_{u \otimes v} m = (\partial_v^r \circ \partial_u) m$$

(b) De plus pour toutes paires  $\{\mathcal{R}\mathcal{Q}_1, \mathcal{R}\mathcal{Q}_1^*\}$  et  $\{\mathcal{L}\mathcal{Q}_1, \mathcal{L}\mathcal{Q}_1^*\}$  de systèmes de flèches mutuellement duals où  $\mathcal{R}\mathcal{Q}_1$  est un système droite de flèches et  $\mathcal{L}\mathcal{Q}_1$  est un système gauche de flèches pour  $\mathcal{Q}$ , les identités suivantes sont également valides pour chaque  $u \in B^*$  :

$$\sum_{x \in \mathcal{L}\mathcal{Q}_1} (\partial_{u \otimes x^*}) \otimes x = \partial_u = \sum_{y \in \mathcal{R}\mathcal{Q}_1} y \otimes (\partial_{y^* \otimes u}).$$

*Démonstration.* Pour l'énoncé (a) on utilise le fait que par définition on a :  $\partial^l \circ \varepsilon_c = \partial^{cl} = \partial = \partial^{cr} = \partial^r \circ \varepsilon_c$  et le fait que la dérivée gauche et la dérivée droite commutent point par point. Ainsi pour chaque paire de points  $u, v \in B^*$  on a :  $\partial_u^l \circ \partial_v = \partial_u^l \circ \partial_v^{cr} = \partial_u^l \circ \partial_v^r \circ \varepsilon_c = \partial_v^r \circ \partial_u^l \circ \varepsilon_c = \partial_v^r \circ \partial_u^{cl} = \partial_v^r \circ \partial_u$ .

Maintenant les autres identités dans (b) découlent directement de ce qui précède et des identités de la proposition 3.2.4-(1) comme suit :  $\partial_u = \mathbb{1}_{\widehat{k\mathcal{Q}}} \circ \partial_u = \left( \sum_{x \in \mathcal{L}\mathcal{Q}_1} \partial^r(- \otimes x^*) \otimes x \right) \circ \partial_u = \sum_{x \in \mathcal{L}\mathcal{Q}_1} (\partial_{x^*}^r \cdot \partial_u) \otimes x = \sum_{x \in \mathcal{L}\mathcal{Q}_1} (\partial_{u \otimes x^*}) \otimes x$ . De même en partant de l'égalité  $\mathbb{1}_{\widehat{k\mathcal{Q}}} = \sum_{y \in \mathcal{R}\mathcal{Q}_1} y \otimes \partial^l(y^* \otimes -)$  on obtient également que  $\partial_u = \sum_{y \in \mathcal{R}\mathcal{Q}_1} y \otimes (\partial_{y^* \otimes u})$ .  $\square$

Une note remarquable alors qu'on arrive à la fin de section est que, comme nous l'avons d'ailleurs mentionné à la fin de la sous-section 3.2.2, toutes les définitions jusqu'ici manipulées ont été données indépendamment de tout système élémentaire gauche ou droite fixé pour les bimodules. Cependant, dans la suite on aura besoin de recourir le plus souvent à un système gauche ou droite de flèches pour  $\mathcal{Q}$  (voir Définition 3.2.3). Soient  $\mathcal{L}\mathcal{Q}_1$  un système gauche de flèches et  $\mathcal{R}\mathcal{Q}_1$  un système droite de flèches pour  $\mathcal{Q}$ , auxquels sont associés les systèmes de flèches duals  $\mathcal{L}\mathcal{Q}_1^*$  et  $\mathcal{R}\mathcal{Q}_1^*$  correspondants. Une fois que  $\mathcal{L}\mathcal{Q}_1$  et  $\mathcal{R}\mathcal{Q}_1$  sont fixés, nous adopterons toujours la convention suivante : pour chaque paire de générateurs  $x \in \mathcal{L}\mathcal{Q}_1$  et  $y \in \mathcal{R}\mathcal{Q}_1$  on posera (lorsqu'aucune confusion n'est possible) :  $\partial_x^r = \partial_{x^*}^r$  et  $\partial_y^l = \partial_{y^*}^l$ , si bien que pour tout  $v = \sum_{x \in \mathcal{L}\mathcal{Q}_1} v_x \otimes x = \sum_{y \in \mathcal{R}\mathcal{Q}_1} y \otimes v_y \in J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}$  on a :  $\partial_x^r v = \partial_{x^*}^r v = \langle v \otimes x^* \rangle = v_x$  et  $\partial_y^l v = \partial_{y^*}^l v = \langle y^* \otimes v \rangle = v_y$ . On écrira aussi  $\partial_{x,y} = \partial_{y^* \otimes x^*}$ , si bien que  $\partial_{x,y} = \partial_y^l \partial_x^r = \partial_x^r \partial_y^l$ . Ainsi, tous les résultats et identités établis jusqu'ici peuvent se réécrire en utilisant les notations liées aux systèmes  $\mathcal{L}\mathcal{Q}_1$  et  $\mathcal{R}\mathcal{Q}_1$ . Il est aussi important de toujours garder à l'esprit que, les formes bilinéaires non-dégénérées attachées à la paire dualisante  $\{B, B^*\}$

identifient naturellement  $B^*$  avec le bimodule dual droit  $B^R$  et avec le bimodule dual gauche  ${}^L B$ , si bien que  ${}^L Q_1^* = \{x^* : x \in {}^L Q_1\}$  peut être regardé comme étant un système droite de flèches pour  ${}^L B$  tandis que  ${}^R Q_1^*$  peut être regardé comme étant un système gauche de flèches pour  $B^R$ .

### 3.3 Loi de Leibniz cyclique et images homomorphes continues des idéaux jacobiens

L'objet primordial de cette section est de trouver une version non simplement lacée de la "loi de Leibniz cyclique" pour les potentiels, permettant de montrer que les isomorphismes de  $k$ -algèbres topologiques préservent les idéaux jacobiens. Sauf mention contraire,  $\mathcal{Q}$  désigne comme avant un carquois  $k$ -modulé avec  $K = kQ_0$  et  $B = kQ_1$  le  $K$ -bimodule de toutes les flèches valuées dans  $\mathcal{Q}$ . Habituellement, on pose  $I = Q_0$  l'ensemble des points de  $\mathcal{Q}$ , et on doit avoir en vue les notations (3.2.1).

Dans le cas simplement lacé [24, 3.7,3.8,3.9], la capacité de réduire un carquois avec potentiel  $(\mathcal{Q}, S)$  repose essentiellement sur la propriété suivante des idéaux jacobiens simplement lacés : tout isomorphisme d'algèbres  $\varphi : \widehat{kQ} \xrightarrow{\sim} \widehat{kQ}$  tel que  $\varphi|_K = \mathbb{1}_K$  envoie l'idéal jacobien  $J_S$  sur l'idéal jacobien  $J_{\varphi(S)}$ . La preuve d'un tel résultat repose sur l'introduction de deux nouveaux opérateurs différentiels  $\Delta$  et  $\square$  sur  $\widehat{kQ}$  permettant de faire du calcul différentiel sur  $\widehat{kQ}$ , pour obtenir la relation suivante baptisée par les auteurs de [24] par "loi de Leibniz cyclique" :  $\partial_\xi(v \cdot v') = \Delta_\xi(v) \square v' + \Delta_\xi(v') \square v$ , et admettant une forme générale portant sur tout produit fini de  $m$  facteurs de la forme  $v_1 \cdots v_m$ . On exploite une certaine "symétrie" propre aux algèbres de chemins simplement lacées :  $\widehat{kQ}$  possède de façon canonique une  $k$ -base de chemins et le calcul des dérivées cycliques appliqué par exemple à un chemin  $\gamma_1 \cdots \gamma_m$ , requiert uniquement la permutation ordinaire des vecteurs de base donnés par les flèches  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ . Ainsi lors des permutations d'un élément quelconque  $W \in kQ$ , les chemins apparaissant dans la décomposition de  $W$  ne sont pas vraiment "altérés" dans le sens que, seul l'ordre des flèches (ou encore vecteurs de la base canonique) change !

La symétrie évoquée plus haut est généralement absente dans les algèbres de chemins des carquois modérés, car ici, les scalaires sont éléments des  $k$ -surcorps et n'agissent plus nécessairement de façon centrale sur les éléments de l'algèbre de chemins (même lorsque les  $k$ -surcorps sont commutatifs). De plus la "permutation cyclique tordue" n'est en principe correctement définie que sur la sous-algèbre non unifère  $\text{pot}(\mathcal{Q})$  des potentiels sur  $\mathcal{Q}$  (éléments  $K$ -centraux dans  $\widehat{kQ}$ ) et fait appel à des "simplifications à gauche ou à droite par des bases droites ou gauches des bimodules de flèches", ce qui rend le contrôle des permutations plus complexe.

*Remarque 3.3.1.* Pour toute famille  $h_i : V_i \longrightarrow A$  de morphismes de  $K$ -bimodules avec  $1 \leq i \leq m$ , et tel que  $A$  soit aussi une  $k$ -algèbre, on a un unique morphisme de  $K$ -bimodules  $\bigotimes_{i=1}^m h_i : \bigotimes_{i=1}^m V_i = V_1 \otimes \cdots \otimes V_m \longrightarrow A$  tel que  $(\bigotimes_{i=1}^m h_i)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = h_1(v_1) \cdots h_m(v_m)$ , pour tous  $v_i \in V_i$  avec  $1 \leq i \leq m$ .

Il suffit de voir que pour  $m = 2$ , on peut appliquer la propriété universelle du produit tensoriel  $V_1 \otimes V_2$

au fait que l'application  $h : V_1 \times V_2 \longrightarrow A$ , telle que  $h(v_1, v_2) = h_1(v_1)h_2(v_2)$  pour tous  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ , vérifie la relation :  $h(v_1 \cdot a, v_2) = h(v_1, a \cdot v_2)$  pour tout  $a \in K$  et tous  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ .

Nous avons heureusement le résultat ci-après nous permettant alors de contrôler les permutations tordues d'un potentiel. Et ce résultat n'est pas possible sans la condition de symétrisabilité exigée pour les paires dualisantes de bimodules, en effet en présence d'une telle condition naturelle on a établi dans le lemme 3.1.4-(2) que tout morphisme de bimodules est dualisant relativement à deux paires dualisantes et symétrisables de bimodules dont la symétrisabilité est exprimée par rapport à une même paire de formes traces non-dégénérées fixées. On rappelle que  $K = \prod_{i \in I} k_i$ , et dans la proposition 3.3.1 ci-après on suppose que la condition (3.2.2) est satisfaite, c'est à dire, la symétrisabilité des autres paires dualisantes de  $K$ -bimodules est exprimée par rapport à la famille  $(k_i, \iota_i)_{i \in I}$  fixée dans le carquois modulé  $\mathcal{Q}$ .

**Proposition 3.3.1.** *Soient  $f = (f_l)_{l \geq 1} : U \longrightarrow J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}^{\infty}$  et  $f' = (f'_l)_{l \geq 1} : U' \longrightarrow J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}^{\infty}$  deux morphismes de  $K$ -bimodules où  $U \xrightarrow{f_l} B^{(l)}$  et  $U' \xrightarrow{f'_l} B^{(l)}$  sont des morphismes de  $K$ -bimodules pour  $l \geq 1$ ,  $\{U, U^*\} = \bigoplus_{i,j \in I} \{ {}_i U_j, {}_i U_j^* \}$  et  $\{U', U'^*\} = \bigoplus_{i,j \in I} \{ {}_i U'_j, {}_i U'^*_j \}$  sont des sommes directes de paires dualisantes et symétrisables de bimodules et pour chaque  $i, j \in I$ , et où  ${}_i U_j$  et  ${}_i U'_j$  sont des  $k_i$ - $k_j$ -bimodules avec  $U = \bigoplus_{i,j \in I} {}_i U_j$  et  $U' = \bigoplus_{i,j \in I} {}_i U'_j$ , tel que (3.2.2) soit satisfait. Alors pour tout potentiel  $W : K \longrightarrow U \otimes U'$  dans  $\text{TK}(U \oplus U')$ ,  $\mathfrak{m} = (f \otimes f')(W)$  est un potentiel sur  $\mathcal{Q}$  et les deux énoncés suivants sont vrais.*

- (a) Si on pose  $W = \sum_{k=1}^{q_0} y_k \otimes v_k$ , alors  $\mathfrak{m}_l := \sum_{k=1}^{q_0} f_l(y_k) \otimes f'_l(v_k)$  est un potentiel sur  $\mathcal{Q}$  et on a :
- $$\varepsilon_l^l \mathfrak{m}_l = (f' \otimes f_l)(\varepsilon_l W) \text{ pour } l \geq 1, \text{ si bien que } \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l^l \mathfrak{m}_l = (f' \otimes f)(\varepsilon_l W).$$
- (b) Si on pose  $W = \sum_{k=1}^{p_0} u_k \otimes x_k$  alors  $\mathfrak{m}'_l := \sum_{k=1}^{p_0} f_l(u_k) \otimes f'_l(x_k)$  est un potentiel sur  $\mathcal{Q}$  et on a :
- $$\varepsilon_l^l \mathfrak{m}'_l = (f'_l \otimes f)(\varepsilon_l W) \text{ pour } l \geq 1, \text{ si bien que } \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l^l \mathfrak{m}'_l = (f' \otimes f)(\varepsilon_l W).$$

En particulier pour deux carquois  $k$ -modulés  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}'$  avec  $k\mathcal{Q}_0 = K = k\mathcal{Q}'_0$ , tout morphisme de  $k$ -algèbres  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}'}$  tel que  $\phi|_K = 1_K$  préserve les commutateurs tordus dans le sens que  $\phi(\text{skew}\{\widehat{k\mathcal{Q}}, \widehat{k\mathcal{Q}}\}) \subset \text{skew}\{\widehat{k\mathcal{Q}'}, \widehat{k\mathcal{Q}'}\}$ .

*Démonstration.*

**Énoncé (a).** Comme tout morphisme de  $K$ -bimodules doit préserver les éléments  $K$ -centraux et donc les potentiels, ayant en vue la remarque 3.3.1 on voit que les éléments  $\mathfrak{m} = (f \otimes f')(W)$ ,  $\mathfrak{m}_l = (f_l \otimes f')(W)$  et  $\mathfrak{m}'_l = (f \otimes f'_l)(W)$  sont bien des potentiels sur  $\mathcal{Q}$ , avec  $l \geq 1$ .

Pour le second volet de (a), rappelons que l'expression des opérateurs de permutation ne dépend pas des systèmes élémentaires gauches ou droites choisis. Pour le calcul de  $\varepsilon_l W$  on a besoin du morphisme canonique  $K \xrightarrow{\delta' = \delta_{U^* \otimes U}} U^* \otimes U$ . Soit  $l \geq 1$  un entier fixé, en vertu lemme 3.1.4-(2) et de la condition (3.2.2), soit  $f_l^* : (B^{(l)})^* = B^{*(l)} \longrightarrow U^*$  le morphisme dual de  $f_l$ , on considère les suites exactes courtes suivantes où les morphismes sont des paires inclusions-projections canoniques

$$0 \longrightarrow \text{Im}(f_l^*) \hookrightarrow U^* \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow 0 \text{ et } 0 \longrightarrow \text{Im}(f_l) \hookrightarrow B^{(l)} \longrightarrow \overline{N} \longrightarrow 0,$$

et on pose  $\overline{N}^* := \ker(f_l) \subset U$ ,  $\overline{M}^* := \ker(f_l^*)$ . En vertu du lemme 3.1.7-(1), on a des paires dualisantes et symétrisables de bimodules  $\{\text{Im}(f_l), \text{Im}(f_l^*)\}$ ,  $\{\ker(f_l), \overline{N}\} := \{\overline{N}^*, \overline{N}\}$  et  $\{\ker(f_l^*), \overline{M}\} := \{\overline{M}^*, \overline{M}\}$  dont les structures sont naturellement induites par la paire  $(f_l, f_l^*)$  et par les paires dualisantes et symétrisables de bimodules  $\{U, U^*\}$ ,  $\{B^{(l)}, (B^{(l)})^*\}$ . De plus, prenons  $\{Z_1, X_1^*\}$  une paire de systèmes élémentaires mutuellement duals pour  $\{\text{Im}(f_l), \text{Im}(f_l^*)\}$  où  $Z_1 = \{z_1, \dots, z_{p_1}\}$  est un système élémentaire gauche pour  $\text{Im}(f_l)$  et le système dual  $X_1^* = \{x_1^*, \dots, x_{p_1}^*\}$  est un système élémentaire droite pour  $\text{Im}(f_l^*)$ , on considère ensuite une paire  $\{Z_2, Z_2^*\}$  de systèmes élémentaires mutuellement duals pour la paire  $\{B^{(l)}, (B^{(l)})^*\}$  où  $Z_2 = Z_1 \cup \{z_{p_1+1}, \dots, z_{n_l}\}$  est un système élémentaire gauche pour  $B^{(l)}$  avec  $n_l \geq p_1$ , on considère aussi une paire  $\{X_2, X_2^*\}$  de systèmes élémentaires mutuellement duals pour la paire dualisante  $\{U, U^*\}$  où  $X_2^* = X_1^* \cup \{x_{p_1+1}^*, \dots, x_p^*\}$  est un système élémentaire droite pour  $U^*$  avec  $p \geq p_1$ . Alors en vertu du lemme 3.1.7-(2), on a les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{pour } 1 \leq s \leq p_1 \text{ on a : } f_l(x_s) = z_s \text{ et } f_l^*(z_s^*) = x_s^*, \text{ et de plus,} \\ \overline{M}^* := \ker(f_l^*) = \{z_{p_1+1}^*, \dots, z_{n_l}^*\} \cdot K \text{ et } \overline{N}^* := \ker(f_l) = K \cdot \{x_{p_1+1}, \dots, x_p\}. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Maintenant, relativement à la paire de systèmes élémentaires mutuellement duals  $\{X_2, X_2^*\}$  on a :

$$z' \equiv z'(1) = \sum_{s=1}^p x_s^* \otimes x_s \text{ et } \varepsilon_l W = \partial^l(1 \otimes W \otimes 1) \circ z' = \sum_{s=1}^p \sum_{k=1}^{q_0} \langle x_s^* \otimes y_k \rangle \cdot v_k \otimes x_s.$$

Ayant donc en vue les identités de l'équation (3.3.1), on déduit le calcul de  $\varepsilon_l^l m_l$  relativement à la paire de systèmes élémentaires mutuellement duals  $\{Z_2^*, Z_2\}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_l^l m_l &:= \sum_{r=1}^{n_l} \sum_{k=1}^{q_0} \langle z_r^* \otimes f_l(y_k) \rangle \cdot f'(v_k) \otimes z_r = \sum_{r=1}^{n_l} \sum_{k=1}^{q_0} \langle f_l^*(z_r^*) \otimes y_k \rangle \cdot f'(v_k) \otimes z_r \\ &= \sum_{r=1}^{p_1} \sum_{k=1}^{q_0} \langle f_l^*(z_r^*) \otimes y_k \rangle \cdot f'(v_k) \otimes z_r + 0 = \sum_{r=1}^{p_1} \sum_{k=1}^{q_0} \langle x_r^* \otimes y_k \rangle \cdot f'(v_k) \otimes f_l(x_r) + 0 \\ &= \sum_{r=1}^p \sum_{k=1}^{q_0} \langle x_r^* \otimes y_k \rangle \cdot f'(v_k) \otimes f_l(x_r) = (f' \otimes f_l) \left( \sum_{r=1}^p \sum_{k=1}^{q_0} \langle x_r^* \otimes y_k \rangle \cdot v_k \otimes x_r \right) \\ &= (f' \otimes f_l)(\varepsilon_l W). \end{aligned}$$

En prenant maintenant la somme sur tous les  $l \geq 1$ , on a immédiatement :

$$\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l^l m_l = \sum_{l=1}^{\infty} (f' \otimes f_l)(\varepsilon_l W) = (f' \otimes \sum_{l=1}^{\infty} f_l)(\varepsilon_l W) = (f' \otimes f)(\varepsilon_l W).$$

**Énonce (b).** La preuve découle de celle de (a) en appliquant un argument dual.

Pour le dernier volet de la proposition 3.3.1, on suppose que  $\phi : \widehat{kQ} \longrightarrow \widehat{kQ}'$  est un morphisme d'algèbres tel que  $\phi|_K = 1_K$ . Comme dans la proposition 3.2.1,  $\phi$  correspond à une famille  $(\phi_l)_{l \geq 1}$  de morphismes de  $K$ -bimodules  $\phi_l : B \longrightarrow B^{(l)}$ , en particulier  $\phi$  est continu et nous pouvons appliquer les volets (a) et (b) à toute composante de  $\phi$ . Ainsi pour tout potentiel  $m = \sum_{k=1}^q y_k \otimes v_k \in B^{(d)}$ , avec  $y_k \in B$ , si on pose  $m_l = \sum_{k=1}^q \phi_l(y_k) \otimes \phi(v_k)$ , alors on a :  $\phi(m - \varepsilon_l m) = \phi(m) - \phi(\varepsilon_l m) = \sum_{l=1}^{\infty} m_l - \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l^l m_l = \sum_{l=1}^{\infty} m_l - \varepsilon_l^l m_l \in \text{skew}\{\widehat{kQ}', \widehat{kQ}'\}$ . Ceci entraîne que  $\phi(\text{skew}[\widehat{kQ}, \widehat{kQ}]) \subset \text{skew}\{\widehat{kQ}', \widehat{kQ}'\}$ , mais  $\phi$  est continu si bien que  $\phi(\text{skew}\{\widehat{kQ}, \widehat{kQ}\}) \subset \overline{\phi(\text{skew}[\widehat{kQ}, \widehat{kQ}])} \subset \text{skew}\{\widehat{kQ}', \widehat{kQ}'\}$ .  $\square$

La prochaine étape consiste à développer un calcul différentiel pour les potentiels, nous allons imiter les constructions de [24, sec 3]. On commence par considérer le  $k$ -espace topologique donné par

$$\widehat{kQ} \widehat{\otimes} \widehat{kQ} = \prod_{d,e \geq 0} (B^{(d)} \otimes_k B^{(e)}),$$

pour lequel une base de voisinages ouverts de 0 est formée des sous- $k$ -espaces vectoriels  $\prod_{d+e \geq m} (B^{(d)} \otimes_k B^{(e)})$ , avec  $m \geq 0$ ; ainsi  $kQ \otimes_k kQ$  est dense dans  $\widehat{kQ} \widehat{\otimes} \widehat{kQ}$ . On considère un système gauche de flèches  ${}_L Q_1$  et un système droite de flèches  ${}_R Q_1$  pour  $Q$ , alors relativement aux systèmes de flèches  ${}_L Q_1$  et  ${}_R Q_1$ , les morphismes canoniques de bimodules  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{B \otimes B^*} : K \longrightarrow B \otimes B^*$  et  $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}_{B^* \otimes B} : K \longrightarrow B^* \otimes B$  se relèvent en deux applications  $k$ -linéaires  $\widehat{\mathfrak{z}} : K \longrightarrow B \otimes_k B^*$  et  $\widehat{\mathfrak{z}}' : K \longrightarrow B^* \otimes_k B$ . Donc  $\widehat{\mathfrak{z}}(1) = \sum_{y \in {}_R Q_1} y \otimes_k y^*$  et  $\widehat{\mathfrak{z}}'(1) = \sum_{x \in {}_L Q_1} x^* \otimes_k x$ . On considère l'algèbre commutative semisimple  $k^I = \prod_{i \in I} k$  donnée comme produit indexé par  $I = Q_0$  des copies du corps  $k$ ; soit alors  $\widehat{kQ}_k := \widehat{T}_{k^I}(B)$  l'algèbre simplement lacée au dessus de  $\widehat{kQ}$  et soit  $\widehat{kQ}_k \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widehat{kQ}$  la projection naturelle. Suivant la projection naturelle  $\widehat{\pi}$  on a toujours  $\mathfrak{z} = \widehat{\pi} \circ \widehat{\mathfrak{z}}$  et  $\mathfrak{z}' = \widehat{\pi} \circ \widehat{\mathfrak{z}}'$ . Notons que, même si les relèvements  $\widehat{\mathfrak{z}}$  et  $\widehat{\mathfrak{z}}'$  dépendent des systèmes  ${}_L Q_1$  et  ${}_R Q_1$  choisis, leurs projections dans  $\widehat{kQ}$  ne dépendent pas des systèmes de flèches fixés pour  $\{B, B^*\}$ . De même, les morphismes canoniques associés à toute paire dualisante de bimodules de chemins dans  $\widehat{kQ}$  se relèvent en des applications  $k$ -linéaires à valeur dans  $\widehat{kQ}_k$ .

On voit ensuite que les opérateurs de dérivées partielles gauches et droites se prolongent naturellement en des opérateurs  $k$ -linéaires  $B^* \xrightarrow{\partial^L, \partial^R} \widehat{kQ} \widehat{\otimes} \widehat{kQ}$  tels que pour tout  $\xi \in B^*$  et tous  $v_1 \otimes_k v_2 \in \widehat{kQ} \widehat{\otimes} \widehat{kQ}$  on a :  $\partial_\xi^L(v_1 \otimes_k v_2) := (\partial_\xi^L v_1) \otimes_k v_2$  et  $\partial_\xi^R(v_1 \otimes_k v_2) := v_1 \otimes_k (\partial_\xi^R v_2)$ . Notons que chaque  $v \in \widehat{kQ}$  qui n'est pas nécessairement un potentiel s'identifie à une application  $k$ -linéaire  $K \xrightarrow{v} \widehat{kQ}$  avec  $v(1) = v$ . Alors comme on a fait pour les potentiels, en suivant la définition 3.2.7 des opérateurs de permutations tordues  $\varepsilon_L$  et  $\varepsilon_R$ , nous relevons et prolongeons  $\varepsilon_L$  et  $\varepsilon_R$  en des opérateurs  $k$ -linéaires

$$J_{\widehat{kQ}} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}_L, \widehat{\varepsilon}_R} \widehat{kQ} \widehat{\otimes} \widehat{kQ}, \text{ avec } \widehat{\varepsilon}_L = \partial^L \circ (\mathbb{1}_{B^*} \otimes (-) \otimes_k \mathbb{1}_B) \circ \widehat{\mathfrak{z}}' \text{ et } \widehat{\varepsilon}_R = \partial^R \circ (\mathbb{1}_B \otimes_k (-) \otimes \mathbb{1}_{B^*}) \circ \widehat{\mathfrak{z}}.$$

Ainsi sur chaque tenseur  $v = v_0 \otimes \cdots \otimes v_d \in B^{(d+1)}$  avec  $d \geq 0$  on a :  $\widehat{\varepsilon}_L v = \sum_{x \in {}_L Q_1} (\partial_x^L v) \otimes_k x \in B^{(d)} \otimes_k B$  et  $\widehat{\varepsilon}_R v = \sum_{y \in {}_R Q_1} y \otimes_k (\partial_y^R v) \in B \otimes_k B^{(d)}$ . De même, pour chaque  $1 \leq t \leq d$ , les opérateurs,

$J_{\widehat{kQ}}^d \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}_L^t, \widehat{\varepsilon}_R^t} \widehat{kQ} \widehat{\otimes} \widehat{kQ}$  sont également des relèvements prolongés des opérateurs  $\varepsilon_L^t$  et  $\varepsilon_R^t$ . Ainsi,  $\widehat{\varepsilon}_L^t v = \sum_{\tilde{x} \in {}_L Q_t} (\partial_{\tilde{x}}^L v) \otimes_k \tilde{x} \in B^{(d+1-t)} \otimes_k B^{(t)}$  et  $\widehat{\varepsilon}_R^t v = \sum_{\tilde{y} \in {}_R Q_t} \tilde{y} \otimes_k (\partial_{\tilde{y}}^R v) \in B^{(t)} \otimes_k B^{(d+1-t)}$ . On définit les opérateurs

$J_{\widehat{kQ}} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}_L^0, \widehat{\varepsilon}_R^0} \widehat{kQ} \widehat{\otimes} \widehat{kQ}$  par :  $\widehat{\varepsilon}_L^0 v = v \otimes_k 1$  et  $\widehat{\varepsilon}_R^0 v = 1 \otimes_k v$ .

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour introduire en chaque point  $\xi \in B^*$  les deux opérateurs différentiels gauche et droite suivants :

$$\widehat{kQ} \xrightarrow{\Delta_\xi^L, \Delta_\xi^R} \widehat{kQ} \widehat{\otimes} \widehat{kQ}, \text{ avec } \Delta_\xi^L v = \partial_\xi^L \left( \sum_{t=0}^d \widehat{\varepsilon}_L^t v \right) \text{ et } \Delta_\xi^R v = \partial_\xi^R \left( \sum_{t=0}^d \widehat{\varepsilon}_R^t v \right), \quad (3.3.2)$$

pour chaque élément  $v = v_0 \otimes \cdots \otimes v_d \in B^{(d+1)}$  de degré  $d+1 \geq 1$ .

Le prochain opérateur différentiel qui nous intéresse est l'opérateur k-bilinéaire qui suit :

$$\widehat{kQ} \widehat{\otimes} \widehat{kQ} \times \widehat{kQ} \xrightarrow{\square} \widehat{kQ} \text{ avec, } (u \otimes_k v) \square w = u \cdot w \cdot v := \widehat{\pi}(u \otimes_k (w \cdot v)) = \widehat{\pi}((u \cdot w) \otimes_k v), \quad (3.3.3)$$

pour tous  $u, v, w \in \widehat{kQ}$ .

*Remarque 3.3.2.* Si  $m = \sum_{l=1}^{\infty} u_l \otimes v_l$  est une décomposition quelconque d'un potentiel  $m$  sur  $Q$  et  $\xi \in B^*$ , alors toute expression de l'une des formes,  $\sum_{l=1}^{\infty} (\Delta_{\xi}^{\downarrow} u_l) \square v_l$ ,  $\sum_{l=1}^{\infty} (\Delta_{\xi}^{\uparrow} v_l) \square u_l$ , ne dépend pas des systèmes de flèches choisis pour le calcul de  $\Delta_{\xi}^{\downarrow}$  et  $\Delta_{\xi}^{\uparrow}$ . Ainsi dans toute manipulation des potentiels impliquant  $\Delta_{\xi}^{\downarrow}$  et  $\Delta_{\xi}^{\uparrow}$ , il n'est pas nécessaire de préciser les systèmes de flèches utilisés, si bien que  $\Delta_{\xi}^{\downarrow}$  et  $\Delta_{\xi}^{\uparrow}$  peuvent être vus comme des simples notations (ou abréviations).

Les relations suivantes suivent directement des définitions ci-dessus.

**Lemme 3.3.2.** Soient  $u_1, u'_1, \dots, u_n, u'_n \in B^{(d+1)}$  et  $t \in \mathbb{Z}_{d+1} := \{0, 1, \dots, d\}$  un entier avec  $d \geq 0$ . On suppose que  $v_1, v'_1, \dots, v_n, v'_n \in \widehat{kQ}$  sont deux familles d'éléments telles que les sommes  $m = \sum_{k=1}^n u_k \cdot v_k$  et  $m' = \sum_{k=1}^n v'_k \cdot u'_k$  soient des potentiels. Alors les égalités suivantes sont valides.

$$\varepsilon_L^t m = \sum_{k=1}^n (\widehat{\varepsilon}_L^t u_k) \square v_k \quad \text{et} \quad \varepsilon_R^t m' = \sum_{k=1}^n (\widehat{\varepsilon}_R^t u'_k) \square v'_k.$$

*Démonstration.* Pour établir la première égalité du lemme, il suffit de considérer le cas où pour chaque  $1 \leq k \leq n$  on a  $u_k \in B^{\omega_k}$  pour un chemin  $\omega_k = \gamma_{k,0} \cdots \gamma_{k,d}$ . Si  $t = 0$  alors le résultat est trivial, car  $\widehat{\varepsilon}_L^0 u_k = u_k \otimes_k 1$  et  $\sum_{k=1}^n ((u \otimes_k 1) \square v_k) = m = \sum_{k=1}^n u_k v_k = \varepsilon_L^0 m$ . On suppose maintenant que  $1 \leq t \leq d$ , et en regroupant si nécessaire certains termes dans la somme  $m = \sum_{k=1}^n u_k \cdot v_k$ , on peut aussi supposer que les chemins  $\omega_1, \dots, \omega_n$  sont tels que les sous-chemins sources  $\eta_k = \gamma_{k,0} \cdots \gamma_{k,t-1}$  de longueurs  $t$  soient deux-à-deux distincts, avec  $k = 1, \dots, n$ . Comme dans la définition 3.2.3 on considère pour chaque  $1 \leq k \leq n$  le système gauche de chemins  ${}_L Q_{\eta_k} = {}_L Q_{\gamma_{k,0}} \otimes \cdots \otimes {}_L Q_{\gamma_{k,t-1}}$  associé à  $\eta_k$  et donné comme produit de bases gauches des bimodules des flèches  $\gamma_{k,0}, \dots, \gamma_{k,t-1}$ ; à  ${}_L Q_{\eta_k}$  est associé le système dual  ${}_L Q_{\eta_k}^* = \{\chi^* : \chi \in {}_L Q_{\eta_k}\}$ . Posons :  $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ,  $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ ,  $B^{\omega} = \bigoplus_{1 \leq k \leq n} B^{\omega_k}$ ,  $B^{\eta} = \bigoplus_{1 \leq k \leq n} B^{\eta_k}$  et  ${}_L Q_{\eta} = {}_L Q_{\eta_1} \cup \cdots \cup {}_L Q_{\eta_n}$ . L'application de la définition 3.2.7 donne que la permutation,  $\varepsilon_L^t m = \varepsilon_L^{\eta} m := \sum_{k=1}^n \varepsilon_L^{\eta_k} m$  s'exprime à l'aide de l'opérateur de dérivée partielle gauche  $\partial_{\eta}^t := \sum_{k=1}^n \partial_{\eta_k}^t = \partial^t|_{(B^{\eta})^* \otimes B^{\omega}}$  comme suit :

$$\varepsilon_L^t m = \sum_{\chi \in {}_L Q_{\eta}} (\partial_{\chi}^t m) \otimes \chi = \sum_{k=1}^n \sum_{\chi \in {}_L Q_{\eta_k}} (\partial_{\chi}^t u_k) v_k \otimes \chi.$$

On voit donc que  $\varepsilon_L^t m = \sum_{k=1}^n ((\sum_{\chi \in {}_L Q_{\eta_k}} (\partial_{\chi}^t u_k) \otimes_k \chi) \square v_k) = \sum_{k=1}^n (\widehat{\varepsilon}_L^t u_k) \square v_k$ , établissant ainsi la première égalité de notre lemme.

De manière duale, en utilisant un système droite de chemins fixé pour  $\widehat{kQ}$ , la seconde égalité du lemme découle aussi d'une application directe des définitions.  $\square$

Nous pouvons à présent énoncer une version non-simplement lacée de la Loi de Leibniz, on suppose dans l'énoncé suivant que la condition (3.2.2).

**Lemme 3.3.3** (Loi de Leibniz cyclique). *Soit  $d \in \mathbb{N}_*$ , pour chaque  $r \in \mathbb{Z}_{d+1} := \{0, 1, \dots, d\}$ , soient  $\{U_r, U_r^*\} = \bigoplus_{i,j \in I} \{ {}_i U_{r;j}, {}_i U_{r;j}^* \}$  une somme directe de paires dualisantes et symétrisables de bimodules où chaque  ${}_i U_{r;j}$  est un  $k_i$ - $k_j$ -bimodules et  $U_r = \bigoplus_{i,j \in I} {}_i U_{r;j}$ ,  $f_r : U_r \longrightarrow \widehat{J_{kQ}}$  un morphisme de  $K$ -bimodules. Soit  $K \xrightarrow{W} \bigotimes_{r=0}^d U_r$  un potentiel homogène de degré  $d+1$  dans  $\mathrm{TK}(\bigoplus_{r \in \mathbb{Z}_{d+1}} U_r)$ ; pour chaque  $r \in \mathbb{Z}_{d+1}$  on pose :*

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_L^r W &= \sum_{k=1}^{q_r} r y_k \otimes r v_k \in U_r \otimes \left( \bigotimes_{t=0}^{d-1} U_{r+1+t} \right) \text{ avec } r y_k \in U_r, r v_k \in \bigotimes_{t=0}^{d-1} U_{r+1+t}; \\ \varepsilon_R^r W &= \sum_{s=1}^{p_r} r u_s \otimes r x_s \in \left( \bigotimes_{t=0}^{d-1} U_{t-r} \right) \otimes U_{d-r} \text{ avec } r x_s \in U_{d-r}, r u_s \in \bigotimes_{t=0}^{d-1} U_{t-r}; \\ m &:= \left( \bigotimes_{t=0}^d f_t \right) (W) = \sum_{k=1}^{q_0} f_0({}_0 y_k) \otimes \left( \bigotimes_{t=1}^d f_t \right)({}_0 v_k). \end{aligned} \right\} \quad (3.3.4)$$

Alors pour le potentiel  $m$  sur  $Q$  et pour tout  $\xi \in B^*$  on a la loi de Leibniz  $(d_1, d_2)$ -cyclique suivante avec  $-1 \leq d_1, d_2$  et  $d_1 + d_2 + 1 = d$ .

$$\partial_\xi m = \sum_{r=0}^{d_1} \sum_{k=1}^{q_r} (\Delta_\xi^L f_r(r y_k)) \square \left( \bigotimes_{t=0}^{d-1} f_{r+1+t} \right) (r v_k) + \sum_{r=0}^{d_2} \sum_{s=1}^{p_r} (\Delta_\xi^R f_{d-r}(r x_s)) \square \left( \bigotimes_{t=0}^{d-1} f_{t-r} \right) (r u_s). \quad (3.3.5)$$

On convient que les sommes vides obtenues pour  $d_1 = -1$  et pour  $d_2 = -1$  sont nulles, et pour tout entier  $t \geq 1$ , dans les expressions  ${}_t \zeta_k$  et  ${}_t \zeta_s$  pour  $\zeta \in \{x, y, u, v\}$  et dans l'expression  $f_t$ , l'entier  $t$  est identifié à sa classe dans  $\mathbb{Z}_{d+1} := \{0, 1, \dots, d\}$ .

*Démonstration.* Le début de cette preuve consiste juste en quelques notations délicates; essentiellement, l'équation (3.3.5) découle de l'application de la proposition 3.3.1, cela se fait en utilisant les identités (4)-(4') et les énoncés (a) – (b) un peu plus bas.

Rappelons d'abord le fait suivant : Pour  $1 \leq i \leq p$ , soient  $\zeta_i = (\zeta_{i,l})_{l \geq 1} = \sum_{l=1}^{\infty} \zeta_{i,l}$  et  $\zeta'_i = (\zeta'_{i,l})_{l \geq 1} = \sum_{l=1}^{\infty} \zeta'_{i,l} \in \widehat{J_{kQ}}$  où  $\zeta_{i,l}, \zeta'_{i,l} \in B^{(l)}$  sont des éléments homogènes de degré  $l$  pour tout entier  $l \geq 1$ , et supposons que  $S_l = \sum_{i=1}^p \zeta_{i,l} \otimes \zeta'_i$  et  $S'_l = \sum_{i=1}^p \zeta_i \otimes \zeta'_{i,l}$  sont des potentiels sur  $Q$ . En appliquant le lemme 3.3.2 (ou simplement la définition des opérateurs différentiels " $\Delta_\xi^L, \Delta_\xi^R, \square$ ") on voit clairement qu'on a les identités suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^p (\Delta_\xi^L \zeta_{i,l}) \square \zeta'_i &= \partial_\xi^L \sum_{t=0}^{l-1} \varepsilon_L^t S_t \text{ et } \sum_{i=1}^p (\Delta_\xi^R \zeta'_{i,l}) \square \zeta_i = \partial_\xi^R \sum_{t=0}^{l-1} \varepsilon_R^t S'_t, \text{ et ainsi} \\ \partial_\xi^L \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{l-1} \varepsilon_L^t \sum_{i=1}^p \zeta_{i,l} \otimes \zeta'_i &= \sum_{i=1}^p (\Delta_\xi^L \zeta_i) \square \zeta'_i \text{ et } \partial_\xi^R \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{l-1} \varepsilon_R^t \sum_{i=1}^p \zeta_i \otimes \zeta'_{i,l} = \sum_{i=1}^p (\Delta_\xi^R \zeta'_i) \square \zeta_i. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Soit  $m \geq 1$  un entier, on pose  $\mathbb{N}_*^m = \underbrace{\mathbb{N}_* \times \cdots \times \mathbb{N}_*}_{m \text{ copies}}$  où  $\mathbb{N}_* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , soient également  $h_i = (h_{i,l})_{l \geq 1} : V_i \longrightarrow J_{\widehat{\mathbb{Q}}} = \prod_{l \geq 1} B^{(l)}$  une famille de morphismes de K-bimodules où  $h_{i,l} : V_i \longrightarrow B^{(l)}$  est un morphisme de K-bimodules avec  $1 \leq i \leq m$ . Observons alors que pour tout  $\alpha_i \in V_i$  avec  $1 \leq i \leq m$ , on a l'égalité ci-dessous :

$$\left( \bigotimes_{i=1}^m h_i \right) (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m) = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_m=1}^{\infty} \left( \bigotimes_{i=1}^m h_{i,\lambda_i} \right) (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m) = \sum_{\lambda \in \mathbb{N}_*^m} \left( \bigotimes_{i=1}^m h_{i,\lambda_i} \right) (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m). \quad (2)$$

Pour chaque  $r \in \mathbb{Z}_{d+1}$ , on sait que  $f_r = (f_{r,l})_{l \geq 1} : U_r \longrightarrow J_{\widehat{\mathbb{Q}}} = \prod_{l \geq 1} B^{(l)}$  pour une famille  $U_r \xrightarrow{f_{r,l}} B^{(l)}$  de morphismes de K-bimodules, ainsi  $f_r(x) = \sum_{l=1}^{\infty} f_{r,l}(x)$  pour tous  $x \in U_r$ . Pour chaque suite  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{N}_*^{d+1}$  on pose :

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_\lambda &:= \left( \bigotimes_{r=0}^d f_{r,\lambda_r} \right) (W) \in B^{(\lambda_0)} \otimes \cdots \otimes B^{(\lambda_d)}; \text{ ainsi, } \mathfrak{m} = \left( \bigotimes_{r=0}^d f_r \right) (W) = \sum_{\lambda \in \mathbb{N}_*^{d+1}} \mathfrak{m}_\lambda. \\ \ell_j(\lambda) &= \lambda_0 + \cdots + \lambda_j; \ell'_j(\lambda) = \lambda_{d-j} + \cdots + \lambda_d; \text{ avec } 0 \leq j \leq d; \\ \ell(\lambda) &= \lambda_0 + \cdots + \lambda_d = \ell_d(\lambda) = \ell'_d(\lambda). \end{aligned} \quad (2')$$

Pour chaque  $r \in \mathbb{Z}_{d+1} = \{0, 1, \dots, d\}$ , en appliquant alors (2) on retient les identités valides ci-dessous.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\lambda \in \mathbb{N}_*^{d+1}} \sum_{r=0}^j \sum_{l=0}^{\lambda_r-1} \varepsilon_L^l \left( \sum_{k=1}^{q_r} f_{r,\lambda_r}(ry_k) \otimes \left( \bigotimes_{t=r+1}^{r+d} f_{t,\lambda_t} \right) (rv_k) \right) = \\ \sum_{r=0}^j \sum_{\lambda_r=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\lambda_r-1} \varepsilon_L^l \left( \sum_{k=1}^{q_r} f_{r,\lambda_r}(ry_k) \otimes \left( \bigotimes_{t=r+1}^{r+d} f_t \right) (rv_k) \right) \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\lambda \in \mathbb{N}_*^{d+1}} \sum_{r=0}^j \sum_{l=0}^{\lambda_r-1} \varepsilon_R^l \left( \sum_{s=1}^{p_r} \left( \bigotimes_{t=-r}^{d-1-r} f_{t,\lambda_t} \right) (ru_k) \otimes f_{d-r,\lambda_{d-r}}(rx_s) \right) = \\ \sum_{r=0}^j \sum_{\lambda_r=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\lambda_r-1} \varepsilon_R^l \left( \sum_{s=1}^{p_r} \left( \bigotimes_{t=-r}^{d-1-r} f_t \right) (ru_k) \otimes f_{d-r,\lambda_{d-r}}(rx_s) \right) \end{array} \right. \quad (3')$$

Maintenant en appliquant (1) aux identités (3) et (3'), on déduit alors les équations suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\xi}^l \sum_{\lambda \in \mathbb{N}_*^{d+1}} \sum_{r=0}^j \sum_{l=0}^{\lambda_r-1} \varepsilon_l^l \left( \sum_{k=1}^{q_r} f_{r,\lambda_r}(ry_k) \otimes \left( \bigotimes_{t=r+1}^{r+d} f_{t,\lambda_t} \right) (rv_k) \right) = \\ \sum_{r=0}^j \sum_{k=1}^{q_r} (\Delta_{\xi}^l f_r(ry_k)) \otimes \left( \bigotimes_{t=r+1}^{r+d} f_t \right) (rv_k), \text{ avec } \bigotimes_{t=r+1}^{r+d} f_t = \bigotimes_{t=0}^{d-1} f_{r+1+t} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\xi}^r \sum_{\lambda \in \mathbb{N}_*^{d+1}} \sum_{r=0}^j \sum_{l=0}^{\lambda_r-1} \varepsilon_r^l \left( \sum_{s=1}^{p_r} \left( \bigotimes_{t=-r}^{d-1-r} f_{t,\lambda_t} \right) (ru_k) \otimes f_{d-r,\lambda_{d-r}}(rx_s) \right) = \\ \sum_{r=0}^j \sum_{s=1}^{p_r} (\Delta_{\xi}^r f_{d-r}(rx_s)) \square \left( \bigotimes_{t=-r}^{d-1-r} f_t \right) (ru_k), \text{ avec } \bigotimes_{t=-r}^{d-1-r} f_t = \bigotimes_{t=0}^{d-1} f_{t-r} \end{array} \right. \quad (4')$$

Le calcul de  $\partial_{\xi} m$  requiert le calcul de la permutation cyclique totale  $\varepsilon_c m$  du potentiel  $m$ , mais comme  $m = \left( \bigotimes_{r=0}^d f_r \right) (W) = \sum_{\lambda \in \mathbb{N}_*^{d+1}} m_{\lambda}$ , on a :  $\varepsilon_c m = \sum_{\lambda \in \mathbb{N}_*^{d+1}} \varepsilon_c m_{\lambda}$ , ainsi il suffit de calculer  $\varepsilon_c m_{\lambda}$  pour chaque composante homogène  $m_{\lambda} \in B^{\ell(\lambda)}$ , avec  $\lambda \in \mathbb{N}_*^{d+1}$ . Nous prouvons alors par récurrence sur  $j \in \mathbb{Z}_{d+1} = \{0, 1, \dots, d\}$  les énoncés suivants pour chaque  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{N}_*^{d+1}$ .

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \quad \sum_{t=0}^{\ell_j(\lambda)-1} \varepsilon_t^t m_{\lambda} = \sum_{r=0}^j \sum_{l=0}^{\lambda_r-1} \varepsilon_l^l \left( \sum_{k=1}^{q_r} f_{r,\lambda_r}(ry_k) \otimes \left( \bigotimes_{t=r+1}^{r+d} f_{t,\lambda_t} \right) (rv_k) \right); \\ \text{(b)} \quad \sum_{t=0}^{\ell'_j(\lambda)-1} \varepsilon_r^t m_{\lambda} = \sum_{r=0}^j \sum_{l=0}^{\lambda_r-1} \varepsilon_r^l \left( \sum_{s=1}^{p_r} \left( \bigotimes_{t=-r}^{d-1-r} f_{t,\lambda_t} \right) (ru_k) \otimes f_{d-r,\lambda_{d-r}}(rx_s) \right). \end{array}$$

En vertu de (2') on sait que  $m_{\lambda} := \left( \bigotimes_{r=0}^d f_{r,\lambda_r} \right) (W)$ , les permutations de  $W$  étant données par les équations (3.3.4). Pour  $j = 0$  on a  $\ell_0(\lambda) = \lambda_0$  et  $\ell'_0(\lambda) = \lambda_d$ , il n'y a évidemment rien à montrer et le résultat suit des définitions. Pour l'étape de récurrence, supposons  $1 \leq j \leq d$  et le résultat vrai pour tout  $0 \leq j' < j$ . Prenons  $j' = j - 1 \geq 0$ , alors  $\ell_j(\lambda) = \lambda_0 + \dots + \lambda_{j'} + \lambda_j = \ell_{j'}(\lambda) + \lambda_j$ . Ainsi on a :

$$\sum_{t=\ell_{j'}(\lambda)}^{\ell_j(\lambda)+\lambda_j-1} \varepsilon_t^t m_{\lambda} = \sum_{t=0}^{\ell_{j'}(\lambda)-1} \varepsilon_t^t m_{\lambda} + \sum_{t=0}^{\lambda_j-1} \varepsilon_t^t \varepsilon_l^{\ell_{j'}(\lambda)} m_{\lambda}. \text{ Comme } m_{\lambda} = (f_{0,\lambda_0} \otimes \dots \otimes f_{j',\lambda_{j'}} \otimes f_{j,\lambda_j} \otimes \dots \otimes f_{d,\lambda_d})(W) \text{ et}$$

$$\ell_{j'}(\lambda) = \lambda_0 + \dots + \lambda_{j'} \text{ contient } j = j' + 1 \text{ termes, en appliquant alors la proposition 3.3.1-(a) on obtient que :}$$

$$\varepsilon_l^{\ell_{j'}(\lambda)} m_{\lambda} = \varepsilon_l^{\lambda_{j'}} \dots \varepsilon_l^{\lambda_0} m_{\lambda} = (f_{j,\lambda_j} \otimes \dots \otimes f_{d,\lambda_d} \otimes f_{0,\lambda_0} \otimes \dots \otimes f_{j',\lambda_{j'}})(\varepsilon_l^j W) =$$

$$\sum_{k=1}^{q_j} f_{j,\lambda_j}(jy_k) \otimes \left( \bigotimes_{t=j+1}^{j+d} f_{t,\lambda_t} \right) (jv_k). \text{ On obtient ainsi immédiatement l'énoncé (a) en appliquant l'hypothèse}$$

de récurrence au terme  $\sum_{t=0}^{\ell_{j'}(\lambda)-1} \varepsilon_t^t m_{\lambda}$ .

De même, l'énoncé (b) suit aussi de la récurrence et de l'application directe de la proposition 3.3.1-(b). Pour terminer la preuve, il faut voir comment la dérivée cyclique s'exprime à l'aide de la loi mixte de Leibniz  $(j, j')$ -cyclique pour chaque  $j + j' + 1 = d$  avec  $j, j' \geq 0$ . Observons que  $\ell(\lambda) = \ell_j(\lambda) + \ell'_{j'}(\lambda)$ .

On a :  $\varepsilon_c m_{\lambda} = \sum_{t=0}^{\ell(\lambda)-1} \varepsilon_t m_{\lambda} = \sum_{t=0}^{\ell_j(\lambda)-1} \varepsilon_t^t m_{\lambda} + \sum_{t=\ell_j(\lambda)}^{\ell(\lambda)-1} \varepsilon_t m_{\lambda}$ . Or en vertu des volets (2)-(3) de la proposition 3.2.4, comme le potentiel  $m_{\lambda}$  est homogène de degré  $\ell(\lambda)$  on sait que  $m_{\lambda} = \varepsilon_r^{\ell(\lambda)} m_{\lambda}$  (les potentiels sont globalement cycliquement stables), et  $\varepsilon_l \circ \varepsilon_r m_{\lambda} = m_{\lambda} = \varepsilon_r \circ \varepsilon_l m_{\lambda}$  et  $\partial_{\xi}^t \circ \varepsilon_r = \partial_{\xi}^r$ . On déduit alors que :

$\sum_{t=\ell_j(\lambda)}^{\ell(\lambda)-1} \varepsilon_L^t \mathbf{m}_\lambda = \sum_{t=\ell_j(\lambda)}^{\ell(\lambda)-1} \varepsilon_L^t \varepsilon_R^{\ell(\lambda)} \mathbf{m}_\lambda = \sum_{t=\ell_j(\lambda)}^{\ell(\lambda)-1} \varepsilon_R^{\ell(\lambda)-t} \mathbf{m}_\lambda = \sum_{t=1}^{\ell(\lambda)-\ell_j(\lambda)} \varepsilon_R^t \mathbf{m}_\lambda = \varepsilon_R \sum_{t=0}^{\ell_{j'}(\lambda)-1} \varepsilon_R^t \mathbf{m}_\lambda$ . En appliquant  $\partial_\xi^t$  à la dernière égalité on obtient :  $\partial_\xi^t \sum_{t=\ell_j(\lambda)}^{\ell(\lambda)-1} \varepsilon_L^t \mathbf{m}_\lambda = \partial_\xi^t \circ \varepsilon_R \left( \sum_{t=0}^{\ell_{j'}(\lambda)-1} \varepsilon_R^t \mathbf{m}_\lambda \right) = \partial_\xi^t \sum_{t=0}^{\ell_{j'}(\lambda)-1} \varepsilon_R^t \mathbf{m}_\lambda$ . Les résultats de ce paragraphe se résument comme suit : pour tous  $j, j' \in \mathbb{Z} := \{0, 1, \dots, d\}$  tels que  $j + j' + 1 = d$  on a :  $\partial_\xi \mathbf{m}_\lambda = \partial_\xi^t \varepsilon_c \mathbf{m}_\lambda = \partial_\xi^t \left( \sum_{t=0}^{\ell_j(\lambda)-1} \varepsilon_L^t \mathbf{m}_\lambda \right) + \partial_\xi^t \left( \sum_{t=0}^{\ell_{j'}(\lambda)-1} \varepsilon_R^t \mathbf{m}_\lambda \right)$ . Comme  $\partial_\xi \mathbf{m} = \sum_{\lambda \in \mathbb{N}^{d+1}} \partial_\xi \mathbf{m}_\lambda$ , on obtient alors la loi de Leibniz  $(j, j')$ -cyclique en reportant la dernière relation et les identités (a)-(b) dans les équations (4) et (4').  $\square$

**Lemme 3.3.4** (Loi des chaînes cyclique). Soit  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}'}$  un morphisme de  $k$ -algèbres pour deux carquois modulés  $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$  avec  $\phi|_K = \mathbb{1}_K$ ,  $k\mathcal{Q}_0 = K = k\mathcal{Q}'_0$  tel que (3.2.2) soit satisfaite,  $B = k\mathcal{Q}_1$  et  $B' = k\mathcal{Q}'_1$ . Alors pour tout potentiel  $\mathbf{m}$  sur  $\mathcal{Q}$ , on a la relation cyclique ci-après pour tout  $\xi \in B'^*$  où  ${}_L\mathcal{Q}_1$  est un système gauche de flèches et  ${}_R\mathcal{Q}_1$  un système droite de flèches pour  $\mathcal{Q}$ .

$$\partial_\xi \phi(\mathbf{m}) = \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1} (\Delta_\xi^t \phi(y)) \square \phi(\partial_y \mathbf{m}) = \sum_{x \in {}_L\mathcal{Q}_1} (\Delta_\xi^r \phi(x)) \square \phi(\partial_x \mathbf{m}) \quad (3.3.6)$$

*Démonstration.* Il suffit de considérer le cas d'un potentiel  $W \in B^{(d+1)}$  homogène de degré  $d+1 \geq 2$ . Alors relativement aux systèmes de flèches  ${}_R\mathcal{Q}_1$  et  ${}_L\mathcal{Q}_1$ , les permutations de  $W$  peuvent s'exprimer comme suit.  $\varepsilon_L^r W = \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1} y \otimes {}_r v_y$  et  $\varepsilon_R^r W = \sum_{x \in {}_L\mathcal{Q}_1} {}_r u_x \otimes x$ , avec  $0 \leq r \leq d$ . Commençons par la version gauche de (3.3.6). Pour  $y_0 \in {}_R\mathcal{Q}_1$  on a :  $\partial_{y_0} W = \partial_{y_0}^t \varepsilon_c W = \partial_{y_0}^t \sum_{r=0}^d \varepsilon_L^r W = \partial_{y_0}^t \left( \sum_{r=0}^d \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1} y \otimes {}_r v_y \right) = \sum_{r=0}^d {}_r v_{y_0}$ . D'autre part, la loi de Leibniz (3.3.5)  $(d, -1)$ -cyclique ne comportant que les " $\Delta_\xi^t$ " donne :  $\partial_\xi \phi(W) = \sum_{r=0}^d \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1} (\Delta_\xi^t \phi(y)) \square \phi({}_r v_y) = \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1} (\Delta_\xi^t \phi(y)) \square \sum_{r=0}^d \phi({}_r v_y) = \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1} (\Delta_\xi^t \phi(y)) \square \phi \left( \sum_{r=0}^d {}_r v_y \right) = \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1} (\Delta_\xi^t \phi(y)) \square \phi(\partial_y W)$ . De la même façon, en appliquant la loi de Leibniz (3.3.5)  $(-1, d)$ -cyclique ne comportant que les " $\Delta_\xi^r$ ", on a également la version droite de la forme.  $\square$

Le résultat principal de cette sous-section est donné par les deux prochaines propositions ci-dessous.

**Proposition 3.3.5.** Soit  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}'}$  un morphisme de  $k$ -algèbres pour deux carquois modulés  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}'$  avec  $k\mathcal{Q}_0 = K = k\mathcal{Q}'_0$  tel que (3.2.2) soit satisfaite et tel que  $\phi|_K = \mathbb{1}_K$ . Alors pour chaque potentiel  $\mathbf{m}$  sur  $\mathcal{Q}$  les idéaux jacobiens associés à  $\mathbf{m}$  et à  $\phi(\mathbf{m})$  sont liés par la relation suivante :  $J_{\phi(\mathbf{m})} \subset \phi(J_{\mathbf{m}})$ . En particulier si  $\phi$  est un isomorphisme alors il envoie  $J_{\mathbf{m}}$  sur  $\phi(J_{\mathbf{m}})$  et induit un isomorphisme d'algèbres jacobiniennes  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathbf{m}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}(\mathcal{Q}', \phi(\mathbf{m}))$ .

*Démonstration.* Pour chaque  $\xi \in B'^* := k\mathcal{Q}'_1$ , le lemme 3.3.4 montre directement que  $\partial_\xi(\phi(\mathbf{m})) \in \phi(J_{\mathbf{m}})$ , et donc  $J_{\phi(\mathbf{m})} \subset \phi(J_{\mathbf{m}})$ . Supposons maintenant que  $\phi$  est un isomorphisme et posons  $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$ . Alors comme  $\phi^{-1}(\mathbf{m}') = \mathbf{m}$ , en appliquant ce qui précède à  $\phi^{-1}$  on obtient que :  $J_{\mathbf{m}} \subset \phi^{-1}(J_{\mathbf{m}'})$  et donc  $\phi(J_{\mathbf{m}}) \subset \phi(\phi^{-1}(J_{\mathbf{m}'})) = J_{\mathbf{m}'} = J_{\phi(\mathbf{m})}$ , établissant alors que  $\phi(J_{\mathbf{m}}) = J_{\phi(\mathbf{m})}$ .  $\square$

Dans la prochaine section nous présentons une seconde approche de la réduction des carquois modulés avec potentiels un peu plus directe et légèrement différente de l'approche utilisée dans [24]. Pour cela on a besoin du résultat suivant qui montre que l'idéal jacobien est préservé par certains épimorphismes d'algèbres (morphisme surjectifs d'algèbres).

**Proposition 3.3.6.** *Soient  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  un carquois modulé avec potentiel,  $\pi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}'}$  un épimorphisme de  $k$ -algèbres pour un carquois modulé  $\mathcal{Q}'$  avec  $k\mathcal{Q}_0 = K = k\mathcal{Q}'_0$  tel que (3.2.2) soit satisfaite et  $\pi|_K = \mathbb{1}_K$ . On suppose en plus que le bimodule  $B = k\mathcal{Q}_1$  s'écrit comme une somme directe de  $K$ -bimodules  $B = B_{\text{triv}} \oplus \overline{B}$  tels que  $\ker(\pi) = J_{\mathfrak{m}}^{\text{triv}} := \langle (\partial \mathfrak{m})(B_{\text{triv}}^*) \rangle$  et  $\pi$  induit un isomorphisme entre  $\overline{B}$  et  $B' = k\mathcal{Q}'_1$ .*

*Alors  $\pi(J_{\mathfrak{m}}) = J_{\pi(\mathfrak{m})}$  si bien que  $\pi$  induit un isomorphisme d'algèbres jacobiennes  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}(\mathcal{Q}', \pi(\mathfrak{m}))$ .*

*Démonstration.* Posons  $\mathfrak{m}' = \pi(\mathfrak{m})$ , en vue d'appliquer le lemme 3.3.4, on choisit un système droite de flèches  ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{Q}_1 = Y \cup \overline{Y}$  pour  $\mathcal{Q}$ , où  $Y$  est un système droite de flèches pour  $B_{\text{triv}}$  et  $\overline{Y}$  est un système droite de flèches pour  $\overline{B}$ . Comme par hypothèse  $\pi$  induit un isomorphisme de  $K$ -bimodules entre  $\overline{B}$  et  $B'$ , on déduit que  $Z := \pi(\overline{Y})$  est un système droite de flèches pour  $B'$  (et donc pour  $\mathcal{Q}'$ ). À chaque système  $S \in \{Y, \overline{Y}, Z\}$  on attache comme d'habitude le système dual  $S^* = \{x^* : x \in S\}$ . On remarque en particulier que pour tous  $z, z' \in Z$  et tout  $v \in \widehat{k\mathcal{Q}'}$ ,  $\Delta_{z^*}^{\perp}(z') \square v = \partial_{z^*}^{\perp}(z' \otimes_K 1)v = \delta_{z, z'} v$ , où  $\delta_{z, z'}$  vaut 1 si  $z = z'$  et 0 dans le cas contraire. Ainsi pour tout  $z_0 = \pi(\overline{y}_0)$  avec  $\overline{y}_0 \in \overline{Y}$ , le lemme 3.3.4 donne :  $\partial_{z_0^*} \mathfrak{m}' = \sum_{y \in Y} (\Delta_{z_0^*}^{\perp} \pi(y)) \square \pi(\partial_{y^*} \mathfrak{m}) + \sum_{\overline{y} \in \overline{Y}} (\Delta_{z_0^*}^{\perp} \pi(\overline{y})) \square \pi(\partial_{\overline{y}^*} \mathfrak{m})$ , mais par hypothèse  $(\partial \mathfrak{m})(B_{\text{triv}}^*) \subset \ker(\pi)$  si bien que  $\pi(\partial_{y^*} \mathfrak{m}) = \pi((\partial \mathfrak{m})(y^*)) = 0$  pour tout  $y \in Y$ , avec la remarque précédente on déduit alors que  $\partial_{z_0^*} \mathfrak{m}' = \sum_{\overline{y} \in \overline{Y}} (\Delta_{z_0^*}^{\perp} \pi(\overline{y})) \square \pi(\partial_{\overline{y}^*} \mathfrak{m}) = \pi(\partial_{\overline{y}_0^*} \mathfrak{m})$ . On a donc montré que pour tout  $z = \pi(\overline{y}) \in Z$  avec  $\overline{y} \in \overline{Y}$ , on a  $\partial_z \mathfrak{m}' := \partial_{z^*} \mathfrak{m}' = \pi(\partial_{\overline{y}^*} \mathfrak{m}) = \pi(\partial_{\overline{y}} \mathfrak{m})$ , et en particulier on voit immédiatement que  $J_{\mathfrak{m}'} \subset \pi(J_{\mathfrak{m}})$ . Mais par définition,  $J_{\mathfrak{m}} := \langle \partial_{\overline{y}} \mathfrak{m}, \partial_y \mathfrak{m} : \overline{y} \in \overline{Y}, y \in Y \rangle$  et, comme  $\pi$  est un épimorphisme continu et tel que  $\ker(\pi) \subset J_{\mathfrak{m}}$ , il suit directement de la proposition 3.2.1 qu'on a :  $\pi(J_{\mathfrak{m}}) = \langle \pi(\partial_{\overline{y}} \mathfrak{m}), \pi(\partial_y \mathfrak{m}) : \overline{y} \in \overline{Y}, y \in Y \rangle = \langle \partial_z \mathfrak{m}' : z \in Z \rangle = J_{\mathfrak{m}'}$ , où dans l'avant-dernière égalité on a aussi utilisé le fait que  $\pi(\partial_y \mathfrak{m}) = 0$  pour chaque  $y \in Y$ .

En conclusion on a bien l'égalité  $\pi(J_{\mathfrak{m}}) = J_{\pi(\mathfrak{m})}$ , et si on pose  $\overline{\pi} : \frac{\widehat{k\mathcal{Q}}}{J_{\mathfrak{m}}^{\text{triv}}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}'}$  l'isomorphisme induit par l'épimorphisme  $\pi$ , alors il s'en suit aussi que :  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}) = \frac{\widehat{k\mathcal{Q}}}{J_{\mathfrak{m}}} \cong \frac{\widehat{k\mathcal{Q}}/J_{\mathfrak{m}}^{\text{triv}}}{J_{\mathfrak{m}}/J_{\mathfrak{m}}^{\text{triv}}} \cong \frac{\widehat{k\mathcal{Q}}}{J_{\pi(\mathfrak{m})}} = \mathcal{J}(\mathcal{Q}', \pi(\mathfrak{m}))$ , car  $\overline{\pi}(J_{\mathfrak{m}}/J_{\mathfrak{m}}^{\text{triv}}) = \pi(J_{\mathfrak{m}}) = J_{\pi(\mathfrak{m})}$ .  $\square$

## 3.4 Réduction des carquois modulés avec potentiels

### 3.4.1 Quelques considérations préliminaires

**Définition 3.4.1.** Soit  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  un carquois modulé avec potentiel qu'on suppose avoir la forme suivante : si  $\mathfrak{m}_w$  et  $\mathfrak{m}'_w$  sont deux composantes non nulles de  $\mathfrak{m}$  correspondant respectivement à deux chemins cycliques distincts  $w$  et  $w'$  dans  $\mathcal{Q}$ , alors  $\mathfrak{m}_w$  et  $\mathfrak{m}'_w$  ne sont pas cycliquement équivalents.

- ▷  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  est *réduit* si  $\mathfrak{m}$  est à valeur dans  $J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}^3$ , si bien que sa composante 2-cyclique  $\mathfrak{m}^{(2)}$  est nulle.
- ▷  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  est *trivial* si  $\mathfrak{m} \in B^{(2)}$  et  $\text{Im}(\partial\mathfrak{m}) = B$ .

**Définition 3.4.2.** Soient  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  et  $(\mathcal{Q}', \mathfrak{m}')$  deux carquois modulés avec potentiels tels que  $\mathcal{Q}_0 = K = \mathcal{Q}'$  et la condition (3.2.2) est satisfaite.

- (i) Une *équivalence droite faible* entre  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  et  $(\mathcal{Q}', \mathfrak{m}')$  est la donnée de tout isomorphisme d'algèbres  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \xrightarrow{\cong} \widehat{k\mathcal{Q}'}$  tel que  $\phi|_K = \mathbb{1}_K$  et  $J_{\phi(\mathfrak{m})} = J_{\mathfrak{m}'}$ .
- (ii) Si de plus dans (i) on a  $\phi(\mathfrak{m})$  cycliquement équivalent à  $\mathfrak{m}'$  alors  $\phi$  est appelé une *équivalence droite* entre  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  et  $(\mathcal{Q}', \mathfrak{m}')$ .
- (iii) On suppose que  $B = B_{\text{triv}} \oplus \text{red}(B)$  comme somme directe de  $K$ -bimodules tels que la paire  $(B_{\text{triv}}, \mathfrak{m}^{(2)})$  détermine un carquois modulé avec potentiel trivial. Si  $(\mathcal{Q}', \mathfrak{m}')$  est réduit, alors une *p-équivalence droite* de  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  sur  $(\mathcal{Q}', \mathfrak{m}')$  est un épimorphisme d'algèbres  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \rightarrow \widehat{k\mathcal{Q}'}$  ayant les propriétés suivantes :  $\phi|_K = \mathbb{1}$  et  $\phi$  induit un isomorphisme entre  $\text{red}(B)$  et  $B' = k\mathcal{Q}'_1$ ,  $\ker(\phi) \subset J_{\mathfrak{m}}$  et  $\phi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}'$ , de sorte que  $\phi(J_{\mathfrak{m}}) = J_{\phi(\mathfrak{m})} = J_{\mathfrak{m}'}$ .

Ainsi dans chacune des situations (i), (ii) et (iii) on a  $\phi(J_{\mathfrak{m}}) = J_{\phi(\mathfrak{m})} = J_{\mathfrak{m}'}$ , et  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}) = \mathcal{J}(\mathcal{Q}', \mathfrak{m}')$  (voir la proposition 3.3.6 pour le cas de (iii)).

L'application directe du corollaire 3.2.3 permet de déduire les faits suivants.

**Remarque 3.4.3.** Un carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  est trivial si et seulement si'il existe une décomposition  $B = U \oplus V$  telle que les dérivées partielles  $B^* \xrightarrow{\partial^l \mathfrak{m}, \partial^r \mathfrak{m}} B$  induisent une paire d'isomorphismes mutuellement duals  $U^* \cong V$  et  $V^* \cong U$ , pour lesquels  $\mathfrak{z}_{U \otimes U^*} \equiv \mathfrak{m} = \sum_{k=1}^p y_k \otimes x_k \equiv \mathfrak{z}_{V^* \otimes V}$ , où  $\{y_1, \dots, y_p\}$  est un système droite de flèches pour  $U$  auquel correspond un système gauche de flèches  $\{x_1, \dots, x_p\}$  pour  $V$ .

Afin de mettre en évidence la difficulté qui apparaît lors de la réduction des carquois modulés avec potentiels ayant des 2-cycles, commençons par un exemple bien simple.

**Exemple 3.4.4.** Prenons  $k = k_0(t)$  où  $k_0$  est un corps dont la caractéristique est un nombre premier  $p$ , alors  $k$  n'est pas parfait. Soit  $\{M, M^*\}$  une paire dualisante et symétrisable de bimodules avec  $M \in {}_E \text{bimod}_E$  pour un  $k$ -surcorps  $E$  de dimension finie, mais de sorte que le produit tensoriel  $E \otimes_k E^\circ$  soit une extension non séparable sur  $k$ . On a les paires dualisantes et symétrisables de bimodules  $\{E, E\}$  (canonique) et  $\{M \otimes M^*, M \otimes M^*\}$ ; on considère le carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$ ,  $\mathcal{Q}$  étant donné comme ci-après où les bimodules sont auto-duals.

$$\begin{array}{ccc}
 & k_2 & \\
 & \parallel & \\
 & E & \\
 \nearrow E & & \searrow E \\
 k_1 = E & \xrightarrow{E} & E = k_3 \\
 & \xrightarrow{M \otimes M^*} & \\
 & & 
 \end{array}$$

Pour besoin de clarté, notons  $e_i := 1 \in E$  l'unité de  $E$  regardé comme le  $k_i$ - $k_{i+}$ -bimodule  ${}_i B_{i+}$ , avec  $(i, i^+) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$  et  ${}_3 B_1^\gamma = E$  le bimodule de la flèche valuée  $1 \xrightarrow{\gamma} 3$ ; posons aussi  ${}_1 B_3^\delta = M \otimes$

$M^*$  le bimodule de la flèche valuée  $1 \xrightarrow{\delta} 3$ , et  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{M \otimes M^*}$ . On pose alors  $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{M \otimes M^*} \otimes e_3 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_3$ . La composante 2-cyclique de  $\mathfrak{m}$  est donc  $\mathfrak{m}^{(2)} = \mathfrak{z} \otimes e_3 = \left( \sum_{k=1}^{k=q} y_k \otimes y_k^* \right) \otimes e_3$ , où  $\{Y, Y^*\}$  est une paire de bases mutuellement duales pour la paire dualisante  $\{M, M^*\}$  telle que  $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$  soit une F-base droite pour  $M$ . Ayant en vue la proposition 3.2.3, on a la dérivée droite  $E = ({}_3B_1^\gamma)^* \xrightarrow{\partial^R \mathfrak{m}^{(2)}} M \otimes M^*$  envoyant  $e_3$  sur  $\mathfrak{z}$  et on considère le bimodule  $U = \text{Im}(\partial^R \mathfrak{m}^{(2)}) = \langle \mathfrak{z} \rangle \subset M \otimes M^* = {}_1B_3^\delta$  puis le quotient  $\bar{U} = (M \otimes M^*)/U$ , on a aussi la dérivée gauche  $M \otimes M^* = ({}_1B_3^\delta)^* \xrightarrow{\partial^L \mathfrak{m}^{(2)}} E$  et on pose  $V = \langle e_3 \rangle = {}_3B_1^\gamma = E$  et  $\bar{U}^* = \ker(\partial^L \mathfrak{m}^{(2)}) \subset M \otimes M^*$ , si  $\{z_0, z_1, \dots, z_q\}$  est une E-base droite pour  $M \otimes M^*$  avec  $z_0 = \mathfrak{z}$ , de base duale  $\{z_0^*, z_1^*, \dots, z_q^*\}$  alors on sait que  $\bar{U}^* = E \cdot \{z_1^*, \dots, z_q^*\}$ . On obtient ainsi deux paires dualisantes et symétrisables de bimodules  $\{U, V\}$ ,  $\{\bar{U}, \bar{U}^*\}$  avec structures induites par la paire  $(\partial^R \mathfrak{m}^{(2)}, \partial^L \mathfrak{m}^{(2)}) = (\partial^R \mathfrak{m}^{(2)})^*$ .

Alors la réduction de  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$ , si elle était possible, consisterait en l'élimination (ou mieux la simplification) des sous-bimodules  $U$  et  $V$  pour aboutir dans le cas de notre exemple à un carquois modulé nécessairement acyclique. Nous considérons alors l'idéal de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  donné par  $I = \bar{I}_0$  avec  $I_0 = \langle (\partial \mathfrak{m})(e_3^*), (\partial \mathfrak{m})(z_0^*) \rangle = \langle \mathfrak{z} + e_1 \otimes e_2, e_3 \rangle$ . Alors pour l'algèbre  $A = \widehat{k\mathcal{Q}}/I$ , la projection canonique  $\pi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow A$  induit une identification  $J_A/J_A^2 \cong \bar{U} \oplus \bar{B}_1$  avec  $\bar{B}_1 = {}_1B_2 \oplus {}_2B_3 \subset J_A$ . Par ailleurs, l'idéal jacobien de  $\mathfrak{m}$  coïncide même avec  $I$ , si bien que  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}) = \widehat{k\mathcal{Q}}/I = A$ . Or, si  $J_A^2$  ne scinde pas dans  $J_A$ , on voit que l'algèbre jacobienne  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$ , ne possède pas de présentation par un carquois modulé 2-acyclique. Et dans une telle inconfortable situation, le carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$ , aussi simple comme on le voit, ne peut pas être réduit en un carquois modulé avec potentiel dont la composante 2-cyclique est nulle. Ceci est dû au fait que le sous-bimodule  $\bar{U}$  construit ci-haut, n'est pas toujours un facteur direct du bimodule  ${}_1B_3^\delta$  attaché à la flèche  $\delta$ , si bien qu'il est impossible "de totalement isoler" la composante 2-cyclique du potentiel  $\mathfrak{m}$ . Notons que dans le cas simplement lacé le problème précédent ne se pose pas, et plus largement sur des corps parfaits la difficulté précédente disparaît heureusement.

*Remarque 3.4.5.* Si le corps de base  $k$  est parfait, alors  $k$  ne possède pas d'extension non séparable de degré fini, si bien que pour tous  $k$ -surcorps  $E$  et  $F$  ( $k$ -algèbres à division) de dimension finie, l'algèbre  $E \otimes_k F^\circ$  est une  $k$ -algèbre séparée et donc semisimple ; voir par exemple [8]. Comme un E-F-bimodule est en fait un  $E \otimes_k F^\circ$ -module à gauche, il en résulte que tout bimodule  $M \in {}_E \text{bimod}_F$  est semisimple et donc, tout sous-bimodule de  $M$  est un facteur direct de  $M$ .  $\square$

Pour toute la suite on suppose que  $\mathfrak{m}$  est un potentiel sur  $\mathcal{Q}$  de sorte que  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  soit un carquois modulé avec potentiel.

On pose  $\mathfrak{m}^{(2)}$  la composante 2-cyclique de  $\mathfrak{m}$ , alors à une permutation cyclique près,  $\mathfrak{m}^{(2)}$  se présente comme suit : notons  $i_r \xrightleftharpoons[\delta_r]{\gamma_r} j_r$ ,  $r = 1, \dots, n_0$ , l'ensemble de tous les 2-cycles pleinement valués dans  $\mathcal{Q}$  à une permutation cyclique près ;

- $\diamond$  les paires de points  $(i_1, j_1), \dots, (i_{n_0}, j_{n_0})$  sont deux-à-deux distinctes, et les bimodules correspondants sont  ${}_i B_{j_r} = {}_i B_{j_r}^{\delta_r}$  et  ${}_j B_{i_r} = {}_j B_{i_r}^{\gamma_r}$ , avec  $1 \leq r \leq n_0$ . On considère alors les sous-ensembles,  $\underline{\delta} := \{\delta_1, \dots, \delta_{n_0}\}$  et  $\underline{\gamma} := \{\gamma_1, \dots, \gamma_{n_0}\}$ , ainsi que les deux bimodules correspondants,  $B^{\underline{\delta}} = \bigoplus_{1 \leq r \leq n_0} {}_i B_{j_r}$  et  $B^{\underline{\gamma}} = \bigoplus_{1 \leq r \leq n_0} {}_j B_{i_r}$ .

$$\triangleright \mathfrak{m}^{(2)} = \sum_{r=1}^{n_0} \mathfrak{m}_r^{(2)} \in \bigoplus_{1 \leq r \leq n_0} ({}_i B_{j_r} \otimes_{k_{j_r}} {}_{j_r} B_{i_r}) \subset B^{\delta} \otimes B^{\gamma}, \text{ où } \mathfrak{m}_r^{(2)} \in {}_i B_{j_r} \otimes_{k_{j_r}} {}_{j_r} B_{i_r}, 1 \leq r \leq n_0.$$

Ensuite pour chaque  $r \in \{1, \dots, n_0\}$ , en vertu de la proposition 3.2.3 on peut écrire le potentiel  $k_{i_r} \xrightarrow{\mathfrak{m}_r^{(2)}} B^{\delta_r} \otimes B^{\gamma_r}$  sous la forme canonique  $\mathfrak{z}_{U_r \otimes V_r}$  comme suit. On considère les dérivées partielles,  $(B^{\gamma_r})^* \xrightarrow{\partial^R \mathfrak{m}_r^{(2)}} B^{\delta_r}$  et  $(B^{\delta_r})^* \xrightarrow{\partial^L \mathfrak{m}_r^{(2)}} B^{\gamma_r}$ , elles forment une paire de morphismes de bimodules mutuellement duals :  $\partial^L \mathfrak{m}_r^{(2)} = (\partial^R \mathfrak{m}_r^{(2)})^*$  et  $\partial^R \mathfrak{m}_r^{(2)} = (\partial^L \mathfrak{m}_r^{(2)})^*$ ; à la paire  $(\partial^R \mathfrak{m}_r^{(2)}, \partial^L \mathfrak{m}_r^{(2)})$  on associe les suites exactes courtes suivantes formées de paires injections-projections canoniques :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \overline{V}_r^* \xrightarrow{j_r} {}_{j_r} B_{i_r}^* \xrightarrow{p_r} U_r \longrightarrow 0, & \quad 0 \longrightarrow \overline{U}_r^* \xrightarrow{q_r} {}_{i_r} B_{j_r}^* \xrightarrow{r_r} V_r \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow V_r \xrightarrow{p_r^*} {}_{j_r} B_{i_r} \xrightarrow{j_r^*} \overline{V}_r := \text{coker } p_r^* \longrightarrow 0, & \quad 0 \longrightarrow U_r \xrightarrow{r_r^*} {}_{i_r} B_{j_r} \xrightarrow{q_r^*} \overline{U}_r := \text{coker } r_r^* \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où on aussi posé  $U_r = \text{Im}(\partial^R \mathfrak{m}_r^{(2)})$ ,  $V_r = \text{Im}(\partial^L \mathfrak{m}_r^{(2)}) = \text{Im}((\partial^R \mathfrak{m}_r^{(2)})^*)$ ,  $\overline{V}_r^* = \ker(\partial^R \mathfrak{m}_r^{(2)})$  et  $\overline{U}_r^* = \ker(\partial^L \mathfrak{m}_r^{(2)}) = \ker((\partial^R \mathfrak{m}_r^{(2)})^*)$ . En vertu du volet (1) de la proposition 3.2.3 on a des paires dualisantes et symétrisables de bimodules  $\{U_r, V_r\}$ ,  $\{\overline{U}_r, \overline{U}_r^*\}$  et  $\{\overline{V}_r, \overline{V}_r^*\}$  dont les structures sont canoniquement induites par les paires dualisantes et symétrisables de bimodules  $\{{}_i B_{j_r}, {}_{i_r} B_{j_r}^*; {}_{i_r} b_{j_r}, {}_{i_r} b'_{j_r}\}$  et  $\{{}_{j_r} B_{i_r}, {}_{j_r} B_{i_r}^*; {}_{j_r} b_{i_r}, {}_{j_r} b'_{i_r}\}$  et par la paire de morphismes mutuellement duals  $(\partial^R \mathfrak{m}_r^{(2)}, \partial^L \mathfrak{m}_r^{(2)})$ . Et de plus, le potentiel  $\mathfrak{m}_r^{(2)}$  coïncide avec le dual de la forme bilinéaire non-dégénérée  $U_r \otimes V_r \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} k_{i_r}$  associée à la paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{U_r, V_r\}$  :

$$\mathfrak{m}_r^{(2)} = \mathfrak{z}_{U_r \otimes V_r} = \sum_{k=1}^{p_r} y_{r,k} \otimes x_{r,k}; \quad Y_r := \{y_{r,1}, \dots, y_{r,p_r}\} \text{ et } X_r := \{x_{r,1}, \dots, x_{r,p_r}\}. \quad (3.4.1)$$

Dans l'équation ci-dessus,  $\{Y_r, X_r\}$  est une paire de bases mutuellement duals pour la paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{U_r, V_r\}$  où  $Y_r$  est une  $k_{j_r}$ -base droite de  $U_r$  et  $X_r$  est la  $k_{j_r}$ -base gauche de  $V_r$  correspondante. On considère ensuite les K-bimodules ci-après où  $I_{\text{triv}}^{(2)} := \{(i_r, j_r), (j_r, i_r) : 1 \leq r \leq n_0\}$  :

$$\begin{aligned} \overline{B}_1 &= B/(B^{\delta} \oplus B^{\gamma}) = \bigoplus_{(s,t) \in (I \times I) \setminus I_{\text{triv}}^{(2)}} {}_s B_t, \quad U = \bigoplus_{1 \leq r \leq n_0} U_r, \quad V = \bigoplus_{1 \leq r \leq n_0} V_r, \quad \overline{U}^* = \bigoplus_{1 \leq r \leq n_0} \overline{U}_r^*, \quad \overline{V}^* = \bigoplus_{1 \leq r \leq n_0} \overline{V}_r^*, \\ \overline{U} &= \bigoplus_{1 \leq r \leq n_0} \overline{U}_r \text{ et } \overline{V} = \bigoplus_{1 \leq r \leq n_0} \overline{V}_r; \text{ et on pose : } Y = \bigcup_{r=1}^{n_0} Y_r \subset {}_R \mathcal{Q}_1 \text{ et } X = \bigcup_{r=1}^{n_0} X_r \subset {}_L \mathcal{Q}_1. \end{aligned}$$

Alors  $\{X, Y\}$  est une paire de systèmes de flèches mutuellement duals pour la paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{U, V\} = \bigoplus_{1 \leq r \leq n_0} \{U_r, V_r\}$ , où les deux systèmes de flèches  ${}_L \mathcal{Q}_1$  et  ${}_R \mathcal{Q}_1$  pour  $\mathcal{Q}$  sont obtenus en complétant les systèmes de flèches X et Y. Soit  $p = p_1 + \dots + p_{n_0}$  le cardinal commun de X et de Y, alors sous forme plus compacte on peut écrire  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  et  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ , cela se fait en prenant une bijection  $\{1, \dots, p\} \xrightarrow{\sigma} \bigcup_{r=1}^{n_0} \{(r, 1), \dots, (r, p_r)\}$  et pour chaque  $k \in \{1, \dots, p\}$  on pose :  $y_k := y_{\sigma(k)}$  et  $x_k := x_{\sigma(k)}$ . De plus (en vertu du volet (2) de la proposition 3.2.3), les systèmes duals  ${}_L \mathcal{Q}_1^*$  et  ${}_R \mathcal{Q}_1^*$  sont tels que  $\overline{V}^* = K \cdot ({}_L \mathcal{Q}_1^* \cdot \{x_1^*, \dots, x_p^*\}) \cdot K$  et  $\overline{U}^* = K \cdot ({}_R \mathcal{Q}_1^* \cdot \{y_1^*, \dots, y_p^*\}) \cdot K$ . En prenant maintenant la somme directe des suites exactes courtes précédentes, on déduit les suites exactes courtes de K-bimodules ci-après formées des paires injections-projections canoniques induites par la paire de morphismes mutuellement duals  $(\partial^R \mathfrak{m}^{(2)}, \partial^L \mathfrak{m}^{(2)}) = \bigoplus_{1 \leq r \leq n_0} (\partial^R \mathfrak{m}_r^{(2)}, \partial^L \mathfrak{m}_r^{(2)})$  :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \overline{V}^* \xrightarrow{j} (B^\gamma)^* \xrightarrow{p} U \longrightarrow 0, & \quad 0 \longrightarrow \overline{U}^* \xrightarrow{q} (B^\delta)^* \xrightarrow{r} V \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow V \xrightarrow{p^*} B^\gamma \xrightarrow{j^*} \overline{V} := \text{coker } p^* \longrightarrow 0, & \quad 0 \longrightarrow U \xrightarrow{r^*} B^\delta \xrightarrow{q^*} \overline{U} := \text{coker } r^* \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On a donc des paires dualisantes et symétrisables de  $K$ -bimodules  $\{U, V\}$ ,  $\{\overline{U}, \overline{U}^*\}$  et  $\{\overline{V}, \overline{V}^*\}$  dont les structures sont induites par la paire  $(\partial^r m^{(2)}, \partial^l m^{(2)}) = \bigoplus_{1 \leq r \leq n_0} (\partial^r m_r^{(2)}, \partial^l m_r^{(2)})$ ; et le potentiel 2-cyclique  $m^{(2)}$  coïncide avec le dual de la forme bilinéaire non-dégénérée  $U \otimes V \xrightarrow{(\cdot)} E$  associée à la paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{U, V\}$  :  $m^{(2)} = \mathfrak{z}_{U \otimes V}$ .

La limitation illustrée par l'exemple 3.4.4 motive le volet (c) de la définition qui suit.

**Définition 3.4.6.** (a) La *partie triviale* de  $(\mathcal{Q}, m)$  est le carquois modulé avec potentiel trivial  $(\mathcal{Q}_{\text{triv}}, m^{(2)})$ , où  $\mathcal{Q}_{\text{triv}}$  est déterminé par la paire auto-dualisante et symétrisable de bimodules  $\{B_{\text{triv}}, B_{\text{triv}}^*\}$ ,  $B_{\text{triv}} := U \oplus V$  est appelé la *partie triviale* de  $B$ .

(b) Le *carquois modulé réduit*  $\mathcal{Q}_{\text{red}} = \overline{\mathcal{Q}}$  associé à  $\mathcal{Q}$  est déterminé par la paire dualisante et symétrisable de  $K$ -bimodules  $\{B_{\text{red}}, B_{\text{red}}^*\} := \{\overline{U}, \overline{U}^*\} \oplus \{\overline{V}, \overline{V}^*\} \oplus \{\overline{B}_1, \overline{B}_1^*\}$ , où le *bimodule réduit* (des flèches valuées) est  $B_{\text{red}} = \overline{B} := \overline{U} \oplus \overline{V} \oplus \overline{B}_1$ .

(c) On dira que la *partie triviale* de  $(\mathcal{Q}, m)$  *scinde* (dans  $(\mathcal{Q}, m)$ ) si les bimodules  $U$  et  $V$  sont facteurs directs de  $B$ , si bien qu'on a  $B = B_{\text{triv}} \oplus \overline{B} = (U \oplus V) \oplus \overline{B}$ . Observant que la dérivée cyclique du potentiel 2-cyclique  $m^{(2)}$  vérifie la relation  $\partial m^{(2)} = \partial^r m^{(2)} \oplus \partial^l m^{(2)}$ , si la partie triviale de  $(\mathcal{Q}, m)$  scinde, alors la projection canonique  $(B^\gamma)^* \oplus (B^\delta)^* \xrightarrow{p_{\text{triv}} := [p, r]} B_{\text{triv}} = U \oplus V$ , associée à la dérivée cyclique  $(B^\gamma)^* \oplus (B^\delta)^* \xrightarrow{[\partial^r m^{(2)}, \partial^l m^{(2)}]} B$  de  $m^{(2)}$ , scinde et on note  $B_{\text{triv}} \xleftarrow{j_{\text{triv}} := \begin{bmatrix} p' \\ r' \end{bmatrix}} (B^\gamma)^* \oplus (B^\delta)^* \subset B^*$  l'inverse à gauche de  $p_{\text{triv}}$  :

$$\partial m^{(2)} \circ j_{\text{triv}} = p_{\text{triv}} \circ j_{\text{triv}} = \mathbb{1}_{B_{\text{triv}}} = \mathbb{1}_U \oplus \mathbb{1}_V = p'p \oplus r'r.$$

Avec l'hypothèse supplémentaire que la *partie triviale* de  $(\mathcal{Q}, m)$  *scinde*, on regroupe les considérations précédentes dans les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} B_{\text{triv}} \xleftarrow{j_{\text{triv}} := \begin{bmatrix} p' \\ r' \end{bmatrix}} (B^\gamma)^* \oplus (B^\delta)^* \subset B^* \text{ et } (B^\gamma)^* \oplus (B^\delta)^* \xrightarrow{p_{\text{triv}} := [p, r]} B_{\text{triv}} = U \oplus V \text{ sont} \\ \text{tels que } \partial m^{(2)} \circ j_{\text{triv}} = [\partial^r m^{(2)}, \partial^l m^{(2)}] \circ j_{\text{triv}} = p_{\text{triv}} \circ j_{\text{triv}} = \mathbb{1}_{B_{\text{triv}}} = \mathbb{1}_U \oplus \mathbb{1}_V; \\ B = B_{\text{triv}} \oplus \overline{B} = (U \oplus V) \oplus \overline{B} = U \oplus \overline{U} \oplus V \oplus \overline{V} \oplus \overline{B}_1, \\ B^* \cong B_{\text{triv}}^* \oplus \overline{B}^* \text{ avec } B_{\text{triv}}^* = B_{\text{triv}}, \overline{B}^* = \overline{U}^* \oplus \overline{V}^* \oplus \overline{B}_1^* = B_{\text{red}}^*. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.2)$$

$$m^{(2)} = \mathfrak{z}_{U \otimes V} = \sum_{k=1}^p y_k \otimes x_k = \sum_{r=1}^{n_0} \sum_{k_r=1}^{p_r} y_{r, k_r} \otimes x_{r, k_r} \quad (3.4.3)$$

$$m = m^{(2)} + m' + \overline{m}_1, \quad \text{où } m' \in \overline{\langle B_{\text{triv}} \rangle} \cap J_{k\mathbb{Q}}^3 \text{ et } \overline{m}_1 \in J_{k\mathbb{Q}}^3 \subset J_{k\mathbb{Q}}^3. \quad (3.4.4)$$

À une équivalence cyclique près on considère aussi la condition suivante :

$$m' = m'_1 + m'_2 \text{ où } m'_1 = \sum_{k=1}^p y_k \otimes v_k \in U \cdot J_{k\mathcal{Q}}^2, \text{ et } m'_2 = \sum_{k=1}^p u_k \otimes x_k \in J_{k\mathcal{Q}}^2 \cdot V, \quad (3.4.5)$$

$\overline{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}_{\text{red}}$  étant est déterminé par  $\overline{B} = B_{\text{red}}$  en vertu de la définition 3.4.6.

Toujours avec l'hypothèse que la partie triviale de  $(\mathcal{Q}, m)$  scinde, en vue de la réduction de  $(\mathcal{Q}, m)$  nous proposons aussi la  $k$ -algèbre  $\widehat{k\mathcal{Q}}/J_m^{\text{triv}}$  où  $I = J_m^{\text{triv}}$  est l'idéal fermé donné par les équations suivantes (où on doit remarquer que  $(\partial \overline{m}_1) \circ j_{\text{triv}} = 0$ ) :

$$\left. \begin{aligned} I = J_m^{\text{triv}} = \overline{I_0} \subset J_m = \overline{\langle \text{Im}(\partial m) \rangle} \text{ où l'idéal } I_0 \text{ est engendré comme suit,} \\ I_0 = \langle \text{Im}((\partial m) \circ j_{\text{triv}}) \rangle = \langle \text{Im}((\partial m^{(2)} + \partial m') \circ j_{\text{triv}}) \rangle = \langle \text{Im}(\mathbb{1}_{B_{\text{triv}}} + (\partial m') \circ j_{\text{triv}}) \rangle \\ = \langle y_k + \partial m'(x_k^*), x_k + \partial m'(y_k^*) : 1 \leq k \leq p \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.6)$$

### 3.4.2 Une première approche à la réduction

Rappelons d'abord le résultat suivant obtenu dans le cas simplement lacé par Derksen, Weyman et Zelevinsky.

**Théorème 3.4.1** ([24, 4.6 ("splitting theorem")]). *Dans le cas simplement lacé, pour un carquois avec potentiel  $(\mathcal{Q}, m)$  dont la partie triviale est  $(\mathcal{Q}_{\text{triv}}, m_{\text{triv}})$  tandis que  $\mathcal{Q}_{\text{red}}$  est le carquois réduit associé au bimodule réduit  $B_{\text{red}} = \overline{B}$ , il existe un carquois avec potentiel réduit  $(\mathcal{Q}_{\text{red}}, m_{\text{red}})$  et une équivalence droite entre  $(\mathcal{Q}, m)$  et la somme directe  $(\mathcal{Q}_{\text{triv}}, m_{\text{triv}}) \oplus (\mathcal{Q}_{\text{red}}, m_{\text{red}})$ . De plus, la classe d'équivalence droite de chacun des carquois avec potentiel  $(\mathcal{Q}_{\text{triv}}, m_{\text{triv}})$  et  $(\mathcal{Q}_{\text{red}}, m_{\text{red}})$  est uniquement déterminée par la classe d'équivalence droite de  $(\mathcal{Q}, m)$ .*

La preuve du premier volet du théorème ci-dessus est entièrement basée sur la "loi des chaînes cyclique" (3.3.6) et sur la proposition 3.3.5. Nous obtenons la version générale suivante dans laquelle le second volet est une version légèrement faible du second volet de [24, 4.6 ("splitting theorem")].

**Théorème 3.4.2** (de décomposition). *On suppose que la partie triviale  $(\mathcal{Q}_{\text{triv}}, m_{\text{triv}})$  de  $(\mathcal{Q}, m)$  scinde. Alors, il existe un carquois modulé avec potentiel réduit  $(\mathcal{Q}_{\text{red}}, m_{\text{red}})$  et une équivalence droite entre  $(\mathcal{Q}, m)$  et la somme directe  $(\mathcal{Q}_{\text{triv}}, m_{\text{triv}}) \oplus (\mathcal{Q}_{\text{red}}, m_{\text{red}})$ ; en particulier la classe d'équivalence droite de  $(\mathcal{Q}_{\text{triv}}, m^{(2)})$  est déterminée par celle de  $(\mathcal{Q}, m)$ . De plus, la classe d'équivalence droite faible de  $(\mathcal{Q}_{\text{red}}, m_{\text{red}})$  est déterminée par celle de  $(\mathcal{Q}, m)$ .*

*Démonstration.* Comme dans [24, 4.6], la preuve du premier volet du théorème 3.4.2 est une conséquence directe du fait suivant.

**Fait 3.1.** *Pour chaque potentiel  $m \in \text{pot}(\mathcal{Q})$  ayant la forme donnée par les équations (3.4.4) et (3.4.5), il existe un automorphisme unitriangulaire  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \xrightarrow{\sim} \widehat{k\mathcal{Q}}$  tel que  $\phi(m)$  soit cycliquement équivalent à un potentiel de la forme (3.4.4)-(3.4.5) avec  $u_k = 0 = v_k$  pour tout  $k$ .*

Pour prouver le fait ci-dessus, on utilise le concept suivant où  $d \geq 1$  est un entier naturel : On dit qu'un potentiel  $m$  est  $d$ -scindé s'il est de la forme (3.4.4)-(3.4.5) avec  $u_k, v_k \in J_{k\mathcal{Q}}^{d+1}$ . On commence alors par montrer le résultat qui suit.

**Fait 3.2.** *On suppose que  $m$  est un potentiel  $d$ -scindé pour un entier  $d \geq 1$ . Alors il existe un automorphisme unitriangulaire  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \xrightarrow{\sim} \widehat{k\mathcal{Q}}$  de profondeur  $d$  tel que  $\phi(m)$  soit cycliquement équivalent à un potentiel  $2d$ -scindé  $\tilde{m}$  avec  $\tilde{m} - m \in J_{k\mathcal{Q}}^{2d+2}$ .*

**Preuve du Fait 3.2.** Le potentiel  $m$  étant écrit sous la la forme (3.4.4)- (3.4.5) avec  $u_k, v_k \in J_{k\mathcal{Q}}^{d+1}$  et gardant les notations des équations (3.4.2), on considère l'automorphisme unitriangulaire  $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{Q})$  de profondeur  $d$  et dont la restriction sur  $B = B_{\text{triv}} \oplus \overline{B}$  est construite comme suit :  $\phi|_{\overline{B}} = \mathbb{1}_{\overline{B}}$ . Et en vertu des équations (3.4.2) (et de la définition 3.4.6-(2)), nous avons des morphismes de K-bimodules  $B_{\text{triv}} \xrightarrow{j_{\text{triv}} := \begin{bmatrix} p' \\ r' \end{bmatrix}} (B^\gamma)^* \oplus (B^\delta)^* \subset B^*$  et  $(B^\gamma)^* \oplus (B^\delta)^* \xrightarrow{p_{\text{triv}} := \begin{bmatrix} p, r \end{bmatrix}} B_{\text{triv}} = U \oplus V$  tels que  $\partial m^{(2)} \circ j_{\text{triv}} = [\partial^r m^{(2)}, \partial^l m^{(2)}] \circ j_{\text{triv}} = p_{\text{triv}} \circ j_{\text{triv}} = \mathbb{1}_{B_{\text{triv}}} = \mathbb{1}_U \oplus \mathbb{1}_V = \partial^r m^{(2)} \circ p' \oplus \partial^l m^{(2)} \circ r'$ . On pose alors :

$$\phi|_U = (\partial^r m^{(2)} - \partial^r m'_2) \circ p' = \mathbb{1}_U - (\partial^r m'_2) \circ p' \text{ et } \phi|_V = (\partial^l m^{(2)} - \partial^l m'_1) \circ r' = \mathbb{1}_V - (\partial^l m'_1) \circ r',$$

si bien que  $\phi(y_k) = y_k - u_k$  et  $\phi(x_k) = x_k - v_k$  pour chaque  $k \in \{1, \dots, p\}$ .

Le morphisme  $\phi$  étant alors de profondeur  $d$ , en vertu de la définition 3.2.2, on a

$$\phi(u_k) = u_k + u'_k \text{ et } \phi(v_k) = v_k + v'_k \text{ avec } u'_k, v'_k \in J_{k\mathcal{Q}}^{2d+1}.$$

Et en développant  $\phi(m)$  il s'ensuit que  $\phi(m) = \sum_{k=1}^p (y_k \otimes x_k + y_k \otimes v'_k + u'_k \otimes x_k) + W + \overline{m}_1$  avec  $W = \sum_{k=1}^p (u_k \otimes v_k + u_k \otimes v'_k + u'_k \otimes v_k) \in J_{k\mathcal{Q}}^{2d+2}$ . Alors, comme  $\widehat{k\mathcal{Q}} = L \oplus \widehat{k\mathcal{Q}}$  où  $L = \overline{k\mathcal{Q}} \cdot B_{\text{triv}} \cdot \overline{k\mathcal{Q}}$  est la fermeture de  $\widehat{k\mathcal{Q}} \cdot B_{\text{triv}} \cdot \widehat{k\mathcal{Q}}$  dans  $\widehat{k\mathcal{Q}}$ , on peut écrire  $W = W' + \overline{W}$  pour deux potentiels  $W' \in L \cap J_{k\mathcal{Q}}^{2d+2}$  et  $\overline{W} \in J_{k\mathcal{Q}}^{2d+2}$ . Mais alors,  $W'$  doit être cycliquement équivalent à un potentiel de la forme  $W'' = \sum_{k=1}^p y_k \otimes v''_k + \sum_{k=1}^p u''_k \otimes x_k$ , avec  $u''_k, v''_k \in J_{k\mathcal{Q}}^{2d+1}$  et chacun des deux termes dans  $W''$  étant aussi un potentiel. On a donc en particulier que  $W - (W'' + \overline{W}) \in J_{k\mathcal{Q}}^{2d+2} \cap \text{skew}\{\widehat{k\mathcal{Q}}, \widehat{k\mathcal{Q}}\}$ , si bien que le potentiel  $\tilde{m}$  cherché peut être choisi en posant

$$\tilde{m} = \sum_{k=1}^p y_k \otimes x_k + \sum_{k=1}^p y_k \otimes (v'_k + v''_k) + \sum_{k=1}^p (u'_k + u''_k) \otimes x_k + (\overline{W} + \overline{m}_1).$$

Le Fait 3.2 est donc établi.

**Preuve du Fait 3.1.** En utilisant le Fait 3.2, la proposition 3.3.5 (et aussi le fait qu'en vertu de la proposition 3.3.1 les commutateurs tordus sont bien préservés par les automorphismes  $\varphi$  tels que  $\varphi|_{\mathbb{K}} = 1$ ), on voit que les arguments nécessaires pour établir le Fait 3.1 sont exactement les mêmes que ceux de [24, lemma 4.7].  $\square$

Le dernier volet du théorème 3.4.2 suit du lemme suivant, où  $\Gamma_0 \subset I$  et  $k(\Gamma)_0 \subset K$  (et dans une telle situations la condition (3.2.2) est toujours supposée satisfaite).

**Lemme 3.4.3.** *Soient  $(Q, W)$  et  $(Q, W')$  deux carquois modulés avec potentiels réduits, et  $(\Gamma, T)$  un carquois modulé avec potentiel trivial. S'il existe une équivalence droite faible entre  $(Q, W) \oplus (\Gamma, T)$  et  $(Q, W') \oplus (\Gamma, T)$  alors, il existe également une équivalence droite faible entre  $(Q, W)$  et  $(Q, W')$ .*

*Démonstration.* Dans cette preuve, nous imitons un argument de [24, 4.9 p.15,17]. Posons  $C = k(\Gamma)_1$  le bimodule des flèches valuées dans  $\Gamma$ , en vertu de la remarque 3.4.3 et de la proposition 3.2.3,  $C = U' \oplus V'$  et la dérivée cyclique du potentiel 2-cyclique  $T$  fait de  $\{U' \oplus V', U' \oplus V'\}$  une paire auto-dualisante et symétrisable de bimodules qui est isomorphe à la paire dualisante  $\{C, C^*\}$  et telle que  $T = \mathfrak{z}_{U' \otimes V'} \equiv \mathfrak{z}_{C \otimes C^*}$ , en particulier dans l'algèbre  $k(\widehat{Q \oplus \Gamma})$ , l'idéal jacobien de  $T$  est égal à  $k(\widehat{Q \oplus \Gamma}) \cdot C \cdot k(\widehat{Q \oplus \Gamma})$ . Soit  $\phi : k(\widehat{Q \oplus \Gamma}) \xrightarrow{\sim} k(\widehat{Q \oplus \Gamma})$  une équivalence droite faible entre  $(Q, W) \oplus (\Gamma, T)$  et  $(Q, W') \oplus (\Gamma, T)$ , alors  $\phi|_K = \mathbb{1}_K$  et  $\phi(J_{W+T}) = J_{W'+T}$ . Adoptons les deux abréviations suivantes :  $J := J_W$ ,  $J' = J_{W'}$  et  $L := k(\widehat{Q \oplus \Gamma}) \cdot C \cdot k(\widehat{Q \oplus \Gamma})$  l'idéal jacobien du potentiel 2-cyclique  $T$  dans  $k(\widehat{Q \oplus \Gamma})$ . On voit clairement que  $k(\widehat{Q \oplus \Gamma}) = \widehat{kQ} \oplus L$  (en fait,  $L$  est formé des combinaisons linéaires éventuellement infinies des éléments homogènes de la forme  $z_1 \otimes \cdots \otimes z_d$  tels qu'ils existe un entier  $t \in \{1, \dots, l\}$  pour lequel on a  $u_t \in C$ ). On déduit de ce qui précède que,

$$J_{W+T} = J + L \text{ et } J_{W'+T} = J' + L, \text{ si bien que } \phi(J_{W+T}) = \phi(J + L) = J' + L.$$

Soit  $p : k(\widehat{Q \oplus \Gamma}) \longrightarrow \widehat{kQ}$  la projection canonique. On considère alors le morphisme continu d'algèbres  $\psi := (p\phi)|_{\widehat{kQ}} : \widehat{kQ} \longrightarrow \widehat{kQ}$ , avec clairement  $\psi|_K = \mathbb{1}_K$ . On désire alors montrer que  $\psi$  est une équivalence droite faible entre les carquois modulés avec potentiels réduits  $(Q, W)$  et  $(Q, W')$ .

Pour voir que  $\psi$  est un isomorphisme d'algèbres, en vertu de la proposition 3.2.1-(a) il suffit de montrer que la composante  $\psi_1 : B \longrightarrow B$  est un isomorphisme de  $K$ -bimodules. Or, la composante de degré 1 de l'isomorphisme  $\phi$  est un isomorphisme de  $K$ -bimodules donné sous-forme matricielle par

$$B \oplus C \xrightarrow[\sim]{\phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} \end{bmatrix}} B \oplus C \text{ avec } \phi_{i,j} \in \text{Hom}(M_j, M_i) \text{ pour } 1 \leq i, j \leq 2, M_1 = B \text{ et } M_2 = C.$$

On voit donc que  $\psi_1 = \phi_{1,1} : B \longrightarrow B$ . En se rappelant que l'automorphisme  $\phi$  doit préserver les puissances de  $J_{k(\widehat{Q \oplus \Gamma})}$  on voit que :  $\phi(C) \subset \phi(J + L) = J' + L \subset J_{k(\widehat{Q \oplus \Gamma})}^2 + L$  car  $(Q, W')$  étant réduit on a  $J' \subset J_{kQ}^2$ ; ainsi  $\phi_1(C) \subset L \cap (B \oplus C) = C$  si bien que  $\phi_{12} = 0$ . On déduit que le morphisme  $\psi_1 = \phi_{1,1}$  est un isomorphisme de  $K$ -bimodules, et donc  $\psi$  est un isomorphisme continu de  $k$ -algèbres tel que  $\psi|_K = \mathbb{1}_K$ .

Pour terminer la preuve, on vérifie que l'assertion suivante tient.

*Affirmation.*  $p\phi(L) \subseteq \psi(J)$  si bien que  $\psi(J) = J'$ .

Voyons d'abord que si l'inclusion  $p\phi(L) \subseteq \psi(J)$  tient, alors il suivra que  $J' = p(J' + L) = p(\phi(J + L)) = \psi(J) + p\phi(L) = \psi(J)$ , donnant ainsi le résultat cherché. Donc il reste à montrer que  $p\phi(L) \subseteq \psi(J)$ , ou de façon équivalente, que  $\phi(L) \subseteq \phi(J) + L$ . En appliquant  $\phi^{-1}$  aux deux membres de la dernière égalité, il suffit de montrer que  $L \subseteq J + \phi^{-1}(L)$ . Posons alors  $R = J + \phi^{-1}(L)$  et adoptons l'abréviation  $\widehat{J} := J_{kQ}$ .

Comme  $J' \subseteq \hat{J}^2$  on a,  $\phi^{-1}(J') \subseteq \phi^{-1}(J' + L) \cap \hat{J}^2 = (J + L) \cap \hat{J}^2 \subseteq J + L\hat{J} + \hat{J}L$ . Il s'ensuit que,  $L \subseteq J + L = \phi^{-1}(J' + L) = \phi^{-1}(J') + \phi^{-1}(L) \subseteq J + L\hat{J} + \hat{J}L + \phi^{-1}(L) = (J + \phi^{-1}(L)) + L\hat{J} + \hat{J}L = R + L\hat{J} + \hat{J}L$ . Et en substituant dans le membre de droite de la dernière égalité  $L$  par sa borne supérieure  $R + L\hat{J} + \hat{J}L$  on déduit aussi que,

$$L \subseteq R + L\hat{J}^2 + \hat{J}L\hat{J} + \hat{J}^2L.$$

En répétant ainsi la précédente substitution  $n$  fois avec  $n \geq 1$  on obtient l'inclusion suivante.

$$L \subseteq R + \sum_{k=0}^n \hat{J}^k L \hat{J}^{n-k} \subseteq R + \hat{J}^{n+1}.$$

Ayant alors en vue l'équation (3.2.3), on a donc  $L \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} (R + \hat{J}^n) = \bar{R}$  où  $\bar{R}$  est la fermeture de  $R = J + \phi^{-1}(L)$  dans  $\widehat{k(\mathcal{Q} \oplus \Gamma)}$ . Mais  $R$  est en fait un sous-espace fermé de  $\widehat{k(\mathcal{Q} \oplus \Gamma)}$ ; en effet,  $\phi(R) = \phi(J) + L = p^{-1}(\psi(J))$  est un fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par l'épimorphisme continu  $p$ , or d'après la proposition 3.2.1-(b) l'isomorphisme continu  $\phi$  est automatiquement un homéomorphisme, si bien que  $R = \phi^{-1}(\phi(R))$  est fermé. Par conséquent,  $L \subseteq J + \phi^{-1}(L)$  si bien que  $\phi(L) \subseteq \phi(J) + L$  comme annoncé. Ceci complète la preuve du théorème 3.4.2.  $\square$

**Question 3.1.** Le second volet de [24, 4.6 (splitting theorem)] admet-t-il une généralisation complète aux carquois modulés avec potentiels ? En d'autres termes, dans le théorème 3.4.2, peut-on remplacer l'expression "équivalence droite faible" par l'expression "équivalence droite" ?

Nous pensons qu'une réponse affirmative est possible pour la question ci-dessus, cependant cela demande un effort supplémentaire pour généraliser les lemmes [24, 4.11, 4.12] sur lesquels repose le résultat analogue dans le cas simplement lacé. En plus, la preuve du lemme [24, 4.12] requiert de nouveaux outils introduits par Derksen, Weyman et Zelevinsky. Il s'agit des concepts de " $C$ -espaces, de  $D$ -espaces et de  $D$ -algèbres" (Voir l'appendice de [24]). Ces notions se généralisent puisque nos carquois modulés portent sur une structure de paires dualisantes de bimodules, si bien que les algèbres de chemins non-simplement lacées  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  seront aussi des versions générales des " $D$ -algèbres". Les points délicats dans le traitement des lemmes [24, 4.11, 4.12] concernent essentiellement la manipulation de l'équivalence cyclique pour les potentiels et pour les permutations tordues qui agissent "bien" seulement sur la sous-algèbre non unifère  $\text{pot}(\mathcal{Q}) \subset k_{\text{cyc}}\mathcal{Q} \subset \widehat{k\mathcal{Q}}$ . Pour permuter un élément quelconque de  $k_{\text{cyc}}\mathcal{Q}$ , il faut absolument fixer un système gauche ou un système droite de flèches pour  $\widehat{k\mathcal{Q}}$ , et chaque choix d'un tel système agit différemment sur  $\widehat{k_{\text{cyc}}\mathcal{Q}} \setminus \text{pot}(\mathcal{Q})$ .

### 3.4.3 Une seconde approche à la réduction

Supposons que la partie triviale de  $(\mathcal{Q}, m)$  scinde, alors relativement à la décomposition  $B = B_{\text{triv}} \oplus \bar{B}$  (donnée dans la définition 3.4.6 ou dans les équations (3.3.3)), on note  $\bar{\pi} = \pi|_{\widehat{k\mathcal{Q}}}$  la restriction de la projection canonique  $\widehat{k\mathcal{Q}} \xrightarrow{\pi} \widehat{k\mathcal{Q}}/J_m^{\text{triv}}$  et on considère l'épimorphisme d'algèbres  $\pi_m := \bar{\pi}^{-1} \circ \pi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}}$  associé à  $m$ . Le résultat principal de cette sous-section s'énonce comme suit.

**Théorème 3.4.4** (de réduction). *On suppose que la partie triviale de  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  scinde. Alors la restriction  $\bar{\pi} = \pi|_{\widehat{k\mathcal{Q}}}$  de la projection canonique de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  sur  $\widehat{k\mathcal{Q}}/J_m^{\text{triv}}$  est un isomorphisme. Et relativement à la décomposition  $B = B_{\text{triv}} \oplus \bar{B}$ , l'épimorphisme  $\pi_m : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}}$  est une  $\mathfrak{p}$ -équivalence droite de  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  sur le carquois modulé avec potentiel réduit  $\text{red}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}) := (\bar{\mathcal{Q}}, \bar{\mathfrak{m}})$  avec  $\bar{\mathfrak{m}} = \pi_m(\mathfrak{m})$ , et pour toute autre décomposition  $B = B_{\text{triv}} \oplus B_{\text{red}}$ , si  $\pi'_m : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}_{\text{red}}} = T_K(B_{\text{red}})$  désigne la  $\mathfrak{p}$ -équivalence droite correspondante de  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  sur  $(\mathcal{Q}_{\text{red}}, \mathfrak{m}_{\text{red}})$  avec  $\mathfrak{m}_{\text{red}} = \pi'_m(\mathfrak{m})$ , alors il existe un isomorphisme d'algèbres topologiques  $\widehat{k\mathcal{Q}} \xrightarrow{f} \widehat{k\mathcal{Q}_{\text{red}}}$  tel que  $f|_K = \mathbb{1}_K$  et  $f \circ \pi_m = \pi'_m$ . De plus, la classe d'équivalence droite faible de  $\text{red}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  est déterminée par celle de  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$ .*

Avant de prouver le théorème de réduction précédent, nous soulignons l'observation suivante.

**Corollaire 3.4.5.** *Les deux approches pour la réduction des carquois modulés avec potentiels données par les théorèmes 3.4.2 et 3.4.4 sont compatibles. Plus précisément, la partie triviale de  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  scinde si et seulement si la partie triviale de chaque élément dans la classe d'équivalence droite faible de  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  scinde. Et si tel est le cas, il existe un carquois modulé réduit  $(\mathcal{Q}_{\text{red}}, \mathfrak{m}_{\text{red}})$  et une équivalence droite entre  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  et la somme directe  $(\mathcal{Q}_{\text{triv}}, \mathfrak{m}_{\text{triv}}) \oplus (\mathcal{Q}_{\text{red}}, \mathfrak{m}_{\text{red}})$  et, pour chaque telle décomposition de  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  on a une équivalence droite faible entre  $\text{red}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  et  $\text{red}(\mathcal{Q}_{\text{triv}}, \mathfrak{m}_{\text{triv}} \oplus (\mathcal{Q}_{\text{red}}, \mathfrak{m}_{\text{red}})) = (\mathcal{Q}_{\text{red}}, \mathfrak{m}_{\text{red}})$ .*

*Démonstration.* Le résultat suit immédiatement de l'application du théorème de décomposition 3.4.2 et du théorème de réduction 3.4.4.  $\square$

**Définition 3.4.7.** Avec les notations ci-dessus, l'objet  $\text{red}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}) := (\bar{\mathcal{Q}}, \bar{\mathfrak{m}})$  est alors appelé le carquois modulé avec potentiel réduit associé à  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  et ainsi, il est unique à une équivalence droite faible près.

### Preuve du théorème 3.4.4

On garde sans plus le signaler les notations précédentes et les hypothèses du théorème 3.4.4.

*Deuxième partie du théorème 3.4.4 :* On suppose que  $\pi$  induit un isomorphisme  $\bar{\pi} = \pi|_{\widehat{k\mathcal{Q}}} : \widehat{k\mathcal{Q}} \xrightarrow{\sim} \widehat{k\mathcal{Q}}/J_m^{\text{triv}}$ .

Commençons par observer qu'on a alors une  $\mathfrak{p}$ -équivalence droite  $\varphi := \bar{\pi}^{-1} \circ \pi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}}$  de  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  sur le carquois modulé avec potentiel réduit  $(\bar{\mathcal{Q}}, \bar{\mathfrak{m}})$ , où  $\bar{\mathfrak{m}} = \varphi(\mathfrak{m})$ . En effet l'épimorphisme  $\varphi = \bar{\pi}^{-1} \circ \pi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}}$  est tel que :  $\varphi|_{\widehat{k\mathcal{Q}}} = \mathbb{1}_{\widehat{k\mathcal{Q}}}$ ,  $\ker(\varphi) = J_m^{\text{triv}} \subset J_m$  et en particulier,  $\varphi$  satisfait trivialement aux hypothèses de la proposition 3.3.6 ; il en découle immédiatement que  $\varphi(J_m) = J_{\varphi(\mathfrak{m})} = J_{\bar{\mathfrak{m}}}$ . On conclut que  $\varphi$  est une  $\mathfrak{p}$ -équivalence droite de  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  sur le carquois modulé avec potentiel réduit  $(\bar{\mathcal{Q}}, \bar{\mathfrak{m}})$ , et on a

$$J_{\bar{\mathfrak{m}}} = J_{\varphi(\mathfrak{m})} = \varphi(J_m) \subseteq J_m. \quad (*)$$

En effet pour tout  $z \in \widehat{k\mathcal{Q}}$ , comme  $\varphi|_{\widehat{k\mathcal{Q}}} = \mathbb{1}_{\widehat{k\mathcal{Q}}}$  et  $\text{Im}(\varphi) = \widehat{k\mathcal{Q}}$ , il vient que  $\varphi(\varphi(z) - z) = \varphi(\varphi(z)) - \varphi(z) = \varphi(z) - \varphi(z) = 0$ , si bien que  $\varphi(z) - z \in J_m^{\text{triv}} \subset J_m$ . Il s'ensuit que si  $z$  est dans  $J_m$ , alors  $\varphi(z)$  est aussi dans  $J_m$ .

Pour l'unicité de la  $p$ -équivalence droite  $\varphi : \widehat{kQ} \longrightarrow \widehat{kQ}$ , supposons qu'on a une autre décomposition  $B = B_{\text{triv}} \oplus B_{\text{red}}$  du  $K$ -bimodule  $B$ . Alors comme deux supplémentaires quelconques de  $B_{\text{triv}}$  dans  $B$  sont toujours isomorphes, il suit que  $\overline{B}$  est isomorphe à  $B_{\text{red}}$ , si bien que  $\widehat{kQ}$  et  $\widehat{kQ_{\text{red}}}$  sont des  $k$ -algèbres isomorphes, et la restriction  $\overline{\pi}'$  de  $\pi$  à  $\widehat{kQ_{\text{red}}}$  est aussi (par hypothèse) un isomorphisme d'algèbres de  $\widehat{kQ_{\text{red}}}$  sur  $\widehat{kQ/J_m^{\text{triv}}}$ . Alors si  $\varphi' := \pi'_m : \widehat{kQ} \longrightarrow \widehat{kQ_{\text{red}}} = T_K(B_{\text{red}})$  désigne la  $p$ -équivalence droite correspondante de  $(Q, m)$  sur  $(Q_{\text{red}}, m_{\text{red}})$  avec  $m_{\text{red}} = \pi'_m(m)$ , on sait que  $\varphi' = \overline{\pi}'^{-1} \circ \pi$ . En posant  $f = \overline{\pi}'^{-1} \circ \overline{\pi}$  nous affirmons que le diagramme ci-dessous est commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 & \widehat{kQ} & \\
 \varphi \nearrow & \text{---} & \searrow \overline{\pi} \\
 \widehat{kQ} & & \widehat{kQ/J_m^{\text{triv}}} \\
 \varphi' \searrow & \text{---} & \nearrow \overline{\pi}'^{-1} \\
 & \widehat{kQ_{\text{red}}} & \\
 & \downarrow f = \overline{\pi}'^{-1} \circ \overline{\pi} & \\
 & \widehat{kQ} & 
 \end{array}$$

En effet, comme en vertu de la définition on a  $\varphi = \overline{\pi}^{-1}\pi$  et  $\varphi' = \overline{\pi}'^{-1}\pi$ , il vient immédiatement que,  $f\varphi = \overline{\pi}'^{-1} \circ \overline{\pi} \circ \overline{\pi}^{-1} \circ \pi = \overline{\pi}'^{-1}\pi = \varphi'$ , établissant ainsi l'unicité (à isomorphisme près) de  $\varphi = \pi_m$ .

Maintenant, le fait que la classe d'équivalence droite faible de  $(\overline{Q}, \overline{m})$  est déterminée par celle de  $(Q, m)$  suit du lemme suivant.

**Lemme 3.4.6.** *Soit  $\phi : \widehat{kQ} \xrightarrow{\sim} \widehat{kQ'}$  une équivalence droite faible entre  $(Q, m)$  et un carquois modulé avec potentiel  $(Q', m')$ . Alors la partie triviale  $(B'_{\text{triv}}, m'^{(2)})$  de  $(Q', m')$  scinde aussi. Pour chaque décomposition  $B' = kQ'_1 = B'_{\text{triv}} \oplus \overline{B}'$  en une somme directe de  $K$ -bimodules, on pose  $\varphi := \pi_m : \widehat{kQ} \longrightarrow \widehat{kQ}$  et  $\varphi' := \pi_{m'} : \widehat{kQ'} \longrightarrow \widehat{kQ'}$  les  $p$ -équivalences droites respectives définies par  $m$  et  $m'$  (relativement aux sommes directes  $B = B_{\text{triv}} \oplus \overline{B}$  et  $B' = B'_{\text{triv}} \oplus \overline{B}'$ ). Alors on a une équivalence droite faible  $\psi := (\varphi' \circ \phi)|_{\widehat{kQ}} : \widehat{kQ} \xrightarrow{\sim} \widehat{kQ'}$  entre les carquois modulés avec potentiels réduits  $\text{red}(Q, m)$  et  $\text{red}(Q', m')$ .*

*Démonstration.* Adoptons les abréviations suivantes :  $J := J_m$ ,  $J' := J_{m'}$ ;  $\overline{J} := \varphi(J)$ ,  $\overline{J}' := \varphi'(J')$ , et  $\widehat{J} = J_{\widehat{kQ}}$ ,  $\widehat{J}' = J_{\widehat{kQ'}}$ .

Les équations (3.4.4) et (3.4.6) montrent clairement que la partie triviale  $J_m^{\text{triv}}$  de  $J = J_m$  est telle qu'on ait :  $J \cap (\widehat{J} \setminus \widehat{J}^2) + \{0\} = J_m^{\text{triv}}$ ; on observe alors que la partie triviale  $B_{\text{triv}}$  associée à chaque  $(Q, m)$  est l'unique sous- $K$ -bimodule de  $B$  vérifiant la relation

$$B_{\text{triv}} = (J + \widehat{J}^2) \cap B = (J_m^{\text{triv}} + \widehat{J}^2) \cap B, \text{ (voir le lemme 3.4.7 pour plus de détails).}$$

Maintenant en appliquant l'observation précédente, on vérifiera que la partie triviale  $B'_{\text{triv}}$  de  $B'$  scinde aussi.  $\phi : \widehat{kQ} \xrightarrow{\sim} \widehat{kQ'}$  étant un isomorphisme tel que  $\phi|_k = \mathbb{1}_K$ , il suit de la proposition 3.2.1-(a) que sa composante homogène de degré 1 est un isomorphisme de  $K$ -bimodules  $\phi_1 : B = B_{\text{triv}} \oplus \overline{B} \xrightarrow{\sim} B'$ , si bien qu'on a aussi  $B' = \phi_1(B_{\text{triv}}) \oplus \phi_1(\overline{B})$  en tant que somme directe de  $K$ -bimodules. Mais ayant en vue la proposition 3.3.5 et le fait que  $\phi$  est une équivalence droite faible entre  $(Q, m)$  et  $(Q', m')$ , on a :

$J_{\phi(m)} = \phi(J_m) = J_{m'} = J'$ , en utilisant aussi le fait que l'isomorphisme  $\phi$  préserve les puissances de  $\widehat{J} = J_{\widehat{kQ}}$  il découle alors des égalités précédentes que,  $\phi(B_{\text{triv}}) = \phi((J + \widehat{J}^2) \cap B) = (\phi(J) + \phi(\widehat{J}^2)) \cap \phi(B) = (J' + \widehat{J}^2) \cap \phi(B)$ , si bien que  $\phi_1(B_{\text{triv}}) = (J' + \widehat{J}^2) \cap \phi_1(B) = (J' + \widehat{J}^2) \cap B' = B'_{\text{triv}}$ , montrant ainsi que la partie triviale  $B'_{\text{triv}} = \phi_1(B_{\text{triv}})$  scinde aussi.

Dans la suite de la preuve et comme on l'a fait pour  $(Q, m)$ , on considère la projection canonique  $\pi' : \widehat{kQ'} \longrightarrow \widehat{kQ'/J_{m'}^{\text{triv}}}$ , pour laquelle la restriction  $\overline{\pi}' : \widehat{kQ'} \longrightarrow \widehat{kQ'/J_{m'}^{\text{triv}}}$  est un isomorphisme, avec  $\widehat{kQ}'_1 = \overline{B}'$  et la  $\mathfrak{p}$ -équivalence droite définie par  $m'$  (relativement à la décomposition  $B' = B'_{\text{triv}} \oplus \overline{B}'$ ) est donnée par  $\varphi' := \pi_{m'} = \overline{\pi}'^{-1} \circ \pi' : \widehat{kQ'} \longrightarrow \widehat{kQ}'$ , de  $(Q', m')$  sur le carquois modulé avec potentiel réduit  $\text{red}(Q', m') = (\overline{Q}', \overline{m}')$  avec  $\overline{m}' = \varphi'(m)$ . Rappelons que comme en (\*), on a en particulier que,

$$\overline{J} = J_{\overline{m}} = \varphi(J_m) \subseteq J_m = J \text{ et } \overline{J}' = J_{\overline{m}'} = \varphi'(J_{m'}) \subseteq J_{m'} = J'. \quad (**)$$

On veut donc montrer qu'on a une équivalence droite faible  $\psi := (\varphi' \circ \phi)|_{\widehat{kQ}} : \widehat{kQ} \xrightarrow{\sim} \widehat{kQ}'$  entre les carquois modulés avec potentiels réduits  $\text{red}(Q', m')$  et  $\text{red}(Q', m')$ . Il est clair que  $\psi|_K = \mathbb{1}_K$ . Comme plus haut, on a  $\phi_1(B_{\text{triv}}) = B'_{\text{triv}}$ , la composante  $\phi_1$  de l'isomorphisme  $\phi$  est un isomorphisme de  $K$ -bimodule donné sous forme matricielle par

$$\overline{B} \oplus B_{\text{triv}} \xrightarrow{\phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & 0 \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} \end{bmatrix}} \overline{B}' \oplus B'_{\text{triv}} \text{ avec } \phi_{i,j} \in \text{Hom}(N_j, N'_i) \text{ pour } (i, j) = (1, 1), (2, 1), (2, 2), N_1 = \overline{B}, N_2 = B_{\text{triv}} \text{ et } N'_1 = \overline{B}', N'_2 = B'_{\text{triv}}.$$

Il en découle que  $\phi_{1,1}$  est aussi un isomorphisme de  $K$ -bimodules. La définition des  $\mathfrak{p}$ -équivalences droites  $\varphi$  et  $\varphi'$  montre que  $\varphi|_{\widehat{kQ}} = \mathbb{1}_{\widehat{kQ}}$ ,  $\varphi|_{\widehat{kQ}'} = \mathbb{1}_{\widehat{kQ}'}$ , et la définition de  $J_m^{\text{triv}} \subset J$  et  $J_{m'}^{\text{triv}} \subset J$  montre aussi que  $\varphi(B_{\text{triv}}) \subset J_{\widehat{kQ}}^2$  et  $\varphi(B'_{\text{triv}}) \subset J_{\widehat{kQ}'}^2$ . Si on pose  $\phi|_B = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_{(2)} \end{bmatrix} : B \longrightarrow B' \oplus \widehat{J}^2 = \prod_{l \geq 1} B^l$ , alors pour chaque  $z \in \overline{B}$  on a :  $\phi(z) = \phi_1(z) + \phi_{(2)}(z) = \phi_{1,1}(z) + v$  avec  $v = \phi_{2,1}(z) + \phi_{(2)}(z)$  dans  $B'_{\text{triv}} \oplus \widehat{J}^2$ , ainsi,  $\psi(z) = \varphi' \phi(z) = \varphi'(\phi_{1,1}(z)) + \varphi'(v) = \phi_{1,1}(z) + \varphi'(v)$  avec  $\varphi'(v) \in J_{\widehat{kQ}'}^2$ . Alors la composante de degré 1 de  $\psi$  est donnée par  $\psi_1 = \phi_{1,1} : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}'$ , et donc  $\psi_1$  est aussi un isomorphisme de  $K$ -bimodules et en vertu de la proposition 3.2.1-(a) on déduit que  $\psi$  est un isomorphisme de  $k$ -algèbres topologiques tel que  $\psi|_K = \mathbb{1}_K$ .

Il reste à voir que  $\psi(\overline{J}) = \overline{J}'$ . En appliquant (\*\*) ci-dessus, on a :  $\psi(\overline{J}) = \varphi' \phi(\varphi(J)) \subseteq \varphi' \phi(J) = \varphi'(J') = \overline{J}'$ , donc  $\psi(\overline{J}) \subseteq \overline{J}'$ . Inversement, soit  $z' \in \overline{J}'$ , alors  $\psi$  étant déjà un isomorphisme on sait que  $z' = \psi(z)$  pour un certains  $z \in \widehat{kQ}$ . On veut alors vérifier que  $z$  est dans  $\overline{J}$ . On a  $z' \in \overline{J}' = \varphi'(J') = \varphi'(\phi(J))$ , donc  $z' = \varphi' \phi(x)$  pour un certain  $x \in J$ , il suit alors que  $\varphi' \phi(z) = \psi(z) = z' = \varphi' \phi(x)$ , si bien que  $\phi(z - x) = \phi(z) - \phi(x) \in \ker(\varphi') \subset J' = \phi(J)$ , montrant alors que  $z - x \in J$ ; or  $x$  étant déjà dans  $J$  on déduit que  $z \in J$  et par suite que,  $z = \varphi(z) \in \overline{J}$ . On conclut que  $\psi(\overline{J}) = \overline{J}'$  et donc  $\psi : \widehat{kQ} \xrightarrow{\sim} \widehat{kQ}'$  est une équivalence droite faible entre les carquois modulés réduits  $\text{red}(Q', m')$  et  $\text{red}(Q', m')$ ; ceci achève la preuve de la deuxième partie du théorème 3.4.4.  $\square$

À présent on peut retourner à la preuve du premier volet du théorème 3.4.4, c'est l'objet des lemmes 3.4.7

et 3.4.9 ci-après.

**Lemme 3.4.7.**  $B \cap (J_m^{\text{triv}} + J_{k\mathcal{Q}}^2) = B_{\text{triv}}$ , avec en plus  $\overline{B} \cap (J_m^{\text{triv}} + J_{k\mathcal{Q}}^2) = 0$ . Si bien que via la projection canonique  $\widehat{k\mathcal{Q}} \xrightarrow{\pi} \widehat{k\mathcal{Q}}/J_m^{\text{triv}}$  on pose désormais poser que  $\pi(x) = x$  pour tout  $x \in \overline{B}$  et on a :  $J_{k\mathcal{Q}}/J_m^{\text{triv}} = \overline{B} \oplus J_{k\mathcal{Q}}^2/J_m^{\text{triv}} = (J_{k\mathcal{Q}}/J_m^{\text{triv}}/J_{k\mathcal{Q}}^2/J_m^{\text{triv}}) \oplus J_{k\mathcal{Q}}^2/J_m^{\text{triv}}$ .

*Démonstration.* L'équation (3.4.6) montre clairement que  $B \cap (I_0 + J_{k\mathcal{Q}}^2) = B_{\text{triv}}$ . Comme  $J_m^{\text{triv}} = I = \overline{I_0} = \bigcap_{l=0}^{\infty} (I_0 + J_{k\mathcal{Q}}^l)$ , il vient que  $B \cap (I + J_{k\mathcal{Q}}^2) \subset B \cap (I_0 + J_{k\mathcal{Q}}^2) = B_{\text{triv}}$ . Or, toujours en vertu de l'équation (3.4.6),  $B_{\text{triv}} \subset I_0 + J_{k\mathcal{Q}}^2 \subset I + J_{k\mathcal{Q}}^2$ . L'équation (3.4.2) donne alors que  $\overline{B} \cap (I + J_{k\mathcal{Q}}^2) = \overline{B} \cap (B \cap (I + J_{k\mathcal{Q}}^2)) = \overline{B} \cap B_{\text{triv}} = 0$ . En posant donc  $\pi(x) = x = x + I$ , il suit de ce qui précède que  $\overline{B} \subset (\{0\} + J_{k\mathcal{Q}}/J_m^{\text{triv}}/J_{k\mathcal{Q}}^2/J_m^{\text{triv}})$ , or la projection  $\pi$  induit un épimorphisme entre  $B = J_{k\mathcal{Q}}/J_{k\mathcal{Q}}^2$  et  $J_{k\mathcal{Q}}/J_{k\mathcal{Q}}^2/J_{k\mathcal{Q}}^2/J_m^{\text{triv}}$  on a clairement  $\pi(B_{\text{triv}}) \subset J_{k\mathcal{Q}}^2/J_m^{\text{triv}}$ ; nous déduisons donc que  $J_{k\mathcal{Q}}/J_m^{\text{triv}} = \overline{B} \oplus J_{k\mathcal{Q}}^2/J_m^{\text{triv}}$ .  $\square$

**Lemme 3.4.8.** Soient  $z_1, \dots, z_n, \alpha_1, \alpha'_1, \dots, \alpha_n, \alpha'_n$ , deux familles d'éléments quelconques dans  $\widehat{k\mathcal{Q}}$ . Alors si  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot z_k \cdot \alpha'_k = 0$ , alors il existe une famille finie de scalaires  $a_{k,l}, a_{k,s} \in \bigcup_{i \in \mathcal{Q}_0} k_i$  avec  $1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq q$  et  $1 \leq s \leq q'$  pour deux entiers  $q, q' \in \mathbb{N}_*$ , satisfaisant à la condition suivante : Pour toute paire  $(l, s) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, q'\}$  on a :  $\sum_{k=1}^n a_{k,l} \cdot z_k \cdot a_{k,s} = 0$ . De plus, pour toute suite d'éléments  $w_1, \dots, w_n \in \widehat{k\mathcal{Q}}$  tels que  $\sum_{k=1}^n a_{k,l} \cdot w_k \cdot a_{k,s} = 0$  pour toute paire  $(l, s) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, q'\}$ , on a aussi que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot w_k \cdot \alpha'_k = 0$ .

*Démonstration.* Commençons par rappeler le fait bien connu qui suit. Soient  $E$  et  $F$  deux  $k$ -surcorps,  $M$  un  $E$ -module à droite et  $N$  un  $E$ -module à gauche, alors pour tout système de vecteurs  $E$ -linéairement indépendants  $v_1, \dots, v_p$  dans le module à droite  $M$ , une la somme  $v_1 \otimes_E u_1 + \dots + v_p \otimes_E u_p$  est nulle si et seulement si on a,  $u_1 = \dots = u_p = 0$ . En effet, posant  $M = (\langle v_1, \dots, v_p \rangle \cdot E) \oplus M'$ , tout élément  $x$  dans  $M$  s'écrit de façon unique par :  $x = v_1 c_{x,1} + \dots + v_p c_{x,p} + x'$  avec  $c_{x,1}, \dots, c_{x,p} \in E$  et  $x' \in M'$ . Alors pour chaque  $1 \leq s \leq p$  fixé, on considère l'application  $k$ -linéaire  $f_s : M \times N \longrightarrow N$  donnée par  $f_s(x, y) = c_{x,s} y$  pour tout  $(x, y \in M \times N)$ .  $f_s$  vérifie bien la relation :  $f_s(x, ay) = f_s(xa, y)$  pour tout  $a \in E$  et tout  $(x, y) \in M \times N$ , si bien qu'en vertu de la définition du produit tensoriel  $M \otimes_E N$ , il existe une unique application  $k$ -linéaire  $\tilde{f}_s : M \otimes_E N \longrightarrow N$  telle que  $\tilde{f}_s(x \otimes y) = f_s(x, y) = c_{x,s} y$ . Ainsi, si  $\xi = v_1 \otimes u_1 + \dots + v_p \otimes u_p = 0$  alors on a :  $0 = \tilde{f}_s(\xi) = \tilde{f}_s(v_1 \otimes u_1) + \dots + \tilde{f}_s(v_p \otimes u_p) = u_s$ ; et la réciproque est triviale. On a également la version duale de la discussion précédente.

Posant maintenant  $I = \mathcal{Q}_0$ , remarquons que  $\bigoplus_{i \in I} \widehat{k\mathcal{Q}} \cdot e_i = \widehat{k\mathcal{Q}} = \bigoplus_{i \in I} e_i \cdot \widehat{k\mathcal{Q}}$  où pour chaque  $i \in I, e_i \in k_i$  est l'unité du sous-corps  $k_i \subset K = \prod_{j \in I} k_j$ . On fixe alors une  $k_i$ -base gauche  $\widehat{X}_i = \{\xi_{\lambda'} : \lambda' \in \Lambda'_i\}$  de  $e_i \cdot \widehat{k\mathcal{Q}}$  et une  $k_i$ -base droite  $\widehat{Y}_i = \{\zeta_{\lambda} : \lambda \in \Lambda_i\}$  de  $\widehat{k\mathcal{Q}} \cdot e_i$ ; les  $\Lambda_i$  et  $\Lambda'_i$  étant des ensembles infinis qu'on prend deux-à-deux disjoints. En prenant les unions disjointes,  $\Lambda = \bigcup_{i \in I} \Lambda_i$  et  $\Lambda' = \bigcup_{i \in I} \Lambda'_i$ , on obtient ainsi un système générateur élémentaire gauche  $\widehat{X} = \bigcup_{i \in I} \widehat{X}_i = \{\xi_{\lambda'} : \lambda' \in \Lambda'\}$  et un système générateur élémentaire droit  $\widehat{Y} = \bigcup_{i \in I} \widehat{Y}_i = \{\zeta_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$  pour le  $K$ -bimodule  $\widehat{k\mathcal{Q}}$ ; (voir Définition 3.2.3).

Ainsi de façon unique, pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $\alpha_k$  et  $\alpha'_k$  s'écrivent comme suit :  $\alpha_k = \sum_{\lambda \in \Lambda} \zeta_\lambda a_{k,\lambda}$  et  $\alpha'_k = \sum_{\lambda' \in \Lambda'} a'_{k,\lambda'} \xi_{\lambda'}$ , où  $\tilde{a}_k := (a_{k,\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$  et  $\tilde{a}'_k := (a'_{k,\lambda'})_{\lambda' \in \Lambda'}$  sont deux familles de scalaires dans  $K$  à support finis, tels que  $a_{k,\lambda}, a'_{k,\lambda'} \in \bigcup_{i \in I} k_i$  pour tous  $k, \lambda, \lambda'$ .

Il s'ensuit que pour le système générateur élémentaire  $\widehat{Y} = \bigcup_{i \in I} Y_i$ , et pour toute famille de scalaires  $(c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  à support fini et telle que chaque  $c_\lambda$  est dans l'union  $\bigcup_{i \in I} k_i$ , on obtient que si  $\sum_{\lambda \in \Lambda} \zeta_\lambda c_\lambda u_\lambda = 0$  dans  $\widehat{kQ}$ , alors  $c_\lambda u_\lambda = 0$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . De même le système générateur élémentaire gauche  $\widehat{X}$  vérifie la version duale correspondante à celle qu'on vient de voir pour  $\widehat{Y}$ .

Supposons à présent que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot z_k \cdot \alpha'_k = 0$ . Alors cette équation se réécrit comme suit :  $\sum_{\lambda \in \Lambda, \lambda' \in \Lambda'} \zeta_\lambda \left( \sum_{k=1}^n a_{k,\lambda} \cdot z_k \cdot a'_{k,\lambda'} \right) \xi_{\lambda'} = 0$ . Si bien que comme dans le paragraphe précédent, en utilisant le système générateur élémentaire droit  $\widehat{Y}$  et ensuite le système générateur gauche  $\widehat{X}$  on obtient bien que  $\sum_{k=1}^n a_{k,\lambda} \cdot z_k \cdot a'_{k,\lambda'} = 0$  pour toute paire  $(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda'$ . Ceci établit le premier volet du lemme.

Pour le second volet, supposons que  $w_1, \dots, w_n$  sont des éléments de  $\widehat{kQ}$  tels que  $\sum_{k=1}^n a_{k,\lambda} \cdot w_k \cdot a'_{k,\lambda'} = 0$  pour toute paire  $(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda'$ . Alors l'expression ci-dessus des  $\alpha_k, \alpha'_k$ , pour  $1 \leq k \leq n$ , montre immédiatement que :  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot w_k \cdot \alpha'_k = \sum_{\lambda \in \Lambda, \lambda' \in \Lambda'} \zeta_\lambda \left( \sum_{k=1}^n a_{k,\lambda} \cdot w_k \cdot a'_{k,\lambda'} \right) \xi_{\lambda'} = 0$ .  $\square$

**Lemme 3.4.9.** (1) *Pour tout  $x$  non nul dans  $I_0$ , il existe un entier maximal  $l_x \in \mathbb{N}_*$  pour lequel,  $x = x_0 + x'$  avec  $x_0 \in (\widehat{kQ} \cdot B_{\text{triv}} \cdot \widehat{kQ}) \cap (J_{\widehat{kQ}}^{l_x} \setminus J_{\widehat{kQ}}^{l_x+1})$  et  $x' \in J_{\widehat{kQ}}^{l_x+1}$ .*

(2) *Les égalités ci-après sont valides pour  $L = \widehat{kQ} \cdot B_{\text{triv}} \cdot \widehat{kQ}$  et pour tout  $l \in \mathbb{N}$  :*

$$J_{\widehat{kQ}}^l = J_{\widehat{kQ}}^l \oplus (L \cap J_{\widehat{kQ}}^l), \quad (I_0 + J_{\widehat{kQ}}^l) \cap \widehat{kQ} \subset J_{\widehat{kQ}}^l; \quad \text{si bien que } J_m^{\text{triv}} \cap \widehat{kQ} = 0.$$

*Démonstration.* En vertu des équations (3.4.2) et (3.4.6), on a un monomorphisme de  $K$ -bimodules  $B_{\text{triv}} \xrightarrow{j_{\text{triv}} := \begin{bmatrix} p' \\ r' \end{bmatrix}} (B^\lambda)^* \oplus (B^\delta)^* \subset B^*$  tel que  $I_0$  soit donné par la relation suivante :  $I_0 = \langle \text{Im}(\mathbb{1}_{B_{\text{triv}}} + (\partial m') \circ j_{\text{triv}}) \rangle$ . Dans cette preuve, posons  $f' = (\partial m') \circ j_{\text{triv}} : B_{\text{triv}} \longrightarrow J_{\widehat{kQ}}^2$ .

**Énoncé (1).** Soit  $x \in I_0$ , alors il existe trois familles finies d'éléments  $\xi_1, \dots, \xi_n \in B_{\text{triv}}$ ,  $\alpha_1, \alpha'_1, \dots, \alpha_n, \alpha'_n \in \widehat{kQ}$  tels que  $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot (\xi_k + f'(\xi_k)) \cdot \alpha'_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \xi_k \cdot \alpha'_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot f'(\xi_k) \cdot \alpha'_k$ , avec  $f'(\xi_k) \in J_{\widehat{kQ}}^2$ . Ainsi en prenant  $x_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \xi_k \cdot \alpha'_k$  et  $x' = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot f'(\xi_k) \cdot \alpha'_k$ , il est clair qu'il existe bien un entier  $l_x$  maximal pour lequel  $x_0 \in (\widehat{kQ} \cdot B_{\text{triv}} \cdot \widehat{kQ}) \cap (\{0\} + J_{\widehat{kQ}}^{l_x} \setminus J_{\widehat{kQ}}^{l_x+1})$  et  $x' \in J_{\widehat{kQ}}^{l_x+1}$ . Pour compléter la preuve de l'énoncé (1), il reste à vérifier que si  $x_0 = 0$ , alors  $x = 0 = x'$ . Supposons donc que  $x_0 = 0$ , alors en vertu du lemme 3.4.8 précédent, il existe une famille finie de scalaires  $a_{k,l}, a_{k,s} \in \bigcup_{i \in Q_0} k_i$  avec  $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq l \leq q$  et  $1 \leq s \leq q'$  pour deux entiers  $q, q' \in \mathbb{N}_*$ , satisfaisant à la condition suivante : pour chaque paire  $(l, s) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, q'\}$  on a :  $\sum_{k=1}^n a_{k,l} \cdot \xi_k \cdot a_{k,s} = 0$ , et de plus pour toute suite d'éléments  $w_1, \dots, w_n \in \widehat{kQ}$  tels que  $\sum_{k=1}^n a_{k,l} \cdot w_k \cdot a_{k,s} = 0$  pour chaque paire  $(l, s) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, q'\}$ , on a

aussi que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot w_k \cdot \alpha'_k = 0$ . Or comme  $f'$  est un morphisme de  $K$ -bimodules, on aussi  $\sum_{k=1}^n a_{k,l} f'(\xi_k) \cdot a_{k,s} = f'(\sum_{k=1}^n a_{k,l} \xi_k \cdot a_{k,s}) = 0$  et on déduit alors que  $x' = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot f'(\xi_k) \alpha'_k = 0$  et  $x = x_0 + x' = 0$ ; ce qui établit la validité de (1).

**Énoncé (2).** Comme en vertu des équations (3.4.2) on a,  $B = B_{\text{triv}} \oplus \overline{B}$  tandis que  $k\overline{Q}$  est déterminé par  $\overline{B}$ , il suit immédiatement que pour  $L = \overline{kQ \cdot B_{\text{triv}} \cdot kQ} \subset J_{k\overline{Q}}$  on a bien  $\widehat{kQ} = k\overline{Q} \oplus L$ , (en fait,  $L$  est formé des combinaisons linéaires éventuellement infinies des éléments homogènes de la forme  $u_1 \otimes \cdots \otimes u_m$  tels qu'il existe un entier  $t \in \{1, \dots, m\}$  avec  $u_t \in B_{\text{triv}}$ , et clairement  $\widehat{kQ} \cap L = 0$ ). Maintenant,  $\widehat{kQ}$  étant une  $k$ -algèbre graduée, il suit de ce qui précède que pour chaque  $l \in \mathbb{N}$  on aussi  $J_{k\overline{Q}}^l = J_{k\overline{Q}}^l \oplus (L \cap J_{k\overline{Q}}^l)$ .

Soit maintenant  $z = x + v \in (I_0 + J_{k\overline{Q}}^t) \cap \widehat{kQ}$  pour un entier  $t \in \mathbb{N}$  avec  $x \in I_0$  et  $v \in J_{k\overline{Q}}^t$ , nous voulons montrer que  $z \in J_{k\overline{Q}}^t$ . Si  $x = 0$  alors il n'y a rien à montrer. On peut donc supposer que  $x \neq 0$ , alors en vertu de l'énoncé (1), il existe un entier maximal  $l_x \in \mathbb{N}_*$  pour lequel  $x = x_0 + x'$  avec  $0 \neq x_0 \in (\widehat{kQ} \cdot B_{\text{triv}} \cdot \widehat{kQ}) \cap (J_{k\overline{Q}}^{l_x} \setminus J_{k\overline{Q}}^{l_x+1})$  et  $x' \in J_{k\overline{Q}}^{l_x+1}$ . En vertu du premier volet de (2), on peut poser :  $x' = x'_0 + \overline{x}$  et  $v = v_0 + \overline{v}$  avec  $x'_0 \in J_{k\overline{Q}}^{l_x+1} \cap L$ ,  $v_0 \in J_{k\overline{Q}}^t \cap L$ , tandis que  $\overline{x} \in J_{k\overline{Q}}^{l_x+1}$  et  $\overline{v} \in J_{k\overline{Q}}^t$ . Alors  $z = (x_0 + x'_0 + v_0) + (\overline{x} + \overline{v})$  et on obtient que  $(x_0 + x'_0 + v_0) = z - (\overline{x} + \overline{v}) \in k\overline{Q} \cap L = 0$ , si bien que  $z = \overline{x} + \overline{v} \in J_{k\overline{Q}}^{l_x+1} + J_{k\overline{Q}}^t$  et  $x_0 + x'_0 = -v_0 \in J_{k\overline{Q}}^t$ . Or  $0 \neq x_0 \in J_{k\overline{Q}}^{l_x} \setminus J_{k\overline{Q}}^{l_x+1}$  et  $x'_0 \in J_{k\overline{Q}}^{l_x+1}$  si bien que  $0 \neq x_0 + x'_0 \in J_{k\overline{Q}}^{l_x} \setminus J_{k\overline{Q}}^{l_x+1}$ , alors le fait qu'on a aussi  $x_0 + x'_0$  dans  $J_{k\overline{Q}}^t$  entraîne nécessairement que  $t \leq l_x$ . On déduit alors que  $z = \overline{x} + \overline{v} \in J_{k\overline{Q}}^{l_x+1} + J_{k\overline{Q}}^t = J_{k\overline{Q}}^t$ . Ainsi,  $(I_0 + J_{k\overline{Q}}^t) \cap \widehat{kQ} \subset J_{k\overline{Q}}^t$  pour tout  $t \in \mathbb{N}$ , et il en résulte que  $J_m^{\text{triv}} \cap \widehat{kQ} = \bigcap_{t=0}^{\infty} ((I_0 + J_{k\overline{Q}}^t) \cap \widehat{kQ}) \subset \bigcap_{t=0}^{\infty} J_{k\overline{Q}}^t = 0$ , complétant la preuve de l'énoncé (2).  $\square$

**Fin de la preuve du premier volet du Théorème 3.4.4.** En vertu du lemme 3.4.9 précédent on a  $J_m^{\text{triv}} \cap \widehat{kQ} = 0$ , si bien que la restriction  $\widehat{kQ} \xrightarrow{\pi} \widehat{kQ}/J_m^{\text{triv}} = A$  est un monomorphisme. Or comme  $\pi$  envoie la  $k$ -algèbre semisimple  $K = \prod_{i \in I} k_i$  sur  $K$  et le  $K$ -bimodule  $\overline{B}$  sur  $\overline{B}$  avec  $J_A = J_{\widehat{kQ}/J_m^{\text{triv}}} = \overline{B} \oplus J_{\widehat{kQ}/J_m^{\text{triv}}}^2$ ,  $\pi$  est un épimorphisme, l'argument est comme dans la proposition 4.1.1-(b.ii  $\Rightarrow$  (b.i)). En effet,  $\pi$  induit clairement des épimorphismes  $\overline{\pi}_l : k\overline{Q}_l \longrightarrow J_A^l/J_A^{l+1}$  pour chaque  $l \geq 1$ . Soit donc  $z \in A$  un élément arbitraire; alors il existe  $z_0 \in k\overline{Q}_0$  et  $u_1 \in J_A$  tels que  $z = \overline{\pi}(z_0) + u_1$ , et par suite on a  $u_1 = \overline{\pi}(x_1) + u_2$  avec  $x_1 \in k\overline{Q}_1$  et  $u_2 \in J_A^2$ . Alors on a une famille  $(x_l)_{l \geq 0} = \sum_{l \geq 0} x_l \in \widehat{kQ}$  avec  $x_l \in k\overline{Q}_l = \overline{B}^{(l)}$  et  $z = \sum_{l \geq 0} \pi(x_l) = \pi(\sum_{l \geq 0} x_l)$ . Si bien que  $\pi$  est surjectif.  $\square$

La seconde approche à la réduction des  $mQ$ ps donnée par le théorème de réduction 3.4.4 est plus directe que la première approche donnée par le théorème de décomposition 3.4.2. Dans la première il faut d'abord trouver une équivalence droite entre  $(Q, m)$  et une somme directe  $(Q_{\text{red}}, m_{\text{red}}) \oplus (Q_{\text{triv}}, m_{\text{triv}})$ ,  $m_{\text{red}}$  étant défini à une équivalence cyclique près ! Le calcul de  $\text{red}(Q, m) = (\overline{Q}, \overline{m})$  en utilisant la seconde méthode est direct et peut se faire de manière récursive comme suit : pour  $L = \widehat{kQ} \cdot B_{\text{triv}} \cdot \widehat{kQ}$  on considère le morphisme continu d'algèbres  $\pi_0 : \widehat{kQ} \longrightarrow \widehat{kQ} = k\overline{Q} \oplus L$  tel que  $\pi_0|_{k\overline{Q}} = 1_{k\overline{Q}}$  et, tenant compte de (3.4.6) on pose,

$$\pi_0(y_k) = y_k - (\partial \mathbf{m})(x_k^*), \quad \pi_0(x_k) = x_k - (\partial \mathbf{m})(y_k^*) \in J_{k\mathcal{Q}}^2.$$

Alors  $\pi \circ \pi_0 = \pi$  et la  $p$ -équivalence droite  $\widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}}$  est donnée par la limite  $\pi_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_0^n$ .

### 3.5 Mutations de carquois modulés avec potentiels

Dans cette section, on généralise les mutations de carquois avec potentiels au mutations de carquois modulés avec potentiels, ceci n'était pas possible jusqu'à ce que nous ayons obtenu la version généralisée (non-simplement lacée) des structures amassées prouvée dans le chapitre 2.

Soit  $(\mathcal{Q}, W)$  un carquois modulé avec potentiel, on rappelle que  $\mathcal{Q}$  est sans boucle. En remplaçant si nécessaire  $W$  par un potentiel cycliquement équivalent, on considère la condition suivante pour un point  $k$  :

$$k \text{ est un point n'appartenant pas à un 2-cycle dans } \mathcal{Q} \text{ et on suppose que } e_k \cdot W = 0 \text{ et } W \cdot e_k = 0. \quad (3.5.1)$$

**Définition 3.5.1.** À chaque carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}, W)$  satisfaisant à la condition (3.5.1), on associe un nouveau carquois modulé avec potentiel  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q}, W) = (\tilde{\mu}(\mathcal{Q}), \tilde{W})$  qu'on appelle la *semi-mutation* de  $(\mathcal{Q}, W)$  et dont le bimodules des flèches valuées noté  $B' := k(\tilde{\mu}(\mathcal{Q}))_1$  et la modulation  $\tilde{\mu}(\mathcal{M})$  sont décrits comme suit.

(i) La famille  $(k_i, \iota_i)_{i \in I}$  des  $k$ -surcorps  $k_i$  munis des formes non-dégénérées  $\iota_i \in \text{Hom}_k(k_i, k)$  dans  $\mathcal{Q}$  reste inchangée dans  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})$ . Pour chaque paire  $i, j \in I$ ,  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})_1(i, j)$  et la nouvelle paire dualisante de bimodules correspondante sont donnés comme suit :

▷ Pour pour tous  $i, j \in I$ , la paire dualisante et symétrisable de bimodules associée à  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})_1(k, i)$  est égale à la paire dualisante et symétrisable de bimodules associée à  $\mathcal{Q}_1(i, k)$ , et de même, la paire dualisante et symétrisable de bimodules associée à  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})_1(j, k)$  est égale à la paire dualisante et symétrisable de bimodules associée à  $\mathcal{Q}_1(k, j)$  :

$$\{ {}_k B'_i, {}_k B'^*_i \} = \{ {}_i B_{k,i}^*, {}_i B_{k,i} \mathbf{b}_{k,i} \mathbf{b}'_k \} \text{ et } \{ {}_j B'_k, {}_j B'^*_k \} = \{ {}_k B_{j,k}^*, {}_k B_{j,k} \mathbf{b}_{j,k} \mathbf{b}'_j \}.$$

▷ On suppose  $i, j \in I \setminus \{k\}$ ; alors la paire dualisante et symétrisable de bimodules associée à  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})_1(i, j)$  est donnée par

$$\{ {}_i B'_j, {}_i B'^*_j \} := \{ {}_i B_{j,i}^*, {}_i B_{j,i} \mathbf{b}_{j,i} \mathbf{b}'_j \} \oplus (\{ {}_i B_{k,i}^*, {}_i B_{k,i} \mathbf{b}_{k,i} \mathbf{b}'_k \} \otimes \{ {}_k B_{j,k}^*, {}_k B_{j,k} \mathbf{b}_{j,k} \mathbf{b}'_j \}).$$

En particulier, si on pose  $\bar{e}_k = 1 - \sum_{i \in I \setminus \{k\}} e_i$ , alors le nouveau bimodule  $B' := k(\tilde{\mu}(\mathcal{Q}))_1$  des flèches valuées dans  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})$  s'exprime en fonction du bimodule  $B$  des flèches valuées dans  $\mathcal{Q}$  comme suit :

$$B' = \bar{e}_k B \bar{e}_k \oplus B e_k B \oplus (B e_k)^* \oplus (e_k B)^* = \bar{e}_k B \bar{e}_k \oplus B e_k B \oplus (B e_k B)^*.$$

(ii) Pour le carquois valué  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})$  sous-jacent à  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})$ , on a alors la description suivante pour chaque paire ordonnée de points  $i, j \in I$ .

▷ Si  $i = k$  ou  $j = k$  alors  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})_1(i, j) = \{ \alpha^* : i \xrightarrow{a,b} j \text{ tel que } \alpha : i \xleftarrow{a,b} j \in \mathcal{Q}_1(j, i) \}$ .

▷ Et dans le cas où  $k \neq i, j$ , on a  $\mathcal{Q}_1(i, j) \subset \tilde{\mu}(\mathcal{Q})_1(i, j)$  en tant que sous-ensemble de flèches valuées, et les flèches additionnelles éventuelles dans  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})$  sont données comme suit. Pour tout

chemin valué  $i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j$  de longueur 2 via  $k$ , la flèche valuée correspondante et représentant la composante  ${}_i B_k^\alpha {}_k B_j^\beta$  dans  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})$  peut être notée  $i \xrightarrow{[\alpha\beta]} j$ .

(iii) Ensuite le nouveau potentiel  $\widetilde{W} : K = \prod_{i \in I} k_i \longrightarrow k(\tilde{\mu}\mathcal{Q})$  est donné comme suit.

$$\widetilde{W} = [W] + \mathfrak{z}_k \text{ avec } \mathfrak{z}_k = \mathfrak{z}_{(Be_k B) \otimes (Be_k B)^*} = \sum_{y \in {}_R \mathcal{Q}_1(-, k), z \in {}_R \mathcal{Q}_1(k, -)} (y \otimes z) \otimes z^* \otimes y^*,$$

dans l'expression du potentiel canonique  $\mathfrak{z}_k : {}_R \mathcal{Q}_1$  est un système droite de flèches pour  $B$  auquel est associé le système dual correspondant pour  $B^*$ , et  $[W]$  coïncide avec  $W$  mais vu dans  $k(\tilde{\mu}\mathcal{Q})$ . Pour toute composante  $k_s \xrightarrow{m} {}_s B_s^w$  de  $W$  le long d'un cycle  $w$  passant par  $k$ , on a par exemple que dans l'expression  $m(e_s) = \sum_{x \in {}_L \mathcal{Q}_1(-, k), z \in {}_R \mathcal{Q}_1(k, -)} \xi_x \otimes (x \otimes z) \otimes \xi_z$  chaque terme  $(x \otimes z) \in Be_k B$ , vu dans  $k(\tilde{\mu}\mathcal{Q})$ , est un élément homogène de degré 1 si bien qu'il ne peut perdre ses parenthèses (lors de toute permutation cyclique), ce fait peut être renforcé en notant ce terme  $[x \otimes z]$  quand il est vu dans  $k(\tilde{\mu}\mathcal{Q})$ .

Observons en particulier que la permutation droite appliquée à toutes les composantes de  $\mathfrak{z}_k$  donne le potentiel canonique  $\varepsilon_r(\mathfrak{z}_k) = \mathfrak{z}_{B_k^* \otimes B_k} \otimes \mathfrak{z}_{k B^* \otimes k B}$  vu comme morphisme à valeurs dans  $k(\tilde{\mu}\mathcal{Q})$ , où  $B_k = Be_k$  et  ${}_k B = e_k B$ ; ainsi (en évaluant  $\varepsilon_r(\mathfrak{z}_k)$  en  $1 \in K$  suivant un système gauche de flèches  ${}_L \mathcal{Q}_1$  pour  $B$  auquel est associé le système dual correspondant) on a :

$$\varepsilon_r(\mathfrak{z}_k) = \sum_{x \in {}_L \mathcal{Q}_1(-, k), z \in {}_R \mathcal{Q}_1(k, -)} x^* \otimes (x \otimes z) \otimes z^* = \sum_{x \in {}_L \mathcal{Q}_1(-, k), z \in {}_R \mathcal{Q}_1(k, -)} x^* \otimes [x \otimes z] \otimes z^*.$$

L'observation ci-après suit directement des définitions précédentes.

*Remarque 3.5.2.* Soient  $(\mathcal{Q}, W)$  et  $(\mathcal{Q}', W')$  deux carquois modulés avec potentiels satisfaisant à la condition (3.5.1), avec  $k\mathcal{Q}_0 = K = k\mathcal{Q}'_0$  (si bien que la condition (3.2.2) est supposée satisfaite) et avec  $e_k \cdot (k\mathcal{Q}'_1) = 0$  et  $(k\mathcal{Q}'_1) \cdot e_k = 0$ . Alors,  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}', W + W') = \tilde{\mu}(\mathcal{Q}, W) \oplus (\mathcal{Q}', W')$ .

### Systèmes gauche (ou droite) de flèches induits pour $\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q})$

Soient  ${}_L \mathcal{Q}_1$  un système gauche de flèches pour  $B$  et  ${}_R \mathcal{Q}_1$  un système droite de flèches pour  $B$ , auxquels sont associés les systèmes duals  ${}_L \mathcal{Q}_1^*$  et  ${}_R \mathcal{Q}_1^*$  pour  $B^*$ , à savoir,  ${}_L \mathcal{Q}_1^* = \{x^* : x \in {}_L \mathcal{Q}_1\}$  qui est un système droite de flèches pour  $B^*$  (et en fait pour le carquois modulé dual  $\mathcal{Q}^*$ ), et  ${}_R \mathcal{Q}_1^* = \{y^* : y \in {}_R \mathcal{Q}_1\}$  qui est un système gauche de flèches pour  $B^*$  et pour le dual  $\mathcal{Q}^*$ . Rappelons que lorsqu'aucune confusion n'est possible, une fois que les systèmes de flèches précédents sont fixés pour  $\mathcal{Q}$  et pour  $\mathcal{Q}^*$ , le calcul de chacune des dérivées (partielles et cycliques) en un point  $x \in {}_L \mathcal{Q}_1 \cup {}_R \mathcal{Q}_1$  est défini comme étant le calcul au point  $x^* \in {}_L \mathcal{Q}_1^* \cup {}_R \mathcal{Q}_1^* \subset B^*$ . Si bien que :  $\partial_x^r = \partial_{x^*}^r$ ,  $\partial_x = \partial_{x^*}$ , de même  $\partial_y^l = \partial_{y^*}^l$ ,  $\partial_y = \partial_{y^*}$ . En particulier, pour tout  $v = \sum_{y \in {}_R \mathcal{Q}_1} y \otimes v_y = \sum_{x \in {}_L \mathcal{Q}_1} v_x \otimes x \in J_{k\mathcal{Q}}$  on a :  $\partial_y^l v = \partial_{y^*}^l v = \langle y^* \otimes v \rangle = v_y$  et  $\partial_x^r v = \partial_{x^*}^r v = \langle v \otimes x^* \rangle = v_x$ . On a aussi posé  $\partial_{x,y} = \partial_{y^* \otimes x^*}$ , si bien que  $\partial_{x,y} = \partial_y^l \partial_x = \partial_x^r \partial_y$ .

En vertu de ce qui précède, le bimodule des flèches valuées dans  $\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q})$  donné par  $B' = \bar{e}_k B \bar{e}_k \oplus Be_k B \oplus (Be_k B)^*$  où  $\bar{e}_k = 1 - e_k$  tandis que  $Be_k B = [Be_k B]$  est de degré 1 dans  $\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q})$ . Ainsi, le système gauche de flèches  ${}_L \mathcal{Q}'_1$  et le système droite de flèches  ${}_R \mathcal{Q}'_1$  induits pour  $B'$  et  $\mathcal{Q}' = \tilde{\mu}_k(\mathcal{Q})$  sont décrits comme suit :

$$\triangleright {}_L \mathcal{Q}'_1(k, -) = {}_R \mathcal{Q}_1^*(-, k), {}_R \mathcal{Q}'_1(k, -) = {}_L \mathcal{Q}_1^*(-, k); \text{ et } {}_L \mathcal{Q}'_1(-, k) = {}_R \mathcal{Q}_1^*(k, -), {}_R \mathcal{Q}'_1(-, k) = {}_L \mathcal{Q}_1^*(k, -).$$

▷ Pour deux points  $i, j \in I$  avec  $k \neq i, j$ , on a :  ${}_L\mathcal{Q}'_1(i, j) = {}_L\mathcal{Q}_1(i, j) \cup {}_L\mathcal{Q}_1(i, k) \otimes {}_L\mathcal{Q}_1(k, j)$  et  ${}_R\mathcal{Q}'_1(i, j) = {}_R\mathcal{Q}_1(i, j) \cup {}_R\mathcal{Q}_1(i, k) \otimes {}_R\mathcal{Q}_1(k, j)$ .

Dans les deux dernières égalités, les produits  ${}_L\mathcal{Q}_1(i, k) \otimes {}_L\mathcal{Q}_1(k, j)$  et  ${}_R\mathcal{Q}_1(i, k) \otimes {}_R\mathcal{Q}_1(k, j)$  sont vides si dans  $\mathcal{Q}$  il n'existe pas de chemin de longueur deux de  $i$  vers  $j$  via  $k$ .

Les théorèmes de réduction 3.4.4 et de décomposition 3.4.2 obtenus pour les carquois modulés avec potentiels nous permettent d'obtenir les résultats ci-après, dont la preuve ne requiert pas d'outils supplémentaires et est une adaptation des versions simplement lacés correspondants [24, 5.2,5,3,5.4,5.7], où on prendra le soin de remplacer le terme "équivalence droite" par "équivalence droite faible". Nous omettrons les détails des preuves, le plus difficile ayant déjà été fait dans les sections précédentes.

**Théorème 3.5.1.** *Pour chaque  $(\mathcal{Q}, W)$  satisfaisant à la condition (3.5.1), la classe d'équivalence droite faible de la semi-mutation  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q}, W) = (\tilde{\mu}(\mathcal{Q}), \tilde{W})$  est déterminée par celles de  $(\mathcal{Q}, W)$ .  $\square$*

On considère aussi la condition suivante :

$$\text{La partie triviale } (\tilde{\mu}(\mathcal{Q})_{\text{triv}}, \tilde{W}^{(2)}) \text{ de } \tilde{\mu}(\mathcal{Q}, W) \text{ scinde.} \quad (3.5.2)$$

**Corollaire 3.5.2.** *On suppose que  $(\mathcal{Q}, W)$  est un carquois modulé avec potentiel tel que (3.5.1) et (3.5.2) soient satisfaits. Alors la classe d'équivalence droite faible de  $\text{red}(\tilde{\mu}(\mathcal{Q}, W))$  est déterminée par celle de  $(\mathcal{Q}, W)$ .  $\square$*

**Définition 3.5.3.** Avec la même hypothèse que dans le corollaire 3.5.2, la mutation de  $(\mathcal{Q}, W)$  au point  $k$  est un représentant de la classe d'équivalence droite faible du carquois modulé avec potentiel réduit  $\text{red}(\tilde{\mu}(\mathcal{Q}), \tilde{W})$ , on note  $\mu_k(\mathcal{Q}, W) = \text{red}(\tilde{\mu}(\mathcal{Q}), \tilde{W})$ .

**Théorème 3.5.3.** *La mutation  $\mu_k$  en chaque point  $k \in I$  est une opération involutive sur l'ensemble des classes d'équivalences droites faibles des carquois modulés avec potentiels satisfaisant aux conditions (3.5.1) et (3.5.2) et (3.2.2).  $\square$*

## Chapitre 4

# Mutation des objets inclinants amassés et carquois modulés avec potentiels

Suivant les lignes de [11] l'objectif primordial de ce chapitre s'articule autour de trois points : obtenir la caractérisation des algèbres jacobiennes non-simplement lacées au moyen des suites faiblement 2-presque scindées ; et ensuite généraliser pour les algèbres jacobiennes et les algèbres inclinées 2-Calabi-Yau non-nécessairement simplement lacées, le théorème [11, 5.1] obtenu dans le cas simplement lacé et duquel il découle que les algèbres inclinées amassées simplement lacées apparaissent comme algèbres jacobiennes (associées aux carquois avec potentiels). C'est d'ailleurs ce qui, à l'origine, a motivé la généralisation des potentiels au contexte des carquois modulés, comme exposé au chapitre précédent. Pour le troisième point de ce chapitre, nous nous limiterons à proposer une version généralisée de la catégorie amassée  $\mathcal{C}_{(\mathcal{Q}, W)}$  introduite par Amiot dans le cas simplement lacé, ainsi les techniques des dg-algèbres et des dg-catégories peuvent désormais être utilisées pour mieux comprendre la catégorie amassée  $\mathcal{C}_{(\mathcal{Q}, W)}$  associée à un carquois modulé avec potentiel.

Comme dans le cas simplement lacé ([11]), une fois que nous avons élaboré le concept de potentiel et établi au chapitre 3 les identités de la Proposition 3.2.4 (1) et de la Proposition 3.2.6 sur les dérivées cycliques secondes, les résultats de ce chapitre, généralisant leurs versions simplement lacées dans [11], ne nécessitent pas de développer des outils techniques supplémentaires autres que ceux du chapitre 3. On gardera toutes les notations du chapitre 3.

### 4.1 Dérivées partielles et présentation d'algèbres

Soit  $A$  une  $k$ -algèbre, toujours supposée satisfaire aux axiomes (ax1) et (ax2) (voir 3.2.1). Rappelons qu'en vertu de la remarque 3.2.1, pour toute série formelle  $F(t_1, \dots, t_m)$  en un nombre fini  $m$  de variables sur  $A/J_A$ , et pour tous  $u_1, \dots, u_m \in J_A$ , la somme finie  $F(u_1, \dots, u_m)$  représente un unique élément dans  $A$ .

**Proposition 4.1.1.** *On suppose avoir un morphisme de  $k$ -algèbres  $\phi_0 : K = k\mathcal{Q}_0 \longrightarrow A$  ainsi qu'un  $K$ -morphisme de bimodules  $\phi_1 : B = k\mathcal{Q}_1 \longrightarrow J_A$ . Alors les énoncés suivants sont valides.*

- (a) *La paire  $\phi_0, \phi_1$  admet un unique prolongement en un morphisme continu de  $k$ -algèbres  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow A$ ; en particulier  $I = \ker(\phi)$  est un idéal fermé de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$ .*
- (b) *Les assertions suivantes sont équivalentes.*
- (b.i)  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow A$  est surjectif.
- (b.ii)  $\phi_0$  et  $\phi_1$  induisent des surjections  $k\mathcal{Q}_0 \longrightarrow A/J_A$  et  $k\mathcal{Q}_1 \longrightarrow J_A/J_A^2$ .
- (b.iii)  $\phi_0$  induit une surjection  $k\mathcal{Q}_0 \longrightarrow A/J_A$  et pour tout  $i \in I$  la suite suivante est exacte :
- $$\bigoplus_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1(i, \cdot)} (\phi t(y))A \xrightarrow{[\phi(y)]_y} (\phi i)J_A \longrightarrow 0.$$
- (b.iv)  $\phi_0$  induit une surjection  $k\mathcal{Q}_0 \longrightarrow A/J_A$  et pour tout  $i \in I$  la suite suivante est exacte :
- $$\bigoplus_{x \in {}_L\mathcal{Q}_1(\cdot, i)} A(\phi s(x)) \xrightarrow{[\phi(x)]_x} J_A(\phi i) \longrightarrow 0$$

*Démonstration.* (a) La propriété universelle de l'algèbre tensorielle  $k\mathcal{Q}$  donne un unique morphisme de  $k$ -algèbres  $\phi : k\mathcal{Q} \longrightarrow A$  prolongeant la paire  $\phi_0, \phi_1$ , et tel que  $\phi(J_{k\mathcal{Q}}^l) \subseteq J_A^l$ , si bien que  $\phi$  est continu et pour chaque  $l \geq 1$  il existe un morphisme induit,

$$\varphi_l : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \widehat{k\mathcal{Q}}/J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}^l = k\mathcal{Q}/J_{k\mathcal{Q}}^l \xrightarrow{\phi} A/J_A^l,$$

envoyant  $x = (x_l)_{l \geq 0} \in \widehat{k\mathcal{Q}}$  sur la classe résiduelle  $\varphi_l(x) = \sum_{i=0}^{l-1} \phi(x_i) + J_A^l = \sum_{i=0}^{\infty} (\phi(x_i) + J_A^l)$  de la somme tronquée  $s_l = \sum_{i=0}^{l-1} \phi(x_i)$ . Alors, utilisant la continuité de  $\phi$  (ou bien la propriété universelle de la limite projective) on obtient que  $\phi$  se prolonge continûment en un unique morphisme  $\widehat{k\mathcal{Q}} \xrightarrow{\phi} A$ , donné sur chaque  $x = (x_l)_{l \geq 0} \in \widehat{k\mathcal{Q}}$  en posant :  $\phi(x) = \sum_{l \geq 0} \phi(x_l)$ , où le terme de droite est la limite de la suite des sommes partielles  $(s_l)_{l \geq 1}$  relativement à la topologie  $J_A$ -adique. En particulier  $\phi$  étant continu, l'idéal  $I = \ker \phi$  est fermé dans  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  en tant que pré-image du sous-ensemble fermé  $\{0\}$  de  $A$ .

(b). Clairement (b.i) entraîne (b.ii). Pour la réciproque, supposons que (b.ii) tient. Comme ci-dessus  $\phi$  induit des morphismes surjectifs  $\phi_l : k\mathcal{Q}_l \longrightarrow J_A^l/J_A^{l+1}$  pour chaque  $l \geq 1$ . Soit alors  $z \in A$  un élément arbitraire ; il existe  $x_0 \in k\mathcal{Q}_0$  et  $u_1 \in J_A$  tel que  $z = \phi(x_0) + u_1$ , et par suite on a  $u_1 = \phi(x_1) + u_2$  avec  $x_1 \in k\mathcal{Q}_1$  et  $u_2 \in J_A^2$ . Alors on a une famille  $(x_l)_{l \geq 0} = \sum_{l \geq 0} x_l \in \widehat{k\mathcal{Q}}$  avec  $x_l \in k\mathcal{Q}_l$  et  $z = \sum_{l \geq 0} \phi(x_l) = \phi(\sum_{l \geq 0} x_l)$ . Si bien que  $\phi$  est surjectif.

Pour continuer, vérifions que l'implication (b.iii)  $\Rightarrow$  (b.ii). D'abord, en utilisant le morphisme de  $k$ -algèbres  $k\mathcal{Q}_0 \xrightarrow{\phi_0} A$ , on voit que  $A = \phi(1)A = \sum_{i \in I} (\phi i)A$ , ainsi  $J_A = \sum_{i \in I} (\phi i)J_A$ . D'où la somme de tous les morphismes dans (b.iii) donne un morphisme surjectif  $\bigoplus_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1} ((\phi t(y))A/J_A) \xrightarrow{[\phi(y)]_y} J_A/J_A^2 = \sum_{i \in I} (\phi i)J_A/J_A^2$ . Chaque composante du morphisme précédent étant la multiplication à gauche par  $\phi(x)$  pour chaque  $x$  dans le système droite de flèches  ${}_R\mathcal{Q}_1 \subset B$  pour  $B$ , et comme la restriction  $K = k\mathcal{Q}_0 \xrightarrow{\phi} A/J_A$  est surjective, nous obtenons que la restriction  $B = k\mathcal{Q}_1 \xrightarrow{\phi} J_A/J_A^2$  est aussi surjective. D'où l'implication (b.iii)  $\Rightarrow$  (b.ii).

Pour voir que (b.i)  $\Rightarrow$  (b.iii), on a seulement besoin de vérifier que pour tout élément homogène  $v$  avec

$s(v) = i$ ,  $\phi(v)$  est dans la pré-image du morphisme  $[\phi(y)]_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1(i, \cdot)}$ . Mais alors en vertu de la proposition 3.2.4-

(1) on voit que  $v = \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1(i, \cdot)} y \otimes \partial_y^i v$ , si bien que  $\phi(v) = [\phi(y)]_y(\phi(\partial_y^i v))$ .

Avec un argument dual, (b.iv) est aussi équivalent à (b.i). Ceci achève la preuve.  $\square$

Nous prouvons aussi le lemme suivant.

**Lemme 4.1.2.**  $\mathcal{Q}$  étant un carquois modulé fini, soient  $S$ ,  $S^l$  et  $S^r$  trois sous-ensembles finis de  $J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}$  tel que le  $K$ -module à gauche  $K \cdot S^l$  et le  $K$ -module à droite  $S^r \cdot K$  coïncide avec le  $K$ -bimodule  $K \cdot S \cdot K$ . Alors pour l'idéal  $I = \langle S \rangle$  de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  les identités suivantes tiennent.

$$(a) \quad {}_R\mathcal{Q}_1 \otimes I + \sum_{v \in S^r} v \otimes \widehat{k\mathcal{Q}} = I = \sum_{v \in S^l} \widehat{k\mathcal{Q}} \otimes v + I \otimes {}_L\mathcal{Q}_1, \text{ et}$$

$$(b) \quad {}_R\mathcal{Q}_1 \otimes \bar{I} + \sum_{v \in S^r} v \otimes \widehat{k\mathcal{Q}} = \bar{I} = \sum_{v \in S^l} \widehat{k\mathcal{Q}} \otimes v + \bar{I} \otimes {}_L\mathcal{Q}_1.$$

*Démonstration.* (a) Pour prouver que  ${}_R\mathcal{Q}_1 \otimes I + \sum_{v \in S^r} v \otimes \widehat{k\mathcal{Q}} = I$ , on utilisera le fait que  $I = \langle S^r \rangle$ . Soient  $a, b \in \widehat{k\mathcal{Q}}$  et  $v \in S^r$ . On peut écrire  $a = a_0 + a'$  avec  $a_0 \in K$  et  $a' \in J_{\widehat{k\mathcal{Q}}} = \prod_{m \geq 1} B^{(m)}$ . Puisque  ${}_R\mathcal{Q}_1$  est un système droite de flèches pour  $B$ ,  $a'$  s'écrit d'une unique manière comme suit,  $a' = \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1} y \otimes u_y$  avec  $u_y \in \widehat{k\mathcal{Q}}$  pour chaque  $y \in {}_R\mathcal{Q}_1$ . On obtient donc  $a \otimes v \otimes b = a_0 \cdot v \otimes b + a' \otimes v \otimes b$ . Maintenant le module à droite  $S^r \cdot K$  étant un  $K$ -bimodule nous obtenons que  $a_0 \cdot v \cdot b \in \sum_{v \in S^r} v \otimes \widehat{k\mathcal{Q}}$ . Mais alors  $a' \otimes v \otimes b = \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1} y \otimes u_y \otimes v \otimes b \in {}_R\mathcal{Q}_1 \otimes I$ . Ainsi pour tous  $a, b \in \widehat{k\mathcal{Q}}$  et pour tout  $v \in S^r$  on a que  $a \otimes v \otimes b \in {}_R\mathcal{Q}_1 \otimes I + \sum_{v \in S^r} v \otimes \widehat{k\mathcal{Q}}$ . Ce qui entraîne l'égalité cherchée. La deuxième égalité à droite de (a) s'obtient de manière similaire en utilisant le système gauche de flèches  ${}_L\mathcal{Q}_1$  pour  $B$  et le fait que  $I = \langle S^l \rangle$ .

(b) Nous montrerons que  ${}_R\mathcal{Q}_1 \otimes \bar{I} + \sum_{v \in S^r} v \otimes \widehat{k\mathcal{Q}} = \bar{I}$ . Soit  $w \in \bar{I}$ , alors pour chaque  $l \geq 1$  on a  $w = v_l + u_l$  avec  $w_l \in I$  et  $u_l \in J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}^l$ . Ainsi  $w_l = v_{l+1} - v_l = u_l - u_{l+1} \in I \cap J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}^l$  pour chaque  $l \geq 1$ . En posant alors  $w_0 = v_1$ , la limite de la suite  $(v_l)_{l \geq 1}$  relativement à la topologie  $J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}$ -adique sur  $\widehat{k\mathcal{Q}}$  est l'élément  $\sum_{l=0}^{\infty} w_l = w$ , car les sommes partielles sont données par  $\sum_{i=0}^{l-1} w_i = v_l = w - u_l$  avec  $u^l \in J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}^l$ . Or en vertu de (a) on peut écrire  $w_l = \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1} y \otimes w_{l,y} + \sum_{v \in S^r} v \otimes w'_{l,v}$  avec  $w_{l,y} \in I$  et  $w'_{l,v} \in \widehat{k\mathcal{Q}}$ . Il en résulte que  $w = \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1} (y \otimes \sum_{l \geq 0} w_{l,y}) + \sum_{v \in S^r} (v \otimes \sum_{l \geq 0} w'_{l,v})$ . Ce qui donne l'égalité à gauche de (b). La deuxième égalité à droite de (b) suit aussi de l'égalité à droite de (a).  $\square$

Maintenant le premier résultat principal de cette section établit un lien entre les relations dans  $\mathcal{Q}$  et les dérivées gauche ou droite comme suit.

**Proposition 4.1.3.** Soit  $\widehat{k\mathcal{Q}} \xrightarrow{\phi} A$  un épimorphisme de  $k$ -algèbres et,  $S$ ,  $S^l$  et  $S^r$  trois sous-ensembles finis d'éléments homogènes dans  $J_{\widehat{k\mathcal{Q}}}$  tel que  $K S^l = K S K = S^r \cdot K$ . Alors Les assertions suivantes sont équivalentes.

(a)  $\ker(\phi) = \bar{I}$  pour l'idéal  $I = \langle S \rangle$  de  $\widehat{k\mathcal{Q}}$ .

(b) Pour chaque point  $i \in I$  la suite suivante est exacte, où  $S^r(i, -) = \{v \in S^r : s(v) = i\}$ .

$$\bigoplus_{v \in S^r(i, -)} (\phi t(v))A \xrightarrow{[\phi(\partial_y^r v)]_{x,v}} \bigoplus_{y \in {}_r\mathcal{Q}_1(i, -)} (\phi t(y))A \xrightarrow{[\phi(y)]_y} (\phi i)J_A \longrightarrow 0 \quad (4.1.1)$$

(c) Pour chaque point  $i \in I$  la suite suivante est exacte, où  $S^l(-, i) = \{v \in S^l : t(v) = i\}$ .

$$\bigoplus_{v \in S^l(-, i)} A(\phi s(v)) \xrightarrow{[\phi(\partial_x^l v)]_{x,v}} \bigoplus_{x \in {}_l\mathcal{Q}_1(-, i)} A(\phi s(x)) \xrightarrow{[\phi(x)]_x} J_A(\phi i) \longrightarrow 0 \quad (4.1.2)$$

*Démonstration.* (a)  $\Rightarrow$  (b). Supposons que (a) est valide. Dans la preuve  $y$  décrira toujours la  $k_i$ -base  ${}_r\mathcal{Q}_1(i, -)$  tandis que  $v$  décrira toujours le sous-ensemble  $S^r(i, -)$ . La suite (4.1.1) est bel et bien un complexe : En effet pour chaque élément  $v \in S^r$  fixé, la composante correspondante pour le morphisme composé  $[\phi(y)]_y \circ [\phi(\partial_y^r v)]_{y,v}$  est donnée par  $[\phi(y)]_y \circ [\phi(\partial_y^r v)]_{y,v} = \sum_{y \in {}_r\mathcal{Q}_1(i, -)} \phi(y)\phi(\partial_y^r v) = \sum_{y \in {}_r\mathcal{Q}_1(i, -)} \phi(y \otimes \partial_y^r v) = \phi(v) = 0$ .

Soit à présent  $u = (u_y)_y \in \bigoplus_{y \in {}_r\mathcal{Q}_1(i, -)} t(y)\widehat{k\mathcal{Q}}$  tel que  $[\phi(y)]_y((\phi(u_y))_y) = 0$ . Ainsi on a,

$$\sum_{y \in {}_r\mathcal{Q}_1(i, -)} \phi(y)\phi(u_y) = \sum_{y \in {}_r\mathcal{Q}_1(i, -)} \phi(y \otimes u_y) = 0, \text{ si bien que } \sum_{y \in {}_r\mathcal{Q}_1(i, -)} y \otimes u_y \in \ker(\phi) = \bar{I}.$$

Alors en vertu du lemme 4.1.2, il existe une famille d'éléments  $u'_v \in \widehat{k\mathcal{Q}}$  telle que,

$$\sum_{y \in {}_r\mathcal{Q}_1(i, -)} y \otimes u_y - \sum_{v \in S^r} v \otimes u'_v \in {}_r\mathcal{Q}_1 \otimes \bar{I}.$$

Ainsi pour chaque  $y \in {}_r\mathcal{Q}_1(i, -)$  fixé, l'application de la dérivée gauche  $\partial_y^r$  aux deux membres de la dernière équation donne que  $u_y - \sum_{v \in S^r} (\partial_y^r v) \otimes u'_v \in \bar{I} = \ker(\phi)$ . Donc l'élément  $(\phi(u'_v))_v \in \sum_{v \in S^r(i, -)} (\phi t(v))A$  satisfait à la relation suivante :  $(\phi(u_y))_y = [\phi(\partial_y^r v)]_{y,v}((\phi(u'_v))_v)$ , avec  $y$  décrivant la base  ${}_r\mathcal{Q}_1(i, -)$  tandis que  $v$  décrit  $S^r$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a). Supposant que (b) est valide, nous devons montrer que  $\ker(\phi) = \bar{I}$ . Prenons arbitrairement un élément  $v \in S^r$  avec  $s(v) = i$ . En utilisant la proposition 3.2.4-(1) et le fait que (4.1.1) est un complexe on obtient comme plus haut que  $\phi(v) = \phi(\sum_{y \in {}_r\mathcal{Q}_1(i, -)} y \otimes \partial_y^r v) = [\phi(y)]_y \circ [\phi(\partial_y^r v)]_{y,v} = 0$ . Ainsi,  $I = \langle S^r \rangle \subseteq \ker(\phi)$  si bien que  $\bar{I} \subseteq \ker \phi$  puisque  $\ker(\phi)$  est fermé. Par définition  $\bar{I} = \bigcap_{l \geq 1} (I + J_{k\mathcal{Q}}^l)$ , ainsi pour obtenir l'égalité  $\bar{I} = \ker(\phi)$  annoncée, il ne reste plus qu'à vérifier que  $\ker(\phi) \subseteq I + J_{k\mathcal{Q}}^l$  pour  $l \geq 1$ .

Soit  $w$  un élément homogène dans  $\ker(\phi)$  avec  $s(w) = i$ . Comme plus haut on obtient que,  $0 = \phi(w) = [\phi(y)]_y \cdot [\phi(\partial_y^r w)]_y$ , or la suite (4.1.1) étant exacte, le morphisme  $[\phi(\partial_y^r w)]_y$  se factorise par le morphisme  $[\phi(\partial_y^r v)]_{y,v}$ . D'où il existe une famille d'éléments  $u_v \in \widehat{k\mathcal{Q}}$  telle que  $[\phi(\partial_y^r w)]_y = [\phi(\partial_y^r v)]_{y,v} \circ [\phi(u_v)]_v$ , si bien que pour chaque  $y \in {}_r\mathcal{Q}_1(i, -)$  on a,  $\partial_y^r w - \sum_{v \in S^r(i, -)} \partial_y^r v \otimes u_v \in \ker(\phi)$ . D'où une seconde application de la proposition 3.2.4-(1) donne :

$$w - \sum_{v \in S^r(i, -)} v \otimes u_v = \sum_{y \in {}_r\mathcal{Q}_1(i, -)} y \otimes (\partial_y^r w - \sum_{v \in S^r(i, -)} \partial_y^r v \otimes u_v) \in {}_r\mathcal{Q}_1 \otimes \ker(\phi).$$

Or puisqu'on a  $\sum_{v \in S^R(i, \cdot)} v \otimes u_v \in \langle S^R \rangle = I$ , il vient que  $w \in I + {}_R Q_1 \otimes \ker(\phi) = I + B \otimes \ker(\phi) = I + k Q_1 \otimes \ker(\phi)$ . Ce dernier fait étant vrai pour chaque élément homogène dans  $\ker(\phi)$ , on déduit que  $\ker(\phi) \subseteq I + k Q_1 \otimes \ker(\phi)$ .

Il résulte de ce qui précède que  $\ker(\phi) \subseteq I + k Q_1 \otimes \ker(\phi) \subseteq I + k Q_1 \otimes (I + k Q_1 \otimes \ker(\phi)) = I + k Q_2 \otimes \ker(\phi) \subseteq \dots \subseteq I + k Q_l \otimes \ker(\phi)$ . Si bien que  $\ker(\phi) \subseteq \bigcap_{i \geq 1} (I + J_{kQ}^i) = \bar{I}$ .

L'équivalence de (a) et (c) s'obtient en vertu d'un argument dual.  $\square$

À présent on désire reformuler le résultat de la proposition précédente dans le contexte catégorique, on suppose pour la suite que  $\mathcal{C}$  est une catégorie  $k$ -linéaire ayant la propriétés suivante :

(Ax3)  $\mathcal{C}$  est de *Krull-Schmidt* et chaque algèbre d'endomorphismes  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  d'un objet sobre dans  $\mathcal{C}$  satisfait aux axiomes (ax1) et (ax2) donnés en 3.2.1.

Soit  $A$  une  $k$ -algèbre sobre quelconque muni d'un système  $\{\epsilon_i : 1 \leq i \in \Lambda\}$  d'idempotents primitifs orthogonaux tels que  $1 = \sum_{i \in \Lambda} \epsilon_i$ .  $A$  sera aussi vu comme une catégorie additive dont l'ensemble des points (objets) indécomposables est  $\Lambda$ , tandis que  $\epsilon_i A \epsilon_j$  est l'espace des morphismes de  $i$  vers  $j$ . Ainsi en regardant  $\widehat{kQ}$  comme une catégorie additive, l'ensemble de ses objets est égal au monoïde additif libre  $\mathbb{N}I$  sur l'ensemble  $I = Q_0$ ; l'espace des morphismes d'un point  $i$  vers un point  $j$  est donné par le bimodule  $\widehat{kQ}(i, j) = e_i \widehat{kQ} e_j$  de tous les chemins dans  $Q(i, j)$ . Si on regarde  $I$  comme la somme directe  $I = \bigoplus_{i \in I} i$ , alors nous obtenons que  $\widehat{kQ}^\circ(I, I) = \widehat{kQ}$  en tant que  $k$ -algèbres.

**Lemme 4.1.4.** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie  $k$ -linéaire ayant la propriété (Ax3).  $Q$  étant un carquois modulé fini sur  $I = Q_0$ , on suppose avoir un foncteur  $k$ -linéaire  $\Phi_0 : K = kQ_0 \longrightarrow \mathcal{C}$  et ainsi qu'un  $K$ -morphisme de bimodules  $\Phi_1 : B = kQ_1 \longrightarrow J_{\mathcal{C}}(T, T)$  où  $T = \Phi_0(I) = \bigoplus_{i \in I} \Phi_0 i$ . Alors la paire  $(\Phi_0, \Phi_1)$  admet un unique prolongement en un foncteur  $k$ -linéaire  $\phi : \widehat{kQ} \longrightarrow \mathcal{C}$ .*

À présent la proposition 4.1.3 se réécrit comme suit.

**Proposition 4.1.5.** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant la propriété (Ax3), soit  $\Phi : \widehat{kQ}^\circ \longrightarrow \mathcal{C}$  un foncteur  $k$ -linéaire avec  $T = \bigoplus_{i \in I} T_i$  où  $T_i = \Phi i$ . Supposons que  $S, S^l$  et  $S^R$  sont trois sous-ensembles d'éléments homogènes dans  $J_{\widehat{kQ}}$  tels que  $KS^l = KSK = S^R K$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a)  $\Phi$  induit un épimorphisme  $\phi : \widehat{kQ} \longrightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  tel que  $\ker(\phi) = \overline{\langle S \rangle}$ .

(b) Pour chaque  $i \in I$  la suite  $\bigoplus_{v \in S^R(i, \cdot)} \Phi t(v) \xrightarrow{[\Phi \partial_y^R v]_{y,v}} \bigoplus_{y \in R Q_1(i, \cdot)} \Phi t(y) \xrightarrow{[\Phi y]_y} \Phi i$  est un complexe dans  $\text{add } T$  induisant la suite exacte suivante :

$$\mathcal{C}(T, \bigoplus_{v \in S^R(i, \cdot)} \Phi t(v)) \xrightarrow{[\Phi \partial_y^R v]_{y,v}} \mathcal{C}(T, \bigoplus_{y \in R Q_1(i, \cdot)} \Phi t(y)) \xrightarrow{[\Phi y]_y} J_{\mathcal{C}}(T, \Phi i) \longrightarrow 0$$

(c) Pour chaque  $i \in I$  la suite  $\Phi i \xrightarrow{[\Phi x]_x} \bigoplus_{x \in l Q_1(\cdot, i)} \Phi s(x) \xrightarrow{[\Phi \partial_x^R v]_{v,x}} \bigoplus_{v \in S^l(\cdot, i)} \Phi s(v)$  est un complexe dans  $\text{add } T$  induisant la suite exacte suivante :

$$\mathcal{C}(\bigoplus_{v \in S^l(\cdot, i)} \Phi s(v), T) \xrightarrow{[\Phi \partial_x^R v]_{x,v}} \mathcal{C}(\bigoplus_{x \in l Q_1(\cdot, i)} \Phi s(x), T) \xrightarrow{[\Phi x]_x} J_{\mathcal{C}}(\Phi i, T) \longrightarrow 0$$

$\square$

## 4.2 Algèbres jacobiniennes et suites faiblement 2-presque scindées

Dans cette section nous caractérisons les algèbres jacobiniennes des carquois modulés avec potentiels en utilisant les suites faiblement 2-presque scindées. Une telle caractérisation a été utilisée dans le cas simplement lacé pour établir une intéressante relation entre les mutations de carquois avec potentiels et les mutations des objets inclinants amassés.

Pour commencer, on observe que la proposition suivante, dont la version simplement-lacée est prouvée dans [11], suit directement du travail préparatoire du chapitre précédent.

**Proposition 4.2.1.** *Soient  $(\mathcal{Q}, W)$  un carquois modulé avec potentiel et  $A = \mathcal{J}(\mathcal{Q}, W)$ . On désigne par  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow A$  la projection naturelle. Alors il existe pour chaque  $i \in I$  deux complexes*

$$\begin{aligned} (\phi i)A \xrightarrow{[\phi(x)]_x} \bigoplus_{x \in {}_L\mathcal{Q}_1(i, \cdot)} (\phi s(x))A \xrightarrow{[\phi(\partial_{x,y}W)]_{y,x}} \bigoplus_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1(i, \cdot)} (\phi t(y))A \xrightarrow{[\phi(y)]_y} (\phi i)J_A \longrightarrow 0, \\ A(\phi i) \xrightarrow{[\phi(y)]_y} \bigoplus_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1(i, \cdot)} A(\phi t(y)) \xrightarrow{[\phi(\partial_{x,y}W)]_{x,y}} \bigoplus_{x \in {}_L\mathcal{Q}_1(i, \cdot)} A(\phi s(x)) \xrightarrow{[\phi(x)]_x} J_A(\phi i) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

qui en plus sont exacts en leurs deux derniers termes à droite.

*Démonstration.* La définition de la dérivée cyclique seconde donnée dans la proposition 3.2.6-(a) montre que pour tous  $x \in {}_L\mathcal{Q}_1$  et  $y \in {}_R\mathcal{Q}_1$ , on a  $\partial_x^r \circ \partial_y = \partial_{x,y} = \partial_y^l \circ \partial_x$ . Or les trois sous-ensembles finis  $S^l = \{\partial_y W : y \in {}_R\mathcal{Q}_1\}$  et  $S^r = \{\partial_x W : x \in {}_L\mathcal{Q}_1\}$  sont tels que le K-module à gauche  $K \cdot S^l$  et le K-module à droite  $S^r \cdot K$  coïncident et on a les égalités de K-bimodules ci-après :  $K \cdot S^l = \text{Im}(\partial W) = S^r \cdot K$ , si bien que l'idéal jacobien  $J_W$  est donné par les égalités,  $\overline{\langle S^r \rangle} = J_W = \overline{\text{Im}(\partial W)} = \overline{\langle S^l \rangle}$ . Ainsi le résultat cherché s'obtient en appliquant directement la proposition 4.1.3-(a)  $\Rightarrow$  (b) et (c).  $\square$

Maintenant afin d'énoncer le résultat principal de cette section, nous avons besoin de rappeler la notion de suite faiblement 2-presque scindée telle que introduite dans [11].

**Définition 4.2.1.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie satisfaisant à (Ax3) et  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$ .

- ▷ Un complexe  $U_1 \xrightarrow{f_1} U_0 \xrightarrow{f_0} X$  dans  $\mathcal{T}$  est appelé une suite 2-presque scindée à droite si la suite  $\mathcal{C}(\mathcal{T}, U_1) \xrightarrow{f_1} \mathcal{C}(\mathcal{T}, U_0) \xrightarrow{f_0} \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, X) \longrightarrow 0$  est exacte; en d'autres termes,  $f_0$  est un morphisme presque scindé à droite dans  $\mathcal{T}$  et  $f_1$  est un pseudo-noyau de  $f_0$  dans  $\mathcal{T}$ .
- ▷ De façon duale, un complexe  $X \xrightarrow{f_2} U_1 \xrightarrow{f_1} U_0$  dans  $\mathcal{T}$  est appelé une suite 2-presque scindée à gauche si la suite  $\mathcal{C}(U_0, \mathcal{T}) \xrightarrow{-f_1} \mathcal{C}(U_1, \mathcal{T}) \xrightarrow{-f_2} \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{T}) \longrightarrow 0$  est exacte; autrement dit,  $f_2$  est un morphisme presque scindé à gauche dans  $\mathcal{T}$  et  $f_1$  est un pseudo-conoyau de  $f_2$  dans  $\mathcal{T}$ .
- ▷ Un complexe  $X \xrightarrow{f_2} U_1 \xrightarrow{f_1} U_0 \xrightarrow{f_0} X$  dans  $\mathcal{T}$  est appelé une suite faiblement 2-presque scindée si la suite  $U_1 \xrightarrow{f_1} U_0 \xrightarrow{f_0} X$  est 2-presque scindée à droite tandis que la suite  $X \xrightarrow{f_2} U_1 \xrightarrow{f_1} U_0$  est 2-presque scindée à gauche.

Nous pouvons maintenant établir le lien qui existe entre les suites faiblement 2-presque scindées et les algèbres jacobiniennes de carquois modulés avec potentiels.

**Théorème 4.2.2.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie satisfaisant à la propriété (Ax3), on suppose que  $\Phi : \widehat{k\mathcal{Q}}^\circ \longrightarrow \mathcal{C}$  est un foncteur  $k$ -linéaire avec  $T = \bigoplus_{i \in I} T_i$  et  $T_i = \Phi i$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a)  $\Phi$  induit un isomorphisme d'algèbres  $\phi : \mathcal{J}(\mathcal{Q}, W) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  pour un potentiel  $W$  dans  $\mathcal{Q}$ .  
 (b) À chaque point  $i \in I$  correspond une suite faiblement 2-presque scindée

$$(\Phi i) \xrightarrow{[\Phi(x)]_x} \bigoplus_{x \in {}_L\mathcal{Q}_1(i, -)} \Phi s(x) \xrightarrow{[\Phi(\partial_{x,y} W)]_{y,x}} \bigoplus_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1(i, -)} \Phi t(y) \xrightarrow{[\Phi(y)]_y} \Phi i \quad (4.2.1)$$

- (c) À chaque point  $i \in I$  correspond une suite 2-presque scindée à droite

$$\bigoplus_{x \in {}_L\mathcal{Q}_1(i, -)} \Phi s(x) \xrightarrow{[\Phi(\partial_{x,y} W)]_{y,x}} \bigoplus_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1(i, -)} \Phi t(y) \xrightarrow{[\Phi(y)]_y} \Phi i \quad (4.2.2)$$

- (d) À chaque point  $i \in I$  correspond une suite 2-presque scindée à gauche

$$(\Phi i) \xrightarrow{[\Phi(x)]_x} \bigoplus_{x \in {}_L\mathcal{Q}_1(i, -)} \Phi s(x) \xrightarrow{[\Phi(\partial_{x,y} W)]_{y,x}} \bigoplus_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1(i, -)} \Phi t(y) \quad (4.2.3)$$

*Démonstration.* Une fois encore considérons les deux sous-ensembles finis,  $S^L = \{\partial_y W : y \in {}_R\mathcal{Q}_1\}$  et  $S^R = \{\partial_x W : x \in {}_L\mathcal{Q}_1\}$  qui sont tels que  $K \cdot S^L = \text{Im}(\partial W) = S^R \cdot K$ , tandis que l'idéal jacobien  $J_W$  est donné par les égalités,  $\overline{(S^R)} = J_W = \overline{(S^L)}$ . Nous appliquerons la proposition 4.1.5 aux ensembles  $S^R$  et  $S^L$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c), (d). Cette implication est triviale.

(c)  $\Rightarrow$  (a). En vertu de la proposition 3.2.6-(a) on a pour tout  $x \in {}_L\mathcal{Q}_1$  et  $y \in {}_R\mathcal{Q}_1$  que  $\partial_{x,y} = \partial_y^L \circ \partial_x^R$ , si bien que le morphisme  $[\Phi(\partial_{x,y} W)]_{y,x}$  dans (4.3.2) est donné par :  $[\Phi(\partial_{x,y} W)]_{y,x} = [\Phi(\partial_y^L \partial_x^R W)]_{y,x} = [\Phi(\partial_y^L v)]_{y,v}$  avec  $y$  décrivant la base  ${}_R\mathcal{Q}_1(i, -)$  tandis que  $v$  parcourt  $S^R(i, -)$ , exactement comme dans la proposition 4.1.5-(b). Ainsi le résultat s'obtient en appliquant la proposition 4.1.5-(b)  $\Rightarrow$  (a).

(d)  $\Rightarrow$  (a). Cette implication s'obtient de la même façon que l'implication (d)  $\Rightarrow$  (a) en vertu d'un argument dual.

(a)  $\Rightarrow$  (b). En vertu de la proposition 4.1.5-(a)  $\Rightarrow$  (b)-(c), on a des suites exactes,

$$(\xi) : \mathcal{C}(T, \bigoplus_{v \in S^R(i, -)} \Phi t(v)) \xrightarrow{[\Phi \partial_y^L v]_{y,v}} \mathcal{C}(T, \bigoplus_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1(i, -)} \Phi t(y)) \xrightarrow{[\Phi y]_y} J_{\mathcal{C}}(T, \Phi i) \longrightarrow 0$$

$$(\xi) : \mathcal{C}(\bigoplus_{v \in S^L(i, -)} \Phi s(v), T) \xrightarrow{[\Phi \partial_x^R v]_{x,v}} \mathcal{C}(\bigoplus_{x \in {}_L\mathcal{Q}_1(i, -)} \Phi s(x), T) \xrightarrow{[\Phi x]_x} J_{\mathcal{C}}(\Phi i, T) \longrightarrow 0$$

Mais alors en invoquant une fois de plus la proposition 3.2.6-(a), on a pour tous  $x \in {}_L\mathcal{Q}_1$  et  $y \in {}_R\mathcal{Q}_1$  que  $\partial_y^L \circ \partial_x^R = \partial_{x,y} = \partial_x^R \partial_y^L$ . En vertu de la définition des sous-ensembles  $S^L$  et  $S^R$ , les deux morphismes à gauche des deux suites précédentes sont donnés comme suit :

$$[\Phi(\partial_y^L v)]_{y,v} = [\Phi(\partial_y^L \partial_x^R W)]_{y,x} = [\Phi(\partial_{x,y} W)]_{y,x} \text{ et } [\Phi(\partial_x^R v)]_{x,v} = [\Phi(\partial_x^R \partial_y^L W)]_{x,y} = [\Phi(\partial_{x,y} W)]_{x,y},$$

avec  $x$  décrivant  ${}_L\mathcal{Q}_1(i, -)$  tandis que  $y$  décrit  ${}_R\mathcal{Q}_1(-, i)$ . D'où la suite la suite (4.2.1) est faiblement 2-presque scindée.  $\square$

Pour terminer section, il est important de signaler qu'il existe un lien étroit entre les suites faiblement 2-presque scindées et les triangles (ou les suites) d'échange. Pour cela, on considère la condition suivante :

(A1)  $\mathcal{C}$  est une  $k$ -catégorie triangulée 2-Calabi-Yau et  $T = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} T_i$  est un objet inclinant amassé (sobre) dans  $\mathcal{C}$ .

*Remarque 4.2.2.* (1.10.10 ou [12, 61, 51, 43]) Si  $\mathcal{C}$  et  $T = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} T_i$  satisfont à la condition (A1), alors pour chaque facteur direct indécomposable  $T_k$  de  $T$ , on a deux triangles d'échange,  $T_k^* \xrightarrow{g} U_k \xrightarrow{f} T_k \xrightarrow{e} T_k^*[1]$  et  $T_k \xrightarrow{g'} U'_k \xrightarrow{f'} T_k^* \xrightarrow{e'} T_k[1]$  (dans lesquels  $f$  et  $f'$  sont des  $\text{add}(T/T_k)$ -approximations minimales à droite tandis que  $g$  et  $g'$  sont des  $\text{add}(T/T_k)$ -approximations minimales à gauche), qui sont des  $\tau$ -suites reliant si on n'a pas de boucle en  $T_k$ .

les suites faiblement 2-presque scindées apparaissent naturellement dans la théorie de l'inclinaison amassée. Dans [11] on montre que dans les catégorie 2-Calabi-Yau ou pour les algèbres 3-Calabi-Yau, les suites faiblement 2-presque scindées sont étroitement liées aux triangles (ou au suites d'échange); on rappelle qu'une  $k$ -algèbre  $\Lambda$  est dite  $d$ -Calabi-Yau si la catégorie dérivée bornée  $\mathcal{D}^b \text{ mod}$  est  $d$ -Calabi-Yau, avec  $d \in \mathbb{Z}$ , voir [9, 2.2] et [11, 1.5]. Ici, seul le cas des catégories 2-Calabi-Yau (ou stablement 2-Calabi-Yau) nous interesse.

**Théorème 4.2.3** ([11, 4.7, 4.8]). *On suppose que  $\mathcal{C}$  et  $T = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} T_i$  satisfont à la condition (A1), et qu'en plus, le carquois modulé de  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  n'a pas de boucle au point  $k$ . Alors les deux énoncés réciproques ci-après sont vrais.*

- (a) *En collant ensemble les deux triangles d'échange  $T_k^* \xrightarrow{g} U_k \xrightarrow{f} T_k \xrightarrow{e} T_k^*[1]$  et  $T_k \xrightarrow{g'} U'_k \xrightarrow{f'} T_k^* \xrightarrow{e'} T_k[1]$  donnés en 4.2.2, on obtient une suite faiblement 2-presque scindée  $T_k \xrightarrow{g'} U'_k \xrightarrow{gf'} U_k \xrightarrow{f} T_k$ .*
- (b) *Pour toute suite faiblement 2-presque scindée  $T_k \xrightarrow{f_2} U'_k \xrightarrow{f_1} U_k \xrightarrow{f_0} T_k$ , il existe deux triangles d'échange  $T_k^* \xrightarrow{g} U_k \xrightarrow{f_0} T_k \longrightarrow T_k^*[1]$  et  $T_k \xrightarrow{f_2} U'_k \xrightarrow{g'} T_k^* \longrightarrow T_k[1]$  tels que  $f_1 = g'g$ .  $\square$*

### 4.3 Algèbres jacobiniennes et mutations des objets inclinants amassés

L'objectif visé ici est de généraliser pour les algèbres jacobiniennes et les algèbres inclinées 2-Calabi-Yau non-nécessairement simplement lacées, le théorème [11, 5.1] obtenu dans le cas simplement lacé et desquels il découle que les algèbres inclinées amassées simplement lacées apparaissent comme algèbres jacobiniennes des carquois avec potentiels. Dans toute la suite  $(\mathcal{Q}, W)$  désigne un carquois modulé avec potentiel, où comme d'habitude, le bimodule de toutes les flèches valuées est  $B = k\mathcal{Q}_1$ , avec  $k\mathcal{Q}_0 = K$  et  $\mathcal{Q}_0 = I$ .

#### 4.3.1 Résultats principaux

La preuve de [11, 5.1] est construite autour de plusieurs lemmes dont la plus part sont d'ordre général (utilisant uniquement des propriétés au niveau des catégories sans êtres liés directement aux potentiels).

Toutefois, les manipulations supplémentaires des potentiels nécessaires pour prouver ces résultats sont données dans le lemme technique [11, lem 5.6]. La version généralisée de ce lemme doit mériter notre première attention ici.

Nous avons besoin de rappeler certaines notations importantes déjà introduites au chapitre 3. Soient  ${}_L\mathcal{Q}_1$  un système gauche de flèches et  ${}_R\mathcal{Q}_1$  un système droite de flèches pour  $B$  et  $\mathcal{Q}$ , auxquels sont associés les systèmes duals  ${}_L\mathcal{Q}_1^*$  et  ${}_R\mathcal{Q}_1^*$  pour  $B^*$  et  $\mathcal{Q}^*$ , à savoir,  ${}_L\mathcal{Q}_1^* = \{x^* : x \in {}_L\mathcal{Q}_1\}$  qui est un système droite de flèches pour  $B^*$  et pour le carquois modulé dual  $\mathcal{Q}^*$ , et  ${}_R\mathcal{Q}_1^* = \{y^* : y \in {}_R\mathcal{Q}_1\}$  qui est un système gauche de flèches pour  $B^*$  et pour le dual  $\mathcal{Q}^*$ . Rappelons que lorsqu'aucune confusion n'est possible, une fois que les systèmes de flèches précédents sont fixés pour  $\mathcal{Q}$  et pour  $\mathcal{Q}^*$ , le calcul de chacune des dérivées (partielles et cycliques) en un point  $z \in {}_L\mathcal{Q}_1 \cup {}_R\mathcal{Q}_1$  est défini comme étant le calcul au point  $z^* \in {}_L\mathcal{Q}_1^* \cup {}_R\mathcal{Q}_1^* \subset B^*$ . Si bien que :  $\partial_x^r = \partial_{x^*}^r$ ,  $\partial_x = \partial_{x^*}$ , de même  $\partial_y^l = \partial_{y^*}^l$ ,  $\partial_y = \partial_{y^*}$ . En particulier, pour tout  $v = \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1} y \otimes v_y = \sum_{x \in {}_L\mathcal{Q}_1} v_x \otimes x \in J_{\widehat{k}\mathcal{Q}}$  on a :  $\partial_y^l v = \partial_{y^*}^l v = \langle y^* \otimes v \rangle = v_y$  et  $\partial_x^r v = \partial_{x^*}^r v = \langle v \otimes x^* \rangle = v_x$ . On a aussi posé  $\partial_{x,y} = \partial_{y^* \otimes x^*}$ , si bien que  $\partial_{x,y} = \partial_y^l \partial_x = \partial_x^r \partial_y$ .

Soit  $k \in I$  un point de  $\mathcal{Q}$  tel que (3.5.1) soit vérifié, c'est-à-dire,  $k$  n'appartient pas à un 2-cycle dans  $\mathcal{Q}$  et en remplaçant si nécessaire  $W$  par un potentiel cycliquement équivalent, on suppose que  $e_k \cdot W = 0 = W \cdot e_k$ . Suivant la définition 3.5.1, rappelons que pour la semi-mutation de  $(\mathcal{Q}, W)$  notée  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q}, W) = (\tilde{\mu}(\mathcal{Q}), \tilde{W})$ , le bimodules des flèches valuées  $B' := k(\tilde{\mu}(\mathcal{Q}))_1$  et la modulation  $\tilde{\mu}(\mathcal{M})$  de  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q}, W)$  sont décrits comme suit.

(i) La famille  $(k_i, \mathfrak{t}_i)_{i \in I}$  des  $k$ -surcorps  $k_i$  munis des formes non-dégénérées  $\mathfrak{t}_i \in \text{Hom}_k(k_i, k)$  dans  $\mathcal{Q}$  reste inchangée dans  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})$ . Pour chaque paire  $i, j \in I$ ,  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})_1(i, j)$  et la nouvelle paire dualisante de bimodules correspondante sont donnés comme suit :

▷ Pour tous  $i, j \in I$ , la paire dualisante et symétrisable de bimodules associée à  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})_1(k, i)$  est égale à la paire dualisante et symétrisable de bimodules associée à  $\mathcal{Q}_1(i, k)$ , et de même, la paire dualisante et symétrisable de bimodules associée à  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})_1(j, k)$  est égale à la paire dualisante et symétrisable de bimodules associée à  $\mathcal{Q}_1(k, j)$  :

$$\{ {}_k B'_i, {}_k B'^*_i \} = \{ {}_i B^*_k, {}_i B_k; {}_i \mathfrak{b}_k, {}_i \mathfrak{b}'_k \} \text{ et } \{ {}_j B'_k, {}_j B'^*_k \} = \{ {}_k B^*_j, {}_k B_j; {}_k \mathfrak{b}_j, {}_k \mathfrak{b}'_j \}.$$

▷ On suppose  $i, j \in I \setminus \{k\}$ ; alors la paire dualisante et symétrisable de bimodules associée à  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})_1(i, j)$  est donnée par

$$\{ {}_i B'_j, {}_i B'^*_j \} := \{ {}_i B_j, {}_i B^*_j; {}_i \mathfrak{b}_j, {}_i \mathfrak{b}'_j \} \oplus (\{ {}_i B_k, {}_i B^*_k; {}_i \mathfrak{b}_k, {}_i \mathfrak{b}'_k \} \otimes \{ {}_k B_j, {}_k B^*_j; {}_k \mathfrak{b}_j, {}_k \mathfrak{b}'_j \}).$$

En particulier, si on pose  $\bar{e}_k = 1 - \sum_{i \in I \setminus \{k\}} e_i$ , alors le nouveau bimodule  $B' := k(\tilde{\mu}(\mathcal{Q}))_1$  des flèches valuées dans  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})$  s'exprime en fonction du bimodule  $B$  des flèches valuées dans  $\mathcal{Q}$  comme suit :

$$B' = \bar{e}_k B \bar{e}_k \oplus B e_k B \oplus (B e_k)^* \oplus (e_k B)^* = \bar{e}_k B \bar{e}_k \oplus B e_k B \oplus (B e_k B)^*.$$

(ii) Pour le carquois valué  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})$  sous-jacent à  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})$ , on a alors la description suivante pour chaque paire ordonnée de points  $i, j \in I$ .

▷ Si  $i = k$  ou  $j = k$  alors  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})_1(i, j) = \{ \alpha^* : i \xrightarrow{a,b} j \text{ tel que } \alpha : i \xleftarrow{a,b} j \in \mathcal{Q}_1(j, i) \}$ .

▷ Et dans le cas où  $k \neq i, j$ , on a  $\mathcal{Q}_1(i, j) \subset \tilde{\mu}(\mathcal{Q})_1(i, j)$  en tant que sous-ensemble de flèches

valuées, et les flèches additionnelles éventuelles dans  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})$  sont données comme suit. Pour tout chemin valué  $i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j$  de longueur 2 via  $k$ , la flèche valuée correspondante et représentant la composante  ${}_i B_k^\alpha \cdot B_j^\beta$  dans  $\tilde{\mu}(\mathcal{Q})$  peut être notée  $i \xrightarrow{[\alpha\beta]} j$ .

(iii) Ensuite le nouveau potentiel  $\widetilde{W} : K = \prod_{i \in I} k_i \longrightarrow k(\tilde{\mu}\mathcal{Q})$  est donné comme suit.

$$\widetilde{W} = [W] + \mathfrak{z}_k \text{ avec } \mathfrak{z}_k = \mathfrak{z}_{(Be_k B) \times (Be_k B)^*} = \sum_{y \in {}_R \mathcal{Q}_1(-, k), z \in {}_R \mathcal{Q}_1(k, -)} (y \otimes z) \otimes z^* \otimes y^*,$$

dans l'expression du potentiel canonique  $\mathfrak{z}_k, {}_R \mathcal{Q}_1$  est un système droite de flèches pour  $B$  auquel est associé le système dual correspondant pour  $B^*$ , et  $[W]$  coïncide avec  $W$  mais vu dans  $k(\tilde{\mu}\mathcal{Q})$ . Pour toute composante  $k_s \xrightarrow{m} {}_s B_s^w$  de  $W$  le long d'un cycle  $w$  passant par  $k$ , on a par exemple que dans l'expression  $m(e_s) = \sum_{x \in {}_L \mathcal{Q}_1(-, k), z \in {}_R \mathcal{Q}_1(k, -)} \xi_x \otimes (x \otimes z) \otimes \xi_z$  chaque terme  $(x \otimes z) \in Be_k B$ , vu dans  $k(\tilde{\mu}\mathcal{Q})$ , est un élément homogène de degré 1 si bien qu'il ne peut perdre ses parenthèses (lors de toute permutation cyclique), ce fait peut être renforcé en notant ce terme  $[x \otimes z]$  quand il est vu dans  $k(\tilde{\mu}\mathcal{Q})$ .

Rappelons aussi comment les systèmes de flèches induits pour  $\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q})$  ont été définis (au chapitre 3 3.5). En vertu de ce qui précède, le bimodule des flèches valuées dans  $\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q})$  donné par  $B' = \bar{e}_k B \bar{e}_k \oplus Be_k B \oplus (Be_k B)^*$  où  $\bar{e}_k = 1 - e_k$  tandis que  $Be_k B = [Be_k B]$  est de degré 1 dans  $\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q})$ ; ainsi, le système gauche de flèches  ${}_L \mathcal{Q}'_1$  et le système droite de flèches  ${}_R \mathcal{Q}'_1$  induits pour  $B'$  et  $\mathcal{Q}' = \tilde{\mu}_k(\mathcal{Q})$  sont décrits comme suit :

- ▷  ${}_L \mathcal{Q}'_1(k, -) = {}_R \mathcal{Q}'_1(-, k)$ ,  ${}_R \mathcal{Q}'_1(k, -) = {}_L \mathcal{Q}'_1(-, k)$ ; et  ${}_L \mathcal{Q}'_1(-, k) = {}_R \mathcal{Q}'_1(k, -)$ ,  ${}_R \mathcal{Q}'_1(-, k) = {}_L \mathcal{Q}'_1(k, -)$ .
- ▷ Pour deux points  $i, j \in I$  avec  $k \neq i, j$ , on a :  ${}_L \mathcal{Q}'_1(i, j) = {}_L \mathcal{Q}_1(i, j) \cup {}_L \mathcal{Q}_1(i, k) \otimes {}_L \mathcal{Q}_1(k, j)$  et  ${}_R \mathcal{Q}'_1(i, j) = {}_R \mathcal{Q}_1(i, j) \cup {}_R \mathcal{Q}_1(i, k) \otimes {}_R \mathcal{Q}_1(k, j)$ .

Observons que si dans  $\mathcal{Q}$  il n'existe pas de chemin de longueur deux de  $i$  vers  $j$  via  $k$ , alors les produits  ${}_L \mathcal{Q}_1(i, k) \otimes {}_L \mathcal{Q}_1(k, j)$  et  ${}_R \mathcal{Q}_1(i, k) \otimes {}_R \mathcal{Q}_1(k, j)$  sont vides.

Dans le lemme ci-dessous et dans toute la suite, les systèmes de flèches choisis pour  $\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q})$  seront toujours les systèmes induits de ceux de  $\mathcal{Q}$  comme on vient de le voir. Dans le souci d'alléger l'écriture des identités du lemme 4.3.1 ci-dessous, on omettra souvent d'écrire le symbole " $\otimes$ " dans les produits d'éléments dans  $k\mathcal{Q}$  : pour  $x, y \in k\mathcal{Q}$ , les notations  $xy$ ,  $x \cdot y$  et  $x \otimes y$  sont donc toutes équivalentes.

**Lemme 4.3.1.** *Soit  $(\mathcal{Q}, W)$  un carquois modulé avec potentiel, et  $(\mathcal{Q}', \widetilde{W}) = \tilde{\mu}_k(\mathcal{Q}, W)$  pour un point  $k \in I$ ; posons  $W' = [W] + \mathfrak{z}_k = \widetilde{W}$ . Avec les notations précédentes, pour toute paire  $(a, b) \in ({}_R \mathcal{Q}_1(-, k) \times {}_R \mathcal{Q}_1(k, -)) \cup ({}_L \mathcal{Q}_1(-, k) \times {}_L \mathcal{Q}_1(k, -))$  et pour tous  $u, u' \in ({}_R \mathcal{Q}_1 \cup {}_L \mathcal{Q}_1) \cap \mathcal{Q}'$ , les identités suivantes sont valides.*

- (a)  $\partial_{u, u'} W' = \partial_{u, u'} [W]$
- (b)  $\partial_{b^*, u} W' = 0$  et  $\partial_{u, b^*} W' = 0$ .
- (c)  $\partial_{u, [ab]} W' = \partial_{u, [ab]} [W]$ ,  $\partial_{[ab], u} W' = \partial_{[ab], u} [W]$ .
- (d)  $\partial_{a^*, [ab]} W' = b^*$  et pour  $a \neq a' \in {}_R \mathcal{Q}_1(-, k) \cup {}_L \mathcal{Q}_1(-, k)$  on a,  $\partial_{a'^*, [ab]} W' = 0$ .
- (e)  $\partial_{[ab], b^*} W' = a^*$  et pour  $b \neq b' \in {}_R \mathcal{Q}_1(k, -) \cup {}_L \mathcal{Q}_1(k, -)$  on a,  $\partial_{[ab], b'^*} W' = 0$ .
- (f)  $\partial_{b^*, a^*} W' = [ab]$ .
- (g)  $\partial_{[ab], [a'b']} W' = 0$
- (h) Pour toute autre paire  $v, v' \in {}_L \mathcal{Q}'_1 \cup {}_R \mathcal{Q}'_1$  telle que  $(v, v')$  ne rencontre aucun des cas ci-dessus, on que  $\partial_{v, v'} W' = 0$ .

*Démonstration.* Les identités du lemme découlent directement de la proposition 3.2.2-(2) décrivant les potentiels canoniques  $\mathfrak{z}$ . En effet on a  $W' = [W] + \mathfrak{z}_k$ , où le potentiel canonique  $\mathfrak{z}_k$  est toujours de degré 3 dans  $k\mathcal{Q}'$ , et ses trois permutations (nécessaires aux calculs des dérivées cycliques) sont données en vertu de la proposition 3.2.2-(2) comme suit :

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_k &= \mathfrak{z}_{(B e_k B) \otimes (B e_k B)^*} = \sum_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1(-, k), z \in {}_R\mathcal{Q}_1(k, -)} [yz] \otimes z^* \otimes y^*, \\ \varepsilon_R(\mathfrak{z}_k) &= \mathfrak{z}_{B_k^* \otimes B_k} \otimes \mathfrak{z}_{B^* \otimes B} = \sum_{x \in {}_L\mathcal{Q}_1(-, k), z \in {}_R\mathcal{Q}_1(k, -)} x^* \otimes [xz] \otimes z^*, \\ \varepsilon_R^2(\mathfrak{z}_k) &= \mathfrak{z}_{(B^* B^* B_k^*) \otimes (B_k^* B)} = \sum_{u \in {}_L\mathcal{Q}_1(k, -), x \in {}_L\mathcal{Q}_1(-, k)} u^* \otimes x^* \otimes [xu].\end{aligned}$$

Alors, comme les différentes permutations  $\mathfrak{z}_k$ ,  $\varepsilon_R \mathfrak{z}_k$  et  $\varepsilon_R^2 \mathfrak{z}_k$  ne comportent aucun élément de degré 1 dans  $B$ , il vient que les identités (a) et (c) sont trivialement vraies. Et de même, comme aucune composante de  $W'$  ne comporte un produit de la forme  $u \otimes v$  avec  $(u, v) \in (B \times B^*) \cup (B^* \times B) \cup ((B_{kk}B) \times (B_{kk}B))$ , il vient que aussi que (b) et (g) sont trivialement vraies. Examinons maintenant les identités (d), (e), (f).

Pour  $(a, b) = (y, z) \in {}_R\mathcal{Q}_1(-, k) \times {}_R\mathcal{Q}_1(k, -)$  et  $a' = y' \in {}_R\mathcal{Q}_1(-, k)$  on a :

$\partial_{b^*, a^*} W' = \partial_{z^*, y^*}(\mathfrak{z}_k) = [yz] = [ab]$ , et  $\partial_{a', [ab]} W' = \partial_{y', [yz]}(\mathfrak{z}_k) = \partial_{[yz]}^t(\partial_{y'^*}^R(\mathfrak{z}_k)) = \partial_{yz}^t(\sum_{z' \in {}_R\mathcal{Q}_1(k, -)} [y'z']z'^*)$  si bien que  $\partial_{a', [ab]} W' = b^*$  et si  $a' \neq a$  alors  $\partial_{a', [ab]} W' = 0$ .

De même pour  $(a, b) = (x, u) \in {}_L\mathcal{Q}_1(-, k) \times {}_L\mathcal{Q}_1(k, -)$  et  $b' = u' \in {}_L\mathcal{Q}_1(k, -)$  on a :  $\partial_{b^*, a^*} W' = \partial_{u^*, x^*}(\varepsilon_R^2 \mathfrak{z}_k) = [xu] = [ab]$ , et  $\partial_{[ab], b'^*} W' = \partial_{[xu], u'^*}(\varepsilon_R^2 \mathfrak{z}_k) = \partial_{[xu]}^R(\partial_{u'^*}^L(\varepsilon_R^2 \mathfrak{z}_k)) = \partial_{[xu]}^R(\sum_{x' \in {}_R\mathcal{Q}_1(-, k)} x'^*[x'u'])$  si bien que  $\partial_{[ab], b'^*} W' = a^*$  et si  $b' \neq b$  alors  $\partial_{[ab], b'^*} W' = 0$ .

Ainsi, les identités (a) ... (g) sont valides. Et la dernière relation (h) suit clairement de la forme de  $W$  discutée dès le début de la preuve.  $\square$

Le résultat principal, généralisant [11, 5.1] obtenu pour le cas simplement lacé, s'énonce comme suit.

**Théorème 4.3.2.** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie triangulée 2-Calabi-Yau possédant un objet inclinant amassé sobre  $T$ . Si  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T) \cong \mathcal{J}(\mathcal{Q}, W)$  pour un carquois modulé avec potentiel réduit  $(\mathcal{Q}, W)$  et  $k$  est un point de  $\mathcal{Q}$  n'appartenant pas à un 2-cycle, alors  $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mu_k(T)) \cong \mathcal{J}(\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q}, W))$ . En particulier si (3.5.2) est vérifiée pour  $\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q}, W)$  (c'est automatiquement le cas si le corps  $k$  est parfait), alors  $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mu_k(T)) \cong \mathcal{J}(\mu_k(\mathcal{Q}, W))$ .*

Pour le second lemme crucial nécessaire à la preuve de théorème précédent et ne nécessitant aucune généralisation, nous avons besoin de quelques notations supplémentaires. Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie satisfaisant à la propriété (Ax3), on suppose que la paire  $(\mathcal{C}, T)$  est comme dans le théorème 4.3.2, alors en vertu du théorème 4.2.2, il existe un foncteur  $k$ -linéaire  $\Phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \longrightarrow \mathcal{C}$  avec  $T = \bigoplus_{i \in I} T_i$  et  $T_i = \Phi i$ , induisant un isomorphisme d'algèbres  $\phi : \mathcal{J}(\mathcal{Q}, W) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  pour un potentiel  $W$  dans  $\mathcal{Q}$ . Et pour chaque point  $i$ , on a une suite faiblement 2-presque scindée

$$(\Phi i) \xrightarrow{[\Phi(x)]_x} \bigoplus_{x \in {}_L\mathcal{Q}_1(-, i)} \Phi s(x) \xrightarrow{[\Phi(\partial_{x,y} W)]_{y,x}} \bigoplus_{y \in {}_R\mathcal{Q}_1(i, -)} \Phi t(y) \xrightarrow{[\Phi(y)]_y} \Phi i$$

qu'on notera simplement

$$T_i \xrightarrow{f_{i2}} U_{i1} \xrightarrow{f_{i1}} U_{i0} \xrightarrow{f_{i0}} T_i. \quad (4.3.1)$$

**Lemme 4.3.3.** ([11, lem 5.4]) *On suppose que  $\mathcal{C}$  et  $T = \bigoplus_{i \in I} T_i$  sont comme dans le théorème 4.3.2. Alors Il existe un objet indécomposable  $T_k^*$  n'appartenant pas à  $\text{add } T$  pour lequel  $\mu_k(T) = (T/T_k) \oplus T_k^*$  et les conditions suivantes sont satisfaites.*

- (I) *Il existe deux suites d'échange  $T_k \xrightarrow{f_{k_2}} U_{k_1} \xrightarrow{h_k} T_k^*$  et  $T_k^* \xrightarrow{g_k} U_{k_0} \xrightarrow{f_{k_0}} T_k$  dans  $\mathcal{C}$  tels que  $f_{k_1} = h_k g_k$ .*  
 (II) *La suite suivante est faiblement 2-presque scindée dans  $\text{add } \mu_k(T)$ .*

$$T_k^* \xrightarrow{g_k} U_{k_0} \xrightarrow{f_{k_2} f_{k_0}} U_{k_1} \xrightarrow{h_k} T_k^*[1]$$

- (III) *La suite suivante est exacte.*

$$\mathcal{C}(T_k^*, T_k^*) \xrightarrow{g_{k^-}} \mathcal{C}(T_k^*, U_{k_0}) \xrightarrow{f_{k_0^-}} \mathcal{C}(T_k^*, T_k)$$

- (IV) *Pour tout  $i \neq k$  on a  $T_k \notin (\text{add } U_{i_1}) \cap (\text{add } U_{i_0})$  et la suite suivante est exacte.*

$$\mathcal{C}(T_k^*, U_{i_1}) \xrightarrow{f_{i_1^-}} \mathcal{C}(T_k^*, U_{i_0}) \xrightarrow{f_{i_0^-}} \mathcal{C}(T_k^*, T_i)$$

### 4.3.2 Preuve du Théorème 4.3.2

La preuve du théorème 4.3.2 consiste à appliquer le théorème 4.2.2 et à utiliser le lemme précédent pour construire des suites 2-presque scindées à droite dans  $\text{add } \mu_k(T)$ . On pose  $T^* = \mu_k(T)$  et  $(\mathcal{Q}', W') = \tilde{\mu}_k(\mathcal{Q}, W)$ . Comme  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T) \cong \mathcal{J}(\mathcal{Q}, W)$ , on sait qu'il existe un épimorphisme de  $k$ -algèbres  $\phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  induisant l'isomorphisme  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T) \cong \mathcal{J}(\mathcal{Q}, W)$ , et aussi  $\phi$  induit un foncteur  $k$ -linéaire  $\Phi : \widehat{k\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{C}$  avec  $T_i = \Phi i$ . En utilisant le lemme 4.1.4, on peut construire un foncteur  $k$ -linéaire  $\Phi' : \widehat{k\mathcal{Q}'} \rightarrow \mathcal{C}$  comme suit. D'abord pour éviter toute confusion, le point correspondant à  $k \in I = \mathcal{Q}_0$  sera ici noté  $k^*$  dans  $\mathcal{Q}'$ , on rappelle aussi les notations :  $B_k = \bigoplus_{i \in k^-} {}_i B_k$ ,  ${}_k B = \bigoplus_{j \in k^+} {}_k B_j$ ,  $B_k^* = \bigoplus_{i \in k^-} {}_i B_k^*$  et  ${}_k B^* = \bigoplus_{j \in k^+} {}_k B_j^*$ .

- (i).  $\Phi'$  coïncide avec  $\Phi$  sur  $\mathcal{Q}' \cap \mathcal{Q}$ , et  $\Phi' k^* = T_k^*$ .  
 (ii). Sur le produit  $B_k {}_k B$  lorsqu'il est vu dans  $k\mathcal{Q}'$ ,  $\Phi'$  coïncide essentiellement avec  $\Phi$ , au sens que  $\Phi'([xy]) = \Phi(x \otimes y) = \Phi(y \circ x) = (\Phi y)(\Phi x)$  pour tous  $x \in B_k$  et  $y \in {}_k B$ .  
 (iii). Pour le point  $k^*$  et les bimodules  $B_k^*$  et  ${}_k B^*$  on note d'abord le fait qui suit. Comme  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  est donné par un carquois modulé avec potentiel,  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(T)}$  n'a pas de boucle, et donc il est de même de  $\mathcal{Q}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(T^*)}$  avec  $T^* = \mu_k T$  voir la remarque 2.3.1 ou [12, 6.11]. Observons alors qu'en tant que sommes directes de  $K$ -bimodules on a

$$\text{End}_{\mathcal{C}}(T) = K \oplus J_{\text{End}_{\mathcal{C}}(T)} \text{ et } J_{\text{add } T}(T_i, T_j) = \text{Irr}_{\text{add } T}(T_i, T_j) \oplus J_{\text{add } T}^2(T_i, T_j), \quad i, j \in \mathcal{Q}_0. \quad (*)$$

En appliquant le Théorème 2.3.2 et ensuite son corollaire 2.3.4, on a un isomorphisme naturel

$$\text{End}_{\mathcal{C}}(T_k) / \text{rad} \text{End}_{\mathcal{C}}(T_k) = k_{T_k} \xrightarrow{\phi_{k, k^*}} k_{T_k^*} = \text{End}_{\mathcal{C}}(T_k^*) / \text{rad} \text{End}_{\mathcal{C}}(T_k^*)$$

suisant lequel les carquois modulés  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(T)}$  et  $\mathcal{Q}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(T^*)}$  sont liés par la mutation semi-modulée (et en particulier, il est aisé de voir que  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T^*)$  vérifie aussi l'observation (\*) précédente).  $\phi_{k, k^*}$  est compatible (à isomorphisme de  $K$ -bimodules près) avec les triangles d'échanges associés à la paire d'échange

$(T_k, T_k^*)$  donnés dans le lemme 4.3.3-(l), et permettant d'identifier naturellement  $B_k^*$  à  $\bigoplus_{i \in k^-} \text{Irr}_{\text{add } T^*}(T_i, T_k^*)$  et  ${}_k B^*$  à  $\bigoplus_{j \in k^+} \text{Irr}_{\text{add } T^*}(T_k^*, T_j)$  suivant un isomorphisme de  $K$ -bimodules  $\Phi'$ . Le morphisme de  $k$ -algèbres  $k_k \xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}(\Phi k, \Phi k) = \text{End}_{\mathcal{C}}(T_k)$  et l'identification précédente induisent un morphisme de  $k$ -algèbres  $k_{k^*} = k_k \xrightarrow{\Phi'} \text{End}_{\mathcal{C}}(T_k^*) = \mathcal{C}(\Phi' k^*, \Phi' k^*)$  en posant  $\Phi'(a) = \phi_{k, k^*}(\Phi(a))$  pour chaque  $a \in k_k$  avec  $\Phi' k^* = T_k^*$ . On construit ainsi  $\Phi'$  de sorte que les deux triangles d'échanges dans (l) soient donnés comme suit

$$T_k \xrightarrow{[\Phi x]_x} \bigoplus_{x \in {}_1 \mathcal{Q}_1(-, k)} \Phi s(x) \xrightarrow{[\Phi' x^*]_x} T_k^* \text{ et } T_k^* \xrightarrow{[\Phi' y^*]_y} \bigoplus_{y \in {}_R \mathcal{Q}_1(k, -)} \Phi t(y) \xrightarrow{[\Phi y]_y} T_k.$$

Maintenant pour prouver le théorème 4.3.2, en vertu du théorème 4.2.2(c)  $\Rightarrow$  (a) il suffit de montrer le résultat suivant :

**Proposition 4.3.4.** *À chaque point  $i \in \mathcal{Q}'_0$  correspond une suite 2-presque scindée à droite*

$$\bigoplus_{x' \in {}_1 \mathcal{Q}'_1(-, i)} T_{s(x')} \xrightarrow{[\Phi'(\partial_{x', y'} W') ]_{y', x'}} \bigoplus_{y' \in {}_R \mathcal{Q}'_1(i, -)} T_{t(y')} \xrightarrow{[\Phi'(y')]_y} T_i \quad (4.3.2)$$

*Démonstration.* Pour la preuve de la proposition 4.3.4, les propriétés liées aux potentiels  $W$  et  $W'$  et sur lesquelles bâtis les autres arguments de la preuve sont fournies par le lemme technique 4.3.1. Les arguments catégoriques supplémentaires ainsi que les différentes étapes de la preuve (ne nécessitant aucune généralisation) sont donnés par les lemmes [11, 7.7, 5.8, 5.9], nous omettons ces derniers détails.  $\square$

Maintenant, si la réduction de  $(\mathcal{Q}', W')$  est possible (c'est dire, si la partie triviale de  $(\mathcal{Q}', W')$  scinde ou simplement si le corps  $k$  est parfait), alors en vertu du théorème de réduction 3.4.4 ou du théorème de décomposition 3.4.2, on obtient que  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}', W') = \mathcal{J}(\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q}), \tilde{W}) \cong \mathcal{J}(\mu_k(\mathcal{Q}, W))$ .  $\square$

On a les conséquences directes suivantes données dans [11] et énoncées ici dans le cadre général.

**Corollaire 4.3.5.** *On suppose que  $k$  est parfait et que,  $\mathcal{C}$  est une catégorie 2-Calabi-Yau possédant un objet inclinant amassé sobre  $T$ .*

$\triangleright$  Alors si  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T) \cong \mathcal{J}(\mathcal{Q}, W)$  pour un carquois avec potentiel  $(\mathcal{Q}, W)$  et si  $k_1, \dots, k_l$  est une suite de points tels que  $k_i$  n'est pas sur un 2-cycle dans  $\mu_{k_i} \circ \dots \circ \mu_{k_1}(\mathcal{Q}, W)$ , alors  $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mu_{k_l} \circ \dots \circ \mu_{k_1} T) \cong \mathcal{J}(\mu_{k_l} \circ \dots \circ \mu_{k_1}(\mathcal{Q}, W))$ .

$\triangleright$  En particulier, les  $k$ -algèbres inclinées amassées sont réalisées comme algèbres jacobiniennes de carquois modulés avec potentiels.

*Démonstration.* Le premier volet découle trivialement des théorèmes 4.3.2. Le second suit du premier volet et de ce que les algèbres inclinées amassées s'obtiennent comme mutations des algèbres héréditaires, qui elles, sont trivialement jacobiniennes, et de plus, le carquois modulé de chaque algèbre inclinée amassée est 2-acyclique. Notons aussi qu'avec l'hypothèse que  $k$  est parfait, la réduction est toujours possible, et en plus toute  $k$ -algèbre admet une présentation par un carquois modulé lié.  $\square$

Signalons cette autre conséquence du théorème 4.3.2.

**Théorème 4.3.6.** *Sous l'hypothèse que  $k$  est parfait, soit  $A$  une  $k$ -algèbre quelconque, isomorphe à une algèbre jacobienne  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, W)$  pour un carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}, W)$ , et aussi à une algèbre inclinée 2-Calabi-Yau  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  pour un objet inclinant amassé  $T$  dans une catégorie 2-Calabi-Yau  $\mathcal{C}$ . Soit  $k \in \mathcal{Q}_0$  un point n'appartenant pas à un 2-cycle.*

(2) *L'algèbre jacobienne  $\mathcal{J}(\mu_k(\mathcal{Q}, W))$  est déterminée par l'algèbre  $A$  et ne dépend donc pas du choix du carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}, W)$  pour lequel  $A \cong \mathcal{J}(\mathcal{Q}, W)$ .*

(2) *L'algèbre inclinée 2-Calabi-Yau  $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mu_k(T))$  est déterminée par  $A$  et ne dépend donc pas du choix de la catégorie 2-Calabi-Yau  $\mathcal{C}$  et l'objet inclinant amassé  $T$  tel que  $A \cong \text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ .*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du théorème 4.3.2. □

## 4.4 La catégorie amassée associée à un carquois modulé avec potentiel Jacobi-fini

Dans [1, 7.4] pour le cas simplement lacé, Claire Amiot donne une solution positive à la question 4.1-(4) ci-dessous en construisant pour un carquois avec potentiel jacobin-fini  $(\mathcal{Q}, W)$  une catégorie amassée  $\mathcal{C}_{(\mathcal{Q}, W)}$ . Nous généraliserons la construction de la catégorie amassée  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}, W}$  et vérifierons rapidement que certains résultats de [1] se généralisent au contexte des carquois modulés avec potentiels. On se référera à [1, 7.4] et à [47] pour toutes les notions autour des catégories différentielles graduées et des algèbres différentielles graduées (en abrégé, dg-catégories, dg-algèbres, dg-modules...).

Dans cette section,  $\mathcal{Q}$  désigne un carquois modulé sur un ensemble fini de points  $I = \mathcal{Q}_0$ , de modulation  $\mathfrak{M}$ ; restant fidèle aux notations (3.2.1),  $\mathfrak{M}$  prescrit alors pour l'ensemble des points  $I$  une famille  $(k_i, t_i)_{i \in I}$  où chaque  $k_i$  est un  $k$ -surcorps (toujours de dimension finie) et (implicitement) muni d'une forme trace non-dégénérée  $t_i \in \text{Hom}_k(k_i, k)$ , et pour chaque paire ordonnée de points  $i, j \in I$ ,  $\mathfrak{M}$  prescrit une unique paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{ {}_i B_j, {}_i B_j^*; {}_i \mathfrak{b}_j, {}_i \mathfrak{b}'_j \}$  où  ${}_i B_j \in {}_{k_i} \text{bimod}_{k_j}$ ,  ${}_i B_j \otimes {}_i B_j^* \xrightarrow{{}_i \mathfrak{b}_j} k_i$  et  ${}_i B_j^* \otimes {}_i B_j \xrightarrow{{}_i \mathfrak{b}'_j} k_j$ . On note  $K = \prod_{i \in I} k_i$ ,  $B := k\mathcal{Q}_1 := \bigoplus_{i, j \in I} {}_i B_j$  le bimodules des flèches valuées dans  $\mathcal{Q}$ ,  $B^* = \bigoplus_{i, j \in I} {}_i B_j^*$  et  $\{B, B^*; \mathfrak{b}, \mathfrak{b}'\}$  la paire dualisante et symétrisable de  $K$ -bimodules induite comme en 3.2.4.

**Définition 4.4.1.** Un carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}, m)$  est dit *jacobin-fini* si  $m$  est un potentiel appartenant à  $k\mathcal{Q}$  (l'algèbre ordinaire non complète de chemin de  $\mathcal{Q}$ ) et si de plus l'algèbre jacobienne  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, m) = k\mathcal{Q}/J_m$  est de dimension finie.

Dans [24], Derksen, Weyman et Zelevinsky posent les questions ci-après (nous avons juste remplacé le terme "carquois avec potentiel" par "carquois modulé avec potentiel" et on suppose que  $\mu_k(\mathcal{Q}, m)$  est correctement défini ou simplement que le corps de base est parfait).

**Question 4.1** ([24, Questions 12.1, 12.2, 12.3]). Soit  $(\mathcal{Q}, m)$  un carquois modulé avec potentiel.

- (1) La classe d'isomorphisme de  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  est-elle déterminée par la classe d'équivalence de la catégorie de modules  $\text{mod}(\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}))$  ?
- (2) La classe d'isomorphisme de  $\mathcal{J}(\mu_k(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}))$  est-elle déterminée par celle de  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  ?
- (3) La catégorie  $\text{mod}(\mathcal{J}(\mu_k(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})))$  est-elle déterminée à équivalence près par la catégorie  $\text{mod}(\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}))$  ?
- (4) Existe-il une construction analogue des catégories amassées pour les carquois modulés avec potentiels non-nécessairement acycliques ?

Rappelons que dans la proposition 3.2.5 nous avons obtenu l'opérateur de dérivée cyclique  $B^* \otimes \text{pot}(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\partial = \partial^{\text{cl}} = \partial^{\text{cr}}} \mathcal{J}_{\widehat{\mathcal{Q}}}$ , dont l'action sur chaque potentiel  $\mathfrak{m} \in \text{pot}(\mathcal{Q})$  est un morphisme  $B^* \xrightarrow{\partial \mathfrak{m}} \mathcal{J}_{\widehat{\mathcal{Q}}}$  tel que  $\partial \mathfrak{m}(u) = \partial_u \mathfrak{m}$ . Remarquons que si le potentiel est à valeurs dans  $k\mathcal{Q}$ , alors il en est de même de ses dérivées partielles et cycliques.

À présent, les outils techniques de la section 3.2 sur les potentiels non-simplement lacés nous permettent de généraliser la construction de Victor Ginzburg dans [34, sec 4.2], comme le montre la première partie dans la définition ci-après.

**Définition 4.4.2.** Pour un carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  tel que  $W$  soit dans  $k\mathcal{Q}$ , on commence par associer à  $\mathcal{Q}$  un carquois modulé gradué  $\widehat{\mathcal{Q}}$  donné par  $\widehat{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}^* \oplus K$  et décrit alors comme suit :

- ▷  $\widehat{\mathcal{Q}}_0 = I = \mathcal{Q}_0$  et la modulation (symétrisable) de  $\widehat{\mathcal{Q}}$  est égale à  $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^* \oplus (\{k_i, k_i\} : i \in I)$  (ayant donc la même famille  $(k_i, t_i)_{i \in I}$  de  $k$ -surcorps  $k_i$  munis de formes traces non-dégénérées  $t_i \in \text{Hom}_k(k_i, k)$ ). En particulier, le bimodule  $\widehat{B}$  de toutes les flèches valuées dans  $\widehat{\mathcal{Q}}$  est donné par  $\widehat{B} = B \oplus B^* \oplus (\bigoplus_{i \in I} k_i)$ .
- ▷ Chaque point  $i$  induit dans  $\widehat{\mathcal{Q}}$  une boucle  $\gamma_i : i \rightarrow i$  trivialement valuée et dont la paire dualisante et symétrisable de bimodules associée est la paire auto-dualisante triviale  $\{k_i, k_i\}$ ; chaque boucle  $\gamma_i$  est de degré  $-2$  (les éléments du bimodule  $k_i = {}_{k_i}(k_i)_{k_i}$  correspondant à  $\gamma_i$  sont de degré  $-2$ ).
- ▷ Ensuite, chaque flèche pleinement valuée  $\alpha : i \xrightarrow{{}_i B_j^\alpha, ({}_i B_j^\alpha)^*} j$  dans  $\mathcal{Q}$  (munie de sa paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{{}_i B_j^\alpha, ({}_i B_j^\alpha)^*\} := \{{}_i B_j, {}_i B_j^*; {}_i b_j, {}_i b_j'\}$ ) induit dans  $\widehat{\mathcal{Q}}$  un 2-cycle valué  $i \xrightleftharpoons[{}_i B_j^\alpha, ({}_i B_j^\alpha)^*]{{}_i B_j^\alpha, ({}_i B_j^\alpha)^*} j$  gardant la même paire dualisante et symétrisable de bimodules que  $\alpha$ . On note  $\alpha^*$  la seconde flèche valuée du 2-cycle précédent, si bien que le  $k_j$ - $k_i$ -bimodule de la flèche  $\alpha^*$  dans  $\widehat{\mathcal{Q}}$  est  ${}_j \widehat{B}_i^{\alpha^*} = ({}_i B_j^\alpha)^*$ . Vus dans  $\widehat{\mathcal{Q}}$ , les éléments de  $B$  sont de degré 0 et ceux de  $B^*$  sont de degré  $-1$ .

Maintenant, au carquois modulé  $\widehat{\mathcal{Q}}$  nous pouvons associer une version généralisée de la dg-algèbre de Ginzburg : c'est l'algèbre différentielle graduée  $\Gamma(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  définie comme suit :

- ▷ La  $k$ -algèbre  $\mathbb{Z}$ -graduée sous-jacente de  $\Gamma(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  est égale à  $k\widehat{\mathcal{Q}} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} k\widehat{\mathcal{Q}}_p$ , l'algèbre (tensorielle) de chemins gradués de  $\widehat{\mathcal{Q}}$ .
- ▷ La différentielle de  $\Gamma(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  est l'unique endomorphisme  $k\widehat{\mathcal{Q}} \xrightarrow{d} k\widehat{\mathcal{Q}}$  de  $k$ -modules gradués, homogène de degré 1 ( $d$  envoie la composante  $k\widehat{\mathcal{Q}}_p$  sur la composante  $k\widehat{\mathcal{Q}}_{p+1}$  pour chaque  $p \in \mathbb{Z}$ ), et satisfaisant à la loi de Leibniz suivante :

$$\partial(uv) = \partial(u)v + (-1)^p u \cdot \partial(v) \text{ pour tout élément } u \text{ homogène de degré } p \text{ et tout } v,$$

et donnée sur le bimodule  $\widehat{B} = B \oplus B^* \oplus K$  comme suit :

- ▷ La restriction de  $\partial$  sur  $B$  est nulle :  $\partial(B) = 0$ .
- ▷ Sur  $B^*$ , la différentielle  $\partial$  est donnée par la dérivée cyclique de  $m$  :

$$\begin{array}{ccc} B^* & \xrightarrow{\partial m} & J_{kQ} \\ \xi & \longmapsto & \partial(\xi) = \partial_\xi m \end{array} \quad (\text{comme dans la proposition 3.2.5}).$$

- ▷ Pour chaque bouche ajoutée  $\gamma_i$ , la restriction de  $\partial$  sur le bimodule  $k_i$  correspondant à  $\gamma_i$  est égal au morphisme canonique (potentiel canonique)  $k_i \xrightarrow{\delta_i B \otimes B_i^*} {}_i B \otimes (B_i)^* = e_i \cdot (B \otimes B^*) \cdot e_i$ , où  $e_i$  est l'unité du  $k$ -surcorps  $k_i \subset K = \prod_{s \in I} k_s$ , l'expression des morphismes canoniques  $\delta$  étant donnée par le lemme 3.1.6 en choisissant une paire quelconque  $\{ {}_R Q_1(i, -), {}_R Q_1^*(i, -) \}$  de systèmes de flèches mutuellement duals pour la paire dualisante de bimodules  $\{ e_i \cdot B, (e_i \cdot B)^* \}$ .

*Remarque 4.4.3.* Dans les conditions de la définition 4.4.2, l'algèbre jacobienne  $\mathcal{J}(Q, m) = kQ/J_m$  coïncide avec l'homologie  $H^0\Gamma(Q, m)$  de degré 0 de l'algèbre différentielle graduée  $\Gamma(Q, m)$ .

La catégorie amassée  $\mathcal{C}_{(Q, m)}$  qui mérite notre attention est la version non-nécessairement simplement lacée de la construction de Claire Amiot, donnée comme suit :

**Définition 4.4.4** ([1, 7.1 pour le cas simplement lacé]). On suppose que  $(Q, m)$  est Jacobi-fini et on considère la dg-algèbre généralisée  $\Gamma = \Gamma(Q, m)$ , on désigne par  $\text{per}\Gamma$  la sous-catégorie épaisse de la catégorie dérivée  $\mathcal{D}\Gamma$ , engendrée par  $\Gamma$ , et par  $D^b\Gamma$  la sous-catégorie de  $\mathcal{D}\Gamma$  formée des dg-modules de dimension homologique totale finie. Alors la catégorie amassée associée à  $(Q, m)$  est définie comme étant le quotient  $\mathcal{C}_{(Q, m)} = \text{per}\Gamma/D^b\Gamma$

On aimerait savoir si la catégorie amassée  $\mathcal{C}_{(Q, m)}$  est Hom-finie 2-Calabi-Yau, si elle possède toujours une structure amassée et si elle apparaît comme une généralisation de la construction [12]. Pour cela, rappelons les concepts suivants pour une dg-algèbre  $A$  :

- ▷  $A$  est *homologiquement lisse* si  $A \in \text{per}(A^e)$  où  $A^e = A^0 \otimes A$  est la dg- $k$ -algèbre enveloppante de  $A$ .
- ▷  $A$  est *3-Calabi-Yau en tant que bimodule* s'il existe dans  $\mathcal{D}(A^e)$  un isomorphisme de bimodules

$$\text{RHom}_{A^e}(A, A^e) \xrightarrow{\cong} A[-3].$$

Le résultat suivant est un cas particulier d'un résultat de Bernhard Keller [50, Thm 6.3] sur lequel repose la caractérisation de la catégorie amassée simplement lacée  $\mathcal{C}_{(Q, W)}$  introduite dans [1].

**Théorème 4.4.1** ([50, Thm 6.3]). *Soit  $(Q, W)$  un carquois avec potentiel avec  $Q$  fini et  $W \in kQ$ . Alors la dg-algèbre (simplement lacée) de Ginzburg  $\Gamma(Q, W)$  est homologiquement lisse et 3-Calabi-Yau en tant que bimodule.* □

Nous pensons que le théorème ci-dessus doit pouvoir se généraliser, mais cela requiert un effort considérable pour trouver des versions non-simplement lacées des récentes constructions de Keller autour des dg-catégories et de la propriété de Calabi-Yau, voir [50].

**Conjecture 4.2.** Le théorème de Keller ci-dessus est encore vrai pour le cas non-simplement lacé : pour un carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$ , où  $\mathcal{Q}$  est fini et  $\mathfrak{m}$  est dans  $k\mathcal{Q}$ , la dg-algèbre généralisée  $\Gamma(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  est encore homologiquement lisse et 3-Calabi-Yau en tant que bimodule.

Sous-réserve que le théorème de Keller 4.4.1 se généralise aux carquois modulés avec potentiels, on vérifie rapidement que le résultats de Claire Amiot [1, 7.9, 7.10] se généralisent aux carquois modulés avec potentiels, ce qui donnera également une réponse positive partielle à la question 4.1-(2) de Fomin-Zelevinsky.

**Théorème 4.4.2** ([1, 7.9, 7.10] pour le cas simplement lacé). *Sous l'hypothèse que la conjecture 4.2 tienne, la catégorie amassée  $\mathcal{C}_{(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})}$ , associée à un carquois modulé avec potentiel Jacobi-fini, est encore Hom-finie 2-Calabi-Yau, et l'image  $T$  du module libre  $\Gamma$  dans  $\mathcal{C}_{(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})}$  est un objet inclinant amassé tel que  $\text{End}_{\mathcal{C}_{(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})}}(T)$  coïncide avec l'algèbre jacobienne  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$ . Si bien que toute algèbre jacobienne  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  de dimension finie est une algèbre inclinée 2-Calabi-Yau. Dans cette situation, il en résulte que les algèbres inclinées amassées, admettant une présentation par un carquois modulé lié, sont déterminées par leur carquois modulés.*

*Démonstration.* Sous l'hypothèse que la conjecture 4.2 tienne, il suivra que  $A = \Gamma(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  satisfait aux conditions de [1, thms 7.9, 7.10]. Ce qui donne directement la première partie du théorème 4.4.2. La dernière partie du théorème dévient alors une conséquence immédiate du théorème 4.3.6.  $\square$

La note finale de cette section consiste à signaler que la construction de la catégorie amassée simplement lacée  $\mathcal{C}_{(\mathcal{Q}, \mathfrak{w})}$  généralise la construction originelle de la catégorie amassée  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$  telle que introduite par les cinq coauteurs Buan, Marsh, Reineke, Reiten et Todorov dans [12]. Cela est possible grâce à un autre résultat de Bernhard Keller et Idun Reiten, donnant une très intéressante caractérisation des catégories amassées au moyen des catégories 2-Calabi-Yau, ici la perfection du corps  $k$  est utilisée.

**Théorème 4.4.3** (Keller-Reiten[51]). *On suppose que  $k$  est un corps parfait. Soit  $\mathcal{C} = \underline{\mathcal{E}}$  la catégorie stable associée à une catégorie de Frobenius  $\mathcal{E}$  et telle que  $\mathcal{C}$  soit 2-Calabi-Yau,  $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}$  une sous-catégorie inclinante amassée. Alors, si la catégorie  $\text{mod}\mathcal{T}$  des modules de présentation finie sur  $\mathcal{T}$  est héréditaire alors  $\mathcal{C}$  est exactement équivalente à la catégorie amassée  $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = \text{D}^b(\text{mod}\mathcal{T})/(\tau^{-1}[1])^{\mathbb{Z}}$ .*

**Corollaire 4.4.4.** *Sous l'hypothèse que la conjecture 4.2 tienne, si  $k$  est parfait et si  $\mathcal{Q}$  est un carquois modulé fini acyclique, alors la catégorie amassée  $\mathcal{C}_{(\mathcal{Q}, 0)}$  est exactement équivalente à la catégorie amassée ordinaire  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ .*

*Démonstration.* Dans le cas simplement lacé, l'argument de la preuve est fourni dans [1, cor 7.13] où on traite aussi d'une situation plus générale mettant en jeu les mutations de carquois avec potentiels. Dans

le cas non-simplement lacé avec  $k$  parfait, l'argument reste le même : sous réserve que la conjecture 4.2 tienne, il suit de 4.4.2 que  $\mathcal{C}_{(\mathcal{Q},0)}$  est une catégorie 2-Calabi-Yau possédant un objet inclinant amassé  $T$  tel que  $\text{End}_{\mathcal{C}}(T) = k\mathcal{Q}$ , si bien qu'on a le résultat cherché en vertu du théorème de Keller-Reiten 4.4.3.  $\square$

# Chapitre 5

## Algèbres inclinées amassées de représentation finie : types $\mathbb{A}$ , $\mathbb{B}$ , $\mathbb{C}$

### 5.1 Mutations de carquois valués de types $\mathbb{B}_n$ , $\mathbb{C}_n$ et $\mathbb{F}_4$

#### 5.1.1 Quelques terminologies et résultats principaux

Comme d'habitude on fixe un ensemble de points  $I = \{1, \dots, n\}$  ayant  $n \geq 1$  éléments, on considère pour cette section l'ensemble  $\tilde{\mathcal{Q}}_I$  de tous les carquois valués sur  $I$  et dont les graphes sous-jacents sont 2-acycliques et sans boucle. Ainsi pour chaque  $Q \in \tilde{\mathcal{Q}}_I$  de type  $\Gamma$ , et pour toute paire  $i, j \in I = Q_0$ , on a  $Q(i, i) = \emptyset$  et  $\Gamma(i, j) = Q(i, j) \cup Q(j, i)$  contient au plus une flèche valuée.  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$  et  $\mathbb{C}$  désigneront respectivement l'un des graphes valués de Dynkin suivants :  $\mathbb{A}_n : \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet$ ,  $\mathbb{B}_n : \overset{1,2}{\bullet} \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet$ , et  $\mathbb{C}_n : \overset{2,1}{\bullet} \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet$ , avec  $n$  parcourant  $\mathbb{N}_*$ ; on considère aussi le graphe valué de Dynkin  $\mathbb{F}_4 : \bullet \text{---} \overset{1,2}{\bullet} \text{---} \bullet$ . Et lorsqu'aucune confusion n'est possible chaque  $\Delta \in \{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}\}$  désignera l'un des graphes valués dans  $\{\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n\}$  pour un certain entier fixé  $n$ .

Nous noterons  $\text{Mut}(\Delta)$  l'ensemble de tous les carquois valués mutation-équivalents à une orientation quelconque de  $\Delta$ . De même pour  $Q \in \tilde{\mathcal{Q}}_I$ ,  $\text{Mut}(Q)$  désigne l'ensemble de tous les carquois valués mutation-équivalents à  $Q$ . On note  $Q \sim Q'$  pour dire que  $Q$  et  $Q'$  sont mutation-équivalents.

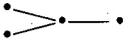
$Q$  est dit *2-fini* si pour tout  $Q' \sim Q$ , chaque arête valuée  $i \xrightarrow{d_j, d_j^*} j$  dans  $Q'$  vérifie l'inégalité suivante :  $d_j d_j^* \leq 3$ . Dans [29] il est établi que les diagrammes 2-finis sont précisément ceux qui sont mutation-équivalents aux diagrammes de Dynkin. De façon équivalente, les carquois valués 2-finis sont précisément ceux qui sont mutation-équivalents aux carquois valués de Dynkin.

**Définition 5.1.1.** Soit  $Q$  un carquois valué de type  $\Gamma$ ,  $c$  un cycle (non-orienté) dans  $\Gamma$ . Une *corde* de  $c$  dans  $\Gamma$  est toute arête de  $\Gamma$  reliant deux points non-consécutifs de  $c$ .  $Q$  est dit *cycliquement orienté* si tout cycle sans corde dans  $\Gamma$  est cycliquement orienté dans  $Q$ .

En vertu de [6, Thm 1.2] sur la caractérisation des algèbres amassées de type fini, il est bien connu que chaque  $Q \in \text{Mut}(\Delta)$  est cycliquement orienté.

Soit  $Q$  un carquois valué de type  $\Gamma$ . rappelons qu'un chemin  $\omega$  dans  $Q$  est dit *simple* s'il ne contient aucun sous-chemin cyclique propre. Nous disons qu'un chemin simple  $\omega$  est *plein* si le sous-carquois valué induit (par les points de  $\omega$ ) correspondant ne comporte pas d'autre flèches additionnelles ; autrement dit comme  $\Gamma$  est 2-acyclique, deux points de  $\omega$  sont adjacents dans  $Q$  si et seulement s'ils sont adjacents dans  $\omega$ . De même une *marche*  $\omega : i \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_m} j$  dans  $\Gamma$  est dite *simple* si elle ne contient aucune sous-marche cyclique propre dans  $\Gamma$ . Introduisons maintenant les terminologies suivantes. Nous appellerons *triangle* dans  $\Gamma$  (ou dans  $Q$ ) tout sous-graphe (ou sous-carquois) valué plein induit par un cycle de longueur 3 dans  $\Gamma$  (ou dans  $Q$ ), ainsi les permutations cycliques d'un 3-cycle dans  $Q$  induisent un même triangle dans  $Q$  et dans  $\Gamma$ , et par un léger abus de langage on assimilera parfois un 3-cycle dans  $Q$  au triangle qu'il induit. Le *voisinage* d'un point  $k$  dans  $Q$  est le sous-carquois valué induit de  $Q$  déterminé par  $k$  et tous ses voisins (immédiats). Nous définissons maintenant l'outil essentiel de cette section.

**Définition 5.1.2.** Soit  $Q$  un carquois valué de type  $\Gamma$ , et  $(\Delta, (a, b))$  l'une des trois paires suivantes :  $(\mathbb{A}, (1, 1))$ ,  $(\mathbb{B}, (1, 2))$ ,  $(\mathbb{C}, (2, 1))$ .

- (a)  $\Gamma$  est appelé *triangle-décoré* si les seuls cycles simples dans  $\Gamma$  sont des triangles.  $Q$  est appelé triangle-décoré dès que son graphe valué sous-jacent  $\Gamma$  est triangle-décoré.
- (b) On suppose que  $Q$  est connexe. Alors  $Q$  est appelé *triangle-décoré de classe  $\Delta$*  si  $Q$  est triangle-décoré et possède les propriétés additionnelles ci-après :
  - ▷  $Q$  est cycliquement orienté et le graphe de Dynkin  $\mathbb{D}_4$  :  ne peut être plongé comme sous-graphe non-valué plein dans  $\Gamma$ .
  - ▷  $\Gamma$  contient un point *distingué*  $r$  appelé *racine*, ayant les propriétés suivantes : toute arête non trivialement valuée dans  $\Gamma$  est incidente à la racine et est donnée comme suit :  $r \xrightarrow{a,b} x$  pour un certain point  $x$ . La racine  $r$  a au plus deux voisins et si elle a deux voisins alors elle est sur un triangle.
- (c) L'*arbre triangle-décoré de classe  $\Delta$*  est le graphe valué infini  $\mathbb{T}_\Delta$  ci-dessous. On dira qu'un sous-

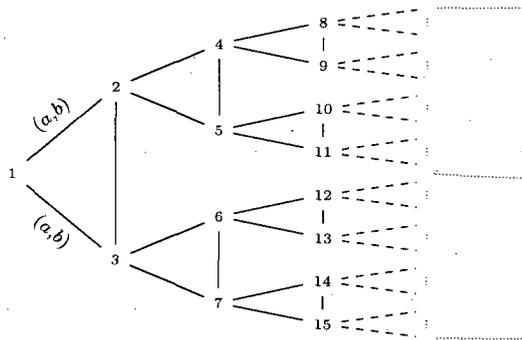


figure 5.1 – L'arbre triangle-décoré  $\mathbb{T}_\Delta$

graphe valué  $\Gamma'$  de  $\mathbb{T}_\Delta$  est *enraciné* s'il est connexe et contient la racine de  $\mathbb{T}_\Delta$ ,  $\Gamma'$  sera dit *pleinement*

enraciné s'il est enraciné et plein.

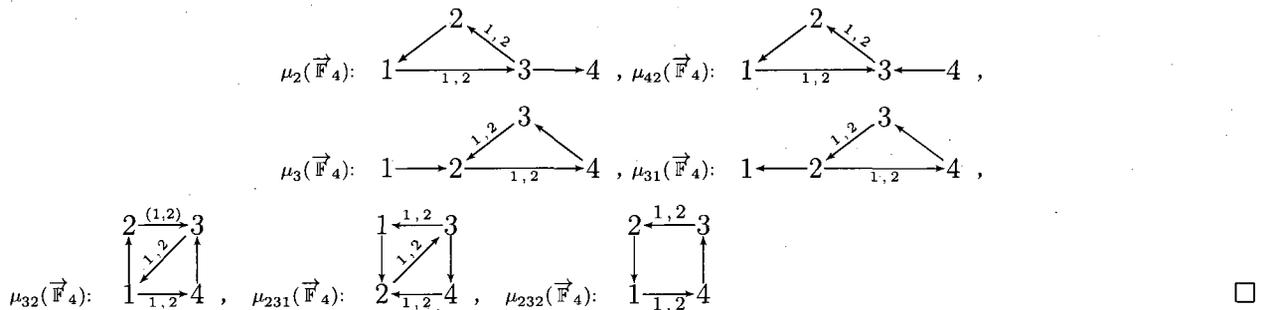
Pour chaque point  $x_0$  fixé dans  $\Delta$ , on considère le sous-ensemble  $\text{Mut}_{/x_0}(\Delta)$  formé des carquois valués obtenus des orientations de  $\Delta$  par des suites de mutations évitant le point  $x_0$ . Ainsi, un carquois valué  $Q$  est dans  $\text{Mut}_{/x_0}(\Delta)$  si et seulement si  $Q$  est soit une orientation de  $\Delta$ , soit de la forme  $Q = \mu_{k_1, \dots, k_l}(\vec{\Delta}) = \mu_{k_1} \circ \dots \circ \mu_{k_l}(\vec{\Delta})$  où  $\vec{\Delta}$  est une orientation quelconque de  $\Delta$  et  $k_1, \dots, k_l \in \Delta_0 \setminus \{x_0\}$ ,  $l \in \mathbb{N}_*$ . Le résultat principal de cette section s'énonce alors comme suit.

**Théorème 5.1.1** (de structure). *Soit  $Q$  un carquois valué de type  $\Gamma$  ayant  $n$  points,  $\Delta$  l'un des graphes valués de Dynkin suivants :  $\mathbb{A}_n$ ,  $\mathbb{B}_n$  ou  $\mathbb{C}_n$ .*

- (1) *Alors les énoncés suivants sont équivalents.*
  - (a)  $Q \in \text{Mut}(\Delta)$ .
  - (b)  $Q$  est un carquois valué triangle-décoré de classe  $\Delta$ .
  - (c)  $Q$  est cycliquement orienté et son graphe valué sous-jacent  $\Gamma$  est un sous-graphe valué pleinement enraciné de l'arbre triangle-décoré  $\mathbb{T}_\Delta$  de classe  $\Delta$ .
- (2) *Pour chaque point  $x_0$  fixé dans  $\Delta$  on a,  $\text{Mut}(\Delta) = \text{Mut}_{/x_0}(\Delta)$ , où  $\text{Mut}_{/x_0}(\Delta)$  est obtenu des orientations de  $\Delta$  par les suites de mutations évitant le point  $x_0$ .*

En utilisant un logiciel de calcul scientifique ("SAGE", "Maple") on peut écrire un petit programme pour calculer la classe des mutations de toute matrice anti-symétrisable de type fini. En particulier on calcule facilement tous les carquois valués appartenant à  $\text{Mut}(\mathbb{F}_4)$ . Considérons l'orientation linéaire suivante,  $\vec{\mathbb{F}}_4 : 1 \rightarrow 2 \xrightarrow{1,2} 3 \rightarrow 4$  du graphe valué  $\mathbb{F}_4$ , alors la preuve de la proposition suivante est une tâche aisée.

**Proposition 5.1.2.** *L'ensemble  $\text{Mut}(\mathbb{F}_4)$  contient quinze carquois valués non-isomorphes parmi lesquels huit constituent la liste de tous les carquois valués de type  $\mathbb{F}_4$ , tandis que les sept autres restant sont listés comme suit :*



À partir des résultats ci-dessus on voit que le type de Dynkin d'une algèbre inclinée amassée de représentation finie est uniquement déterminé ; le cas simplement lacé a été traité dans [13].

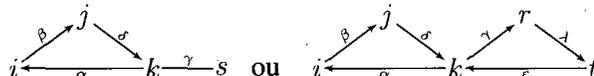
**Proposition 5.1.3.** *Soit  $\tilde{\mathcal{A}}$  une algèbre inclinée amassée de représentation finie. Alors il existe un unique graphe valué de Dynkin  $\Delta$  tel que  $\tilde{\mathcal{A}}$  est inclinée amassée de type  $\Delta$ .*

### 5.1.2 Preuve du théorème de structure

Pour cette sous-section on fixe une paire  $(\Delta, (a, b))$  dans  $\{(\mathbb{A}, (1, 1)), (\mathbb{B}, (1, 2)), (\mathbb{C}, (2, 1))\}$ .

**Lemme 5.1.4.** *Un carquois valué  $Q$  de type  $\Gamma$  est triangle-décoré de classe  $\Delta$  si et seulement si  $Q$  est cycliquement orienté et  $\Gamma$  est un sous-graphe valué pleinement enraciné de l'arbre triangle-décoré  $\mathbb{T}_\Delta$  de classe  $\Delta$ .*

*Démonstration.* La suffisance se voit clairement à partir de Fig. 5.1 et de la définition 5.1.2-(c). Pour la nécessité, supposons que  $Q$  est triangle-décoré de classe  $\Delta$ . Nous avons besoin de prouver que  $\Gamma$  est un sous-graphe valué pleinement enraciné de  $\mathbb{T}_\Delta$ . Il découle clairement de la définition 5.1.2-(b) que  $Q$  est connexe et que la "racine" de  $\Gamma$  et celle de  $\mathbb{T}_\Delta$  sont caractérisées par la même propriété. On doit seulement se préoccuper de la forme du voisinage de chaque point  $k$  dans  $\Gamma$  ayant plus de deux voisins. En vertu de l'hypothèse les seuls cycles simples dans  $\Gamma$  sont des triangles et  $\Gamma$  ne contient pas le graphe  $\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \quad \searrow \\ \bullet \end{array} \text{---} \bullet$  comme sous-graphe (non-valué) plein. Il en résulte que chaque point dans  $Q$  doit avoir au plus quatre voisins et le voisinage de chaque point  $k \in Q_0$  ayant exactement trois ou quatre voisins doit avoir la forme suivante :

 Ce qui montre que  $\Gamma$  est un sous-graphe pleinement enraciné de  $\mathbb{T}_\Delta$  et complète la preuve du lemme.  $\square$

Signalons l'observation aisée suivante : soit  $C : \begin{array}{c} \alpha \quad k \quad \beta \\ \nearrow \quad \searrow \\ \gamma \end{array} j$  un carquois valué ayant au plus deux flèches non trivialement valuées et tel que toute valuation non triviale dans  $C$  soit égale à  $(1, 2)$  ou  $(2, 1)$ . Si  $\alpha$  ou  $\beta$  est trivialement valuée, alors  $\mu_k(C) = i \xleftarrow{\alpha} k \xleftarrow{\beta} j$ ; dans le cas contraire  $\mu_k(C) = i \xleftarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j$ , si bien que seule l'orientation de  $C$  a changé.

**Proposition 5.1.5.** *Soient  $Q$  un carquois triangle-décoré de classe  $\Delta$  et  $k \in Q_0$ . Alors  $\mu_k(Q)$  est triangle-décoré de classe  $\Delta$ .*

Avec les notations ci-dessus, si  $k$  a seulement un voisin ou si  $k$  est la racine appartenant à un triangle non trivialement valué dans  $Q$ , alors  $\mu_k(Q)$  est clairement triangle-décoré de classe  $\Delta$ . La preuve de la proposition 5.1.5 ci-dessus est alors donnée en vertu du lemme suivant.

**Lemme 5.1.6.** *Avec les notations précédentes, on suppose que dans  $Q$  il existe un chemin de longueur deux  $i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j$  tel que  $\alpha$  ou  $\beta$  soit trivialement valué. Alors  $\mu_k(Q)$  est triangle-décoré de classe  $\Delta$ .*

*Démonstration.* (i) Soit  $\Gamma'$  le graphe valué sous-jacent de  $Q' = \mu_k(Q)$ . Nous prouverons d'abord que les seuls cycles simples dans  $\Gamma'$  sont des triangles, cycliquement orientés dans  $Q'$ . Pour cela, on a besoin de montrer que les seuls cycles simples dans  $\Gamma'$  contenant une nouvelle arête créée par  $\mu_k$  sont des triangles cycliquement orientés. On observe en vertu du lemme 5.1.4 qu'il existe dans  $Q$  au plus deux chemins pleins de longueur deux via  $k$ .

Supposons dans un premier temps que  $i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j$  est l'unique chemin plein de longueur 2 via  $k$ . Alors  $\mu_k$  créera dans  $Q'$  une seule nouvelle flèche  $i \xrightarrow{\gamma} j$ . Nous affirmons que le triangle cycliquement orienté

$T : \begin{array}{ccc} & k & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ i & \xrightarrow{\gamma} & j \end{array}$  induit dans  $\Gamma'$  l'unique cycle simple contenant  $\gamma$ . Soit en effet  $\omega' = \gamma\omega$  un cycle simple dans  $\Gamma'$  contenant l'arête  $i \xrightarrow{\gamma} j$ , avec  $\omega$  une marche dans  $Q$  reliant le point  $j$  au point  $i$  et tel que  $\ell(\omega) \geq 2$ . On voit que  $\omega$  contient nécessairement  $\alpha$  ou  $\beta$ , car autrement,  $\alpha\beta\omega$  serait un cycle simple de longueur supérieure à 3 dans  $\Gamma$ , ce qui contredirait le fait que les seuls cycles simples dans  $\Gamma$  sont des triangles. Mais si une seule des deux arêtes  $\alpha$  et  $\beta$  appartient à  $\omega$ , disons  $\beta$ , alors nécessairement il existe dans  $\Gamma$  une autre arête  $k \xrightarrow{\lambda} s$  avec  $s \in \{i, j\}$  tel que  $\omega$  se factorise par  $\lambda$ . D'où  $\omega = \beta\lambda\omega_1$  où  $\omega_1$  est une marche simple dans  $\Gamma$  reliant le point  $s$  au point  $i$  et ne contenant pas  $\alpha$ . Mais  $\omega_1$  étant à la fois dans  $Q = \mu_k(Q')$  et dans  $Q' = \mu_k(Q)$ , il en résulte que  $\ell(\omega_1) \geq 2$ . Si bien que  $\lambda\omega_1\alpha$  doit être un cycle simple de longueur supérieure à 3 dans  $\Gamma$ , ce qui donne une contradiction comme précédemment. Par conséquent  $\omega'$  contient  $\alpha$  et  $\beta$ , et étant simple on obtient que  $\omega'$  coïncide avec le triangle  $T$ .

Supposons maintenant que dans  $Q$  il existe exactement deux chemins pleins de longueur deux via  $k$ ; ceci correspond à la situation où  $k$  a quatre voisins. Alors en vertu du lemme 5.1.4 (et des éléments de sa preuve), les voisinages de  $k$  dans  $Q$  et dans  $Q'$  ont respectivement les formes suivantes :

$$\Sigma : \begin{array}{ccccc} & i & & j & \\ & \alpha \swarrow & & \beta \searrow & \\ & k & & k & \\ \delta \swarrow & & & & \delta' \searrow \\ s & \xrightarrow{\gamma} & k & \xrightarrow{\epsilon} & t \end{array}, \quad \Sigma' = \mu_k(\Sigma) : \begin{array}{ccccc} & i & & j & \\ & \alpha \swarrow & & \beta \searrow & \\ & k & & k & \\ \gamma \swarrow & & & & \epsilon \searrow \\ s & \xrightarrow{\gamma} & k & \xrightarrow{\gamma'} & t \end{array}$$

Il découle de ce qui précède que tout cycle simple dans  $\Gamma'$  contenant au plus l'une des deux arêtes  $\gamma$  et  $\gamma'$  est forcément un triangle, cycliquement orienté dans  $Q'$ . Il reste alors seulement à observer que  $\Gamma'$  ne peut contenir un cycle simple contenant les deux nouvelles arêtes  $\gamma$  et  $\gamma'$ . En effet, supposons le contraire et soit  $\omega = \omega_1\gamma\omega_2\gamma'$  un cycle simple dans  $\Gamma'$ , où  $\omega_1$  est une marche simple entre les points  $s$  et  $i$ , tandis que  $\omega_2$  est une marche simple entre les points  $j$  et  $t$  dans  $Q$ . On a  $\ell(\omega_1) \geq 2$ ,  $\ell(\omega_2) \geq 2$  et la simplicité de  $\omega$  montre que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  n'ont aucun point commun. En particulier au moins l'une des deux marches  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ne contient pas le point  $k$ , on peut donc sans perte de généralité supposer que c'est  $\omega_1$ , alors  $\alpha$  et  $\lambda$  n'apparaissent pas dans  $\omega_1$  de sorte que  $\alpha\lambda\omega_1$  doit être un cycle simple dans  $Q$  de longueur supérieure à 3. Mais alors, on obtient une contradiction au fait que les seuls cycles simples dans  $\Gamma$  sont des triangles. Donc  $\Gamma'$  ne peut contenir un cycle simple contenant à la fois  $\gamma$  et  $\gamma'$ . Ceci achève la preuve que les seuls cycles simples possibles dans le graphe  $\Gamma'$  sont des triangles, cycliquement orientés dans  $Q'$ .

(ii) Nous supposons à présent que le graphe  $\mathbb{D}_4 : \begin{array}{c} y \\ \searrow \quad \nearrow \\ x \quad z \quad t \end{array}$  est contenu dans  $\Gamma'$ , et nous affirmons que ce sous-graphe ne saurait être plein dans  $\Gamma'$ . Supposons le contraire. En vertu de l'hypothèse et de la définition 5.1.2-(b) on sait que  $\mathbb{D}_4$  ne peut être plongé comme un sous-graphe plein dans  $\Gamma$ .

Si  $k \neq z$ , alors puisqu'on a aussi en vertu du volet (i) ci-haut que  $\Gamma'$  ne contient aucun cycle simple de longueur supérieure à 3 et qu'en vertu de notre hypothèse supplémentaire  $\mathbb{D}_4$  est plein dans  $\Gamma'$ , il en résulte que  $k$ , peut-être voisin de  $z$ , est voisin d'au plus un seul point parmi les trois points  $x$ ,  $y$  et  $t$ . On peut donc supposer que  $k$  n'appartient pas au voisinages de  $x$  et de  $y$ . Alors la mutation au point  $k$  ne change pas

la forme des voisinages des points  $x$  et  $y$ , si bien que  $\Gamma$  contiendra aussi la copie suivante de  $\mathbb{D}_4$  comme sous-graphe plein :  $\begin{array}{c} y \\ \nearrow \\ x \end{array} \begin{array}{c} z \\ \longleftarrow \\ s \end{array}$  où  $s = k$  s'il existe une arête entre  $k$  et  $z$ , tandis que  $s = t$  dans le cas contraire. Mais la dernière est une contradiction.

Dans le cas où  $k = z$ ,  $Q'$  contiendra un sous-carquois valué plein ayant la forme suivante :  $\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} k \\ \longleftarrow \\ \bullet \end{array}$ .

Alors  $Q = \mu_k(Q')$  contiendra un sous-carquois valué plein ayant la forme suivante :  $\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} k \\ \longleftarrow \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \longleftarrow \\ \bullet \end{array}$ , contenant un cycle de longueur quatre dans  $\Gamma$  et contredisant le fait que  $\Gamma$  est triangle-décoré.

Ainsi notre affirmation est vraie, et ceci achève la preuve du lemme.  $\square$

**Lemme 5.1.7.** *Soit  $Q$  un carquois valué triangle-décoré de classe  $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n\}$  ayant  $n$  points. Alors  $Q \in \text{Mut}(\Delta)$ .*

*Démonstration.* On vient juste d'établir dans la proposition 5.1.5 que l'ensemble des carquois valués triangles-décorés de classe  $\Delta$  est stable par mutation. Il découle alors de Fig 5.1 que  $Q$  est 2-fini. Par conséquent  $Q$  est mutation-équivalent à un carquois valué de Dynkin qui est encore triangle-décoré de classe  $\Delta$ . D'où  $Q$  est mutation-équivalent à un carquois valué de Dynkin de type  $\Delta$ .  $\square$

Maintenant l'équivalence des énoncés (a), (b) et (c) du théorème de structure 5.1.1 s'obtient comme suit : L'équivalence de (b) et (c) est donnée par le lemme 5.1.4. Comme toute orientation d'un graphe valué de Dynkin  $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n\}$  est évidemment un carquois valué triangle-décoré de classe  $\Delta$ , l'implication "(a)  $\implies$  (b)" s'obtient par une simple récurrence en appliquant la proposition 5.1.5. Finalement l'implication "(b)  $\implies$  (a)" est donnée par le lemme 5.1.7 ci-dessus. Ceci établit l'énoncé (1) du théorème de structure 5.1.1.

Il reste à établir l'énoncé (2). Pour cela, pour un carquois valué triangle-décoré  $Q$ , nous désignerons par  $n_{\text{trg}}(Q)$  le nombre de triangles dans  $Q$  (sous-carquois pleins induits par des 3-cycles).

**Lemme 5.1.8.** *Soit  $Q$  un carquois valué quelconque. On suppose qu'il existe un entier  $t \in \mathbb{N}_*$  pour lequel  $Q$  contient un sous-carquois valué plein cycliquement orienté de la forme*

$$(\mathbb{T}_t) : \begin{array}{c} y \\ \nearrow \scriptstyle{c,d} \\ x \end{array} \begin{array}{c} k_1 \\ \longleftarrow \scriptstyle{c,d} \\ x \end{array} \longrightarrow k_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow k_{t-1} \longrightarrow k_t, \text{ avec } (c, d) \in \{(1, m), (m, 1) : m \in \mathbb{N}_*\},$$

tel que pour chaque entier  $s \in \{1, \dots, t\}$  le voisinage de chaque point  $k_s$  dans  $Q$  coïncide avec le voisinage de  $k_s$  dans  $(\mathbb{T}_t)$ . Alors, pour le carquois valué  $Q' = \mu_{k_t, \dots, k_1}(Q) := \mu_{k_t} \circ \dots \circ \mu_{k_1}(Q)$  on a la relation valide suivante :  $n_{\text{trg}}(Q') = n_{\text{trg}}(Q) - 1$ .

*Démonstration.* On procédera par récurrence sur l'entier naturel  $t$ . Notons d'abord que la condition imposée sur les points  $k_1, \dots, k_t$  montre que pour chaque  $s = 1, \dots, t$ , la mutation de  $Q$  en chaque point  $k_s$  modifie uniquement le sous-carquois valué  $(\mathbb{T}_t)$ . Si  $t = 1$ , alors le résultat est immédiat, car dans ce cas  $(\mathbb{T}_t)$  se réduit à un triangle cycliquement orienté et la mutation de  $Q$  au point  $k_1$  modifie uniquement le sous-carquois valué  $(\mathbb{T}_t)$  en un chemin plein de la forme  $x \xrightarrow{c,d} k_1 \longrightarrow y$  ou  $x \xleftarrow{c,d} k_1 \longleftarrow y$ .

Supposons donc le résultat vrai pour tout carquois valué  $Q''$  satisfaisant aux conditions du lemme pour tout entier  $l < t$ . Alors clairement, l'unique triangle de  $(\mathbb{T}_t)$  est cycliquement orienté et valué de telle sorte que, dans le carquois valué  $\mu_{k_1}(Q)$ , les points  $x$  et  $y$  ne sont plus adjacents et de plus,  $\mu_{k_1}(Q)$  contient un sous-carquois valué plein cycliquement orienté de la forme

$$(\mathbb{T}_{t-1}) : \begin{array}{c} & z & \\ \swarrow & & \searrow \\ k_1 & \xrightarrow{c', d'} & k_2 \end{array} \text{---} k_3 \text{---} \dots \text{---} k_{t-1} \text{---} k_t, \text{ avec } z \in \{x, y\} \text{ et } (c', d') \in \{(1, m), (m, 1) : m \in \mathbb{N}_*\},$$

tel que  $n_{\text{trg}}(Q) = n_{\text{trg}}(\mu_{k_1}(Q))$  et pour tout  $s \in \{2, \dots, t\}$  le voisinage de  $k_s$  dans  $\mu_{k_1}(Q)$  coïncide avec le voisinage de  $k_s$  dans  $(\mathbb{T}_{t-1})$ . Alors en vertu de l'hypothèse de récurrence, on obtient que,  $n_{\text{trg}}(Q') = n_{\text{trg}}(\mu_{k_1, \dots, k_2}(\mu_{k_1}(Q))) = n_{\text{trg}}(\mu_{k_1}(Q)) - 1 = n_{\text{trg}}(Q) - 1$ . Ce qui établit le résultat annoncé.  $\square$

Dans le lemme suivant, nous établissons l'énoncé (2) du théorème de structure 5.1.1.

**Lemme 5.1.9.** *Soit  $x_0$  un point fixé dans  $\Delta$ . Alors pour tout carquois valué  $Q \in \text{Mut}(\Delta)$  non-acyclique, il existe un entier  $t \in \mathbb{N}_*$  tel que  $Q$  contienne un sous-carquois valué plein cycliquement orienté de la forme*

$$(\mathbb{T}_t) : \begin{array}{c} & y & \\ \swarrow & & \searrow \\ x & \xrightarrow{c, d} & k_1 \end{array} \text{---} k_2 \text{---} \dots \text{---} k_{t-1} \text{---} k_t, \text{ avec } (c, d) \in \{(1, 1), (1, 2)(2, 1)\},$$

tel que pour chaque entier  $s \in \{1, \dots, t\}$ , on ait  $k_s \neq x_0$  et le voisinage de chaque point  $k_s$  dans  $Q$  coïncide avec le voisinage de  $k_s$  dans  $(\mathbb{T}_t)$ .

Par conséquent  $\text{Mut}(\Delta) = \text{Mut}_{/x_0}(\Delta)$

*Démonstration.* Soit  $Q \in \text{Mut}(\Delta)$  non-acyclique. En vertu de l'équivalence des énoncés (a) et (c) du théorème de structure 5.1.1,  $Q$  est cycliquement orienté et son graphe valué sous-jacent  $\Gamma$  est un sous-graphe valué fini pleinement enraciné de l'arbre triangle-décoré  $\mathbb{T}_\Delta$  de classe  $\Delta$ , et contenant au moins un triangle. Mais alors, on voit que pour chaque point  $x_0$  fixé arbitrairement dans  $\Delta \subset \mathbb{T}_\Delta$ , l'arbre triangle-décoré  $\mathbb{T}_\Delta$  contient toujours un sous-graphe valué plein de la forme  $(\mathbb{T}_t)$  tel que tous les points  $k_1, \dots, k_t$  soient dans  $\Delta_0 \setminus \{x_0\}$ . Il découle donc que  $(\mathbb{T}_t) \subset Q$  et satisfait à la même condition que dans  $\mathbb{T}_\Delta$ , établissant ainsi le premier volet de notre lemme. Comme chaque carquois valué  $Q$  dans  $\text{Mut}(\Delta)$  est triangle-décoré et comporte nécessairement un nombre fini de triangles, le second volet de notre lemme suit de ce qui précède, d'une application directe du lemme 5.1.8 et de la récurrence sur le nombre  $n_{\text{trg}}(Q)$  de triangles dans  $Q$ .  $\square$

## 5.2 Algèbres inclinées amassées de type $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n\}$

Mais pour le résultat principal de ce chapitre, nous aurons besoin de calculer une famille de représentants de tous les carquois modulés de type amassé pouvant apparaître comme carquois modulés des algèbres inclinées amassées de type  $\Delta \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n\}$ . Dans le cas des algèbres inclinées amassées de type  $\mathbb{B}_n$

ou de type  $C_n$ , on verra qu'on a seulement besoin de deux  $k$ -surcorps  $E$  et  $F$  dont l'un est une extension quadratique de l'autre. La caractérisation complète des extensions quadratiques de corps gauches apparaît dans [20], où une théorie de corps gauches et des anneaux à division est largement exposée.

Pour chaque  $k$ -surcorps  $L$ , le  $L$ -espace à gauche, le  $L$ -espace droite et le  $L$ -bimodule naturel induits par  $L$  sont respectivement notés  ${}_L L$ ,  $L_L$ ,  ${}_L L_L$ . Et pour chaque automorphisme  $\lambda \in \text{Aut}(L)$ , on définit le  $L$ -bimodule  $L_\lambda$  comme suit :  ${}_L(L_\lambda) = {}_L L$  comme  $L$ -espace à gauche, tandis qu'à droite, pour tous  $x \in L_\lambda$  et  $a \in L$  on a :  $x \cdot a = x\lambda(a)$ . On observe immédiatement qu'on a des identifications naturelles de  $L$ -bimodules

$$\begin{array}{ccc} {}_L L_\lambda := \text{Hom}_L(L_\lambda, {}_L L) & \longrightarrow & L_{\lambda^{-1}} \\ u \longmapsto & \longrightarrow & \lambda^{-1}(u(1)) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} L_\lambda^R := \text{Hom}_L(L_\lambda, L_L) & \longrightarrow & L_{\lambda^{-1}} \\ v \longmapsto & \longrightarrow & v(1) \end{array}$$

On obtient ainsi la paire dualisante et symétrisable de  $L$ -bimodule  $\{L_\lambda, L_{\lambda^{-1}}\} := \{L_\lambda, L_{\lambda^{-1}}; b_\lambda, b'_\lambda\}$  dont les deux formes bilinéaires associées

$$\begin{array}{c} {}_L L_\lambda \otimes L_{\lambda^{-1}} \xrightarrow{b_\lambda} L \text{ et } L_{\lambda^{-1}} \otimes L_\lambda \xrightarrow{b'_\lambda} L \text{ sont simplement données par :} \\ b_\lambda(a \otimes b) = a\lambda(b) \text{ et } b'_\lambda(c \otimes d) = c\lambda^{-1}(d), \text{ pour tous } a, b, c, d \in L. \end{array}$$

Clairement, les deux formes bilinéaires  $b_\lambda$  et  $b'_\lambda$  sont trivialement symétrisable sur  $k$ , il suffit de prendre une trace quelconque non nulle  $t : L \rightarrow k$ , puis définir la seconde trace  $t'$  par :  $t' = t \circ \lambda^{-1}$ ; alors pour tous  $a, b \in L$  on a :  $t(b_\lambda)(a \otimes b) = t(a\lambda(b)) = t(\lambda(b)a) = t(\lambda^{-1}(b\lambda^{-1}(a))) = t'(b'_\lambda)(b \otimes a)$ .

Ensuite, on considère un quadruplet  $(E, F, t, t')$  formé de deux  $k$ -surcorps  $E$  et  $F$  tels que  $F$  soit une extension de  $E$  de degré  $q \geq 2$ , et de deux morphismes traces non-dégénérées  $t \in \mathfrak{Tr}(E) \subset \text{Hom}_k(E, k)$  et  $t' \in \mathfrak{Tr}(F) \subset \text{Hom}_k(F, k)$  fixés. Alors pour chaque monomorphisme de corps  $E \xrightarrow{\lambda} F$ , on définit les bimodules  ${}_{E,\lambda} F \in {}_E \text{bimod}_F$  et  $F_{E,\lambda} \in {}_F \text{bimod}_E$  comme suit :

- En tant que  $F$ -espace à droite ou à gauche on a  $({}_{E,\lambda} F)_F = F_F$  et  ${}_F(F_{E,\lambda}) = {}_F F$ .
- La multiplication par les scalaires dans  $E$  est induite par  $\lambda$  comme suit : pour tous  $x, y \in {}_{E,\lambda} F$ ,  $a \in E$  on a :  $a \cdot x = \lambda(a)x$  et  $y \cdot a = y\lambda(a)$ .

On observe immédiatement qu'on a deux identifications naturelles de bimodules :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_F({}_{E,\lambda} F, F_F) & \longrightarrow & F_{E,\lambda} \\ u \longmapsto & \longrightarrow & u(1) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_F(F_{E,\lambda}, {}_F F) & \longrightarrow & {}_{E,\lambda} F \\ v \longmapsto & \longrightarrow & v(1) \end{array}$$

On définit alors la paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{{}_{E,\lambda} F, F_{E,\lambda}; b_E, b_F\}$  comme suit : l'une des deux formes bilinéaires non-dégénérées est juste la multiplication ordinaire de  $F$  donnée par,  $F_{E,\lambda} \otimes_E {}_{E,\lambda} F \xrightarrow{b_F = \langle \cdot \rangle} F$  avec  $b_F(x \otimes y) = \langle x \otimes y \rangle = xy$  pour tous  $x \in F_{E,\lambda}$  et  $y \in {}_{E,\lambda} F$ . L'autre forme bilinéaire est donnée par  ${}_{E,\lambda} F \otimes_F F_{E,\lambda} \xrightarrow{b_E = \langle \cdot \rangle} E$  avec  $b_E(a \otimes b) = \langle a \otimes b \rangle = \langle ab \otimes 1 \rangle = p_\lambda(ab)$ , pour tous  $a \in {}_{E,\lambda} F$  et  $b \in F_{E,\lambda}$  et où  $p_\lambda \in \text{Hom}_E({}_{E,\lambda} F, {}_E E)$  est l'unique morphisme  $E$ -linéaire à gauche induit par les traces  $t$  et  $t'$  tel que  $t \circ p_\lambda = t'$ . En effet, (en vertu du lemme 3.1.4) on sait déjà que les traces non-dégénérées  $t$  et  $t'$  induisent deux isomorphismes de bimodules,  $\text{Hom}_E({}_{E,\lambda} F, {}_E E) \xrightarrow[\sim]{\phi_t = t \circ \cdot} \text{Hom}_k({}_{E,\lambda} F, k)$  et  $\text{Hom}_F(F_{E,\lambda}, {}_F F) \xrightarrow[\sim]{\phi_{t'} = t' \circ \cdot} \text{Hom}_k(F_{E,\lambda}, k)$ . Alors partant

de l'identification  $\text{Hom}_F({}_{E,\lambda}F, F) \xrightarrow{\sim} F_{E,\lambda}$ ,  $u \longmapsto u(1)$  précédente, l'unité  $1 \in F_{E,\lambda}$  correspond à l'application F-linéaire  $\hat{1} \in \text{Hom}_F({}_{E,\lambda}F, F)$  tel que  $\hat{1}(x) = x$  pour tout  $x \in {}_{E,\lambda}F$ , on pose alors  $p_\lambda = (\phi_t)^{-1} \circ \phi_t(\hat{1})$ , si bien que  $t \circ p_\lambda(x) = t'(x)$  pour tout  $x \in {}_{E,\lambda}F$ . Par construction, les formes bilinéaires  $b_E$  et  $b_F$  sont symétrisables sur  $k$  via  $t$  et  $t'$ . En effet pour tous  $a \in {}_{E,\lambda}F$  et  $b \in F_{E,\lambda}$  on a :  $t(b_E(a \otimes b)) = t \circ p_\lambda(ab) = t'(ab) = t'(ba) = t'(b_F(b \otimes a))$ .

Dans toute la suite, pour deux  $k$ -surcorps  $E$  et  $F$  et pour tout monomorphisme (strict) de corps  $\alpha : E \longrightarrow F$ , on supposera (implicitement) dans chaque notation  ${}_{E,\alpha}F, F_{E,\alpha}$  que les morphismes traces  $t \in \mathfrak{T}r(E)$  et  $t' \in \mathfrak{T}r(F)$  ont été fixés, permettant la construction de la paire dualisante et symétrisable de bimodules  $\{{}_{E,\alpha}F, F_{E,\alpha}\}$ .

**Lemme 5.2.1.** Soient  $\lambda, \lambda' \in \text{Aut}(L)$  et  $\alpha, \alpha' : E \longrightarrow F$  deux monomorphismes de corps.

- (a) Il existe un isomorphisme  $f : L_\lambda \xrightarrow{\sim} L_{\lambda'}$  si et seulement si l'élément  $c = f(1)$  est non nul et tel qu'on ait  $\lambda'(a) = c^{-1}\lambda(a)c$  pour tout  $a \in L$  (si bien que  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont deux automorphismes conjugués de  $L$ ). Et si tel est le cas, l'isomorphisme dual de  $f$  relativement aux paires dualisantes  $\{L_\lambda, L_{\lambda^{-1}}\}$  est donné par  $f^* : L_{\lambda^{-1}} \xrightarrow{\sim} L_{\lambda'^{-1}}$  avec  $f^*(a) = a\lambda^{-1}(c)$ , si bien que son inverse  $f^{*-1} : L_{\lambda'^{-1}} \xrightarrow{\sim} L_{\lambda^{-1}}$  est déterminé par  $f^{*-1}(1) = \lambda^{-1}(c^{-1})$ .
- (b) Il existe un isomorphisme de bimodules  $f : {}_{E,\alpha}F \xrightarrow{\sim} {}_{E,\alpha'}F$  si et seulement si l'élément  $c = f(1)$  est non nul et tel qu'on ait  $\alpha'(e) = c\alpha(e)c^{-1}$  pour tout  $e \in E$  (si bien que  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont deux monomorphismes conjugués dans  $L$ ). Et si tel est le cas, l'isomorphisme dual  $f^* : F_{E,\alpha} \xrightarrow{\sim} F_{E,\alpha'}$  de  $f$  relativement aux paires dualisantes de bimodules  $\{{}_{E,\alpha}F, F_{E,\alpha}\}$  et  $\{{}_{E,\alpha'}F, F_{E,\alpha'}\}$  est donné par  $f^*(a) = ac$ , si bien que son inverse  $f^{*-1} : F_{E,\alpha'} \xrightarrow{\sim} F_{E,\alpha}$  est déterminé par  $f^{*-1}(1) = c^{-1}$ .

*Démonstration.*

**Énoncé (a).** Supposons qu'on a un isomorphisme de bimodules  $f : L_\lambda \xrightarrow{\sim} L_{\lambda'}$  et vérifions que  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont conjugués par  $c = f(1)$ . Soient  $a, x \in L$ , par définition on a :  $x \cdot a = x\lambda(a)$  dans  $L_\lambda$ , tandis que dans  $L_{\lambda'}$  on a que  $x \cdot a = x\lambda'(a)$ . On déduit alors que :  $\lambda(a)c = \lambda(a)f(1) = f(\lambda(a)) = f(1 \cdot a) = f(1) \cdot a = c\lambda'(a)$ , montrant alors que  $\lambda'(a) = c^{-1}\lambda(a)c$  pour tout  $a \in L$  et  $f$  est l'unique isomorphisme F-linéaire à gauche déterminé par  $f(1) = c$ . Pour la réciproque, si  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont deux automorphismes conjugués, de sorte qu'il existe  $c' \in L$  avec  $\lambda'(a) = c'^{-1}\lambda(a)c'$  pour tout  $a \in L$ , alors l'isomorphisme L-linéaire à gauche  $f' : L_\lambda \xrightarrow{\sim} L_{\lambda'}$ , déterminé par  $f'(1) = c'$ , doit être d'après ce qui précède un isomorphisme de L-bimodules. En effet pour la linéarité à droite, on voit que pour tous  $x, a \in L$  on a :  $f'(x \cdot a) = f'(x\lambda(a)) = x\lambda(a)f'(1) = x\lambda(a)c' = xc'(c'^{-1}\lambda(a)c') = f'(x)\lambda'(a) = f'(x) \cdot a$ . Ceci complète le premier volet de (a).

Pour le second volet de (a) considérons les formes bilinéaires  $L_\lambda \otimes L_{\lambda^{-1}} \xrightarrow{b_\lambda} L$  et  $L_{\lambda'} \otimes L_{\lambda'^{-1}} \xrightarrow{b_{\lambda'}} L$  où pour chaque  $\gamma \in \{\lambda, \lambda'\}$  on a  $b_\gamma(a \otimes b) = a\gamma(b)$  et pour tous  $a, b \in L$ . Or l'isomorphisme dual  $f^* : L_{\lambda'^{-1}} \xrightarrow{\sim} L_{\lambda^{-1}}$  d'un isomorphisme  $f : L_\lambda \xrightarrow{\sim} L_{\lambda'}$  est défini par la propriété qui suit :  $b_\lambda(a \otimes f^*(b)) = b_{\lambda'}(f(a) \otimes b)$  pour tous  $a, b \in L$ . Ainsi on a :  $\lambda(f^*(1)) = b_\lambda(1 \otimes f^*(1)) = b_{\lambda'}(f(1) \otimes 1) = c\lambda'(1) = c$ , si bien que  $f^*(1) = \lambda^{-1}(c)$  et donc  $f^*(a) = af^*(1) = a\lambda^{-1}(c)$ , et par suite  $f^{*-1}(1) = \lambda^{-1}(c^{-1})$ .

**Énoncé (b).** Supposons avoir un isomorphisme de bimodule  $f : {}_{E,\alpha}F \xrightarrow{\sim} {}_{E,\alpha'}F$  et posons  $c = f(1)$ .

Pour tous  $e \in E$  et  $x \in F$ , par définition on sait que,  $e \cdot x = \alpha(e)x$  dans  ${}_{E,\alpha}F$ , tandis que dans  ${}_{E,\alpha'}F$  on a que  $e \cdot x = \alpha'(e)x$ . On déduit alors les égalités qui suivent dans  ${}_{E,\alpha'}F$  :  $\alpha'(e)c = e \cdot f(1) = f(e \cdot 1) = f(\alpha(e)) = f(1)\alpha(e) = c\alpha(e)$ , montrant alors que  $\alpha'(e) = c\alpha(e)c^{-1}$  pour tout  $e \in E$  et  $f$  est donc le morphisme  $F$ -linéaire à droite déterminé par  $f(1) = c$ . Pour la réciproque, s'il existe  $c' \in F$  non nul tel que  $\alpha'(e) = c'\alpha(e)c'^{-1}$  pour tout  $e \in E$ , alors d'après ce qui précède l'unique isomorphisme  $F$ -linéaire à droite  $f' : {}_{E,\alpha}F \longrightarrow {}_{E,\alpha'}F$ , déterminée par  $f'(1) = c'$ , doit être un isomorphisme de bimodules.

Il reste vérifier que le second volet de (b) tient aussi. Pour les deux paires dualisantes de bimodules  $\{{}_{E,\alpha}F, F_{E,\alpha}\}$  et  $\{{}_{E,\alpha'}F, F_{E,\alpha'}\}$ , en utilisant les formes bilinéaires  $F_{E,\alpha} \otimes_E {}_{E,\alpha}F \xrightarrow{b_F} F$  et  $F_{E,\alpha'} \otimes_E {}_{E,\alpha'}F \xrightarrow{b'_F} F$  avec  $b_F(x \otimes y) = xy$  et  $b'_F(x \otimes y) = xy$  pour tous  $x, y \in F$ , le dual  $f^*$  de  $f$  a la propriété suivante :  $b_F(f^*(a) \otimes b) = b'_F(a \otimes f(b))$  pour tous  $a, b \in F$ . On obtient alors que :  $f^*(a) = b_F(f^*(a) \otimes 1) = b'_F(a \otimes f(1)) = af(1) = ac$ .  $\square$

**Lemme 5.2.2.** *On suppose que  $E, F$  et  $L$  sont des  $k$ -surcorps et  $(q, q') \in \{(1, m), (m, 1)\}$  tels que  $q' \dim_k(E) = q \dim_k(F)$  et  $\lambda \in \text{Aut}(F)$ .*

- (a) *Pour tous  $\alpha, \alpha' \in \text{Aut}(F)$ , une application  $f : F_\alpha \otimes F_\lambda \longrightarrow F_{\alpha'}$  induit un isomorphisme entre la paire dualisante produit  $\{F_\alpha \otimes F_\lambda, F_{\lambda^{-1}} \otimes F_{\alpha^{-1}}\}$  et la paire dualisante  $\{F_{\alpha'}, F_{\alpha'^{-1}}\}$  si et seulement si l'élément  $c = f(1 \otimes 1) \in F$  est non nul tel  $\alpha'(a) = c^{-1}(\alpha \circ \lambda(a))c$  pour tout  $a \in F$ . Et si tel est le cas, l'isomorphisme dual  $f^* : F_{\alpha'^{-1}} \longrightarrow F_{\lambda^{-1}} \otimes F_{\alpha^{-1}}$  est donné par  $f^*(a) = a(\alpha\lambda)^{-1}(c)(1 \otimes 1)$  pour tout  $a \in F$ , si bien que son inverse  $f^{*-1} : F_{\lambda^{-1}} \otimes F_{\alpha^{-1}} \xrightarrow{\sim} F_{\alpha'^{-1}}$  est déterminé par  $f^{*-1}(1 \otimes 1) = (\alpha\lambda)^{-1}(c^{-1})$ .*
- (b) *On suppose que  $\alpha, \alpha' : E \longrightarrow F$  sont deux monomorphismes de corps. Alors une application  $g : {}_{E,\alpha}F \otimes_F F_\lambda \longrightarrow {}_{E,\alpha'}F$  induit un isomorphisme entre la paire dualisante produit  $\{{}_{E,\alpha}F \otimes_F F_\lambda, F_{\lambda^{-1}} \otimes_F F_{E,\alpha}\}$  et la paire dualisante  $\{{}_{E,\alpha'}F, F_{E,\alpha'}\}$  si et seulement si l'élément  $c = g(1 \otimes 1) \in F$  est non nul tel que  $\alpha'(e) = c(\lambda^{-1} \circ \alpha(e))c^{-1}$  pour tout  $e \in E$ . Et si tel est le cas, l'isomorphisme dual  $g^* : F_{E,\alpha'} \xrightarrow{\sim} F_{\lambda^{-1}} \otimes_F F_{E,\alpha}$  est donné par  $g^*(a) = ac(1 \otimes 1)$ , si bien que son inverse  $g^{*-1} : F_{\lambda^{-1}} \otimes_F F_{E,\alpha} \xrightarrow{\sim} F_{E,\alpha'}$  déterminé par  $g^{*-1}(1 \otimes 1) = c^{-1}$ .*
- (c) *On suppose que  $\beta, \beta' : F \longrightarrow L$  sont deux monomorphismes de corps. Alors une application  $h : L_{F,\beta} \otimes_F F_\lambda \longrightarrow L_{F,\beta'}$  induit un isomorphisme entre la paire dualisante produit  $\{L_{F,\beta} \otimes_F F_\lambda, F_{\lambda^{-1}} \otimes_F F_{\beta}L\}$  et la paire dualisante  $\{L_{F,\beta'}, F_{\beta'}L\}$  si et seulement si l'élément  $c = h(1 \otimes 1) \in L$  est non nul tel que  $\beta' = c(\beta\lambda)(a)c^{-1}$  pour tout  $a \in F$ . Et si tel est le cas, l'isomorphisme dual  $h^* : F_{\beta'}L \xrightarrow{\sim} F_{\lambda^{-1}} \otimes_F F_{\beta}L$  est donné par  $h^*(x) = h^*(1)x = (1 \otimes 1)cx$ , si bien que son inverse  $h^{*-1} : F_{\lambda^{-1}} \otimes_F F_{\beta}L \xrightarrow{\sim} F_{\beta'}L$  est déterminé par  $h^{*-1}(1 \otimes 1) = c^{-1}$ .*

**Démonstration.** Durant la preuve, on garde pour chacun des énoncés (a), (b), (c) les notations et hypothèses du lemme. Rappelons aussi que pour deux  $k$ -surcorps  $k_1$  et  $k_2$  et pour deux  $k_1$ - $k_2$ -bimodules  $M$  et  $N$ , un isomorphisme entre deux paires dualisantes  $\{M, M^*\}$  et  $\{N, N^*\}$  est une paire  $(u, u^*)$  induite par un isomorphisme de bimodules  $u : M \xrightarrow{\sim} N$ , avec  $u^* : N^* \xrightarrow{\sim} M^*$  le morphisme dual correspondant à  $u$ .

**Énoncé (a).** Commençons par voir qu'on a un isomorphisme canonique de bimodules

$f_{\alpha\lambda} : F_\alpha \otimes F_\lambda \xrightarrow{\sim} F_{\alpha\lambda}$  envoyant  $a(1 \otimes 1)$  sur  $a$ . En effet par définition  $f_{\alpha\lambda}$  est linéaire à gauche et pour tout  $a \in F$  on a :  $(1 \otimes 1) \cdot a = 1 \otimes \lambda(a) = 1 \cdot \lambda(a) \otimes 1 = \alpha(\lambda(a))(1 \otimes 1)$ , si bien que  $f_{\alpha\lambda}(1 \otimes 1) \cdot a = \alpha(\lambda(a)) = 1 \cdot a = f_{\alpha\lambda}(1 \otimes 1) \cdot a$ . Ainsi,  $F_\alpha \otimes F_\lambda$  est canoniquement isomorphe à  $F_{\alpha\lambda}$ , si bien que le premier volet de (a) est une conséquence immédiate du lemme 5.2.1-(a). Le second volet est aussi une application directe de la définition des formes bilinéaires accompagnant le produit de paires dualisantes (voir lemme 3.1.5). En effet l'une des deux formes bilinéaires attachées à la paire dualisante produit  $\{F_\alpha \otimes F_\lambda, F_{\lambda^{-1}} \otimes F_{\alpha^{-1}}\}$  est donnée par  $(F_\alpha \otimes F_\lambda) \otimes (F_{\lambda^{-1}} \otimes F_{\alpha^{-1}}) \xrightarrow{b_{\alpha\lambda}} F$  avec  $b_{\alpha\lambda}(a \otimes b \otimes x \otimes y) = b_\alpha(a \otimes b_\lambda(b \otimes x)y) = a \cdot \alpha(b \cdot \lambda(x)y)$  pour tous  $a, b, x, y \in F$ . Posons  $f^*(1) = c_0(1 \otimes 1)$ , alors en utilisant aussi la forme bilinéaire  $F_{\alpha'} \otimes F_{\alpha'^{-1}} \xrightarrow{b_{\alpha'}} F$  attachée à la paire dualisante de bimodules  $\{F_{\alpha'}, F_{\alpha'^{-1}}\}$ , on obtient les égalités qui suivent :  $(\alpha\lambda)(c_0) = b_{\alpha\lambda}(1 \otimes 1 \otimes f^*(1)) := b_{\alpha'}(f(1 \otimes 1) \otimes 1) = c\alpha'(1) = c$ . Ainsi  $\alpha\lambda(c_0) = c$  si bien que  $c_0 = (\alpha\lambda)^{-1}(c)$ . Donc  $F_{\alpha'^{-1}} \longrightarrow F_{\lambda^{-1}} \otimes F_{\alpha^{-1}}$  est bien donné par  $f^*(a) = a(\alpha\lambda)^{-1}(c)$ .

**Énoncé (b).** Pour le premier volet de (b), en appliquant le lemme 5.2.1-(b) il suffira d'observer qu'on a un isomorphisme canonique de bimodules  $\phi : {}_{E,\alpha}F \otimes_F F_\lambda \xrightarrow{\sim} {}_{E,\lambda^{-1}\alpha}F$  donné par  $\phi((1 \otimes 1) \cdot a) = a$ . En effet, pour tous  $e \in E$  et  $a \in F$  on a :  $e \cdot (1 \otimes 1) \cdot a = \alpha(e) \otimes 1 \cdot a = 1 \otimes \alpha(e) \cdot a = (1 \otimes 1) \cdot (\lambda^{-1}(\alpha(e))a)$ , si bien que,  $\phi(e \cdot (1 \otimes 1) \cdot a) = \lambda^{-1}(\alpha(e))a = e \cdot \phi(1 \otimes 1) \cdot a$ . Pour le second volet de (b) il reste à vérifier que  $g^*$  est bien donné par  $g^*(a) = ac(1 \otimes 1)$ . En effet pour la paire dualisante  $\{{}_{E,\alpha}F \otimes_F F_\lambda, F_{\lambda^{-1}} \otimes_F F_{E,\alpha}\}$ , l'une des deux formes bilinéaires associées est donnée par  $(F_{\lambda^{-1}} \otimes_F F_{E,\alpha}) \otimes ({}_{E,\alpha}F \otimes_F F_\lambda) \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} F$  avec  $\langle a \otimes b \otimes x \otimes y \rangle := \langle a \otimes \langle b \otimes x \rangle \cdot y \rangle = b'_\lambda(a \otimes bxy) = a\lambda^{-1}(bxy)$  pour tous  $a, b, x, y \in F$ . Posant  $g^*(1) = c_0(1 \otimes 1)$  et en utilisant aussi la forme bilinéaire  $F_{E,\alpha'} \otimes_{E,\alpha'} F \xrightarrow{b'_F} F$  on obtient que :  $c_0 = \langle (c_0 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \rangle = \langle g^*(1) \otimes (1 \otimes 1) \rangle := \langle 1 \otimes g(1 \otimes 1) \rangle = \langle 1 \otimes c \rangle = b'_F(1 \otimes c) = c$ . Ainsi, pour tout  $a \in F$  on a bien que  $g^*(a) = ag^*(1) = ac(1 \otimes 1)$ , complétant alors la preuve de (b).

**Énoncé (c).** Pour le premier volet de (c) on commence par observer qu'on a un isomorphisme canonique de bimodules  $\phi' : L_{F,\beta} \otimes_F F_\lambda \xrightarrow{\sim} L_{F,\beta\lambda}$  donné par  $\phi'(x(1 \otimes 1)) = x$ . En effet, pour tous  $x \in L$  et  $a \in F$  on a :  $x(1 \otimes 1) \cdot a = x(1 \otimes \lambda(a)) = x(1 \cdot \lambda(a) \otimes 1) = x\beta(\lambda(a))(1 \otimes 1)$ , si bien que dans  $L_{F,\beta\lambda}$  on a,  $\phi'(x(1 \otimes 1) \cdot a) = x\beta(\lambda(a)) = x \cdot a = x\phi'(1 \otimes 1) \cdot a$ . Ainsi  $\phi'$  est un isomorphisme de bimodules, et appliquant le lemme 5.2.1-(b) on obtient le premier volet de (c). Pour le second volet de (c) il reste à vérifier que  $h^* : {}_{F,\beta'}L \xrightarrow{\sim} F_{\lambda^{-1}} \otimes_{F,\beta}L$  est donné par  $h^*(x) = h^*(1)x = cx$ . Pour la paire dualisante  $\{L_{F,\beta} \otimes_F F_\lambda, F_{\lambda^{-1}} \otimes_{F,\beta}L\}$ , l'une des deux formes bilinéaires associées est donnée par  $(L_{F,\beta} \otimes_F F_\lambda) \otimes (F_{\lambda^{-1}} \otimes_{F,\beta}L) \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} F$  avec  $\langle x \otimes a \otimes b \otimes y \rangle := \langle x \otimes \langle a \otimes b \rangle \cdot y \rangle = b_L(x \otimes a\lambda(b)y) = xa\lambda(b)y$  pour tous  $x, y \in L$  et  $a, b \in F$ . Posant  $h^*(1) = (1 \otimes 1)c_0 = 1 \otimes c_0$  et en utilisant aussi la forme bilinéaire  $L_{F,\beta'} \otimes_{F,\beta'} L \xrightarrow{b'_L} L$  on obtient :  $c_0 = \lambda(1)c_0 = \langle (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes c_0) \rangle = \langle (1 \otimes 1) \otimes h^*(1) \rangle = b'_L(h(1 \otimes 1) \otimes 1) = h(1 \otimes 1) = c$ . Ainsi, pour tout  $x \in L$  on a bien que  $h^*(x) = h^*(1)x = (1 \otimes 1)cx$ , complétant alors la preuve de (c).  $\square$

Rappelons que par *modulation 2-acyclique* on entend une modulation  $\mathfrak{M}$  indexée sur un ensemble fini

de points  $I$ , telle que pour chaque paire non-ordonnée de points  $i, j \in I$  on a au plus un bimodule non nul attaché à la paire  $i, j$ .

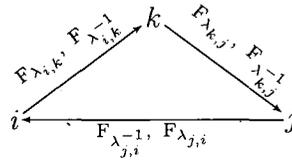
**Définition 5.2.1.**  $I$  étant fixé, soient  $E$  et  $F$  deux  $k$ -surcorps et  $(a, b) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ . Alors on note  $\mathfrak{M}_{a,b}(E, F)$  la famille des  $k$ -modulations symétrisables 2-acycliques  $\mathfrak{M}$  dont la famille  $(k_i, \mathfrak{t}_i)_{i \in I}$  des  $k$ -surcorps  $k_i$  et des formes traces non-dégénérées  $\mathfrak{t}_i \in \text{Hom}_k(k_i, k)$  appartenant à  $\mathfrak{M}$  et la famille des paires dualisantes et symétrisables de bimodules dans  $\mathfrak{M}$  tombent dans l'une des trois catégories suivantes.

- (A) Si  $a = 1 = b$  alors  $E = F = k_i$  pour tout  $i \in I$ ; la paire dualisante et symétrisable de bimodules attachée à chaque paire  $i, j \in I$  est soit nulle, soit de la forme  $\{F_{\lambda_{i,j}}, F_{\lambda_{i,j}^{-1}}\}$  avec  $\lambda_{i,j} \in \text{Aut}(F)$ .
- (B) si  $(a, b) = (1, 2)$  alors  $F$  est une extension quadratique de  $E$ , il existe un point fixé  $r \in I$  appelé racine avec  $k_r = E$  (c'est le  $k$ -surcorps racine de  $\mathfrak{M}$ ), et pour tout  $i \neq r$  on a  $k_i = F$ . Pour chaque  $k \neq r$ , la paire dualisante et symétrisable de bimodules attachée à la paire  $r, k$  est soit nulle soit de la forme  $\{E_{\lambda} F, F_{E, \lambda}\}$  pour un monomorphisme de corps  $\lambda = \lambda_{r,k} : E \rightarrow F$ . Et pour chaque paire  $i, j \in I \setminus \{r\}$  la paire dualisante associée est comme dans (A).
- (C) Si enfin  $(a, b) = (2, 1)$  alors  $E$  est une extension quadratique de  $F$ , il existe un point fixé  $r \in I$  appelé (co)racine et le  $k$ -surcorps (co)racine étant encore  $k_r = E$ , tandis que pour tout  $i \neq r$  on a  $k_i = F$ . Pour chaque  $k \neq r$ , la paire dualisante et symétrisable de bimodules attachée à la paire  $r, k$  est soit nulle soit de la forme  $\{F_{\lambda} E, E_{F, \lambda}\}$  pour un monomorphisme de corps  $\lambda = \lambda_{r,k} : F \rightarrow E$ . Et pour  $i, j \in I \setminus \{r\}$  la paire dualisante associée est comme dans (A).

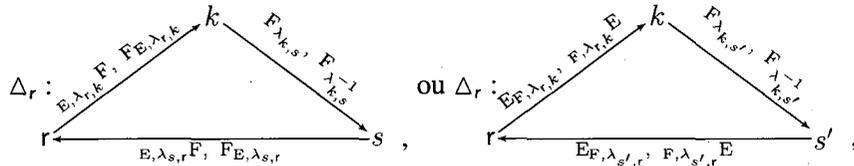
Rappelons que pour chaque paire dualisante de bimodules  $\{M, M^*\}$  avec  $M \in {}_E \text{bimod}_F$  pour deux  $k$ -surcorps  $E$  et  $F$ , si on désigne par  $M \otimes M^* \xrightarrow{b_E} E$  et  $M^* \otimes M \xrightarrow{b_F} F$  les deux formes bilinéaires attachées à la paire  $\{M, M^*\}$ , alors les morphismes duals correspondants sont notés  $E \xrightarrow{\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{M \otimes M^*} = b_E} M \otimes M^*$  et  $F \xrightarrow{\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}'_{M^* \otimes M} = b_F} M^* \otimes M$ . Et relativement à une paire arbitraire  $\{Y, Y^*\}$  de bases mutuellement duales où  $Y$  est une  $F$ -base droite pour  $M$  et  $Y^* = \{y^* : y \in Y\}$  est la base duale correspondante pour  $M^*$ , on a :  $\mathfrak{z} \equiv \mathfrak{z}(1) = \sum_{y \in Y} y \otimes y^*$ ; de même relativement à une paire arbitraire  $\{X, X^*\}$  de bases mutuellement duales où  $X$  est une  $E$ -base gauche pour  $M$  et  $X^* = \{x^* : x \in X\}$  est la base duale correspondante pour  $M^*$ , on a :  $\mathfrak{z}' \equiv \mathfrak{z}'(1) = \sum_{x \in X} x^* \otimes x$ . Pour chaque carquois modulé triangle-décoré  $\mathcal{Q}$  avec  $\mathcal{Q}_0 = I$ , on pose  $\text{trg}(\mathcal{Q})$  l'ensemble de tous les triangles dans  $\mathcal{Q}$ , où ici un *triangle* dans  $\mathcal{Q}$  est un sous-carquois modulé plein de  $\mathcal{Q}$  induit par un 3-cycle dans  $\mathcal{Q}$  (et donc les permutations cycliques d'un 3-cycle induisent un même triangle).

**Définition 5.2.2.** Soit  $\Delta \in \{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}\}$ , alors un carquois modulé  $\mathcal{Q}$  est *amassé de classe  $\Delta$*  s'il vérifie les conditions (c $\Delta$ 1) et (c $\Delta$ 2) ci-après.

- (c $\Delta$ 1) La modulation de  $\mathcal{Q}$  est dans  $\mathfrak{M}_{a,b}(E, F)$  pour deux  $k$ -surcorps  $E$  et  $F$ , avec  $(a, b) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ , et le carquois valué sous-jacent  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{Q}$  est dans  $\text{Mut}(\Delta)$ , c'est-à-dire  $\mathcal{Q}$  est triangle-décoré de classe  $\Delta$ .
- (c $\Delta$ 2) Les triangles dans  $\mathcal{Q}$  sont *compatibles avec la mutation amassée* dans le sens qu'on a les relations suivantes : Pour tout triangle trivialement valué



on a  $\lambda_{j,i} = \lambda_{k,j}^{-1} \circ \lambda_{i,k}^{-1}$ . Et si  $(a, b) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$  et le point (co)racine  $r$  se trouve sur un triangle de l'une des deux formes suivantes avec  $k_r = E$ ,



alors selon le cas on a l'une des deux relations :  $\lambda_{s,r} = \lambda_{k,s}^{-1} \circ \lambda_{r,k}$  ou  $\lambda_{s',r} = \lambda_{r,k} \circ \lambda_{k,s}$ .

Enfin, pour décrire tous les carquois modulés avec potentiels des algèbres inclinées amassées de type  $\Delta \in \{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}\}$ , nous posons la définition suivante.

**Définition 5.2.3.** Soit  $\Delta \in \{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}\}$ . Alors on note  $\mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$  la famille des *carquois modulés avec potentiels de classe  $\Delta$*  dont chaque membre  $(\mathcal{Q}, m)$  est tel que  $\mathcal{Q}$  soit amassé de classe  $\Delta$  et la condition supplémentaire (c $\Delta$ 3) suivante soit vérifiée.

(c $\Delta$ 3) Le potentiel  $m$  est donné par la somme  $m = \sum_{\Delta \in \text{trg}(\mathcal{Q})} m_{\Delta}$  des potentiels rigides attachés aux triangles dans  $\mathcal{Q}$  et décrits comme suit :

- ▷ Si  $\Delta$  est trivialement valué avec  $\Delta_0 = \{i, k, j\}$  comme dans la condition (c $\Delta$ 2), alors fixant un point dans  $\Delta$ , par exemple le point  $i$ , on pose  $m_{\Delta} = m_{\Delta,i} = 1 \otimes 1 \otimes 1 \in F_{\lambda_{i,k}} \otimes F_{\lambda_{k,j}} \otimes F_{\lambda_{j,i}}$ .
- ▷ Si  $\Delta = \Delta_r$  est donné par le triangle modulé à gauche en (c $\Delta$ 2), alors fixant le point racine  $r \in \Delta_r$  on pose  $m_{\Delta} = m_{\Delta,r} = 1 \otimes 1 \otimes 1 \in E_{\lambda_{r,k}} F \otimes F_{\lambda_{k,s}} \otimes F_{E, \lambda_{s,r}}$ .
- ▷ Finalement si  $\Delta = \Delta_r$  est donné par le triangle modulé à droite en (c $\Delta$ 2), alors fixant le point (co)racine  $r \in \Delta_r$  on pose  $m_{\Delta} = m_{\Delta,r} = 1 \otimes 1 \otimes 1^* + i \otimes 1 \otimes i^* \in E_{F, \lambda_{r,k}} \otimes F_{\lambda_{k,s'}} \otimes F_{\lambda_{s',r}} E$ , où  $\{1, i\}$  est une  $F$ -base droite de  $E_{F, \lambda_{r,k}}$  et de  $E_{F, \lambda_{s',r}}$  tandis que  $\{1^*, i^*\}$  la  $F$ -base duale correspondante pour  $F_{\lambda_{s',r}} E$  avec  $\lambda_{s',r} = \lambda_{r,k} \circ \lambda_{k,s'}$ .

Avec les notations de la définition 5.2.3 précédente, on rappelle que  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, m)$  désigne l'algèbre jacobienne associée au carquois modulé avec potentiel rigide  $(\mathcal{Q}, m) \in \mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$ ,  $m = \sum_{\Delta \in \text{trg}(\mathcal{Q})} m_{\Delta}$  étant le potentiel rigide primitif sur  $\mathcal{Q}$  décrit par la condition (c $\Delta$ 3) et donné comme somme des potentiels rigides associés aux triangles dans  $\mathcal{Q}$ .

Nous soulignons que pour le résultat principal de ce chapitre,  $k$  est un corps commutatif quelconque non nécessairement parfait, la réduction des carquois modulés avec potentiels s'appliquera pour la famille  $\mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$  car nous ferons des mutations évitant le point racine.

**Théorème 5.2.3.** Soient  $\tilde{\mathcal{A}} = k\mathcal{Q}/R$  une algèbre de carquois modulé lié et  $\Delta \in \{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}\}$ . Alors  $\tilde{\mathcal{A}}$  est inclinée amassée de type  $\Delta$  si et seulement  $\mathcal{Q}$  est triangle-décoré amassé de classe  $\Delta$  et  $\tilde{\mathcal{A}} \cong \mathcal{J}(\mathcal{Q}, m)$  où  $(\mathcal{Q}, m) \in \mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$ .

### Preuve du théorème 5.2.3

La preuve du théorème 5.2.3 est une conséquence directe du lemme 5.2.4 ci-dessous et du théorème de structure 5.1.1. En appliquant le lemme 5.2.4, voyons comment on dérive le théorème 5.2.3. En vertu du théorème de structure 5.1.1, la (co)racine  $r$  étant fixée dans  $\Delta$  (si  $\Delta = \mathbb{A}_n$  on peut se passer de la racine), on sait que  $\text{Mut}(\Delta) = \text{Mut}_{/r}(\Delta)$ , où  $\text{Mut}_{/r}(\Delta)$  est l'ensemble des carquois valués obtenus par les mutations successives des orientations de  $\Delta$  en évitant de muter à la racine. Il s'ensuit que toutes les algèbres inclinées amassées de type  $\Delta$  s'obtiennent à partir des algèbres héréditaires de type  $\Delta$  par des mutations successives évitant le point racine  $r$ . Or à isomorphisme près, il est clair que chaque algèbre héréditaire de type  $\Delta$  est donnée par un carquois modulé avec potentiel acyclique  $(\Gamma, 0) \in \mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$ . Et comme le lemme 5.2.4 stipule que  $\mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$  est stable pour les mutations de carquois modulés avec potentiels, il en résulte qu'à isomorphisme près toutes les algèbres inclinées amassées de type  $\Delta$  sont exactement données par les algèbres Jacobiennes de carquois modulés avec potentiels appartenant à  $\mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$ , si bien que le théorème 5.2.3 est vrai. On a aussi utilisé le théorème 4.3.2 qui stipule que, si  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{J}(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}) = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)$  est inclinée amassée pour un objet inclinant amassé  $T$  dans une catégorie amassée  $\mathcal{C}$ , alors l'algèbre inclinée massée  $\mu_k(\tilde{\mathcal{A}}) := \text{End}_{\mathcal{C}}(\mu_k(T))$  est égale à l'algèbre jacobienne  $\mathcal{J}(\mu_k(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}))$  associée à la mutation du carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  (lorsque cette mutation est définie).

**Lemme 5.2.4.** *Soit  $\Delta \in \{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}\}$ . Alors pour tout  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}) \in \mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$  et pour tout point  $k$  dans  $\mathcal{Q}$  distinct de la racine, la réduction des carquois modulés avec potentiel s'applique à la semi-mutation  $\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  et le carquois modulé avec potentiel  $\mu_k(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  est encore dans  $\mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$  à isomorphisme près de carquois modulés avec potentiels.*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}) \in \mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$  et  $k$  un point de  $\mathcal{Q}$  distinct de la racine, on garde à l'esprit les notations des définitions 5.2.2 et 5.2.3 et aussi le fait que, si  $Q$  désigne le carquois valué sous-jacent de  $\mathcal{Q}$ , alors le carquois valué  $\mu_k(Q)$  est encore dans  $\text{Mut}(\Delta)$ , de plus il existe  $(a, b) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$  avec  $Q \in \mathfrak{M}_{a,b}(E, F)$  pour deux  $k$ -surcorps  $E$  et  $F$ .  $I = Q_0$  étant l'ensemble des points de  $\mathcal{Q}$  et  $K = \prod_{j \in I} k_j$ , notons  $B = kQ_1 = \bigoplus_{i,j \in I} {}_i B_j$  le bimodule de toutes flèches valuées dans  $\mathcal{Q}$ , (chaque paire dualisante  $\{{}_i B_j, {}_i B_j^*\}$  est décrite par la définition 5.2.2, et  ${}_i B_j$  est de dimension 1 à gauche ou à droite). On pose aussi  $\bar{e}_k = 1 - e_k = \sum_{i \in I, i \neq k} e_i$  où pour chaque  $i \in I$ ,  $e_i$  est l'unité du  $k$ -surcorps  $k_i \subset K$ .

On considère les sous-ensembles  $\text{In}(k) = k^- = \{i \in I : Q_1(i, k) \neq \emptyset\}$  et  $\text{Out}(k) = k^+ = \{j \in I : Q_1(k, j) \neq \emptyset\}$ . Chaque paire de points  $i \in \text{In}(k), j \in \text{Out}(k)$  détermine dans  $\mathcal{Q}$  un unique chemin valué  $\omega_{i,k,j} : i \xrightarrow{\alpha_{i,k}} k \xrightarrow{\alpha_{k,j}} j$  de longueur 2 via  $k$ . Et en vertu du théorème de structure 5.1.1, il existe au plus quatre chemins de longueur 2 via  $k$  et, parmi ces chemins, au plus deux sont pleins. De plus, si  $\omega_{i,k,j}$  n'est pas plein, alors  $k$  est sur un triangle cycliquement orienté  $\Delta_{i,k,j}$  dans  $\mathcal{Q}$ . On divise alors l'ensemble  $\text{In}(k) \times \text{Out}(k)$  en deux blocs disjoints  $I_{(k)}^2$  et  $\overline{I_{(k)}^2}$  définis comme suit :

$$\begin{aligned} I_{(k)}^2 &= \{(i, j) \in \text{In}(k) \times \text{Out}(k) : k \text{ est sur un triangle } \Delta_{i,k,j}\}, \text{ et} \\ \overline{I_{(k)}^2} &= \{(i, j) \in \text{In}(k) \times \text{Out}(k) : \omega_{i,k,j} \text{ est plein}\}. \end{aligned}$$

La décomposition correspondante pour le bimodule produit  $Be_k B = Be_k \otimes e_k B$  est donnée par  $Be_k B = M \oplus M'$  avec  $M = \sum_{(i,j) \in I_{(k)}^2} {}_i B_{kk} B_j$  et  $M' = \sum_{(i,j) \in \overline{I_{(k)}^2}} {}_i B_{kk} B_j$ . Rappelons que  $\text{trg}(\mathcal{Q})$  désigne l'ensemble de tous les triangles dans  $\mathcal{Q}$ ; on pose  $\text{trg}(k) \subset \text{trg}(\mathcal{Q})$  les triangles dans  $\mathcal{Q}$  contenant le point  $k$ , et  $\overline{\text{trg}}(k) := \text{trg}(\mathcal{Q}) \setminus \text{trg}(k)$ , d'après ce qui précède on a,  $\text{trg}(k) = \{\Delta_{i,k,j} : (i,j) \in I_{(k)}^2\}$  et on sait que

$$\mathfrak{m} = \sum_{\Delta \in \text{trg}(\mathcal{Q})} \mathfrak{m}_{\Delta} = \sum_{(i,j) \in I_{(k)}^2} \mathfrak{m}_{\Delta_{i,k,j}} + \overline{\mathfrak{m}} \text{ avec } \overline{\mathfrak{m}} = \sum_{\Delta \in \overline{\text{trg}}(k)} \mathfrak{m}_{\Delta}.$$

Maintenant, en vue d'exprimer  $\mathfrak{m}$  en utilisant un système droite de flèches et un système gauche de flèches pour  $\mathcal{Q}$ , et en se rappelant que  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}) \in \mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$  est décrit par la définition 5.2.3, on fixera un système droite de chemins  $Y_{(k)} = \{y_1, \dots, y_q\}$  pour  $M = \sum_{(i,j) \in I_{(k)}^2} {}_i B_{kk} B_j$  en suivant les lignes ci-après. Une  $k_k$ -base droite de  $Be_k$  est donnée et notée  ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Q}_1(-, k) = \bigcup_{i \in \text{In}(k)} {}_{\mathbb{R}}\mathcal{Q}_1(i, k)$  où, pour chaque  $i \in \text{In}(k)$ , on sait qu'une  $k_k$ -base droite  ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Q}_1(i, k) = \{y_{(i,k),1}, \dots, y_{(i,k),q_{i,k}}\}$  de  ${}_i B_k$  est formée, soit d'un seul élément (l'unité "1" du  $k$ -surcorps qui détermine le bimodule  ${}_i B_k \in \mathfrak{M}_{a,b}(E, F)$ ), soit de deux éléments (1,  $i$  comme dans le dernier volet de la condition (c $\Delta$ 3)). D'autre part la forme de  $\mathcal{Q}$  dans la définition 5.2.2 montre que  $k_k = k_j$  et le bimodule  ${}_k B_j$  est toujours de dimension 1 à droite et à gauche, et une base gauche-droite de  ${}_k B_j$  est donnée par l'unité du  $k$ -surcorps déterminant le bimodule  ${}_k B_j$  comme en (c $\Delta$ 3), (qu'on note indifféremment "1", ici dans la preuve on pourra aussi noter cette unité " $e_{k,j} := 1$ " si on veut mettre en évidence le bimodule  ${}_k B_j$ ). Ainsi,

$$Y_{(k)} := \bigcup_{(i,j) \in I_{(k)}^2} {}_{\mathbb{R}}\mathcal{Q}_1(i, k) {}_{\mathbb{R}}\mathcal{Q}_1(k, j) = \{y_{(i,k),t} \otimes 1 = y_{(i,k),t} \otimes e_{k,j} : (i,j) \in I_{(k)}^2, t = 1 \dots, q_{i,k}\}$$

est le système droite de chemins correspondant pour le bimodule

$$M = \sum_{(i,j) \in I_{(k)}^2} {}_i B_{kk} B_j; \text{ et sous forme compacte on écrit } Y_{(k)} = \{y_1, \dots, y_q\}.$$

Par ailleurs, pour chaque paire  $(i, j) \in I_{(k)}^2$  on sait qu'il existe (en vertu du lemme 5.2.2) un isomorphisme canonique de bimodules  $f_{i,j} : {}_i B_k \otimes {}_k B_j \xrightarrow{\sim} {}_j B_i^*$  envoyant  ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Q}_1(i, k) \otimes {}_{\mathbb{R}}\mathcal{Q}_1(k, j)$  sur une  $k_j$ -base droite  ${}_L\mathcal{Q}_1^*(i, j)$  de  ${}_j B_i^*$  (coïncidant en fait avec  ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Q}_1(i, k)$  puisque  $k_k = k_j$ ), et l'inverse  $f'_{i,j} := f_{i,j}^*{}^{-1} : {}_k B_j^* \otimes {}_i B_k^* \xrightarrow{\sim} {}_j B_i$  de l'isomorphisme dual de  $f_{i,j}$  envoie la base duale  ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Q}_1^*(k, j) \cdot {}_{\mathbb{R}}\mathcal{Q}_1^*(i, k) = \{1 \otimes y_{(i,k),1}^*, \dots, 1 \otimes y_{(i,k),q_{i,k}}^*\}$  sur la base duale  ${}_L\mathcal{Q}_1(j, i) := \{x_{(j,i),1}, \dots, x_{(j,i),q_{j,i}}\}$  de  ${}_L\mathcal{Q}_1(j, i)$  avec  $q_{j,i} = q_{i,k}$ . Ainsi suivant la famille des paires d'isomorphismes canoniques de bimodules mutuellement duals  $(f_{i,j}, f_{i,j}^*)_{(i,j) \in \text{In}(k) \times \text{Out}(k)}$ , le système dual  $Y_{(k)}^* = \{y_1^*, \dots, y_q^*\}$  de  $Y_{(k)}$  est envoyé sur l'union  $X_{(k)}$  de toutes les bases gauches  ${}_L\mathcal{Q}_1(j, i)$  avec  $(i, j) \in I_{(k)}^2$ , qu'on note aussi sous forme compacte par  $X_{(k)} := \{x_1, \dots, x_q\}$  avec  $x_s$  correspondant à  $y_s$  pour  $1 \leq s \leq q$ .

Alors la composante  $\mathfrak{m}_{\Delta_{i,k,j}}$  associée au triangle  $\Delta_{i,k,j} \in \text{trg}(k)$  s'exprime relativement aux systèmes de flèches et de chemins précédents par

$$\mathfrak{m}_{\Delta_{i,k,j}} = \sum_{t=1}^{q_{i,k}} y_{(i,k),t} \otimes 1 \otimes x_{(j,i),t} = \sum_{1 \leq s \leq q} y_s \otimes x_s, \\ y_s \in {}_{\mathbb{R}}\mathcal{Q}_1(i, k) \otimes \{1\}$$

où ici et comme déjà mentionné on écrit indifféremment  $1 = e_{k,j} \in {}_k B_j$  pour l'unité du  $k$ -surcorps déterminant le bimodule  ${}_k B_j$ . Avec les considérations précédentes, on a la décomposition suivante du potentiel  $\mathfrak{m}$ .

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{m} &= \mathfrak{m}_{(k)} + \bar{\mathfrak{m}} \text{ avec} \\ \mathfrak{m}_{(k)} &= \sum_{s=1}^q y_s \otimes x_s = \sum_{(i,j) \in \mathbb{I}_{(k)}^2} \sum_{t=1}^{q_{i,k}} y_{(i,k),t} \otimes e_{k,j} \otimes x_{(j,i),t} \in (Be_k B) \otimes B \\ \bar{\mathfrak{m}} &= \sum_{\Delta \in \text{trg}(\mathcal{Q})} \mathfrak{m}_{\Delta} \in \text{TK}(\bar{e}_k B \bar{e}_k) \end{aligned} \right\} (1.k)$$

Maintenant, une fois que les notations précédents ont été posées, pour la prochaine étape on veut examiner la semi-mutation  $\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}) = (\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q}), \tilde{\mu}_k(\mathfrak{m})) = (\tilde{\mathcal{Q}}, \tilde{\mathfrak{m}})$  du carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  au point  $k$ , en suivant les lignes de la définition 3.5.1. Et en vue d'appliquer la réduction des carquois avec potentiels à  $\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$ , on construira un autre carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}', \mathfrak{m}')$  tel que  $(\mathcal{Q}', \mathfrak{m}') \in \mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$  et  $\mathcal{J}(\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})) = \mathcal{J}(\mathcal{Q}', \mathfrak{m}')$  à une  $\mathfrak{p}$ -équivalence droite près (c'est à dire ici, un épimorphisme  $\pi : k(\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q})) \longrightarrow k\mathcal{Q}'$  tel que  $\ker(\pi) \subset J_{\tilde{\mu}_k(\mathfrak{m})}$  et  $\pi(\tilde{\mu}_k(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}'$ , comme l'exprime le théorème de réduction 3.4.4). Posons donc  $\tilde{B} := \tilde{\mu}_k(B)$  le bimodule des flèches valuées dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$ . Alors en suivant les différents points de la définition 3.5.1, le carquois modulé avec potentiel  $(\tilde{\mathcal{Q}}, \tilde{\mathfrak{m}})$  est décrit comme suit :

(i)  $\tilde{B} = \bar{e}_k B \bar{e}_k \oplus [Be_k B] \oplus ((Be_k)^* \oplus (e_k B)^*)$  où  $[Be_k B]$  coïncide avec le bimodule  $Be_k B$  avec la convention que, vus dans  $k\tilde{\mathcal{Q}}$ , les éléments de  $Be_k B$  sont de degré homogène 1 (pour chaque  $x \in Be_k$  et chaque  $y \in e_k B$ , l'élément  $x \otimes y = x \cdot y \in Be_k B$  est encore noté  $[xy]$  lorsqu'il est vu dans  $\tilde{B}$ ).

(ii)  $\tilde{\mathfrak{m}} = [\mathfrak{m}] + \mathfrak{z}_k$  où, comme en (i),  $[\mathfrak{m}]$  coïncide avec  $\mathfrak{m}$  mais vu dans  $k\tilde{\mathcal{Q}}$ , si bien qu'en prenant en compte (1.k) on a  $[\mathfrak{m}] = [\mathfrak{m}_{(k)}] + \bar{\mathfrak{m}}$ . Et  $\mathfrak{z}_k$  est donné par  $\mathfrak{z}_k = \mathfrak{z}_{(Be_k B) \otimes (Be_k B)^*}$ , si bien que suivant un système droite de flèches  ${}_R \mathcal{Q}_1$  pour  $B$  auquel est associé le système dual correspondant pour  $B^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_k &= \mathfrak{z}_{(Be_k B) \otimes (Be_k B)^*} = \sum_{y \in {}_R \mathcal{Q}_1(-, k), z \in {}_R \mathcal{Q}_1(k, -)} [yz] \otimes z^* \otimes y^* \\ &= \sum_{(i,j) \in \text{In}(k) \times \text{Out}(k), y \in {}_R \mathcal{Q}_1(i, k)} [y \otimes e_{k,j}] \otimes e_{k,j}^* \otimes y^*, \end{aligned}$$

où  $e_{k,j}$  et  $e_{k,j}^* = e_{j,k}$  sont tous deux égaux à l'unité du  $k$ -surcorps sous-jacent à la paire dualisante  $\{{}_j B_k, {}_j B_k^*\}$ .

(iii) Pour chaque paire  $(i, j) \in \overline{\mathbb{I}_{(k)}^2}$ , d'après ce qui précède on sait que dans  $\mathcal{Q}$  on a un unique chemin plein  $\omega_{i,k,j} : i \xrightarrow{\alpha_{i,k}} k \xrightarrow{\alpha_{k,j}} j$ , et alors dans  $\tilde{\mathcal{Q}} = \tilde{\mu}_k(\mathcal{Q})$  on a un triangle (plein)  $\Delta^* = \Delta_{j,k,i}^*$  et la composante  $\mathfrak{m}'_{\Delta^*}$  de  $\mathfrak{z}_k$  associée est illustrée comme suit,

$$\Delta^* = \Delta_{j,k,i}^* : \begin{array}{ccc} & k_k & \\ \swarrow \scriptstyle {}_i B_k, {}_i B_k^* & & \searrow \scriptstyle {}_k B_j, {}_k B_j^* \\ k_i & \xrightarrow{\scriptstyle [{}_i B_k \otimes {}_k B_j] \otimes \scriptstyle {}_k B_j^* \otimes \scriptstyle {}_i B_k^*} & k_j \end{array} \text{ avec } \mathfrak{m}'_{\Delta^*} = \mathfrak{z}_{0, [{}_i B_k \otimes {}_k B_j] \otimes ({}_k B_j^* \otimes {}_i B_k^*)}$$

Or en vertu du lemme 5.2.2 décrivant les isomorphismes d'un produit de paires dualisantes de bimodules

dans  $\mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$  vers un représentant dans  $\mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$ , si on note  $\Delta' = \Delta'_{j,k,i}$  le triangle modulé obtenu du triangle  $\Delta^* = \Delta^*_{j,k,i}$  ci-dessus en remplaçant la paire dualisante produit  $\{[_i B_k \otimes _k B_j] \quad _k B_j^* \otimes _i B_k^*\}$  par son représentant dans  $\mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$ , disons  $\{[_i B'_j, _i B_j'^*]\}$ , alors le triangle avec potentiel  $(\Delta^*, m_{\Delta^*})$  est naturellement isomorphe à un triangle avec potentiel  $(\Delta', m'_{\Delta'}) \in \mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$ . Ainsi, pour le carquois valué 2-acyclique  $Q' = \mu_k(Q) \in \text{Mut}(\Delta)$ , on considère le carquois modulé  $\mathcal{Q}' \in \mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$  dont le carquois valué sous-jacent est donné par  $Q'$  tandis que la modulation est décrite comme suit,

$$B' = kQ'_1 = \left( \bigoplus_{(i,j) \in \overline{I^2(k)}} B'_i \right) \oplus (Be_k)^* \oplus (e_k B)^* \oplus \bar{e}_k B \bar{e}_k \quad \text{et on a une identification}$$

$$\{[_i B_k \otimes _k B_j] \quad _k B_j^* \otimes _i B_k^*\} \cong \{[_i B'_j, _i B_j'^*]\} \quad \text{et } (\Delta^*, m_{\Delta^*}) \cong (\Delta', m'_{\Delta'}) \in \mathcal{Q}\text{pot}(\Delta) \quad \text{et} \quad (2.k)$$

$$\text{trg}(\mathcal{Q}') = \bigcup_{(i,j) \in \overline{I^2(k)}} \{\Delta'_{j,k,i}\} \cup \overline{\text{trg}}(k).$$

(iv) Enfin, pour chaque paire  $(i, j) \in I^2(k)$ , on sait que dans  $Q$  le chemin  $\omega_{i,j,k}$  n'est pas plein et  $k$  est sur un triangle cycliquement orienté  $\Delta = \Delta_{i,k,j}$ . La semi-mutation  $\tilde{\mu}_k$  transforme  $\Delta$  comme suit :

$$\Delta = \Delta_{i,k,j}: \quad \begin{array}{ccc} & k_k & \\ \nearrow^{[_i B_k, _i B_k^*]} & & \nwarrow^{[_k B_j, _k B_j^*]} \\ k_i & & k_j \\ \xleftarrow{[_j B_i^*, _j B_i]} & & \end{array} \xrightarrow{\tilde{\mu}_k} \begin{array}{ccc} & k_k & \\ \nearrow^{[_i B_k, _i B_k^*]} & & \nwarrow^{[_k B_j, _k B_j^*]} \\ k_i & & k_j \\ \xleftarrow{[_j B_i^*, _j B_i]} & & \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{[_i B_k k B_j], [_i B_k k B_j]^*} \\ \xrightarrow{[_j B_i^* k B_j], [_j B_i^* k B_j]^*} \end{array}$$

Ainsi, relativement aux systèmes de flèches et de chemins précédemment fixés, le potentiel 2-cyclique déterminé par la composante  $[m_{\Delta_{i,k,j}}]$  de  $m_{(k)}$  et le potentiel  $m_{\Delta_{j,k,i}^*} := \mathfrak{z}_{0,[_i B_k k B_j] \otimes (_k B_j^* \otimes _i B_k^*)}$  provenant de  $\mathfrak{z}_k$  et induit par le triangle  $\Delta^*_{j,k,i}$  dans  $\tilde{Q}$  sont donnés comme suit :

$$[m_{\Delta_{i,k,j}}] = \sum_{t=1}^{q_{i,k}} [y_{(i,k),t} \otimes e_{k,j}] \otimes x_{(j,i),t} \quad \text{et} \quad m_{\Delta_{j,k,i}^*} = \sum_{t=1}^{q_{i,k}} [y_{(i,k),t} \otimes e_{k,j}] \otimes v_{(i,j),t}$$

avec  $v_{(i,j),t} = e_{k,j}^* \otimes y_{(i,k),t}^* \in {}_R Q_1^*(k, j) \cdot {}_R Q_1^*(i, k) = \{1\} \otimes {}_R Q_1^*(i, k)$ .

Il découle alors des points (i), (ii), (iii), (iv) et de (1.k) que le potentiel  $\tilde{m}$  se décompose sous forme compacte comme suit,

$$\tilde{m} = [m] + \mathfrak{z}_k = \left( \sum_{s=1}^q [y_s] x_s + \sum_{s=1}^q [y_s] v_s \right) + m_{\text{red}} \quad \text{où} \quad m_{\text{red}} = \bar{m} + \mathfrak{z}'_k \quad \text{avec} \quad (3.k)$$

$$\bar{m} = \sum_{\Delta \in \overline{\text{trg}}(\mathcal{Q})} m_{\Delta}, \quad \text{et} \quad \mathfrak{z}'_k = \sum_{(i,j) \in \overline{I^2(k)}} m_{\Delta_{j,k,i}^*} \quad \text{avec} \quad v_s = 1 \otimes y_s^*, \quad 1 \leq s \leq q.$$

Donc la composante de degré 2 de  $\tilde{m}$  est  $\tilde{m}^{(2)} = \sum_{s=1}^q [y_s] x_s \in \tilde{B}_{\text{triv}} := \bigoplus_{(i,j) \in \overline{I^2(k)}} ([_i B_k k B_j]) \otimes _j B_i$  et clairement, la partie triviale  $(\tilde{B}_{\text{triv}}, \tilde{m}^{(2)})$  du carquois modulé avec potentiel  $(\tilde{Q}, \tilde{m})$  scinde, si bien qu'on peut appliquer le théorème de réduction 3.4.4 pour réduire  $(\tilde{Q}, \tilde{m})$ . En posant  $\tilde{B}_{\text{red}} = \tilde{B} / \tilde{B}_{\text{triv}}$ , (2.k) montre clairement qu'à un isomorphisme canonique près, la paire dualisante  $\{\tilde{B}_{\text{red}}, \tilde{B}_{\text{red}}^*\}$  coïncide avec la paire

dualisante  $\{B', B'^*\}$  définissant le carquois modulé  $\mathcal{Q}'$  et de plus,  $(\tilde{B}_{\text{red}}, \mathfrak{m}_{\text{red}})$  coïncide avec un carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}', \mathfrak{m}') \in \mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$ . Par ailleurs, la  $p$ -équivalence utilisée dans le théorème de réduction 3.4.4 est l'épimorphisme  $\pi : k(\tilde{\mu}_k(\mathcal{Q})) \longrightarrow T_K(\tilde{B}_{\text{red}}) \cong k\mathcal{Q}'$  tel que  $\ker(\pi)$  soit égal à l'idéal trivial associée à  $\tilde{\mathfrak{m}}$  et donné par  $I = J_{\tilde{\mathfrak{m}}}^{\text{triv}} = \langle \partial_{y_s} \tilde{\mathfrak{m}}, \partial_{x_s} \tilde{\mathfrak{m}}, : 1 \leq s \leq q \rangle$  et  $\pi|_{T_K(\tilde{B}_{\text{red}})} = 1$ . Mais clairement (3.k) et (1.k) montrent que  $\partial_{[y_s]} \tilde{\mathfrak{m}} = x_s + v_s$  et  $\partial_{x_s} \tilde{\mathfrak{m}} = [y_s]$ , si bien que  $\sum_{s=1}^q [y_s]x_s + \sum_{s=1}^q [y_s]v_s \in \ker(\pi)$  et donc  $\pi(\tilde{\mathfrak{m}}) = 0 + \mathfrak{m}_{\text{red}} \equiv \mathfrak{m}'$ .

On obtient donc que  $\mu_k(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}) = (\mathcal{Q}', \mathfrak{m}') \in \mathcal{Q}\text{pot}(\Delta)$ , établissant ainsi la validité du lemme 5.2.4.  $\square$

Signalons qu'en se restreignant un peu sur des corps parfaits, les résultats de ce chapitre donnent aisément la caractérisation des algèbres inclinées amassées de type  $\mathbb{F}_4$  au moyen des carquois modulés avec potentiels, cette caractérisation n'est pas incluse ici par manque d'espace et laissée comme un simple exercice au lecteur.

# Conclusion

Dans cette thèse nous avons abordé plusieurs thèmes et obtenu plusieurs résultats importants. Le premier donne l'existence (d'une version non-simplement lacée) des structures amassées pour les catégories 2-Calabi-Yau sur un corps commutatif quelconque  $k$ , et une première application réalise directement une large classe d'algèbres (et de sous-algèbres) amassées non-simplement lacées de type géométrique. Il serait intéressant de savoir ce qui se passe si on remplace le corps  $k$  par un anneau commutatif artinien  $\mathbb{k}$  et si on travaille sur les  $\mathbb{k}$ -catégories  $\mathcal{C}$  dans lesquelles l'algèbre d'endomorphisme de chaque objet dans  $\mathcal{C}$  est une algèbre d'Artin. Rappelons-nous que les structures amassées dans les catégories 2-Calabi-Yau, et en particulier dans les catégories amassées, apparaissent comme l'une des diverses catégorifications des algèbres amassées ou plus précisément des mutations. D'ailleurs, il existe actuellement d'autres travaux en cours pour la catégorification des algèbres amassées à l'intérieur des catégories monoïdales dans lesquelles le produit tensoriel remplace les sommes directes (voir par exemple la thèse de Gonçalo N. Tabuada : *Théorie homotopique des dg-catégories*). Et il s'avère que cette dernière approche permet de capturer de façon plus naturelle et plus fidèle la combinatoire sous-jacente aux algèbres amassées. Nous aimerions, dès que possible faire un tour de ce côté là.

Le deuxième thème abordé dans cette thèse concerne la généralisation des carquois avec potentiels et des mutations de carquois avec potentiels en introduisant les carquois modulés avec potentiel ainsi que leurs mutations. Le plus important résultat à ce sujet est donné par le théorème de réduction ou de décomposition des carquois modulés avec potentiels : il stipule qu'à une équivalence droite faible près et au moins lorsque le corps de base est parfait, tout carquois modulé avec potentiel  $(\mathcal{Q}, m)$ , dont la partie triviale  $(\mathcal{Q}_{\text{triv}}, m^{(2)})$  est non-nulle, peut être réduit à un carquois modulé avec potentiel dont la partie triviale est nulle et cette réduction préserve dans un certain sens les idéaux jacobiniens. Il découle de ce résultat qu'à une équivalence droite faible près, la mutation de carquois modulés avec potentiels est une opération involutive. Ces deux résultats généralisent ceux de [24] où Derksen, Weyman et Zelevinsky obtiennent la réduction et la mutation des carquois avec potentiels à une équivalence droite près. Bien que l'équivalence droite faible ait été suffisante pour manipuler les carquois modulés avec potentiels, une question qui mérite d'être soigneusement traitée est celle de savoir si pour les carquois modulés avec potentiels on peut raffiner l'équivalence droite faible en une équivalence droite tout court. D'autre part, dans [24] les auteurs abordent aussi l'étude des représentations de carquois avec potentiels, nous n'avons pas traité ce volet dans cette thèse et cela n'aurait d'ailleurs pas pu tenir ici avec tous les autres sujets que nous avons traités, surtout si on tient compte des

limitation imposées par le temps et par l'espace. Ainsi, la prochaine étape pourrait bien être l'étude des représentations de carquois modulés avec potentiels.

Avec l'introduction des carquois modulés avec potentiels, nous avons également pu généraliser les résultats de [11] dont les plus importants établissent les faits suivants : la description des algèbres jacobiennes de carquois modulés avec potentiels en utilisant les suites faiblement 2-presque scindées, la compatibilité entre la mutation des carquois modulés avec potentiels la mutation des objets inclinants amassés dans les catégories 2-Calabi-Yau ; une conséquence importante est que, au moins sur des corps parfaits, les algèbres inclinées amassées sont données comme algèbres jacobiennes de carquois modulés avec potentiels. En particulier, nous avons été capables de calculer plus explicitement les carquois modulés avec potentiels des algèbres inclinées amassées de type  $A, B, C$  ; et les techniques présentées dans cette thèse permettent aussi de calculer aisément les carquois modulés avec potentiels des algèbres inclinées amassées de type  $F_4$  et des types euclidien  $\tilde{B}$  et  $\tilde{C} \dots$ , nous n'avons pas inclu le cas de  $F_4$  par manque d'espace. On doit remarquer que, même dans le cas le plus simple d'une algèbre inclinée amassée  $\tilde{A}$  de type  $A$  (le carquois valué  $Q_{\tilde{A}}$  est mutation-équivalent à une orientation du graphe de Dynkin  $A_n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}_*$ ) sur un corps  $k$  non-algébriquement clos, le carquois modulé  $Q_{\tilde{A}}$  de  $\tilde{A}$  doit satisfaire à certaines relations de compatibilité même si les bimodules déterminant  $Q_{\tilde{A}}$  sont tous de dimension 1 sur un  $k$ -surcorps  $E$  (Définitions 5.2.3 et Théorème 5.2.3). Bien entendu, dans le cas simplement lacé, la caractérisation des algèbres inclinées amassées de types  $A, D, E_6, E_7$  et  $E_8$  est obtenue d'abord dans [13] en utilisant les carquois liés, puis dans [24] en utilisant les carquois avec potentiels.

Nous aimerions aussi mentionner que, dû à un manque d'espace, nous avons été obligé de couper la partie géométrique de cette thèse, donnant une réalisation géométrique des catégories  $m$ -amassées de types  $B$  et  $C$  comme  $\tau$ -catégories complètement graduées des mailles d'un carquois modulé défini à partir des dissections  $m$ -divisibles d'un polygone régulier, cela a été possible en faisant appel à la technique du pliage des carquois pour partir d'une réalisation géométrique déjà existante des catégories  $m$ -amassées de type  $A$ .

**Perspectives 5.1 (Autour de la catégorie amassée  $C_{(Q,m)}$ ).** Dans le cas simplement lacé, Claire Amiot a montré (dans sa thèse [1]) que la catégorie amassée  $C_{(Q,W)}$ , associée à un carquois avec potentiel Jacobi-fini, est Hom-finie 2-Calabi-Yau, et les algèbres jacobiennes des carquois avec potentiels apparaissent aussi comme algèbres inclinées 2-Calabi-Yau. Sous réserve que la conjecture 5.2 ci-dessous tienne, nous avons vu (Théorème 4.4.2) que la catégorie amassée  $C_{(Q,m)}$ , associée à un carquois modulé avec potentiel Jacobi-fini et généralisant la construction de Claire Amiot, est également Hom-finie 2-Calabi-Yau, et les algèbres jacobiennes des carquois modulés avec potentiels apparaissent elles aussi comme algèbres inclinées 2-Calabi-Yau. Par ailleurs, même dans le cas simplement lacé, on ne sait pas encore (Mai-Novembre 2009) si la catégorie  $C_{(Q,W)}$  possède toujours la fameuse structure amassée.

Ayant construit (en 4.4.2) une version non-simplement lacée de la dg-algèbre de Ginzburg ([34, sec 4.2]), nous avons posé la conjecture suivante :

**Conjecture 5.2.** Le cas particulier 4.4.1 du théorème de Bernhard Keller [50, 6.3] se généralise au contexte des carquois modulés : pour un carquois modulé avec potentiel  $(Q, m)$  où  $Q$  est fini et  $m$  est dans  $kQ$ , la

dg-algèbre généralisée  $\Gamma(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  est homologiquement lisse et 3-Calabi-Yau en tant que bimodule.

- Question 5.3.** (1) lorsque  $\mathcal{Q}$  est acyclique et  $k$  non parfait, la catégorie  $\mathcal{C}_{(\mathcal{Q}, 0)}$  est-elle encore exactement équivalente à  $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ ? Ou encore, est-il possible d'étendre le théorème de Keller-Reiten 4.4.3 lorsque  $k$  n'est pas nécessairement parfait?
- (2) Si  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  est jacobi-fini 2-acyclique et  $k \in \mathcal{Q}_0$ , la catégorie  $\mathcal{D}\Gamma(\mu_k(\mathcal{Q}, \mathfrak{m}))$  est-elle exactement équivalente à  $\mathcal{D}\Gamma(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  pour tout corps  $k$ ? Pour cette question, on peut supposer que  $k$  est parfait pour garantir que la réduction des carquois modulés avec potentiels soit toujours possible, si bien que l'existence de  $\mu_k(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  est aussi garantie.
- (3)  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})$  étant un carquois modulé avec potentiel jacobi-fini (avec  $\mathcal{Q}$  non-acyclique), la catégorie  $\mathcal{C}_{(\mathcal{Q}, \mathfrak{m})}$  possède-t-elle une structure amassée?

Dans le cas simplement lacé, Keller et Yang [52] préparent déjà une réponse positive à la question 5.3- (2) et ce, dans un cadre plus général. Il sera très intéressant de regarder la situation prenant aussi en compte le cas non-simplement lacé, même comme déjà signalé avant on aura besoin "d'adapter" au contexte des carquois modulés les nombreux outils existants pour le cas simplement lacé.

**Perspectives 5.4 (Vers une approche non-simplement lacée à la conjecture de périodicité).** Mentionnons qu'en utilisant une catégorification de nombreux invariants de la théorie des algèbres amassées par les catégories 2-Calabi-Yau dans [44, section 8], Bernhard Keller a tout récemment prouvé la conjecture de périodicité pour le cas simplement lacé (c'est-à-dire pour une paire  $(\Delta, \Delta')$  de deux diagrammes de Dynkin simplement lacés). On a donc ici toute une autre perspective à explorer, car il existe une version non-simplement lacée de la conjecture de périodicité, voir [53]. Fomin-Zelevinsky ont obtenu dans [29] un résultat partiel correspondant à une paire  $(\Delta, \mathbb{A}_1)$  où  $\Delta$  n'est pas nécessairement simplement lacé. Seulement et comme d'ailleurs mentionné très tôt dès l'introduction de cette thèse, plusieurs techniques et résultats de catégorification de divers aspects de la théorie des algèbres amassées ont été donnés dans le cas simplement lacé. Nous osons espérer qu'en fournissant dans ce travail une généralisation des potentiels, et en tenant compte des précieux liens qui existent déjà entre les catégories 2-Calabi-Yau et les algèbres amassées, plusieurs auteurs trouveront ici quelque motivation pour continuer la catégorification des invariants de la théorie des algèbres amassées qui nécessitent une généralisation pour inclure le cas non-simplement lacé. En effet la version non-simplement lacée de la conjecture de périodicité est encore ouverte (Mai-Novembre 2009)!

Bertrand Nguéfac  
 Sherbrooke, 17 novembre 2009  
 ng.bertd@yahoo.ca

# Bibliographie

- [1] Claire AMIOT. « *Sur les petites catégories triangulées* ». Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2008.
- [2] Ibrahim ASSEM. « Iterated Tilted algebras of types  $\mathbb{B}_n$  and  $\mathbb{C}_n$  ». *Carleton university Ottawa Ontario*, 84(2), October 1983.
- [3] Ibrahim ASSEM, Thomas BRÜSTLE et Ralf SCHIFFLER. « Cluster-tilted algebras as trivial extensions Bull ». *Bulletin of the London Mathematical Society*, 40(1) :151–162, 2008.
- [4] Ibrahim ASSEM, Daniel SIMSON et Andrej SKOWROŃSKI. *Elements of representation theory of associative algebras. I : Techniques of representation theory*. Numéro 65 dans *Lodon Mathematical Society student texts*. Cambridge University Press, 2006.
- [5] Maurice AUSLANDER et Idun REITEN. « DTr-periodic modules and functors ». Dans *Representation theory of algebras (Cocoyoc, 1994), CMS Conference Proceedings*, volume 18, pages 39–50. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [6] Michael BAROT, Christof GEISS et Andrei ZELEVINSKY. « Cluster algebras of finite type and positive symmetrizable matrices ». *Journal of the London Mathematical Society*, 73 :545–564, Jun 2006.
- [7] Raymundo BAUTISTA. « On irreducible maps ». *BULLETIN of the American Mathematical Society (N.S)*, 2(1) :177–180, January 1980.
- [8] D. J. BENSON. *Representation and Cohomology I : Basic representation theory of finite groups and associative algebras*. 0 521 361346. Cambridge University Press, 1991.
- [9] Raf BOCKLANDT. « Graded Calabi Yau algebras of dimension 3 ». *Journal of Applied and Pure algebra*, 212(1) :14–32, 2008.
- [10] Aslak Bakke BUAN, Osamu IYAMA, Idun REITEN et Jeanne SCOTT. « Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups ». *Compositio Mathematica*, 145 :1035–1079, 2009.
- [11] Aslak Bakke BUAN, Osamu IYAMA, Idun REITEN et David SMITH. « Mutation of cluster-tilting objects and potentials », September 2009.
- [12] Aslak Bakke BUAN, Robert J. MARSH, Marcus REINEKE, Idun REITEN et Gordana TODOROV. « Tiling Theory and Cluster Combinatorics ». *Advances in Mathematics*, 204(2) :572–618, 20 August 2006.

## BIBLIOGRAPHIE

- [13] Aslak Bakke BUAN, Robert J. MARSH et Idun REITEN. « Cluster-tilted algebras of finite representation type ». *Journal of Algebra*, 306(2) :412–431, 15 December 2006.
- [14] Theo BÜHLER. « Exact Categories », 2009.
- [15] Philippe CALDERO, Frédéric CHAPOTON et Ralf SCHIFFLER. « Quivers with relations arising from cluster ( $A_n$  case) ». *Transaction of the American Mathematical Society*, 358 :1347–1364, 2006.
- [16] Philippe CALDERO et Bernhard KELLER. « From triangulated categories to cluster algebras II ». *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 39(4) :983–1009, 2006.
- [17] Philippe CALDERO et Bernhard KELLER. « From triangulated categories to cluster algebras ». *Inventiones Mathematicae*, 172 :169–211, 2008.
- [18] Claude CIBILIS et Eduardo MARCOS. « Skew Categories and Galois Coverings and Smash product of a  $k$ -category ». *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134(1) :39–50, June 2005.
- [19] P. M. COHN. « Quadratic Extension of Skew Fields ». *Proceedings of the London Mathematical Society*, 11(3) :531–56, 1961.
- [20] P. M. COHN. *Skew fields theory of general division rings*. Numéro 57 dans *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1995. ISBN-13 : 9780521432177 | ISBN-10 : 0521432170.
- [21] Raika DEHY et Bernhard KELLER. « On the Combinatorics of Rigid objects in 2-Calabi-Yau categories ». *International Mathematics Research Notices*, 2008(rnn029) :17, April 2008.
- [22] Laurent DEMONET. « Algèbre amassée et algèbre préprojective : le cas non-simplement lacé ». *C.R. Acad. Sci. Paris*, 2008.
- [23] Bangming DENG et Jie DU. « Folding derived categories with Frobenius functors ». *Journal of Pure and applied Algebra*, 208 :1023–1050, March 2007.
- [24] Harm DERKSEN, Jersey WEYMAN et Andrei ZELEVINSKY. « Quivers with potentials and their representations I : Mutations ». *Selecta Mathematica, New Series*, 14(1) :59–119, 2008.
- [25] Vlastimil DLAB et Claus Michal RINGEL. « Indecomposable representations of graphs and algebra ». 6(173) :57, 1976.
- [26] Peter DRAXL. *Skew Fields*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, October 2007. ISBN-13 : 9780521272742.
- [27] Samuel EILENBERG et Tadasi NAKAYAMA. *On the dimensions of modules and algebras V. Dimensions of residue rings*, volume 11. Nagoya Mathematical Journal, 1957.
- [28] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY. « Cluster Algebras I : Foundations ». *Journal of the American mathematical society*, 15(2) :497–529, 2002.
- [29] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY. « Cluster algebras II : Finite type classification ». *Inventiones Mathematicae*, 154(1) :63–121, March 2003.

## BIBLIOGRAPHIE

- [30] Peter FREYD. « Stable homotopy ». *Proc. Conf. Categorical Algebra*, pages 121–172, 1966.
- [31] Changjian FU et Bernhard KELLER. « On cluster algebras with coefficients and 2-Calabi-Yau categories ». 2008.
- [32] Christof GEISS, Bernard LECLERC et Jan SCHRÖER. « Rigid modules over preprojective algebras II : The Kac-Moody case ». 49 pages.
- [33] Christoff GEISS, Bernard LECLERC et Jan SCHRÖER. « Rigid modules over preprojective algebras ». *Inventiones Mathematicae*, 165 :589–632, 2006.
- [34] Victor GINZBURG. « Calabi-Yau algebras ». *ResearchGate, Mendeley Research Networks*, 2007.
- [35] Dieter HAPPEL. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*. Numéro 119 dans London Mathematical Society lecture note series,. Cambridge, New York, Cambridge University Press, 1988.
- [36] Dieter HAPPEL. « Auslander-Reiten triangles in derived categories of finite dimensional algebras ». *Proceedings of the American Mathematical society*, 112(3) :641–648, July 1991.
- [37] Dieter HAPPEL et Luise UNGER. « Almost complete tilting modules ». *Proceedings of the American Mathematical society*, 107(3) :603–610, 1989.
- [38] Robin HARTSHORNE. *Residues and dualities*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1966.
- [39] Peter J. HILTON et Urs STAMMBACH. *A Course In Homological Algebra inconnu*, volume 4 de *Graduate Texts in Mathematics Series*. Springer-Verlag New York, 2 édition, 1997.
- [40] Kiyoshi IGUSA et Gordana TODOROV. « A Characterization of finite Auslander-Reiten quivers ». *Journal of Algebra*, 89(1) :148–177, 1984.
- [41] Osamu IYAMA. «  $\tau$ -categories I : Ladders ». *Springer*, 8(3) :297–321(25), August 2005.
- [42] Osamu IYAMA. « Higher dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories ». *Advances in Mathematics*, 210(1) :22–50, March 2007.
- [43] Osamu IYAMA et Yuji YOSHINO. « Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules ». *Inventiones Mathematicae*, 172(1) :117–168, April 2008.
- [44] Bernhard KELLER. « Cluster algebras, Quiver representations and Triangulated categories », July.
- [45] Bernhard KELLER. Derived categories and their uses. volume 1 de *Handbook of Algebra*, pages 671–701. North-Holland, 1996.
- [46] Bernhard KELLER. « On triangulated orbit categories ». *Documenta Mathematica*, 10 :551–581, 2005.
- [47] Bernhard KELLER. « On differential graded categories », 2006.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math/0601185>.
- [48] Bernhard KELLER. Derived categories and tilting. Dans *Handbook of tilting theory*, 332, Chapitre 5. London Mathematical Society Lectures Notes Series, 2007.

## BIBLIOGRAPHIE

- [49] Bernhard KELLER. Calabi-Yau triangulated categories. Dans Andrej SKOWROŃSKI, éditeur, *Trends in representation theory of algebras and related topics*, pages 467–489. European Mathematical Society, 2008.
- [50] Bernhard KELLER. « Deformed Calabi-Yau completions ». 26 August 2009.
- [51] Bernhard KELLER et Idun REITEN. « Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau ». *Advances in Mathematics*, 211 :123–151, 2007.
- [52] Bernhard KELLER et Dong YANG. « Derived equivalences from mutations of quivers with potential ». Rapport Technique arXiv :0906.0761, Jun 2009, Comments : 48 pages, with an appendix by B. Keller.
- [53] Atsuo KUNIBA et Tomoki NAKANISHI. « Spectra in Conformal Field Theories from the Rogers Dilogarithm ». *Mod. Phys. Ltt .A*, 7 :3487, 1992.
- [54] Tsit-Yuen LAM. *A First Course in Noncommutative Rings*. Graduate Texts in Mathematics : 131. Springer-Verlag, second édition, 1991.
- [55] Amnon NEEMAN. *Triangulated categories*. Numéro 148 dans Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 2001.
- [56] Steffen OPPERMANN. « *Auslander-Reiten Theory of Representation-Directed Artinian Rings* ». Thèse de doctorat, University Stuttgart, 2005.
- [57] Yann PALU. « Cluster characters for triangulated 2-Calabi-Yau categories ». *Annales de l'Institut Fourier*, 58(6) :2221–2248, 2008.
- [58] Idun REITEN et Michel Van den BERGH. « Noetherian hereditary abelian categories satisfying Serre duality ». *Journal of the American Mathematical society*, 15(2) :295–366, 2002.
- [59] Wolfgang RUMP. « Ladder functors with an application to representation-finite artinian rings ». *Analele Stiintifice Ale Universitatii "Ovidius" Constanta, Seria Matematica*, 9(1) :107–124, 2001.
- [60] Hugh THOMAS. « Defining an  $m$ -cluster category ». *Journal of Algebra*, 318(1) :37–46, December 2007.
- [61] Bin ZHU. « Equivalences between cluster categories ». *Journal of Algebra*, 304(2) :832–850, October 2006.