

**PLANIFICATION DE LA DISTRIBUTION DE L'ÉNERGIE
ÉLECTRIQUE AVEC DEMANDE INCERTAINE**

par

EMNA KALLEL

thèse présentée au département de mathématiques et d'informatique
en vue de l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D)

**FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE**

Sherbrooke, Québec, Canada, avril 2003



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*
ISBN: 0-612-94940-0
Our file *Notre référence*
ISBN: 0-612-94940-0

The author has granted a non-exclusive license allowing the Library and Archives Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

Le 8^è AVRIL 2003
Date

le jury a accepté la thèse de Mme Emna Kallel dans sa version finale.

Composition du jury

Membre : M. Abdelhamid Benchakroun (Direction)
Département de mathématiques et d'informatique

Membre : M. Jean-Pierre Dussault
Département de mathématiques et d'informatique

Membre externe : M. Henrique Pacca L. Luna
Universidade Federal de Minas Gerais

Membre et
président-rapporteur : M. Jean-Marc Belley
Département de mathématiques et d'informatique

*À mes parents, Mahmoud et Essia
en témoignage de mon amour
et de ma reconnaissance.*

*À mon mari Zied, à ma fille Khadija
à mes frères Hatem et Walid,
avec toute mon affection.*

SOMMAIRE

Dans cette thèse, nous considérons le problème de la planification de la distribution de l'énergie électrique avec demande incertaine.

Nous avons élaboré un modèle mathématique détaillé représentant les caractéristiques principales d'un réseau radial de distribution électrique.

Dans l'objectif du modèle et en plus des coûts d'installation et d'entretien des équipements (postes, lignes) et des coûts dus aux pertes de puissance dans les lignes, nous avons tenu compte du coût de "la pénalité" dûe à la non satisfaction de la demande.

Nous avons proposé une définition de ces coûts de pénalité ainsi qu'une procédure pour les évaluer.

Etant donnée la présence de deux types de variables réelles et entières dans notre modèle, nous avons choisi la méthode de décomposition de Benders comme approche de résolution. Le sous problème associé possède une structure particulière et donc sa résolution est assez simple. Dans le cas où ce problème est réalisable, nous avons proposé une façon efficace pour générer des coupes Paréto-optimales.

Pour résoudre le problème maître nous avons confronté à deux difficultés majeures: la non linéarité de la fonction économique et la forme implicite du coût de pénalité. Nous avons contourné la première difficulté par l'introduction d'une variable binaire, quant à la deuxième nous avons utilisé des notions de programmation mathématique ce qui nous a permis de trouver une formulation équivalente au problème maître relaxé plus simple à traiter. Pour résoudre ce problème équivalent, nous avons proposé deux approches de résolutions, la méthode de Branch-and-Bound et la relaxation lagrangienne.

Nous avons mis au point une version préliminaire d'un logiciel composé d'un programme écrit en C++ qui fait appel à Cplex pour résoudre le problème maître. Ce logiciel nous a permis de faire des tests numériques et valider l'approche de résolution.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer tout d'abord ma profonde reconnaissance à mon directeur de recherche, le Docteur Abdelhamid Benchakroun, qui m'a toujours fait confiance et qui a su m'encourager à surmonter les difficultés tant professionnelles que personnelles. Je tiens aussi à le remercier pour son appui scientifique et financier et pour sa grande disponibilité qui m'a été essentielle pour la progression de ma recherche.

Je remercie également les membres de jury pour leurs commentaires sur ce travail.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma gratitude à mes parents, Mahmoud Kallel et Essia Triki, pour leurs encouragements, leur patience et le soutien qu'ils m'ont apporté en toutes circonstances durant mes études.

Que mon mari, Zied Chtourou, trouve ici l'expression de mes sentiments, les meilleurs, pour sa compréhension et ses encouragements durant ce travail.

Je tiens à remercier mes amis Lobna et Mourad, Nadia et Hichem, Hajer et Mohamed pour leurs encouragements et leurs aides.

Enfin, je tiens à remercier tous mes collègues au Département de mathématiques et informatique, pour leur disponibilité et leur soutien.

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE	iii
REMERCIEMENTS	iv
TABLE DES MATIÈRES	v
LISTE DES FIGURES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 — Approches existantes	4
1.1 Introduction	4
1.2 Composantes d'un réseau de distribution	4
1.3 Approches existantes	5
1.3.1 Approches exactes	5
1.3.2 Approches heuristiques	10

1.4	Conclusion	13
CHAPITRE 2 — Construction du modèle		16
2.1	Problème à résoudre	16
2.2	Notation	19
2.2.1	Les constantes	19
2.2.2	Les paramètres	20
2.2.3	Les variables	21
2.2.4	La fonction économique	21
2.2.5	Les contraintes	22
2.3	Modèle	24
2.3.1	Définition de $c_p(y)$	25
CHAPITRE 3 — Approche de résolution: Méthode de Benders généralisée		28
3.1	Méthode de Benders Généralisée	29
3.2	Application au problème de la distribution de l'énergie électrique	34
3.3	Variante du modèle	38
3.3.1	Linéarisation de l'objectif	38
CHAPITRE 4 — Mise en œuvre de la méthode		42
4.1	Ajout des contraintes valides	42
4.1.1	Contraintes pour l'élimination des cycles	42

4.1.2	Contraintes favorisant la réalisabilité du sous problème	43
4.2	Résolution du sous problème	47
4.3	Détermination des coupes dans le cas où le sous problème est réalisable .	50
4.3.1	Méthode de Karush-Khun-Tucker	51
4.3.2	Coupes Paréto-optimales	54
4.3.3	Génération des coupes Paréto-optimales	55
4.3.4	Théorème[48]	57
4.4	Détermination des coupes dans le cas où le sous problème est non réalisable	61
4.5	Évaluation du coût de pénalité	64
4.5.1	Résolution du problème (\bar{P}, \bar{y})	64
4.6	Résolution du problème maître	65
4.6.1	Transformation du problème maître relaxé	66
4.6.2	Algorithme général de résolution	70
4.6.3	Résolution du problème maître relaxé équivalent	73
4.6.4	Résolution du dual lagrangien du problème maître	83
CHAPITRE 5 — Tests numériques		92
5.1	Le logiciel Cplex	92
5.2	Méthode de "Branch-and-Bound"	93
5.3	Programme principal	94
5.4	Problèmes liés aux chutes de tension	95

5.5	Élimination des circuits	96
5.6	Expérimentation	96
CHAPITRE 6 — Conclusion		108
ANNEXE A — Données des tests numériques		110
A.1	Exemple 1	110
A.2	Exemple 2	113
ANNEXE B — Méthode de Branch-and-cut		118
B.1	La méthode de branch-and-cut	118
B.1.1	Terminologie	120
B.1.2	La phase d'énumération	123
B.1.3	Calcul des bornes inférieures	128
B.1.4	Calcul des solutions réalisables	134
Bibliographie		143

LISTE DES FIGURES

5.1	Configuration initiale pour l'exemple 1	98
5.2	Configuration après une itération	98
5.3	Configuration après deux itérations	99
5.4	Configuration après trois itérations	99
5.5	Configuration après quatre itérations	100
5.6	Configuration après cinq itérations	100
5.7	Configuration finale pour exemple 1	101
5.8	Légende pour les configurations	101
5.9	Configuration initiale pour exemple 2	103
5.10	Configuration après une itération	103
5.11	Configuration après deux itérations	104
5.12	Configuration après trois itérations	104
5.13	Configuration après quatre itérations	105
5.14	Configuration finale pour l'exemple 2	105

5.15	Meilleure configuration pour le scénario 1	106
5.16	Meilleure configuration pour le scénario 2	106
B.1	Arbre de branch-and-cut.	121
B.2	Organigramme de branch-and-cut.	122

LISTE DES TABLEAUX

5.1	Résultats pour exemple1	97
5.2	Résultats pour exemple2	102
A.1	Distances	110
A.2	Demandes pour le scénario 1	111
A.3	Demandes pour le scénario 2	111
A.4	Coûts et capacités des transformateurs	111
A.5	Coûts-capacité-réactance et résistance des conducteurs	112
A.6	Coûts des pertes de puissance et des régulateurs	112
A.7	Coûts de pénalité des postes en millier de dollars par KVA	112
A.8	Coûts de pénalité des lignes en millier de dollars par KVA	112
A.9	Probabilité des scénarios	113
A.10	Distances	113
A.11	Demandes pour le scénario 1	114
A.12	Demandes pour le scénario 2	115

A.13 Coûts et capacités des transformateurs	115
A.14 Coûts-capacité-réactance et résistance des conducteurs	115
A.15 Coûts des pertes de puissance et des régulateurs	116
A.16 Coûts de pénalité des postes en millier de dollars par KVA	116
A.17 Coûts de pénalité des lignes en centaines de dollars par KVA	116
A.18 Probabilité des scénarios	117

INTRODUCTION

Lorsque l'on s'arrête à mesurer les changements survenus au cours de la dernière décennie et, à plus forte raison, au cours du siècle qui vient de s'achever, il est difficile de saisir le potentiel que l'électricité présente pour les années à venir. Vu le besoin vital d'une telle énergie, l'augmentation importante et continue du nombre d'abonnés, l'accroissement des coûts des équipements, il devient nécessaire de développer des modèles de plus en plus sophistiqués pour la planification de la distribution de l'énergie électrique.

L'énergie électrique peut être produite de plusieurs façons, que ça soit par des installations hydroélectriques, nucléaires, éoliennes ou solaires . . . Ces installations sont dans la plupart des cas situées dans des régions très éloignées. Les compagnies d'électricité sont alors appelées à construire des réseaux, de plus en plus complexes et sophistiqués, pour acheminer l'énergie électrique des sites de production jusqu'aux usagers. Ces réseaux peuvent être subdivisés en deux types: des réseaux de transport et des réseaux de distribution. Les réseaux de transport permettent d'acheminer l'électricité des lieux de génération jusqu'aux postes de distribution situés à proximité relative des utilisateurs; les réseaux de distribution, quant à eux, relient les postes de distribution aux abonnés.

Plusieurs équipes de recherches se sont penchées sur l'étude du problème global de transport et de distribution de l'énergie électrique. D'autres se sont limitées au problème de transport et d'autres se sont intéressées au problème de distribution seul. Ce travail s'inscrit dans cette dernière catégorie. En effet, nous nous limiterons à l'étude détaillée

des problèmes de planification de la distribution de l'énergie électrique.

Les travaux publiés sur ce sujet ont supposé la demande des abonnés comme donnée prévisible et certaine, ce qui, bien sûr simplifie le problème, mais ne reflète pas tout à fait la réalité. En effet, la prévision de la consommation d'électricité a toujours été et demeure encore une source importante et particulière d'**incertitude**. Dans cette thèse, nous nous intéressons au problème de la planification de la distribution de l'énergie électrique avec demande incertaine.

Le problème peut être décrit comme suit: on se donne un réseau de distribution électrique vu comme un ensemble d'arborescences dont les racines sont les postes (les sources), les noeuds sont des points de charge (points de réseau où il y a consommation d'électricité par des abonnés) et les arêtes sont des lignes conductrices qui servent à transporter l'énergie d'un point à un autre. Nous considérons que les demandes des points de charge sont **incertaines** et qu'il peut y avoir une erreur dans la prévision de ces demandes. Les coûts impliqués sont alors composés des coûts d'installations et d'entretien des équipements, des coûts dus à la perte de puissance et des coûts de "la pénalité" due à la non satisfaction de la demande. Notre but est de déterminer la meilleure stratégie qui permettrait d'étendre le réseau de façon à satisfaire les demandes à moindre coût.

La littérature fait état de plusieurs modèles, plus ou moins fidèles, des réseaux de distribution de l'énergie électrique ainsi que de différentes approches de résolution tant approchées qu'exactes. Le premier chapitre est consacré à un survol de la littérature déjà existante. Ceci nous permettra d'avoir une idée sur l'état de l'art et sur les principales approches utilisées dans le domaine.

Le deuxième chapitre est essentiellement consacré à la construction du modèle. Nous commençons, dans une première partie, par définir les constantes, les paramètres et les variables du problème, ensuite nous construisons la fonction économique et nous déterminons les contraintes du modèle. Dans une deuxième partie, nous présentons le modèle puis nous définissons la fonction de pénalité ainsi que son coût. Les variables

utilisées dans notre modèle sont de deux types: Des variables binaires et des variables continues. Cette nature mixte du problème nous a incité à opter pour la méthode de décomposition de Benders pour sa résolution. Au début du troisième chapitre nous exposons brièvement la méthode de résolution, ensuite, nous vérifions que notre modèle satisfait bien aux conditions requises pour l'approche de résolution choisie et enfin, nous présentons une variante à notre modèle.

Dans le quatrième chapitre, nous proposons, entre autre, l'ajout de contraintes valides à notre problème ainsi qu'une façon pour générer des coupes Paréto-optimales ce qui permet d'accélérer la convergence de l'algorithme. Dans ce chapitre, nous évaluons également la pénalité ainsi que son coût. Dans une dernière section, nous considérons la résolution du problème maître. La résolution de ce dernier présente des difficultés, en utilisant des notions de programmation mathématique, nous réussissons à contourner ces difficultés en construisant une formulation équivalente plus simple à traiter. Ensuite nous proposons notre algorithme qui pourrait être vu comme une variante de la méthode de décomposition de Benders. À la fin de ce chapitre, nous proposons deux méthodes pour résoudre le problème maître relaxé à savoir la méthode de Branch-and-Bound et la méthode de la relaxation lagrangienne.

Dans le dernier chapitre, nous développons une version préliminaire d'un logiciel d'aide à la décision pour la planification de la distribution de l'énergie électrique. Ce logiciel est composé d'un programme en C++ qui fait appel à Cplex. Ce logiciel nous permet de faire des tests numériques et valider notre approche de résolution.

CHAPITRE 1

Approches existantes

1.1 Introduction

Au cours des trois dernières décennies, plusieurs équipes de recherche se sont intéressées au problème de la planification de la distribution de l'énergie électrique. Plusieurs travaux ont été publiés sur ce sujet. Ces contributions proposent des modèles d'analyse plus ou moins complexes, ainsi qu'une variété d'approches de résolution.

Dans ce chapitre, nous commencerons par rappeler la définition des composantes d'un réseau de distribution de l'énergie électrique. Ensuite, nous passerons en revue les différents modèles proposés ainsi que les différentes approches de résolution existantes.

1.2 Composantes d'un réseau de distribution

Nous considérons les composantes suivantes: postes, points de charge, lignes, et régulateurs de tension

- Un poste fournit de l'énergie électrique par l'intermédiaire de transformateurs. Nous supposons qu'il existe différents types de transformateurs, chaque type pro-

duit une quantité d'énergie bien précise. Donc, la capacité totale d'un poste sera la somme des capacités des transformateurs qu'il contient.

- Un point de charge est un point de consommation d'énergie électrique (particulier, usine, ...). À chaque point de charge est associée sa demande: c'est la quantité d'énergie électrique utilisée pendant une période donnée.
- Les lignes servent à transporter l'électricité des postes aux usagers. Il existe plusieurs calibres différents. Plus le calibre d'une ligne est élevé, plus elle peut transporter d'électricité, moins il y a de perte de puissance, plus elle coûte chère.
- Les régulateurs de tension assurent le maintien d'une tension minimale dans les lignes. En effet, puisque la tension baisse pendant le transport, il sera alors nécessaire d'adjoindre des régulateurs de tension aux lignes; leur rôle est simplement de redresser la tension jusqu'à la tension nominale.

1.3 Approches existantes

Compte tenu de la complexité du problème de la planification de la distribution de l'énergie électrique, toutes les méthodes existantes énoncent un certain nombre de simplifications sur le problème avant d'entamer sa résolution. Ces approches de résolution peuvent être classées en deux catégories: des approches exactes et des approches heuristiques.

1.3.1 Approches exactes

Après simplification du problème, ces approches utilisent pour le résoudre, des méthodes exactes telles que l'algorithme du simplexe, l'algorithme de transport, la méthode de branch-and-bound ... Temraz et Quintana [21] ont fourni un bon aperçu de ces différentes

méthodes exactes.

Ces approches peuvent être divisées en trois catégories. Certaines se sont limitées au problème des postes, d'autres ont traité juste le problème des lignes, et finalement, un dernier groupe a attaqué le problème globale des postes et des lignes ensembles.

Le problème des postes

Ce problème consiste à déterminer les capacités à ajouter aux postes existants ainsi que les sites d'implantation et la capacité des nouveaux postes. Crawford et Holt [19] étaient les premiers à traiter ce problème, Thompson et Wall [20] ont présenté une approche nettement améliorée.

Pour déterminer le site et la capacité des postes futurs, Crawford et Holt [19] divisent la région à alimenter en secteurs "carrés" puis calculent la demande totale de chaque secteur et la distance à chaque poste potentiel en utilisant l'algorithme de Dijkstra. Leur modèle est un problème de transport résolu par l'algorithme de transport de Fulkerson. Les résultats obtenus aboutissent à une configuration de stations qui permet de minimiser les pertes de puissances dans les lignes et les coûts de construction. Cependant, ils ignorent le réseau existant et étudient le problème sur une seule période.

Thompson et Wall [20] tiennent compte des coûts d'installation des postes, des coûts de perte de puissance dans les lignes mais ne considèrent pas la possibilité de modifier la topologie des lignes. Ils formulent le problème comme un programme linéaire mixte. Pour le résoudre, ils développent une méthode de type "Branch and Bound" qui résout une suite de problèmes de transport en utilisant un code efficace pour trouver le site optimal des postes futurs.

Le problème des lignes

Ce problème s'occupe de la détermination de la topologie du réseau, du calibre et de la longueur des lignes ainsi que du flot entre les différents points de charges.

Adams et Laughon [30] sont les pionniers dans le domaine de la planification de la distribution de l'énergie électrique, ils ont proposé un modèle de programmation linéaire qui est resté longtemps le modèle mathématique le plus détaillé pour ce problème et qui a servi de point de départ à une formidable recherche dans le domaine. Dans ce modèle, les coûts impliqués sont des coûts d'installation des lignes et des coûts attachés aux pertes de puissance et les contraintes considérées sont les contraintes de conservation de flot, de capacité des conducteurs et des contraintes supplémentaires spécifiques aux circuits électriques.

La construction de leur modèle se fait en deux étapes:

- Premièrement, seuls les coûts fixes sont modélisés.
- Dans un deuxième temps, ils incluent les coûts des pertes de puissance: ils les expriment de façon quadratique en fonction du flot, ensuite, ils les approximent par une fonction linéaire par morceaux.

Pour résoudre ce problème, ils utilisent un logiciel de programmation linéaire mixte qu'ils appliquent à des réseaux de petite taille (un poste et quelques points de charge).

Notons que les contraintes de radialité et de chute de tension ne sont pas prises en considération dans le modèle, donc, il est clair que ce modèle ne représente que partiellement la réalité.

Wall et al. [18] simplifient l'approche précédente en ignorant les coûts d'investissement sur les lignes. Leur modèle est un problème de transbordement à coût linéaire. Pour le résoudre, ils utilisent l'algorithme du simplexe adapté aux problèmes de transport. Ils arrivent à traiter des problèmes de grande taille mais uniquement sur une seule période.

Approches globales

Ces approches s'occupent simultanément des deux aspects cités précédemment. Elles sont plus intéressantes que les précédentes et nous y retrouvons de nombreux développements

récents. Nous mentionnerons: Gonen et Floote [31], [32] Sun et al. [17], Fawzi et al. [34], El Kady [29], Ponnaivaikko et al. [28], Gonèn et Ramirez [33], Benchakroun [12], Partanen [22] et Carneiro [27].

Gonen et Floote [31] proposent un modèle permettant de déterminer, pour une seule période, les sites et les capacités des postes ainsi que le réseau des lignes. Ils modélisent les coûts fixes reliés aux postes et considèrent les coûts associés aux lignes (investissement, entretien et perte de puissance) comme une fonction qui n'est ni linéaire ni convexe. Une approximation linéaire est alors utilisée et le problème obtenu est un problème de programmation linéaire mixte résolu par le logiciel MPSX.

Malgré le fait que les contraintes sur les chutes de tension ne sont pas considérées dans le modèle, l'approche ne peut s'appliquer qu'à des réseaux de petite taille et ceci à cause du nombre élevé de variables 0-1 impliquées par l'approximation linéaire.

En 1982, ces mêmes chercheurs [32] donnent une variante au modèle précédent, une modification de la définition de la fonction coût associée aux lignes leur permet de considérer plusieurs périodes, mais encore une fois, la méthode ne peut s'appliquer qu'à des réseaux de petite taille.

La même année (82), Sun et al. [17] améliorent l'approche de Thompson et Wall [20] en modélisant les coûts fixes sur les postes et sur les lignes. Ils génèrent une solution pour l'année-horizon et obtiennent un schéma de croissance en examinant l'une après l'autre les années intermédiaires. Ils se trouvent à résoudre le problème d'un réseau à coûts fixes plutôt qu'un simple problème de transport linéaire et ceci à cause de l'importance des coûts fixes dans les lignes. Leur apport principal réside dans la méthode de résolution qu'ils proposent, cette dernière est de type "Branch and Bound", elle exploite la structure du réseau pour effectuer de façon efficace l'évaluation et la séparation lors du processus de résolution.

En 1983, Fawzi et al. [34] raffinent le modèle précédent. Ils utilisent des fonctions linéaires par morceau pour modéliser les coûts reliés aux postes et aux lignes. Leur processus de

résolution se déroule en deux étapes: au début, seuls les coûts dominants (coûts des postes et éventuellement de certaines lignes) sont considérés. Pour trouver une solution au problème relaxé, ils utilisent un algorithme de type "Branch and Bound", ensuite ils introduisent les coûts principaux par un processus itératif afin d'ajuster la solution trouvée à l'étape 1.

En 1984, El Kady [29] présente un modèle plus global que les modèles précédents. En effet, en plus de modéliser les coûts fixes et les variables associés aux postes et aux lignes, il inclut dans son modèle les contraintes de chute de tension et tient compte implicitement de la radialité du réseau. Pour assurer la linéarité de son modèle, il utilise une approximation linéaire des coûts des pertes de puissance dans les lignes (même technique qu'Adams et Laughon) et il remplace les contraintes de chute de tension par des contraintes linéaires. Son programme linéaire mixte est résolu par une méthode de type "Branch and Bound". Le modèle est très raffiné mais ne peut traiter que des réseaux de petite taille à cause de l'approximation linéaire.

En 1987, Ponnaivaiko et al. [28] décident de traiter le problème par un programme quadratique (ne pas faire d'approximation linéaire). Ils relaxent les contraintes d'intégralité sur les variables de décision et résolvent le problème en utilisant la méthode de Wolfe. Les variables de décision sont alors simplement arrondies à la valeur la plus proche.

La même année (1987), Gonen et Ramirez [33] proposent un modèle pleinement dynamique. Ils observent que le calibre optimal des lignes est principalement déterminé par les coûts de perte de puissance tandis que la topologie du réseau est déterminée par les coûts fixes. Dans leur modèle, ils tiennent compte des coûts des pertes de puissances dans les lignes, mais ne prennent pas en considération les coûts d'entretien et les coûts de perte de puissance dans les postes. De plus, ils remarquent dans leur cas que la linéarisation des coûts des pertes n'augmente pas la dimension de leur modèle. Ils résolvent le problème par le logiciel MPSX (pour des réseaux de petite taille).

En 1990, une approche due à Partanen [22] est présentée, elle concerne le renforcement

du réseau existant, soit par l'augmentation du calibre d'un conducteur, soit par la construction d'un poste, soit par la construction de nouvelles lignes. Pour couvrir tout l'horizon de prédiction, Partanen utilise la programmation dynamique. Malheureusement, l'algorithme présente des limitations: le processus ne peut pas traiter tout le réseau en même temps (il doit faire ligne par ligne) et cela nécessite beaucoup de temps. En 1991 Benchakroun et al. [15] présentent un modèle de distribution d'énergie électrique très sophistiqué qui tient compte de toutes les composantes du problème. Leur modèle est un problème mixte non linéaire. Ils ont réussi à construire un problème, dont les contraintes sont linéaires, équivalent à leur modèle original. Ils traitent ce problème équivalent par l'approche de décomposition de Benders généralisée.

Et c'est en 1993 que Carneiro et al. [27] présentent un modèle non linéaire mixte capable de traiter des problèmes de grande taille qu'ils résolvent par une méthode de type "Branch and Bound". Cependant, ils n'incluent pas les contraintes de chute de tension et de radialité dans leur modèle. Pour surmonter cette difficulté, ils utilisent une heuristique simple pour rendre le réseau radial et une autre heuristique pour améliorer le réseau radial (dans le cas où la contrainte de chute de tension n'est pas satisfaite).

1.3.2 Approches heuristiques

À cause de la complexité de notre problème, plusieurs heuristiques ont été proposées pour résoudre ce problème. Nous mentionnerons les approches qui nous paraissent les plus intéressantes. En particulier, nous nous attarderons sur celles de Benchakroun [13], de Chen et Hsu [23], d'Aoki et al. [24], de Nara et al. [25], de Quintana et al. [35] et finalement de Blanchard et al. [26].

Méthode SOLREA: Benchakroun (88)

C'est une heuristique utilisée pour trouver une solution réalisable de départ pour la méthode de décomposition de Benders. Elle consiste premièrement à partir du réseau

original, à attribuer la demande maximale aux points de charge puis à détacher les points de charges dont la demande ne pourra pas être satisfaite et enfin à alimenter un à un les points de charges isolés en débitant à chaque fois le meilleur poste disponible.

Système expert: Chen et Hsu (89)

Il incorpore des règles heuristiques utilisées par des planificateurs humains pour la résolution d'un problème d'assignation de charge dans l'expansion d'un réseau. Ces règles sont de type: "Si un poste est utilisé à plus de 90% de sa capacité, assigner certains de ses points de charges à un autre poste" ou "Si une ligne supporte plus de 6300 Kva, assigner des points de charges à une autre ligne". Ces règles sont utilisées en conjonction avec des algorithmes simples, l'un déterminant la configuration du réseau qui entraîne le moins de pertes de puissance, l'autre la configuration du réseau qui entraîne les coûts d'investissement les moins élevés. Le système présente une liste des dix meilleurs réseaux selon chacun de ces deux algorithmes et l'utilisateur effectue le choix final.

Échange de branches: Aoki et al. (90)

Aoki et al. [24] utilisent un algorithme appelé "échange de branches" pour obtenir une solution approchée sur une seule période. Leur algorithme est le suivant: ils commencent avec une configuration radiale, puis ils ajoutent une ligne pour former un cycle, ensuite ils enlèvent une autre ligne pour obtenir la réalisabilité (c'est la ligne ayant un coût d'installation élevé ou une contrainte violée). Si cet échange aboutit à une amélioration, ils le gardent, sinon, ils l'abandonnent. Ils répètent cette procédure d'une façon itérative jusqu'à ce que la fonction ne peut plus s'améliorer.

Échange de branches: Nara et al. (91)

Nara et al. (91) étendent l'algorithme précédent à un algorithme d'approximation sur plusieurs périodes. L'algorithme est basé aussi sur le principe d'échange de branches, il

fonctionne comme suit: tout d'abord, ils font un échange de branches à la période t puis ils obtiennent un développement optimal approximatif pour la période $t+1$. Cette étape est appelée "chemin en avant". Ensuite, ils retournent aux périodes précédentes, tester l'optimalité en supprimant une à une les installations réalisées pendant ces périodes. Cette seconde étape est "chemin en arrière". Si à une période le plan obtenu par le chemin en arrière ne présente plus d'amélioration, le processus "en arrière" s'arrête et le processus "en avant" reprend avec le dernier plan "chemin en avant".

Approche de Quintana et al. (93)

Ils traitent le problème en deux phases:

- Première phase: ils divisent la région de service en plusieurs petites régions telles que les points de charge soient regroupés de façon à former un seul point de charge puis ils évaluent les prévisions des demandes pour chaque point de charge.
- Deuxième phase: ils déterminent toutes les installations exigées en résolvant le problème des demandes (sans connaître nécessairement l'emplacement), ensuite pour chaque année intermédiaire, ils déterminent un système intermédiaire optimal en utilisant seulement l'ensemble des équipements à partir du problème optimal statique. Ceci doit déterminer le programme des installations et le plan de développement année par année (le sous problème est un modèle non linéaire avec contrainte, résolu par un logiciel d'optimisation non linéaire).

Approche de Blanchard al. (96)

Leur modèle est dynamique, il est résolu par une heuristique ayant cinq phases: premièrement, ils déterminent les projets à exécuter ensuite, ils déterminent les dates d'exécution de ces projets puis ils réduisent le coût de la solution obtenue dans la phase 2 (notons que dans ces trois premières phases, ils laissent tomber la contrainte de radialité et utilisent

une approximation linéaire du coût des pertes de puissance), dans la quatrième phase, ils éliminent les cycles dans le réseau pour obtenir une configuration radiale et enfin, ils utilisent les vraies valeurs des fonctions coûts de pertes en appliquant la recherche Tabu des pertes de puissance.

Approche de Ranjan et al. (02)

Pour résoudre le problème de planification du système de distribution de l'énergie, Ranjan et al [70] proposent l'algorithme suivant: premièrement, ils cherchent à déterminer le site des postes, ensuite ils déterminent la topologie des lignes et finalement ils calculent le flot, choisissent les conducteurs adéquates (satisfaisant des contraintes concernant la capacité des lignes, les chutes de tensions . . .) et déterminent la fonction totale de perte de puissance. L'algorithme s'arrête quand la différence de perte de puissance entre deux itérations successives est assez petite.

Des formules heuristiques pour le site des postes et le choix des conducteurs ont été incorporées dans cet algorithme.

Des tests numériques effectués ont donné des plans de distribution acceptables.

1.4 Conclusion

Nous pouvons conclure qu'il y a plusieurs modèles et approches de résolutions pour ce problème qui peuvent être utiles pour d'autres approches futures. Néanmoins, plusieurs simplifications et suppositions ont été faites soit au niveau du modèle ou au niveau de l'approche de résolution qui ne reflète pas la réalité. Par exemple, toutes ces approches mentionnées plus haut considèrent la demande des points de charge comme donnée certaine, ce qui n'est pas vrai en réalité. En effet, la consommation d'électricité a toujours été et demeure encore une source importante et particulière d'**incertitude**. De notre part, nous allons tenir compte de cette notion d'incertitude dans les demandes. Nous

essayerons de trouver la meilleure stratégie qui permettrait d'étendre le réseau de façon à satisfaire les demandes incertaines tout en minimisant les coûts.

Avant de construire notre modèle de planification, il sera intéressant de parler des quelques principales approches pour traiter la notion d'incertitude dans la demande.

Approche de Lisser et al.(99)

Lisser et al.[7] traitent les réseaux de télécommunication offrant des lignes de services privés. Certains clients demandent un transfert de capacité entre quelques paires de noeuds mais leurs demandes sont incertaines. Dans le cas où les demandes sont assez importantes, la capacité du réseau existant peut ne pas satisfaire le besoin, dans ce cas la compagnie doit léser certains clients et par suite elle doit payer une certaine pénalité. Pour cela, elle doit trouver un équilibre entre le coût d'investissement et le coût de pénalité dû aux demandes non servies. Le problème est formulé comme un problème de programmation stochastique à deux étapes. La première étape traite le problème d'investissement, la deuxième étape s'occupe du problème d'allocation et la routine associée et c'est typiquement un problème de flot à plusieurs commodités. Le modèle obtenu présente seulement quelques variables mais il est non différentiable. La méthode de résolution proposée est la méthode du centre analytique avec une mise en œuvre spéciale pour les programmes stochastiques (ACCPM). La méthode s'apparente à la méthode de décomposition de Benders, elle en diffère essentiellement par le fait qu'au lieu de résoudre le problème maître relaxé jusqu'à l'optimalité, la méthode calcule le centre analytique approximatif de l'ensemble de localisation courante (ensemble formé par les coupes générées précédemment).

Approche de Marin et al.(98)

Marin et al.[11] s'intéressent à la planification des capacités électriques des postes lorsque la demande est incertaine. Leur but est de déterminer les meilleurs investissements pen-

dant la période de planification. Cette période est divisée en des sous-périodes pendant lesquelles les demandes sont supposées incertaines et modélisées comme des fonctions de distribution de probabilité continues. Cette incertitude influe considérablement sur le choix des capacités utilisées. Le modèle présenté est non linéaire continu. Pour résoudre des problèmes de grande taille, ils présentent les deux approches suivantes: la décomposition de Benders généralisée et la décomposition-relaxation lagrangienne.

Approche de Sen et al.(94)

Sen et al.[8] étudient les problèmes de planification associés aux réseaux pour des lignes de services privées. Dans ces réseaux, les demandes sont sujettes à varier d'une façon considérable et donc elles doivent être traitées comme des variables aléatoires. Le modèle proposé est un programme stochastique avec recours. Le problème déterministe équivalent est de grande taille. Pour le résoudre, ils choisissent un algorithme basé sur un échantillon appelé: "décomposition stochastique" (DS). L'application traitée par ces chercheurs est de grande taille et l'utilisation de la décomposition stochastique aboutit à d'excellents résultats.

CHAPITRE 2

Construction du modèle

Le problème que nous nous proposons de résoudre est de déterminer un réseau de distribution d'énergie électrique satisfaisant aux demandes de la clientèle sur une période donnée au moindre coût possible.

Le modèle que nous allons construire est inspiré de celui élaboré par Benchakroun [12]. Ce modèle décrit assez fidèlement la réalité d'un réseau de distribution d'énergie électrique. Nous étendons ce modèle en tenant compte de l'incertitude des demandes. Pour cela nous introduisons des variables et des contraintes qui reflètent les pénalités associées à ces incertitudes. Une fois le problème résolu, nous obtenons un schéma d'exploitation permettant d'alimenter tous les points de charge, le nombre de transformateurs qui doivent être installés dans chaque poste, ainsi que le calibre du conducteur qui doit être utilisé pour chaque ligne et ce pour chaque période de l'horizon de planification.

2.1 Problème à résoudre

Soit un horizon de T périodes. Nous considérons un ensemble de postes existants (à la période 0) ou potentiels (qui n'existent pas au début, mais peuvent être bâtis au cours de l'horizon), un ensemble de points de charge, un ensemble de lignes existantes à la période

0, un ensemble d'arêtes admissibles (des lignes qui peuvent exister entre un poste et un point de charge ou entre deux points de charge) et un ensemble de régulateurs.

Notre objectif est de déterminer la meilleure façon dont va évoluer ce réseau dans le temps, c'est à dire quelles seront les lignes à construire ou à modifier et à quelles périodes; dans quels postes des transformateurs seront rajoutés ou remplacés et finalement, en quels points de charge faut-il placer des régulateurs.

Les coûts entraînés par le réseau sont composés des coûts d'installation et d'entretien des équipements, des coûts des pertes de puissance, ainsi que des coûts des pénalités engendrés par les demandes incertaines. En effet, l'installation ou l'entretien d'un transformateur dans un poste, l'installation d'un régulateur dans un point de charge, la pose ou l'entretien d'une ligne entraînent un certain coût qui varie selon le type du transformateur choisi et selon la longueur et le calibre pour une ligne. Ce coût dépend aussi du temps puisque les coûts des équipements, leur pose et leur entretien augmentent progressivement d'une année à l'autre. D'autre part, le transport du courant le long d'un fil conducteur entraîne la dissipation d'une certaine quantité d'énergie en chaleur, il s'ensuit alors une perte de revenu. Cette quantité d'énergie perdue dépend de l'intensité du courant sur une ligne, de la longueur de cette ligne et de son calibre. Finalement, il faut savoir que pour trouver la meilleure configuration qui permet d'alimenter tous les points de charge, et pour choisir les équipements (transformateur, conducteur, régulateur), les planificateurs considèrent des estimés des demandes. Ces estimés correspondent à un scénario particulier mais d'autres scénarios peuvent se présenter dans la réalité (hiver trop rigoureux, été trop chaud) Notons que ces estimés peuvent se révéler différents des valeurs réelles des demandes, dans ce cas, un poste peut ne pas satisfaire la demande des points de charge qui lui sont reliés ou une ligne peut ne pas supporter le flot qui la traverse. La compagnie d'électricité se voit donc contrainte à défrayer des coûts supplémentaires pour remédier à ce genre de situations.

Notre modèle est défini par des variables de décision, une fonction objectif à minimiser

ainsi que des contraintes.

Les variables de décision se divisent en deux groupes à savoir:

1. les variables de gestion: le flot de puissance, la tension.
2. les variables d'investissement:
 - Un nombre entier désignant le nombre de transformateurs installés dans un poste.
 - Une variable binaire indiquant l'utilisation ou non d'une ligne.
 - Une variable binaire indiquant l'installation ou non d'un régulateur .

L'objectif à minimiser est la somme des coûts d'installation et d'entretien des équipements (postes, lignes et régulateurs), du coût de la perte de puissance dans les lignes et du coût de "la pénalité" dû à la non satisfaction de la demande.

Le modèle doit respecter un certain nombre de contraintes dont les principales sont:

- La demande des clients à un poste ne doit pas excéder sa disponibilité.
- Le flot dans les lignes doit être inférieur à la limite admissible.
- En chaque point de charge, il y a conservation de flot.
- En une période donnée, le flot circule dans un seul sens entre deux points de charge du réseau.
- Le réseau des lignes doit être radial.
- Chaque poste doit contenir un nombre fini de transformateurs.
- Les tensions aux points de charges doivent rester en dedans de certaines limites fixes.

Dans la suite de la thèse, nous ne tiendrons pas compte des problèmes liés aux chutes de tensions. Ce choix se justifie par le fait qu'en pratique, il est d'usage de déceler les points de charge nécessitant un ajustement de la tension et d'y installer des régulateurs. De plus, des résultats rapportés dans la thèse de Benchakroun [12] ont montré qu'une intervention judicieuse de l'utilisateur permet de résoudre directement le problème sans pour autant diminuer la qualité de la solution.

2.2 Notation

Tout au long de ce travail, nous adoptons les notations suivantes:

2.2.1 Les constantes

- I : ensemble des postes existants ou futurs,
- J : ensemble des points de charge existants ou potentiels,
- E : ensemble des arcs (i, j) admissibles,
- F : ensemble des arcs (i, j) où i et j sont dans J ,
- $\bar{F} : E \setminus F$,
- Γ_j^- : ensemble des prédécesseurs de j ,
- Γ_j^+ : ensemble des successeurs de j ,
- Ω : ensemble des types de conducteurs (lignes),
- C : ensemble des capacités des transformateurs,
- T : ensemble des périodes,

- U_w : capacité maximum (en KVA) d'une ligne de type w ,
- R_w : résistance (en Ω \km) d'une ligne de type w ,
- X_w : réactance (en Ω \km) d'une ligne de type w ,
- $\text{Cos}\Phi$: facteur de puissance,
- V_N : tension nominale en (KV).

2.2.2 Les paramètres

- K_{cit} : coût d'installation d'un transformateur de capacité c dans un poste i pendant la période t ,
- E_{cit} : coût d'entretien d'un transformateur de capacité c dans un poste i pendant la période t ,
- K'_{wt} : coût unitaire (par km) d'installation d'une ligne de type w pendant la période t ,
- E'_{ijt} : coût unitaire (par km) d'entretien de la ligne (i, j) pendant la période t ,
- a_t : coût d'un VA "perdu" dans une ligne pendant la période t ,
- l_{ij} : longueur (en km) de la ligne (i, j) ,
- b_i : nombre maximum de transformateurs pouvant être installés dans le poste i ,
- d_{jt} : un estimé de la demande (en KVA) au point de charge j pendant la période t ,
- $\Delta_{wij} = \frac{R_w \text{Cos}\Phi + X_w \text{Sin}\Phi}{\sqrt{3}V_N} l_{ij}$,

Remarque:

Du fait de l'incertitude des demandes, nous ne considérerons que des estimés de celles-ci.

2.2.3 Les variables

- α_{cit} : nombre de transformateurs de capacité c , existant pendant la période t dans le poste i .
- $\gamma_{ijwt} = \begin{cases} 1 & \text{si la ligne } (i, j) \text{ de type } w \text{ est utilisée pendant la période } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- x_{ijt} : flot de puissance dans la ligne (i, j) pendant la période t .

Avant de clore cette section, posons $y = (\alpha_{cit}, \gamma_{ijwt})$, ainsi y désigne alors la configuration du réseau pendant la période t .

2.2.4 La fonction économique

En utilisant les notations ci-dessus, la fonction économique s'écrit comme la somme des coûts suivants:

- Coût fixe d'installation associé aux postes ayant pour expression:

$$P_f(\alpha) = \sum_{t=1}^T \sum_{i \in I} \sum_{c \in C} K_{cit} (\alpha_{cit} - \alpha_{cit-1})$$

- Coût d'entretien associé aux postes dont l'expression est donnée par:

$$P_e(\alpha) = \sum_{t=1}^T \sum_{i \in I} \sum_{c \in C} E_{cit} \alpha_{cit}$$

- Coût fixe d'installation associé aux lignes défini par:

$$\begin{aligned} L_f(\gamma) &= \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in F} \sum_{w \in \Omega} K'_{wt} l_{ij} \gamma_{ijwt} (1 - \gamma_{ijwt-1}) (1 - \gamma_{jiwt-1}) \\ &+ \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in \bar{F}} \sum_{w \in \Omega} K'_{wt} l_{ij} \gamma_{ijwt} (1 - \gamma_{ijwt-1}) \end{aligned}$$

- Coût d'entretien associé aux lignes qui a pour expression:

$$L_e(\gamma) = \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in \Omega} E_{ij} l_{ij} \gamma_{ijwt}$$

- Coût de perte de puissance dans les lignes défini par:

$$h(x, \gamma) = \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in \Omega} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \gamma_{ijwt} x_{ijt}^2$$

- Coût de pénalité dû à la demande incertaine: $c_p(y)$, son expression sera définie plus tard.

2.2.5 Les contraintes

Les contraintes du modèle sont les suivantes:

- Contraintes concernant la disponibilité des postes:

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} - \sum_{c \in C} c \alpha_{cit} \leq 0; \quad i \in I, \quad t \in T$$

- Contraintes concernant la disponibilité des lignes:

$$x_{ijt} - \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt} \leq 0; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T$$

- Contraintes concernant la conservation du flot en chaque point de charge:

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} = d_{jt}; \quad j \in J, \quad t \in T$$

- Contraintes concernant la circulation du flot dans un seul sens:

$$\sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} + \sum_{w \in \Omega} \gamma_{jiwt} \leq 1; \quad (i, j) \in F, \quad t \in T$$

- Contraintes concernant la radialité du réseau:

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \leq 1; \quad j \in J, \quad t \in T$$

- Contraintes concernant le nombre de transformateurs dans un poste:

$$\sum_{c \in C} \alpha_{cit} \leq b_i; \quad i \in I, \quad t \in T$$

- Contraintes concernant le fait que le nombre de transformateurs d'un type donné dans un poste ne peut pas décroître d'une période à l'autre:

$$\alpha_{cit} \geq \alpha_{cit-1} \quad c \in C \quad i \in I, \quad t \in T - \{0\}$$

2.3 Modèle

Le modèle (P) se résume comme suit:

$$\min Z = P_f(\alpha) + P_e(\alpha) + L_f(\gamma) + L_e(\gamma) + h(x, \gamma) + c_p(y)$$

sujet à :

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} - \sum_{c \in C} c \alpha_{cit} \leq 0; \quad i \in I, \quad t \in T \quad (2.1)$$

$$x_{ijt} - \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt} \leq 0; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \quad (2.2)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} = d_{jt}; \quad j \in J, \quad t \in T \quad (2.3)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \leq 1; \quad j \in J, \quad t \in T \quad (2.4)$$

$$\sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} + \sum_{w \in \Omega} \gamma_{jiwt} \leq 1; \quad (i, j) \in F, \quad t \in T \quad (2.5)$$

$$\sum_{c \in C} \alpha_{cit} \leq b_i; \quad i \in I, \quad t \in T \quad (2.6)$$

$$\alpha_{cit} \geq \alpha_{cit-1}; \quad c \in C, \quad i \in I, \quad t \in T - \{0\} \quad (2.7)$$

$$\gamma_{ijwt} = 0 \text{ ou } 1; \quad (i, j) \in E, \quad w \in \Omega, \quad t \in T \quad (2.8)$$

$$\alpha_{cit} = 0, 1, \dots, b_i; \quad c \in C, \quad i \in I, \quad t \in T \quad (2.9)$$

$$x_{ijt} \geq 0; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \quad (2.10)$$

En posant:

$$F(y) = P_f(\alpha) + P_e(\alpha) + L_f(\gamma) + L_e(\gamma)$$

$$H(x, y) = h(x, \gamma)$$

$$G(x, y) \leq 0 : \text{l'ensemble des contraintes (2.1) - (2.2)}$$

$$X = \{x_{ijt} \geq 0, \sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} = d_{jt}, t \in T, (i, j) \in E, j \in J\}$$

$$Y = \{y, \text{vérifiant les contraintes (2.4) - (2.9)}\}$$

La forme compacte du problème (P) s'écrit:

$$\min Z = F(y) + c_p(y) + H(x, y) \quad (2.11)$$

sujet à :

$$G(x, y) \leq 0 \quad (2.12)$$

$$x \in X \quad (2.13)$$

$$y \in Y \quad (2.14)$$

2.3.1 Définition de $c_p(y)$

Dans ce qui suit, nous proposons une définition de la fonction de pénalité ainsi que du coût de pénalité associé. La demande des clients pour les périodes à venir étant une information qui concerne le futur, sa valeur ne peut donc être connue avec certitude. Pour tenir compte de ce fait, nous supposons que l'incertitude dans la demande est représentée par un ensemble fini de scénarios $S = \{1, 2, \dots, N\}$ tels que la probabilité de réalisation de chaque scénario est p_s , avec $p_s \geq 0$ et $\sum_{s=1}^N p_s = 1$. Nous définissons le coût de pénalité $c_p(y)$ comme étant l'espérance mathématique de la fonction de pénalité $D_s(y)$, c'est à dire:

$$c_p(y) = \sum_{s=1}^N p_s D_s(y)$$

où $D_s(y)$ est à son tour la valeur optimale du problème (\bar{P}) suivant:

$$\min \tilde{Z} = \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} e_{it} s_{it} + \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in E} e_{ijt} s_{ijt} \quad (2.15)$$

sujet à :

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} - s_{it} \leq \sum_{c \in C} c \alpha_{cit}; \quad i \in I, \quad t \in T \quad (2.16)$$

$$x_{ijt} - s_{ijt} \leq \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \quad (2.17)$$

$$x_{ijt} + s_{ijt} \leq M \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \quad (2.18)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} = d_{jts}; \quad j \in J, \quad t \in T \quad (2.19)$$

$$s_{it} \geq 0; \quad i \in I, \quad t \in T \quad (2.20)$$

$$s_{ijt} \geq 0 \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \quad (2.21)$$

avec

- e_{it} : le coût associé à la non satisfaction d' "1kw" pour le poste i à la période t .
- e_{ijt} : le coût associé à la non satisfaction d' "1kw" par la ligne (i, j) à la période t .
- d_{jts} : la valeur de la demande pour le point de charge j à la période t et pour le scénario s .

Remarques:

- Nous introduisons les variables s_{it} et s_{ijt} pour mesurer la non réalisabilité du problème.
- Nous ajoutons la contrainte (2.18) pour la raison logique suivante: si la ligne (i, j) de type w à la période t n'est pas utilisée alors le flot circulant sur cette ligne est nul, M sera une constante assez grande.

Notre problème s'écrit sous la forme déterministe équivalente suivante:

$$\begin{aligned} \min Z &= F(y) + \sum_{s=1}^N p_s D_s(y) + H(x, y) \\ \text{sujet à :} & \\ G(x, y) &\leq 0 \\ x &\in X \\ y &\in Y \end{aligned} \tag{2.22}$$

CHAPITRE 3

Approche de résolution: Méthode de Benders généralisée

Rappelons que notre problème (P) s'écrit:

$$\min Z = F(y) + H(x, y) + c_p(y) \quad (3.1)$$

sujet à :

$$G(x, y) \leq 0 \quad (3.2)$$

$$x \in X \quad (3.3)$$

$$y \in Y \quad (3.4)$$

Cette version compacte du modèle nous montre clairement la présence de deux types de variables: des variables entières y et des variables continues x . Cet aspect mixte nous incite comme d'autres chercheurs à utiliser la méthode de décomposition de Benders introduite par Benders en 1962 [38] et généralisée par A.M. Geoffrion en 1972 [37].

Dans ce qui suit, nous exposons les principales idées de la méthode ainsi que les conditions que doivent vérifier les différentes entités du problème pour que la méthode soit applicable.

3.1 Méthode de Benders Généralisée

Telle qu'elle est décrite par A.M. Geoffrion [37], la méthode de Benders s'applique à des problèmes non linéaires de la forme:

$$\begin{aligned} & \min f(z, y) \\ & \text{sujet à:} \\ & G(z, y) \leq 0 \\ & z \in Z, y \in Y \end{aligned} \tag{3.5}$$

où G est un ensemble de m fonctions définies sur $Z \times Y \subseteq R^{n_1} \times R^{n_2}$.

Remarquons que si nous fixons la variable y temporairement, le problème se résout plus facilement.

La méthode de décomposition de Benders est basée sur des approches de projection et de relaxation.

Nous considérons alors la projection du problème (3.5) sur l'espace des variables y . Nous obtenons le problème suivant:

$$\begin{aligned} & \min v(y) \\ & \text{sujet à:} \\ & y \in Y \cap V \end{aligned} \tag{3.6}$$

où:

$$v(y) = \inf_{z \in Z} \{f(z, y); G(z, y) \leq 0\}$$

et

$$V = \{y : \exists z \in Z \text{ tel que } G(z, y) \leq 0\}$$

Nous énonçons maintenant les théorèmes permettant d'une part, d'établir des relations entre les problèmes (3.5) et (3.6) et d'autre part de caractériser l'ensemble V et la fonction

v. Désignons par $(SP.\bar{y})$ le sous problème:

$$\min_{z \in Z} \{f(z, \bar{y}) : G(z, \bar{y}) \leq 0\}$$

Théorème 1 [37]

- Le problème (3.5) est non réalisable ou non borné inférieurement si et seulement si le problème (3.6) l'est aussi.
- Si (z^*, y^*) est une solution de (3.5), alors y^* est optimale pour (3.6).
- Si y^* est optimale pour (3.6) et z^* est optimale pour $(SP.y^*)$ alors (z^*, y^*) est une solution de (3.5).
- Si y^* est ϵ_1 optimale pour (3.6) et z^* est ϵ_2 pour $(SP.\bar{y})$ alors (y^*, z^*) est $\epsilon_1 + \epsilon_2$ optimale pour (3.5).

Théorème 2 [37]

On suppose que Z est un ensemble convexe non vide et que G est convexe sur Z pour tout $y \in Y$ et que $W_y = \{g \in R^n : \exists z \in Z \text{ tel que } G(z, y) \leq g\}$ est fermé pour tout $y \in Y$.

Alors, un point $\bar{y} \in Y$ appartient à V si et seulement si:

$$\inf_{z \in Z} \{\lambda^t G(z, \bar{y})\} \leq 0, \forall \lambda \in \Lambda = \{\lambda \in R^m : \lambda \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$$

Théorème 3 [37]

On suppose que Z est convexe et non vide, f et G sont convexes sur Z pour tout $y \in Y$. On suppose de plus que pour tout $\bar{y} \in Y \cap V$, l'une des conditions suivantes est satisfaite:

- $v(\bar{y})$ est fini et $(SP.\bar{y})$ possède un vecteur de multiplicateurs optimaux;
- $v(\bar{y}) = -\infty$

Alors, la valeur optimale de (SP,y) est égale à celle de son dual défini sur $Y \cap V$ ou encore

$$v(y) = \sup_{u \geq 0} [\inf_{z \in Z} \{f(z, y) + u^t G(z, y)\}] \quad \forall y \in Y \cap V$$

Par les théorèmes 2 et 3, on peut déduire que le problème (3.5) est équivalent au problème suivant appelé problème maître:

$$\begin{aligned} & \min \{ \sup_{y \in Y} [\inf_{u \geq 0} \{f(z, y) + u^t G(z, y)\}] \} \\ & \text{sujet à:} \\ & \inf_{z \in Z} \{ \lambda^t G(z, \bar{y}) \} \leq 0, \forall \lambda \in \Lambda \end{aligned} \quad (3.7)$$

En utilisant la définition du sup, le problème maître s'écrit aussi:

$$\begin{aligned} & \min \quad y_0 \\ & \text{sujet à:} \\ & \inf_{z \in Z} \{f(z, y) + u^t G(z, y)\} \leq y_0; \quad \forall u \geq 0 \\ & \inf_{z \in Z} \{ \lambda^t G(z, y) \} \leq 0; \quad \forall \lambda \in \Lambda \\ & \quad \quad \quad y \in Y \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le problème maître possède un grand nombre de contraintes, donc il sera difficile de le résoudre directement.

Pour contourner cette difficulté, nous utilisons l'approche de relaxation qui consiste à générer les coupes (contraintes (3.8-1) et (3.8-2)) au fur et à mesure que cela s'avère nécessaire. Ainsi, les contraintes du problème (3.8) sont relaxées et certaines vont être introduites progressivement au cours de sa résolution.

Le problème maître relaxé s'écrit:

$$\begin{aligned} & \min \quad y_0 \\ & \text{sujet à:} \\ & \inf_{z \in Z} \{f(z, y) + u^j G(z, y)\} \leq y_0; \quad \forall j = 1, \dots, p \\ & \inf_{z \in Z} \{ \lambda^j G(z, y) \} \leq 0; \quad \forall j = 1, \dots, q \\ & \quad \quad \quad y \in Y \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les questions qui se posent naturellement sont:

- Est ce qu'une solution optimale du problème maître relaxé (3.9) est également réalisable pour le problème maître (3.8)?

- Dans le cas de non réalisabilité, quelle contrainte faut-il générer ?

Pour répondre à ces questions, soit (\hat{y}, \hat{y}_0) une solution optimale réalisable du problème maître relaxé alors, par le théorème 2 et la définition de V on a, \hat{y} satisfait les contraintes (3.8-2) si et seulement si $(SP.\hat{y})$ est réalisable.

De plus, si $(SP.\hat{y})$ est réalisable, alors par le théorème 3 on a: (\hat{y}, \hat{y}_0) satisfait les contraintes (3.8-1) si et seulement si $v(\hat{y}) \leq \hat{y}_0$. Donc, c'est le problème $(SP.\hat{y})$ qui nous permet de tester la réalisabilité de (\hat{y}, \hat{y}_0) pour le problème maître, de plus, dans le cas de non réalisabilité, il nous permet de déterminer les multiplicateurs permettant d'engendrer la contrainte pertinente.

En effet:

Si $(SP.\hat{y})$ est réalisable et $v(\hat{y}) > \hat{y}_0$, alors $\inf_{z \in Z} \{(f(z, y) + \hat{u}^t G(z, y))\} > \hat{y}_0$ avec \hat{u} un vecteur de multiplicateurs optimaux de $(SP.\hat{y})$; dans ce cas, la contrainte à rajouter au problème (3.9) est:

$$\inf_{z \in Z} \{(f(z, y) + \hat{u}^t G(z, y))\} \leq \hat{y}_0.$$

alors que si $(SP.\hat{y})$ est non réalisable, il existe $\hat{\lambda} \in \Lambda$ tel que $\inf_{z \in Z} \{\hat{\lambda}^t G(z, \hat{y})\} > 0$ et la contrainte à rajouter au problème (3.9) est:

$$\inf_{z \in Z} \{\hat{\lambda}^t G(z, y)\} \leq 0$$

Maintenant, nous allons présenter l'algorithme de Benders généralisé.

Pour simplifier la présentation, posons:

$$L_1(y; u) = \inf_{z \in Z} \{(f(z, y) + u^t G(z, y))\} \quad y \in Y, u \geq 0$$

$$L_2(y; \lambda) = \inf_{z \in Z} \{\lambda^t G(z, y)\} \leq 0 \quad y \in Y, \lambda \in \Lambda$$

Algorithme de Benders généralisé

Étape 1:

Soit $\bar{y} \in Y \cap V$ un point initial réalisable.

Résoudre le sous problème $(SP.\bar{y})$; déterminer le vecteur des multiplicateurs optimaux \bar{u} et la fonction $L_1(y; \bar{u})$.

Poser $p = 1$, $q = 0$, $\hat{u} = \bar{u}$, $BS = v(\bar{y})$ et choisir $\epsilon \geq 0$ un niveau de tolérance.

Étape 2:

Résoudre le problème maître relaxé:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_0 \\ \text{sujet à:} \quad & \\ & L_1(y; u^j) \leq y_0; \quad \forall j = 1, \dots, p \\ & L_2(y; \lambda^j) \leq 0; \quad \forall j = 1, \dots, q \\ & y \in Y \end{aligned} \tag{3.10}$$

Soit (\hat{y}, \hat{y}_0) une solution optimale.

Étape 3:

Résoudre le sous problème $(SP.\hat{y})$. Un des deux cas suivants doit se présenter:

1. $v(\hat{y})$ est fini.

- Si $v(\hat{y}) \leq \hat{y}_0 + \epsilon$, arrêter.
- Sinon, déterminer un vecteur de multiplicateurs optimaux \hat{u} et la fonction $L_1(y; \hat{u})$, augmenter p de 1.

Si $v(\hat{y}) \leq BS$, poser $BS = v(\hat{y})$ et revenir à l'étape 2.

2. Le sous problème $(SP.\hat{y})$ est non réalisable.

Déterminer $\hat{\lambda} \in \Lambda$ satisfaisant $\inf_{z \in Z} \{\lambda^t G(z, \hat{y})\} > 0$. Expliciter $L_2(y; \hat{\lambda})$, augmenter q de 1 et revenir à l'étape 2.

Remarque:

L'algorithme de Benders généralisé nous permet d'obtenir des bornes inférieures et supérieures de la valeur optimale du problème original. En effet, la suite des valeurs optimales obtenues en résolvant les problèmes maîtres relaxés est une suite de bornes inférieures alors que les $v(\bar{y})$ pour les $\bar{y} \in Y$ tel que $(SP.\bar{y})$ est réalisable sont les bornes

supérieures.

Avant d'achever cette section, signalons que la convergence de la méthode peut être prouvée pour différentes situations. Le théorème suivant résumé ce qui nous intéresse.

Théorème 4: [37]

On suppose que Y est fini et que les hypothèses des théorèmes 2 et 3 sont vérifiées. Alors pour tout $\epsilon \geq 0$, la méthode de décomposition de Benders généralisée se termine après un nombre fini d'itérations.

Preuve:

Pour une preuve détaillée, voir [37].

Remarque:

l'ensemble Y est fini, de plus aucune solution du problème maître relaxé ne peut se répéter par suite la procédure se termine après un nombre fini d'itérations.

3.2 Application au problème de la distribution de l'énergie électrique

Rappelons que notre modèle de planification de la distribution a la forme (P) suivante:

$$\begin{aligned} \min Z &= F(y) + c_p(y) + H(x, y) \\ \text{sujet à :} & \\ G(x, y) &\leq 0 \\ x &\in X \\ y &\in Y \end{aligned} \tag{3.11}$$

La fonction $F(y) + H(x, y) + c_p(y)$ est convexe sur X pour $y \in Y$ (car pour y fixé, $H(x, y)$ est une fonction quadratique continue et $c_p(y)$ est bien définie). De plus, X est un ensemble de contraintes linéaires sur des variables réelles, il est donc convexe. Pour

les mêmes raisons, $G(x, y)$ est convexe quand $y \in Y$, finalement, il est montré en détails dans Benchakroun [12] que l'ensemble W_y défini en fonction des données de notre modèle est fermé pour tout $y \in Y$ et que si le sous problème $\min_{x \in X} \{H(x, \bar{y}) : G(x, \bar{y}) \leq 0\}$ pour un $\bar{y} \in Y$ est réalisable alors, il possède un vecteur de multiplicateurs optimaux.

Ainsi, notre modèle possède toutes les propriétés théoriques requises à l'application de la méthode de décomposition de Benders.

Dans ce qui suit, nous appliquons cette méthode à notre problème. La projection du problème (P) sur l'espace des variables y donne le problème suivant:

$$\begin{aligned} \min F(y) + c_p(y) + v(y) \\ \text{sujet à :} \\ y \in Y \cap V \end{aligned} \tag{3.12}$$

où

$$\begin{aligned} v(y) &= \inf_{x \in X} \{H(x, y); G(x, y) \leq 0\} \\ V &= \{y; G(x, y) \leq 0, \text{ pour au moins un } x \in X\} \end{aligned}$$

Le sous problème associé est:

$$\min_{x \in X} \{H(x, y) : G(x, y) \leq 0\}$$

et a pour expression:

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in \Omega} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \gamma_{ijwt} x_{ijt}^2 \\ \text{sujet à :} \\ \sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} - \sum_{c \in C} c \alpha_{cit} &\leq 0; \quad i \in I, \quad t \in T \\ x_{ijt} - \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt} &\leq 0; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \\ \sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} &= d_{jt}; \quad j \in J, \quad t \in T \\ x &\in X \end{aligned} \tag{3.13}$$

et le problème maître est:

$$\begin{aligned} \min Z &= F(y) + c_p(y) + y_0 \\ \text{sujet à :} & \\ \inf_{x \in X} \{H(x, y) + u^t G(x, y)\} &\leq y_0, \quad \forall u \geq 0 \\ \inf_{x \in X} \{\lambda^t G(x, y)\} &\leq 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda \\ y &\in Y \\ y_0 &\in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.14}$$

et a pour expression:

$$\begin{aligned}
\min Z &= F(y) + c_p(y) + y_0 \\
\text{sujet à :} & \\
\inf_{x \in X} \{H(x, y) + u^t G(x, y)\} &\leq y_0, \quad \forall u \geq 0 \\
\inf_{x \in X} \{\lambda^t G(x, y)\} &\leq 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda \\
\sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} + \sum_{w \in \Omega} \gamma_{jiwt} &\leq 1; \quad (i, j) \in F, \quad t \in T \\
\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} &\leq 1; \quad j \in J, \quad t \in T \\
\sum_{c \in C} \alpha_{cit} &\leq b_i; \quad i \in I, \quad t \in T \\
\alpha_{cit} &\geq \alpha_{cit-1}; \quad c \in C, \quad i \in I, \quad t \in T - \{0\} \\
\gamma_{ijwt} &= 0 \text{ ou } 1; \quad (i, j) \in E, \quad w \in \Omega, \quad t \in T \\
\alpha_{cit} &= 0, 1, \dots, b_i; \quad i \in I, \quad c \in C, \quad t \in T \\
y_0 &\in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

avec:

- $F(y) = P_f(\alpha) + L_f(\alpha) + P_f(\gamma) + L_f(\gamma)$.
- $c_p(y)$ est le coût de pénalité défini dans la section 2.3.1.
- u est le vecteur multiplicateur associé au contraintes $G(x, y)$ dans le cas où le sous problème est réalisable.
- λ est le vecteur multiplicateur associé au contraintes $G(x, y)$ dans le cas où le sous problème est non réalisable.

Remarque:

Nous remarquons qu'avec notre problème, l'algorithme diffère légèrement de l'algorithme de Benders généralisé, et ce, au niveau de définition de la borne supérieure, de l'objectif

du problème maître et du critère d'arrêt.

En effet:

- La modification au niveau de la borne supérieure est comme suit:
à l'étape 1, nous posons $BS = F(\bar{y}) + c_p(\bar{y}) + v(\bar{y})$ où \bar{y} est une solution initiale réalisable, de plus à l'étape (3-1) si on a $F(\hat{y}) + c_p(\hat{y}) + v(\hat{y}) < BS$ alors nous posons $BS = F(\hat{y}) + c_p(\hat{y}) + v(\hat{y})$.
- L'objectif de notre problème maître est $F(y) + c_p(y) + y_0$.

Notons qu'à l'étape 3, le critère d'arrêt reste valable puisque $BS - \epsilon \leq F(\hat{y}) + c_p(\hat{y}) + \hat{y}_0$ est équivalente à $v(\hat{y}) \leq \hat{y}_0$.

3.3 Variante du modèle

3.3.1 Linéarisation de l'objectif

Le problème maître présente des difficultés particulières dues à la non linéarité de la fonction économique et à l'aspect dynamique qui force le maintien entre les décisions prises d'une période à l'autre, pour linéariser la fonction des coûts associés à l'installation des lignes, Benchakroun [12] a introduit une nouvelle variable binaire β définie par:

$$\beta_{ijwt} = \gamma_{ijwt}(\gamma_{ijwt-1} + \gamma_{jiwt-1}) \quad (i, j) \in F,$$

$$\beta_{ijwt} = \gamma_{ijwt}\gamma_{ijwt-1} \quad (i, j) \in \bar{F}.$$

Cette variable permet de représenter l'utilisation des lignes pendant deux périodes successives, en la substituant dans la fonction des coûts associés à l'installation des lignes,

nous aurons:

$$\begin{aligned}
L_f(\gamma) &= \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in F} \sum_{w \in \Omega} K'_{wt} l_{ij} \gamma_{ijwt} (1 - \gamma_{ijwt-1}) (1 - \gamma_{jiwt-1}) \\
&+ \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in \bar{F}} \sum_{w \in \Omega} K'_{wt} l_{ij} \gamma_{ijwt} (1 - \gamma_{ijwt-1}) \\
&= f_1(\gamma) - f_2(\beta)
\end{aligned}$$

avec:

$$f_1(\gamma) = \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in S} K'_{wt} l_{ij} \gamma_{ijwt}$$

et

$$f_2(\beta) = \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in S} K'_{wt} l_{ij} \beta_{ijwt}$$

Si nous ajoutons au problème maître (3.15) les contraintes suivantes :

$$\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt} \leq 0, \quad (i, j) \in E, w \in \Omega, t \in T - \{0\}$$

$$\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt-1} - \gamma_{jiwt-1} \leq 0, \quad (i, j) \in F, w \in \Omega, t \in T - \{0\}$$

$$\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt-1} \leq 0, \quad (i, j) \in \bar{F}, w \in \Omega, t \in T - \{0\}$$

$$\beta_{ijwt} = 0 \quad \text{ou} \quad 1, (i, j) \in E, w \in \Omega, t \in T - \{0\}$$

nous aurons le problème suivant:

$$\begin{aligned}
\min Z &= F(y) + c_p(y) + y_0 \\
\text{sujet à :} & \\
\inf_{x \in X} \{H(x, y) + u^t G(x, y)\} &\leq y_0, \quad \forall u \geq 0 \\
\inf_{x \in X} \{\lambda^t G(x, y)\} &\leq 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda \\
\sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} + \sum_{w \in \Omega} \gamma_{jiwt} &\leq 1; \quad (i, j) \in F, \quad t \in T \\
\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} &\leq 1; \quad j \in J, \quad t \in T \\
\sum_{c \in C} \alpha_{cit} &\leq b_i; \quad i \in I, \quad t \in T \\
\alpha_{cit} &\geq \alpha_{cit-1}; \quad c \in C, \quad i \in I, \quad t \in T - \{0\} \\
\gamma_{ijwt} &= 0 \text{ ou } 1; \quad (i, j) \in E, \quad w \in \Omega, \quad t \in T \\
\alpha_{cit} &= 0, 1, \dots, b_i; \quad i \in I, \quad c \in C, \quad t \in T \\
\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt} &\leq 0, \quad (i, j) \in E, \quad w \in \Omega, \quad t \in T - \{0\} \\
\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt} - \gamma_{jiwt} &\leq 0, \quad (i, j) \in F, \quad w \in \Omega, \quad t \in T - \{0\} \\
\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt-1} &\leq 0, \quad (i, j) \in \bar{F}, \quad w \in \Omega, \quad t \in T - \{0\} \\
\beta_{ijwt} &= 0 \text{ ou } 1, \quad (i, j) \in E, \quad w \in \Omega, \quad t \in T - \{0\} \\
y_0 &\in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

La fonction objectif de notre problème maître diffère de celle de Benchakroun [12] seulement par le terme $c_p(y)$ qui ne dépend pas de β , or Benchakroun [12] a montré que la résolution du problème maître linéaire (avec l'introduction de β) donne directement la solution du problème maître original (sans l'introduction de β) donc le raisonnement reste valable pour notre cas c'est à dire que la résolution du problème (3.16) aboutit à la solution du problème (3.15).

Dans ce qui suit, notre modèle de référence sera le suivant:

$$\begin{aligned} \min Z &= P_f(\alpha) + P_e(\alpha) + f_2(\gamma) - f_3(\beta) + L_e(\gamma) \\ &+ h(x, \gamma) + c_p(y) \end{aligned}$$

sujet à :

(3.17)

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} &\leq \sum_{c \in C} c \alpha_{cit}; \quad i \in I, \quad t \in T \\ x_{ijt} &\leq \sum_{w \in \Gamma} U_w; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \\ \sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} &= d_{jt}; \quad j \in J, \quad t \in T \\ \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} + \sum_{w \in \Omega} \gamma_{jiwt} &\leq 1; \quad (i, j) \in F, \quad t \in T \\ \sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} &\leq 1; \quad j \in J, \quad t \in T \\ \sum_{c \in C} \alpha_{cit} &\leq b_i; \quad i \in I, \quad t \in T \\ \alpha_{cit} &\geq \alpha_{cit-1}; \quad c \in C, \quad i \in I, \quad t \in T - \{0\} \\ \beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt} &\leq 0, \quad (i, j) \in E, \quad w \in \Omega, \quad t \in T - \{0\} \\ \beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt} - \gamma_{jiwt} &\leq 0, \quad (i, j) \in F, \quad w \in \Omega, \quad t \in T - \{0\} \\ \beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt-1} &\leq 0, \quad (i, j) \in \bar{F}, \quad w \in \Omega, \quad t \in T - \{0\} \\ \gamma_{ijwt} &= 0 \text{ ou } 1; \quad (i, j) \in E, \quad w \in \Omega, \quad t \in T \\ \alpha_{cit} &= 0, 1, \dots, b_i; \quad i \in I, \quad c \in C, \quad t \in T \\ x_{ijt} &\geq 0; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T, \\ \beta_{ijwt} &= 0 \text{ ou } 1, \quad (i, j) \in E, \quad w \in \Omega, \quad t \in T - \{0\} \end{aligned}$$

CHAPITRE 4

Mise en œuvre de la méthode

4.1 Ajout des contraintes valides

La méthode de décomposition de Benders s'adapte bien à la résolution de notre modèle, cependant la vitesse de convergence de l'algorithme peut être affectée par certaines situations qui peuvent se réaliser lors de la résolution, par exemple obtenir un réseau comportant des cycles ou circuits lors de la résolution du problème maître relaxé, dans ce cas il faut régler cette situation avant de passer à la résolution du sous problème.

Pour contourner ce problème et favoriser la réalisabilité du sous problème, nous pouvons ajouter des contraintes supplémentaires à notre modèle.

4.1.1 Contraintes pour l'élimination des cycles

En appliquant la méthode de décomposition de Benders à notre modèle, la contrainte de conservation de flot est présente juste dans le sous problème et non pas dans le problème maître relaxé, donc lors de la résolution de ce dernier, nous pouvons avoir des solutions comportant des cycles. Si tel est le cas, nous devons éliminer les cycles avant de passer à une autre étape. Les contraintes qui éliminent les cycles sont nombreuses et il ne sera

pas intéressant de les considérer toutes en même temps dans le problème. La meilleure façon est de les relaxer et de les introduire lorsque c'est nécessaire.

Supposons que lors d'un test, nous ayons détecté le circuit j_1, j_2, \dots, j_p , alors pour l'éliminer nous introduisons le couple de contraintes suivant:

$$\sum_{\omega \in S} (\gamma_{j_1 j_2 \omega t} + \gamma_{j_2 j_3 \omega t} + \dots + \gamma_{j_{p-1} j_p \omega t} + \gamma_{j_p j_1 \omega t}) \leq p - 1$$

et

$$\sum_{\omega \in S} (\gamma_{j_2 j_1 \omega t} + \gamma_{j_3 j_2 \omega t} + \dots + \gamma_{j_p j_{p-1} \omega t} + \gamma_{j_1 j_p \omega t}) \leq p - 1$$

Ce type de contrainte révèle qu'il peut y avoir au plus un arc de moins que le nombre de noeuds appartenant au circuit dans un sens comme dans l'autre.

Nous pouvons remplacer les deux contraintes précédentes par la seule contrainte suivante:

$$\sum_{j \in Q} \sum_{i \in \Gamma_j^-, i \notin Q} \sum_{\omega \in S} \gamma_{ij \omega t} \geq 1$$

où Q est le circuit détecté. Cette contrainte montre qu'au moins un point de charge du circuit doit être alimenté par autre point de charge ou un poste n'appartenant pas au circuit.

Des tests effectués avec les deux types de contraintes montrent que le dernier donne de meilleurs résultats [12].

Remarque:

Gascon [16] a prouvé qu'un noeud qui n'est pas sur un chemin issu d'un poste et qui appartient au réseau fait automatiquement partie d'un cycle, de plus la présence d'un cycle implique la non satisfaction de la contrainte de conservation de flot.

4.1.2 Contraintes favorisant la réalisabilité du sous problème

Pour favoriser la réalisabilité du sous problème, nous ajoutons les contraintes suivantes:

1. En toute période, la capacité totale des postes est au moins égale à la demande totale:

$$\sum_{i \in I} \sum_{c \in C} c \alpha_{cit} \geq \sum_{j \in J} d_{jt}, \quad t \in T$$

2. La capacité de l'arc entrant dans j est supérieure à la somme des capacités des arcs sortant de j :

$$\sum_i \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt} \geq \sum_k \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{jkw t}, \quad j \in J, t \in T$$

3. Un point de charge dont la demande est positive doit nécessairement être alimenté:

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} = 1, \quad j \in J_t, \quad t \in T$$

4. Un point de charge dont la demande est nulle ne peut pas être racine ou seuls les postes peuvent être racines:

$$\left(1 - \sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt}\right) \left(\sum_{i \in \Gamma_j^+} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{jiwt}\right) = 0, \quad j \in J - J_t, \quad t \in T$$

avec $J_t = \{j \in J; d_{jt} > 0\}$.

Remarques:

- La première contrainte favorisant la réalisabilité est vérifiée une fois les contraintes (2.1) et (2.3) du problème original sont vérifiées, donc son rôle réside juste dans l'accélération du processus de résolution. Également, les deux dernières contraintes favorisant la réalisabilité sont redondantes avec la présence des contraintes (2.2) et (2.3). Cependant, la contrainte (2.2) n'apparaîtra avec (2.3) lors de la résolution du problème maître, d'où la nécessité d'introduire de telles contraintes.
- La méthode de décomposition de Benders reste valable avec l'ajout des trois premières contraintes, il y a juste la dernière contrainte qui cause un problème parce

qu'elle est non linéaire. Pour contourner ce problème, nous la remplaçons par la contrainte linéaire suivante:

$$\sum_{i \in \Gamma_j^+} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \leq M' \sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{jiwt}, \quad j \in J - J_t, \quad t \in T$$

où M' est une constante assez grande.

Dans le reste de la thèse nous considérons le modèle suivant:

$$\begin{aligned} \min Z = & P_f(\alpha) + P_e(\alpha) + L_e(\gamma) + f_1(\gamma) - f_2(\beta) + L_e(\gamma) \\ & + H(x, \gamma) + c_p(y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

sujet à :

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} \leq \sum_{c \in C} c \alpha_{cit}; \quad i \in I, \quad t \in T \quad (4.2)$$

$$x_{ijt} \leq \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \quad (4.3)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} = d_{jt}; \quad j \in J, \quad t \in T \quad (4.4)$$

$$\sum_{c \in C} \alpha_{cit} \leq b_i; \quad i \in I, \quad t \in T \quad (4.5)$$

$$\alpha_{cit} \geq \alpha_{cit-1}; \quad c \in C, \quad i \in I, \quad t \in T - \{0\} \quad (4.6)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{c \in C} c \alpha_{cit} \geq \sum_{j \in J} d_{jt} \quad t \in T \quad (4.7)$$

$$\sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} + \sum_{w \in \Omega} \gamma_{jiwt} \leq 1; \quad (i, j) \in F, \quad t \in T \quad (4.8)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \leq 1; \quad j \in J, \quad t \in T \quad (4.9)$$

$$\sum_i \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \geq \sum_k \sum_{w \in \Omega} \gamma_{jkwt} \quad j \in J, t \in T \quad (4.10)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} = 1; \quad j \in J_t, \quad t \in T \quad (4.11)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^+} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \leq M' \sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \quad j \in J - J_t, \quad t \in T \quad (4.12)$$

$$\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt} \leq 0, \quad (i, j) \in E, w \in \Omega, t \in T - \{0\} \quad (4.13)$$

$$\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt} - \gamma_{jiwt} \leq 0, \quad (i, j) \in F, w \in \Omega, t \in T - \{0\} \quad (4.14)$$

$$\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt-1} \leq 0, \quad (i, j) \in \bar{F}, w \in \Omega, t \in T - \{0\} \quad (4.15)$$

$$\gamma_{ijwt} = 0 \text{ ou } 1; \quad (i, j) \in E, \quad w \in \Omega, \quad t \in T \quad (4.16)$$

$$\alpha_{cit} = 0, 1, \dots, b_i; \quad i \in I, \quad c \in C, \quad t \in T \quad (4.17)$$

$$\beta_{ijwt} = 0 \text{ ou } 1, (i, j) \in E, w \in \Omega, t \in T - \{0\} \quad (4.18)$$

$$x_{ijt} \geq 0; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T, \quad (4.19)$$

4.2 Résolution du sous problème

Le sous problème joue un rôle très important dans le processus de résolution de la méthode de décomposition de Benders généralisée. D'une part, il sert à tester la réalisabilité d'une solution du problème maître relaxé et d'autre part il fournit les outils nécessaires pour générer la coupe pertinente quand cela est nécessaire.

Dans cette section nous présentons une procédure de résolution du sous problème puis dans les sections suivantes nous exposons les outils nécessaires pour la génération des coupes.

Soit \bar{y} une configuration donnée, considérons le sous problème $(SP.\bar{y})$:

$$\min Z = H(x, \bar{y})$$

sujet à :

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} - \sum_{c \in C} c \bar{\alpha}_{cit} \leq 0; \quad i \in I, \quad t \in T \quad (4.20)$$

$$x_{ijt} - \sum_{w \in \Omega} U_w \bar{\gamma}_{ijwt} \leq 0; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \quad (4.21)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} = d_{jt}; \quad j \in J, \quad t \in T \quad (4.22)$$

$$x \geq 0$$

La proposition qui suit montre que si le sous problème est réalisable, son domaine est réduit à un seul point.

Proposition

Soit $\bar{y} \in Y$, le sous problème $(SP.\bar{y})$ possède au plus une solution réalisable.

Preuve:

Elle est basée sur la structure d'arborescence inhérente lorsque \bar{y} est fixé.

En effet, remarquons qu'une fois \bar{y} est fixé, la structure du réseau est également fixée de façon qu'à chaque période, il est constitué d'un ensemble d'arborescences.

Ainsi, pour tout $(i, j) \in E$ tel que $\sum_{w \in S} \bar{\gamma}_{ijwt} = 0$, on a $x_{ijt} = 0$ (d'après la contrainte (4.21)).

Dans le système d'équation (4.22), quand nous éliminons les variables x_{ijt} qui sont nulles par (4.21), nous obtiendrons un système comportant autant de variables que de contraintes. En effet, une seule variables x_{ijt} , $i \in \Gamma_j^-$, peut prendre une valeur non nulle si le sommet j n'est pas racine, et ce, pour chaque période. Ceci est dû à la contrainte de radialité.

De plus, étant donnée la structure sous jacente au système d'équation, ce dernier est un système de Cramer, il possède alors une solution unique \bar{x} .

Ainsi, si $(SP.\bar{y})$ est réalisable, son domaine est réduit à un seul point \bar{x} .

Dans ce qui suit, nous exposons la procédure de résolution du sous problème.

Résolution du sous problème

1. Identifier les variables x_{ijt} forcées à prendre la valeur 0 à partir des contraintes (4.21).
2. Éliminer du système (4.22) ces variables x_{ijt} forcées à prendre la valeur 0 et évaluer celles qui restent, nous obtenons alors \bar{x} .
3. Si les contraintes (4.20) et (4.21) sont satisfaites alors le sous problème $(SP.\bar{y})$ est réalisable, sa solution optimale est \bar{x} et sa valeur optimale est $H(\bar{x}, \bar{y})$.
4. Si une des contraintes (4.20) et (4.21) n'est pas satisfaite, alors le sous problème $(SP.\bar{y})$ est non réalisable.

Remarques:

- À l'étape 2 de la résolution du sous problème, la façon d'évaluer \bar{x} est la suivante: nous considérons A_i^t une arborescence faisant partie du réseau à la période t et ayant i comme racine, alors pour tout $j \in A_i^t \cap J$, il existe un unique $k \in A_i^t$ tel que $\bar{x}_{kjt} \geq 0$ et \bar{x}_{kjt} est donnée par

$$\bar{x}_{kjt} = d_{jt} + \sum_{l \in \Gamma_j^+ \cap A_i^t} \bar{x}_{jlt}$$

- Si à l'étape 3 de la procédure, la réalisabilité du sous problème est vérifiée et que $v(\bar{y}) > \bar{y}_0$, (\bar{y}, \bar{y}_0) étant la solution optimale du problème maître relaxé, alors la contrainte à ajouter au problème maître est: $\inf_{x \in X} \{(H(x, y) + u^t G(x, y))\} \leq y_0$, où u est le multiplicateur optimal associé au sous problème $(SP.\bar{y})$. Nous appelons cette coupe "coupe réalisable" (référence au cas où le sous problème est réalisable).
- Si à l'étape 4 de la procédure, nous mettons en évidence le fait que le sous problème est non réalisable, alors il existe un $\lambda \in \Lambda$ tel que: $\inf_{x \in X} \{\lambda^t G(x, y)\} > 0$ et la contrainte nécessaire à introduire dans le problème maître est $\inf_{x \in X} \{\lambda^t G(x, y)\} \leq 0$. Nous appelons cette coupe "coupe non réalisable".

La génération des deux types de coupes exige que les multiplicateurs optimaux associés au sous problème soient connus et que nous résolvions des problèmes de minimisation. Les paragraphes suivants traiteront, entre autre, de la détermination des "coupes réalisables" et des "coupes non réalisables".

4.3 Détermination des coupes dans le cas où le sous problème est réalisable

Dans cette section, nous considérons le cas où le sous problème est réalisable.

Rappelons que la "coupe réalisable" est de la forme:

$$\inf_{x \in X} \{H(x, y) + u^t G(x, y)\} \leq y_0$$

L'évaluation de cette coupe nécessite la résolution d'un problème de minimisation sur X , cela est compliqué du fait que $H(x, y)$ est non séparable. Nous allons opter pour une approximation de la "coupe réalisable" telle que proposée dans la thèse de Benchakroun [12] c'est à dire la coupe devient:

$$H(\bar{x}, y) + u^t G(\bar{x}, y) \leq y_0$$

où \bar{x} est la solution optimale du sous problème $(SP.\bar{y})$.

Cette coupe constitue une sur-estimation de la valeur exacte de la coupe réalisable mais elle reste une bonne approximation. Elle entraîne éventuellement l'augmentation de la valeur optimale du problème maître relaxé, or cette valeur constitue une borne inférieure pour la valeur optimale du problème original, donc nous risquons d'avoir des bornes inférieures au problème original qui dépassent les bornes inférieures théoriques. Malgré cet inconvénient, elle aura l'avantage de diminuer le temps de calcul de la coupe réalisable. De plus, des tests effectués avec des coupes qui surestiment les coupes réalisables montrent que la coupe considérée est très proche de la coupe réelle [14], ce qui justifie ce choix. Notons également que Benchakroun et al [14] ont montré que cette approximation coïncide avec la coupe exacte dans le cas séparable.

4.3.1 Méthode de Karush-Khun-Tucker

Dans cette section nous construisons les coupes réalisables à notre problème en utilisant la méthode de Karush-Khun-Tucker. La construction de ces coupes nécessite la détermination des multiplicateurs optimaux associés à la solution optimale du sous problème. Le théorème 3.6 [12] confirme l'existence de tels multiplicateurs.

Soit \bar{x} la solution réalisable optimale unique de $(SP.\bar{y})$, désignons par p_{it} , l_{ijt} et a_{jt} les multiplicateurs associés respectivement aux contraintes (4.20), (4.21) et (4.22), alors p_{it} et l_{ijt} sont positifs alors que a_{jt} sont libres.

Remarques:

- Nous dérivons ces multiplicateurs à partir des conditions de Karush-Kuhn-Tucker. La solution à ces conditions n'est pas unique, pour cela nous considérons les multiplicateurs (vérifiant les conditions de K-K-T) et tel que les contraintes soient satisfaites avec stricte inégalité (pour les contraintes (4.20) et (4.21)).
- Les multiplicateurs peuvent être obtenus en cherchant les solutions optimales du dual du sous problème $(SP.\bar{y})$.
- Les sous problèmes de Benders sont fortement dégénérés, donc leurs duals admettent des solutions multiples, d'où la non unicité des multiplicateurs.

1. Conditions de complémentarité des variables:

$$p_{it} \left(\sum_{j \in \Gamma_i^+} \bar{x}_{ijt} - \sum_{c \in C} c \bar{\alpha}_{cit} \right) = 0; \quad i \in I, \quad t \in T$$

$$l_{ijt} (\bar{x}_{ijt} - \sum_{w \in \Omega} U_w \bar{\gamma}_{ijwt}) = 0; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T$$

Pour les arcs faisant partie de la solution, c'est à dire ceux pour les quels $\sum_{w \in \Omega} \bar{\gamma}_{ijwt} = 1$, on aura:

$$p_{it} = 0$$

$$l_{ijt} = 0$$

car les contraintes sont vérifiées avec stricte inégalité.

2. Conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker:

- Pour tout $(i, j) \in E$ tel que $i \in I, j \in J, t \in T$

$$- \text{ Si } \sum_{w \in \Omega} \bar{\gamma}_{ijwt} = 1$$

$$p_{it} + l_{ijt} + a_{jt} = -\frac{2\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{\bar{w}_{ij}} \bar{x}_{ijt}$$

où \bar{w} est tel que $\bar{\gamma}_{ij\bar{w}t} = 1$. Ce qui donne d'après 1. $p_{it} = l_{ijt} = 0$ et

$$a_{jt} = -\frac{2\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{\bar{w}_{ij}} \bar{x}_{ijt}$$

$$- \text{ Si } \sum_{w \in \Omega} \bar{\gamma}_{ijwt} = 0$$

$$p_{it} + l_{ijt} + a_{jt} \geq 0$$

Puisqu'il existe plusieurs vecteurs de multiplicateurs satisfaisant aux conditions de Karush-Kuhn-Tucker, nous pouvons choisir:

$$p_{it} = 0$$

$$l_{ijt} = -a_{jt}$$

- Pour tout $(i, j) \in E$ tel que $i \in J, j \in J$

$$- \text{ Si } \sum_{w \in \Omega} \bar{\gamma}_{ijwt} = 1$$

$$l_{ijt} - a_{it} + a_{jt} = -\frac{2\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{\bar{w}_{ij}} \bar{x}_{ijt}$$

où \bar{w} est tel que $\bar{\gamma}_{ij\bar{w}t} = 1$. Ce qui donne d'après 1. $l_{ijt} = 0$ et $a_{jt} - a_{it} =$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{\bar{w}_{ij}} \bar{x}_{ijt}$$

$$- \text{ Si } \sum_{w \in \Omega} \bar{\gamma}_{ijwt} = 0$$

$$p_{it} + l_{ijt} + a_{jt} \geq 0$$

Puisqu'il existe plusieurs vecteurs de multiplicateurs satisfaisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, nous pouvons choisir:

$$p_{it} = 0$$

$$l_{ijt} = |a_{it} - a_{jt}|$$

En résumé:

- $p_{it} = 0; \quad (i, j) \in E, \quad i \in I, j \in \Gamma_i^+, \quad t \in T.$
- $a_{jt} = -\frac{2\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{\bar{w}_{ij}} \bar{x}_{ijt}; \quad (i, j) \in E, \quad i \in I, \quad j \in J \quad \text{et} \quad \sum_{w \in \Omega} \bar{\gamma}_{ijwt} = 1$
- $a_{jt} = a_{it} - \frac{2\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{\bar{w}_{ij}} \bar{x}_{ijt}; \quad (i, j) \in E, \quad i \in J, \quad j \in J \quad \text{et} \quad \sum_{w \in \Omega} \bar{\gamma}_{ijwt} = 1$
- $l_{ijt} = \begin{cases} 0 & \text{si } (i, j) \in E \quad \text{et} \quad \sum_{w \in \Omega} \bar{\gamma}_{ijwt} = 1 \\ -a_{jt} & \text{si } (i, j) \in E, i \in I, j \in J \quad \text{et} \quad \sum_{w \in \Omega} \bar{\gamma}_{ijwt} = 0 \\ |a_{it} - a_{jt}| & \text{si } (i, j) \in E, i \in J, j \in J \quad \text{et} \quad \sum_{w \in \Omega} \bar{\gamma}_{ijwt} = 0 \end{cases}$

Ainsi, le vecteur des multiplicateurs optimaux $u = (p_{it}, l_{ijt})$ déterminé ci dessus est tel que:

$$H(\bar{x}, \bar{y}) + u^t G(\bar{x}, \bar{y}) > \bar{y}_0$$

où \bar{x} est solution optimale du sous problème $(SP.\bar{y})$.

Notons que même si nous utilisons l'approximation $H(\bar{x}, y) + u^t G(\bar{x}, y) \leq y_0$ plutôt que la vraie coupe $\inf_{x \in X} \{H(x, y) + u^t G(x, y)\} \leq y_0$, nous sommes certains de ne pas revenir à la même solution (\bar{y}, \bar{y}_0) lors de la résolution du problème maître.

En effet, soit (\bar{y}, \bar{y}_0) une solution optimale du problème maître. Le sous problème est réalisable et la "coupe réalisable" $H(\bar{x}, y) + u^t G(\bar{x}, y) \leq \bar{y}_0$ est ajoutée au problème maître (car $H(\bar{x}, \bar{y}) + u^t G(\bar{x}, \bar{y}) > \bar{y}_0$).

Supposons que (y^k, y_0^k) est la solution optimale du problème maître à une étape k .

Nous avons $y_0^k \geq \bar{y}_0$ car toutes les contraintes des "coupes réalisables" doivent être satisfaites.

Si $y_0^k = \bar{y}_0$, alors nous aurons $H(\bar{x}, \bar{y}) + u^t G(\bar{x}, \bar{y}) \leq y_0^k = \bar{y}_0$. Nous aboutissons à une contradiction (voir inégalité entre parenthèses). Donc $y_0^k \neq \bar{y}_0$.

Remarque:

Dans le cas où le sous problème est réalisable, la méthode de K-K-T nous a permis de construire des coupes réalisables. La question qui se pose naturellement est de savoir si ces coupes sont les meilleures que nous pouvons générer? Le paragraphe suivant répondra à cette question.

4.3.2 Coupes Paréto-optimales

La méthode de Benders a été appliquée avec succès pour une variété de problèmes (voir Florian et al. [43], Richardson [44], Geoffrion et Graves [45], Fisher et al. [46] ...).

Malheureusement, le degré de ce succès n'était pas le même pour toutes les applications. En effet, Wong [47], parmi d'autres, a observé que la mise en œuvre directe de l'algorithme de Benders pour des problèmes de "conception de réseau" converge lentement. Pour ce fait, il était nécessaire de chercher des techniques permettant d'accélérer la convergence de l'algorithme. Une de ces techniques a été proposée par Magnanti et Wong [48], elle est basée essentiellement sur un choix judicieux des multiplicateurs pour générer des coupes "meilleures" appelées coupes Paréto-optimales.

Dans ce qui suit nous proposons une façon de générer des coupes Paréto-optimales pour notre problème.

4.3.3 Génération des coupes Paréto-optimales

Pour générer des coupes Paréto-optimales, nous considérons le cas où le sous problème est réalisable. Rappelons que le sous problème de Benders associé à notre modèle est:

$$\begin{aligned}
 \min Z &= \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in S} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \tilde{\gamma}_{ijwt} x_{ijt}^2 \\
 \text{sujet à :} & \\
 \sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} &\leq \sum_{c \in C} c \bar{\alpha}_{cit}; \quad i \in I, \quad t \in T \\
 x_{ijt} &\leq \sum_{w \in \Omega} U_w \tilde{\gamma}_{ijwt}; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \\
 \sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} &= d_{jt}; \quad j \in J, \quad t \in T \\
 x_{ijt} &\geq 0
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Le sous problème est réalisable, désignons alors par \bar{x} sa solution optimale, alors le problème (4.23) est équivalent à:

$$\begin{aligned}
 \min Z &= \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in S} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \tilde{\gamma}_{ijwt} \bar{x}_{ijt} x_{ijt} \\
 \text{sujet à :} & \\
 \sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} &\leq \sum_{c \in C} c \bar{\alpha}_{cit}; \quad i \in I, \quad t \in T \\
 x_{ijt} &\leq \sum_{w \in \Omega} U_w \tilde{\gamma}_{ijwt}; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \\
 \sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} &= d_{jt}; \quad j \in J, \quad t \in T \\
 x_{ijt} &\geq 0
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Le dual de ce dernier sous problème est:

$$\begin{aligned}
\max V &= \sum_{t=1}^T [\sum_{j \in J} d_{jt} a_{jt} - (\sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in S} U_w \bar{\gamma}_{ijwt} l_{ijt} + \sum_{i \in I} \sum_{c \in C} c \bar{\alpha}_{cit} p_{it})] \\
\text{sujet à :} & \\
-p_{it} - l_{ijt} + a_{jt} &\leq \sum_{w \in S} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \bar{\gamma}_{ijwt} \bar{x}_{ijt} \quad i \in I, \quad j \in J, \quad t \in T \\
-l_{ijt} - a_{it} + a_{jt} &\leq \sum_{w \in S} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \bar{\gamma}_{ijwt} \bar{x}_{ijt} \quad i \in J, \quad j \in J, \quad t \in T \\
p_{it} &\geq 0 \quad i \in I, \quad t \in T \\
l_{ijt} &\geq 0 \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \\
a_{jt} &\in \mathbb{R} \quad j \in J, \quad t \in T
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Ce problème est de la forme:

$$\max_{u \in U} \{f(u) + \bar{y}g(u)\} \tag{4.26}$$

avec:

$$u = (p_{it}, l_{ijt}, a_{jt}), \quad \bar{y} = (\bar{\alpha}_{cit}, \bar{\gamma}_{ijwt}),$$

U est l'ensemble des contraintes du problème (4.25),

$$f(u) = \sum_{t=1}^T \sum_{j \in J} d_{jt} a_{jt} \quad \text{et} \quad g(u) = (-\sum_{t=1}^T \sum_{i \in I} p_{it} \sum_{c \in C} c, -\sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} l_{ijt} \sum_{w \in S} U_w).$$

Dans le paragraphe suivant nous définissons les coupes Paréto-optimales.

Définitions

- La coupe $f(u^1) + yg(u^1) \leq z$ **domine** la coupe $f(u^2) + yg(u^2) \leq z$ si pour tout y

$$f(u^1) + yg(u^1) \geq f(u^2) + yg(u^2);$$

et $f(u^1) + yg(u^1) > f(u^2) + yg(u^2)$; pour au moins un $y_0 \in Y$.

- Une coupe est dite **Paréto-optimale** si elle domine toutes les coupes.

Puisque une coupe est déterminée par le vecteur $u \in U$; nous pouvons dire que

- Le vecteur u^1 **domine** le vecteur u^2 si la coupe correspondante à u^1 domine la coupe correspondante à u^2 .
- Le vecteur u est **Paréto-optimal** si la coupe correspondante l'est aussi.

Le théorème qui suit propose une façon de générer les coupes Paréto-optimales parmi toutes les coupes.

4.3.4 Théorème[48]

Soit $\bar{y} \in Y$ quelconque, y^0 un vecteur qui appartient à l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe de Y , désignons par $U(\bar{y})$ l'ensemble des solutions optimales du problème:

$$\max_{u \in U} \{f(u) + \bar{y}g(u)\} \quad (4.27)$$

et soit u^0 une solution optimale du problème:

$$\max_{u \in U(\bar{y})} \{f(u) + y^0g(u)\} \quad (4.28)$$

alors, u^0 est Paréto-optimal.

Preuve:

Supposons que u^0 n'est pas Paréto-optimal, alors il existe un vecteur $\bar{u} \in U$ qui domine u^0 c'est à dire:

$$f(\bar{u}) + yg(\bar{u}) \geq f(u^0) + yg(u^0) \quad \forall y \in Y \quad (4.29)$$

donc

$$f(\bar{u}) + wg(\bar{u}) \geq f(u^0) + wg(u^0) \quad \forall w \in Y^c \quad (4.30)$$

où Y^c est l'enveloppe convexe de Y .

Pour établir cette dernière inégalité, rappelons que tout point $w \in Y^c$ peut s'écrire

$w = \sum_{j=1}^k \lambda_j y_j$, $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0$ pour un nombre fini de points y_1, \dots, y_k dans Y .

À partir de l'inégalité (4.29) avec $y = \bar{y}$, notons que \bar{u} doit être une solution optimale du problème (4.27), c'est à dire, $\bar{u} \in U(\bar{y})$. Mais (4.29) et (4.28) impliquent que:

$$f(\bar{u}) + y^0 g(\bar{u}) = f(u^0) + y^0 g(u^0). \quad (4.31)$$

Puisque \bar{u} domine u^0 ,

$$f(u^0) + \hat{y}g(u^0) < f(\bar{u}) + \hat{y}g(\bar{u}) \quad (4.32)$$

pour au moins un point $\hat{y} \in Y$. De plus, puisque y^0 appartient à l'intérieur relatif de Y^c , donc, il existe (voir Rockafellar [49], théorème 6.4) un scalaire $\Theta > 1$ tel que $w = \Theta y^0 + (1 - \Theta)\hat{y}$ appartient à Y^c . Multipliant l'équation (4.31) par Θ et l'équation (4.32) par $1 - \Theta$ (qui est négatif) et faisant la somme, on aura:

$$f(u^0) + wg(u^0) > f(\bar{u}) + wg(\bar{u}).$$

Mais cette inégalité est en contradiction avec (4.30), donc ce qu'on a supposé est faux. D'où u^0 est Paréto-optimal.

Remarques:

1. Si nous résolvons seulement le problème (4.27), nous obtenons les mêmes coupes que celles obtenues par la méthode de Karush-Kuhn-Tucker. Ces dernières ne sont pas nécessairement Paréto-optimales.
2. Une version particulière du théorème précédent mérite d'être mentionnée: Si U est le produit d'ensembles $U = U^1 \times U^2 \times \dots \times U^J$ et que f et g sont séparables additivement sur les ensembles U^j ; c'est à dire que $f(u) = \sum_{j=1}^J f_j(u_{(j)})$ et $g(u) = \sum_{j=1}^J g_j(u_{(j)})$ avec $u = (u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(J)})$, alors le sous problème (4.26) est séparable

et nous avons

$$\max_{u \in U} \{f(u) + \bar{y}g(u)\} = \sum_{j=1}^J \max_{u_{(j)} \in U^j} \{f_j(u) + \bar{y}g_j(u)\}$$

Donc, le fait de choisir u une des solutions optimales de (4.26) est équivalent à choisir $u_{(j)}$ comme solution optimale du problème $\max_{u_{(j)} \in U^j} \{f_j(u) + \bar{y}g_j(u)\}$. En conséquence, pour trouver une coupe Paréto-optimale, nous devons décomposer le sous problème en des sous problèmes indépendants et chercher l'optimum de chaque sous problème.

Le corollaire qui suit résume ce cas particulier:

Corollaire

Soit $y \in Y$, y^0 un vecteur qui appartient à l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe de Y et pour chaque $j = 1, 2, \dots, J$, soit $U^j(\bar{y})$, l'ensemble des solutions optimales du problème:

$$\max_{u_{(j)} \in U^j} \{f_j(u_{(j)}) + \bar{y}g_j(u_{(j)})\} \quad (4.33)$$

et soit u_j^0 la solution optimale du problème:

$$\max_{u_{(j)} \in U^j(\bar{y})} \{f_j(u_{(j)}) + y^0 g(u_{(j)})\} \quad (4.34)$$

alors, $u^0 = (u_{(1)}^0, u_{(2)}^0, \dots, u_{(J)}^0)$ est Paréto-optimal.

Revenons au problème (4.25).

Pour chaque $i \in I$ et $t \in T$, considérons A_{it} l'arborescence de racine i à la période t . Puisque le réseau des lignes doit être radial à chaque période, donc nous pouvons étudier chaque arborescence toute seule.

Dans ce sens, le problème (4.25) est séparable pour chaque $i \in I$ et $t \in T$.

Pour générer les coupes Paréto-optimales, nous appliquons le corollaire, soit y^0 un point

de l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe de Y , \bar{y} la configuration courante, $U^{it}(\bar{y})$ l'ensemble des solutions optimales du problème:

$$\begin{aligned}
\max V_{it} &= \left(\sum_{j \in A_{it}} d_{jt} a_{jt} - \left(\sum_{(k,j) \in A_{it}} \sum_{w \in S} U_w \bar{\gamma}_{kjw} l_{kjt} + \sum_{c \in C} c \bar{\alpha}_{cit} p_{it} \right) \right) \\
\text{sujet à :} & \\
-p_{it} - l_{ijt} + a_{jt} &\leq \sum_{w \in S} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \bar{\gamma}_{ijw} \bar{x}_{ijt}, \quad j \in A_{it}, \\
-l_{kjt} - a_{kt} + a_{jt} &\leq \sum_{w \in S} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wkj} \bar{\gamma}_{kjw} \bar{x}_{kjt}, \quad k \in A_{it}, \quad j \in A_{it}, \\
p_{it} &\geq 0 \\
l_{kjt} &\geq 0, \quad k, j \in A_{it} \\
a_{jt} &\in \mathbb{R}, \quad j \in A_{it}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Désignons par V_{it}^* sa valeur optimale.

Donc, si $u^0_{(it)}$ est la solution optimale du problème:

$$\begin{aligned}
\max V'_{it} &= \sum_{j \in A_{it}} d_{jt} a_{jt} - \left(\sum_{(k,j) \in A_{it}} \sum_{w \in S} U_w \gamma^0_{kjwt} l_{kjt} + \sum_{c \in C} c \alpha^0_{cit} p_{it} \right) \\
\text{sujet à :} & \\
V^*_{it} &= \sum_{j \in A_{it}} d_{jt} a_{jt} - \left(\sum_{(k,j) \in A_{it}} \sum_{w \in S} U_w \bar{\gamma}_{kjwt} l_{kjt} + \sum_{c \in C} c \bar{\alpha}_{cit} p_{it} \right) \\
-p_{it} - l_{ijt} + a_{jt} &\leq \sum_{w \in S} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \bar{\gamma}_{ijwt} \bar{x}_{ijt}, \quad j \in A_{it}, \\
-l_{kjt} - a_{kt} + a_{jt} &\leq \sum_{w \in S} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wkj} \bar{\gamma}_{kjwt} \bar{x}_{kjt}, \quad k, j \in A_{it}, \\
p_{it} &\geq 0 \\
l_{kjt} &\geq 0, \quad k, j \in A_{it} \\
a_{jt} &\in \mathbb{R}, \quad j \in A_{it}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

alors, $u^0 = (u^0_{(it)})_{i \in I, t \in T}$ est un vecteur Paréto-optimal pour notre problème original (problème de planification), avec $u^0_{(it)} = (a_{jt}, l_{kjt}, p_{it})$.

Ce problème se résoud facilement par le logiciel CPLEX.

4.4 Détermination des coupes dans le cas où le sous problème est non réalisable

Dans cette section, nous considérons le cas où le sous problème est **non réalisable**, c'est à dire au moins une des contraintes concernant la capacité des postes ou des lignes n'est pas satisfaite.

Rappelons que la "coupe non réalisable" est de la forme:

$$\inf_{x \in X} \{ \lambda^t G(x, \bar{y}) \} \leq 0.$$

Nous introduisons une procédure qui détermine un vecteur $\bar{\lambda} \in \Lambda$ vérifiant :

$$\inf_{x \in X} \{ \bar{\lambda}^t G(x, \bar{y}) \} > 0.$$

Cette coupe est suffisante dans le sens qu'elle élimine \bar{y} , elle réduit aussi le domaine réalisable des problèmes maîtres relaxés par l'ajout de cette contrainte.

La procédure que nous proposons est une adaptation de la méthode présentée dans [14]. L'idée de base de cette procédure est d'accorder un plus grand poids aux lignes ou aux postes ayant une contrainte violée afin de les forcer à faire partie d'une solution réalisable, de plus elle a l'avantage de déterminer les multiplicateurs sans avoir besoin de résoudre un problème d'optimisation.

Désignons par N l'ensemble des noeuds (postes ou points de charges) où il y a des problèmes de flot.

- $N = \{i \text{ est un poste où il y a un problème de flot à cause des transformateurs, ou } i \text{ est le noeud terminal d'une ligne où il y a un problème de flot sur cette ligne ou } i \text{ est sur un chemin où il y a un problème de flot sur une ligne et } i \text{ est un noeud successeur à cette ligne } \}$.

Posons:

$$\rho_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et soit:

- $\lambda_{it} = \rho_{it}, i \in I, t \in T.$
- $\lambda_{ijt} = (\rho_{jt} - \rho_{it})^+ = \max\{0, \rho_{jt} - \rho_{it}\}, (i, j) \in E, t \in T.$

Le théorème qui suit montre qu'un vecteur obtenu en normalisant λ est suffisant pour générer "une coupe non réalisable".

Avant de l'énoncer, remarquons que "la coupe non réalisable" définie par:

$$\inf_{x \in X} \{\lambda^t G(x, \bar{y})\} \leq 0$$

est équivalente à résoudre le problème (P_0) suivant:

$$\min Z_0 = \sum_{t \in T} [\sum_{i \in I} \lambda_{it} (\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} - \sum_{c \in C} c \bar{\alpha}_{cit}) + \sum_{(i,j) \in E} \lambda_{ijt} (x_{ijt} - \sum_{w \in \Omega} U_w \bar{\gamma}_{ijwt})]$$

sujet à :

(4.37)

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} = d_{jt}; \quad j \in J, \quad t \in T$$

$$x_{ijt} \geq 0; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T$$

Theorème[14]

Soit les multiplicateurs λ_{it} , et λ_{ijt} tel que définis précédemment. Alors:

- \bar{x} (valeur du flot obtenu à l'étape 2 dans la procédure de résolution du sous problème) est optimale pour le problème (P_0) .
- La valeur optimale Z_0^* du problème (P_0) est tel que $Z_0^* \geq 0$.

En utilisant le résultat de ce theoreme, "la coupe non réalisable" est de la forme :

$$\sum_{i,t} \lambda_{it} (\sum_{j \in \Gamma_i^+} \bar{x}_{ijt} - \sum_{c \in C} c \alpha_{cit}) + \sum_{i,j,t} \lambda_{ijt} (\bar{x}_{ijt} - \sum_{w \in S} U_w \gamma_{ijwt}) \leq 0.$$

avec λ_{it} et λ_{ijt} définis ci-dessus.

Dans le paragraphe suivant nous évaluons la pénalité ainsi que son coût.

4.5 Évaluation du coût de pénalité

Dans cette section, nous proposons une façon efficace pour évaluer la fonction de pénalité ainsi que son coût. Pour cela nous considérons le problème $(\bar{P}.\bar{y})$ pour un scénario s :

$$\min \tilde{Z} = \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} e_{it} s_{it} + \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in E} e_{ijt} s_{ijt} \quad (4.38)$$

sujet à :

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} - s_{it} \leq \sum_{c \in C} c \bar{\alpha}_{cit}; \quad i \in I, \quad t \in T \quad (4.39)$$

$$x_{ijt} - s_{ijt} \leq \sum_{w \in \Omega} U_w \bar{\gamma}_{ijwt}; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \quad (4.40)$$

$$x_{ijt} + s_{ijt} \leq M \sum_{w \in \Omega} U_w \bar{\gamma}_{ijwt}; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T \quad (4.41)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} = d_{jts}; \quad j \in J, \quad t \in T \quad (4.42)$$

$$s_{it} \geq 0; \quad i \in I, \quad t \in T$$

$$s_{ijt} \geq 0; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T$$

$$x_{ijt} \geq 0; \quad (i, j) \in E, \quad t \in T$$

Dans le paragraphe suivant, les solutions du problème $(\bar{P}.\bar{y})$ seront indexées par s , et ce, pour référer au scénario s .

4.5.1 Résolution du problème $(\bar{P}.\bar{y})$

Remarquons que $(\bar{P}.\bar{y})$ est toujours réalisable.

La résolution du problème $(\bar{P}.\bar{y})$ est similaire à celle du problème $(SP.\bar{y})$, elle se résume par la procédure suivante:

- Par les contraintes (4.40) et (4.41), nous déterminons les variables x_{ijts} et s_{ijts} qui sont égales à 0, (en effet, si $\bar{\gamma}_{ijwt} = 0$ alors $x_{ijts} = s_{ijts} = 0$).

- Du système (4.42), nous éliminons les variables nulles, et nous évaluons celles qui restent, nous obtenons \bar{x}_s .
- Puisque le problème $(\bar{P}.\bar{y})$ est un problème de minimisation, en utilisant respectivement les contraintes (4.39) et (4.40), nous obtenons:

$$\bar{s}_{its} = \max\left\{0, \sum_{j \in \Gamma_i^+} \bar{x}_{ijts} - \sum_{c \in C} c\bar{\alpha}_{cit}\right\}$$

et

$$\bar{s}_{ijts} = \max\left\{0, \bar{x}_{ijts} - \sum_{w \in \Omega} U_w \bar{\gamma}_{ijwt}\right\}.$$

Cette solution permet de calculer la pénalité ainsi que sont coût.

En effet, il suffit juste de remplacer \bar{s}_{its} et \bar{s}_{ijts} par leurs valeurs dans les expressions suivantes:

$$D_s(\bar{y}) = \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} e_{it} \bar{s}_{its} + \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in E} e_{ijt} \bar{s}_{ijts}$$

et

$$c_p(\bar{y}) = \sum_{s=1}^N p_s D_s(\bar{y}).$$

4.6 Résolution du problème maître

Dans cette section nous considérons la résolution du problème maître. Tel qu'explicité dans la section (4.1), ce problème s'écrit sous la forme compacte suivante:

$$\min Z = F(y) + c_p(y) + y_0$$

$$\text{sujet à :} \tag{4.43}$$

$$\inf_{x \in X} \{H(x, y) + u^t G(x, y)\} \leq y_0, \quad \forall u \geq 0 \tag{4.44}$$

$$\inf_{x \in X} \{\lambda^t G(x, y)\} \leq 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda \tag{4.45}$$

$$y \in Y \tag{4.46}$$

$$y_0 \in \mathbb{R} \tag{4.47}$$

où $Y = \{y, \text{vérifiant les contraintes (4.5) à (4.18)}\}$.

Ce problème joue un rôle très important dans la méthode de décomposition de Benders, puisque c'est lui qui détermine la structure du réseau, sa résolution demande le plus d'efforts dans toute la méthode. Ce dernier est un problème qui possède beaucoup de contraintes, de plus il possède dans son objectif la composante de pénalité qui n'a pas une forme explicite correspondant au coût de pénalité. Pour contourner la première difficulté, nous utilisons l'approche de relaxation qui consiste à générer les coupes au fur et à mesure que cela s'avère nécessaire. Ainsi, les contraintes du problème maître sont relaxées et certaines vont être introduites progressivement au cours de sa résolution.

Le problème maître relaxé est le suivant:

$$\begin{aligned}
 & \min F(y) + c_p(y) + y_0 \\
 & \text{sujet à:} \\
 & \inf_{x \in X} \{H(x, y) + u^{j^t} G(x, y)\} \leq y_0; \quad \forall j = 1, \dots, p \\
 & \inf_{x \in X} \{\lambda^{j^t} G(x, y)\} \leq 0; \quad \forall j = 1, \dots, q \\
 & y \in Y, y_0 \in \mathbb{R}
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Quant à la deuxième difficulté concernant l'expression du coût de pénalité, nous allons la traiter dans le paragraphe suivant.

4.6.1 Transformation du problème maître relaxé

Dans cette section, nous proposons une formulation équivalente du problème maître relaxé qui permet de contourner la difficulté reliée au fait que $c_p(y)$ n'a pas une forme explicite. Comme nous l'avons supposé précédemment, nous avons N scénarios tels que la probabilité de réalisation de chaque scénario est p_s .

Rappelons que $c_p(y) = \sum_{s=1}^N p_s D_s(y)$ où $D_s(y)$ est la valeur optimale du problème:

$$\begin{aligned}
\min \tilde{Z} &= \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} e_{it} s_{it} + \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in E} e_{ijt} s_{ijt} \\
\text{sujet à :} & \\
\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} - s_{it} &\leq \sum_{c \in C} c \alpha_{cit}; \quad i \in I, \quad t \in T \\
x_{ijt} - s_{ijt} &\leq \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}; \quad (i,j) \in E, \quad t \in T \\
x_{ijt} + s_{ijt} &\leq M \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}; \quad (i,j) \in E, \quad t \in T \\
\sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} &= d_{jts}; \quad j \in J, \quad t \in T \\
s_{it} &\geq 0; \quad i \in I, \quad t \in T \\
s_{ijt} &\geq 0 \quad (i,j) \in E, \quad t \in T \\
x_{ijt} &\geq 0 \quad (i,j) \in E, \quad t \in T.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Soit y^l une configuration donnée, le dual du problème précédent associé au scénario s est:

$$\begin{aligned}
\max \tilde{V} &= \sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c \alpha_{cit}^l \zeta_{its} + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}^l (\zeta_{ijts} \\
&+ M \tilde{\zeta}_{ijts}) + \sum_{t \in T, j \in J} d_{jts} a_{jts} \\
\text{sujet à :} & \\
-\zeta_{its} &\leq e_{it} \quad i \in I, \quad t \in T \\
-\zeta_{ijts} + \tilde{\zeta}_{ijts} &\leq e_{ijt}; \quad (i,j) \in E, \quad t \in T \\
\zeta_{its} + \zeta_{ijts} + \tilde{\zeta}_{ijts} + a_{jts} - a_{its} &\leq 0; \quad (i,j) \in E, i \in \Gamma_j^-, \quad t \in T \\
\zeta_{its} &\leq 0; \quad i \in I, \quad t \in T \\
\zeta_{ijts} &\leq 0; \quad (i,j) \in E, \quad t \in T \\
\tilde{\zeta}_{ijts} &\leq 0; \quad (i,j) \in E, \quad t \in T \\
a_{jts} &\in \mathbb{R}; \quad j \in J, \quad t \in T
\end{aligned} \tag{4.50}$$

D'après le théorème de dualité forte en programmation linéaire, nous avons à l'optimum:

$$\begin{aligned}
\sum_{t \in T, i \in I} e_{it} s_{it}^l + \sum_{t \in T, (i,j) \in E} e_{ijt} s_{ijt}^l &= \sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c \alpha_{cit}^l \zeta_{its}^l + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}^l (\zeta_{ijts}^l \\
&+ M \tilde{\zeta}_{ijts}^l) + \sum_{t \in T, j \in J} d_{jts} a_{jts}^l \\
&= D_s(y^l)
\end{aligned}$$

où (s_{it}^l, s_{ijt}^l) et $(\zeta_{its}^l, \zeta_{ijts}^l, \tilde{\zeta}_{ijts}^l, a_{jts}^l)$ sont respectivement les solutions optimales du primal et du dual.

Puisque la troisième contrainte du problème (4.49) est toujours vérifiée à l'optimum avec stricte inégalité, alors la variable duale correspondante $\tilde{\zeta}$ est nulle.

Notons que les contraintes dans le problème dual sont indépendantes de y , donc pour un y quelconque et son vecteur optimal $(\zeta_{its}(y), \zeta_{ijts}(y), a_{jts}(y))$ nous avons:

$$\begin{aligned}
D_s(y) &= \sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c \alpha_{cit} \zeta_{its}(y) + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt} \zeta_{ijts}(y) + \sum_{t \in T, j \in J} d_{jts} a_{jts}(y) \\
&\geq \sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c \alpha_{cit}^l \zeta_{its}^l + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}^l \zeta_{ijts}^l + \sum_{t \in T, j \in J} d_{jts} a_{jts}^l
\end{aligned}$$

car $(\zeta_{its}^l, \zeta_{ijts}^l, a_{jts}^l)$ est réalisable pour le dual.

La dernière inégalité s'écrit aussi:

$$D_s(y) \geq D_s(y^l) + \sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c (\alpha_{cit} - \alpha_{cit}^l) \zeta_{its}^l + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w (\gamma_{ijwt} - \gamma_{ijwt}^l) \zeta_{ijts}^l$$

En faisant la somme sur tous les scénarios moyennant la probabilité p_s , nous obtiendrons la contrainte en y^l :

$$c_p(y) \geq c_p(y^l) + \sum_{s \in S} p_s \left[\sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c (\alpha_{cit} - \alpha_{cit}^l) \zeta_{its}^l + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w (\gamma_{ijwt} - \gamma_{ijwt}^l) \zeta_{ijts}^l \right]$$

En posant $\tilde{\theta} = c_p(y)$, et soit $\{y^l\}_{\{l \geq 1\}}$ la suite des points (configurations) obtenues à une itération donnée. Nous précisons plus loin comment obtenir cette suite. Les contraintes

construites en ces points sont utilisées pour définir des contraintes du problème maître relaxé équivalent appelé PMRE:

$$\begin{aligned}
& \min F(y) + \tilde{\theta} + y_0 \\
& \text{sujet à:} \\
& c_p(y^l) + \sum_{s \in S} p_s \left[\sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c(\alpha_{cit} - \alpha_{cit}^l) \zeta_{its}^l \right. \\
& \left. + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w(\gamma_{ijwt} - \gamma_{ijwt}^l) \zeta_{ijts}^l \right] \leq \tilde{\theta}, l \geq 1 \\
& \inf_{x \in X} \{ (H(x, y) + u^{jt} G(x, y)) \} \leq y_0; \quad \forall j = 1, \dots, p \\
& \inf_{x \in X} \{ \lambda^{jt} G(x, y) \} \leq 0; \quad \forall j = 1, \dots, q \\
& y \in Y, \quad y_0 \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\theta} \in \mathbb{R}^+
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Ce problème équivalent possède beaucoup de contraintes, pour le résoudre nous utilisons de nouveau l'approche de relaxation, nous introduisons progressivement les premières contraintes du problème (4.51) jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait.

Le problème maître relaxé équivalent relaxé PMRE-R est:

$$\begin{aligned}
& \min F(y) + \tilde{\theta} + y_0 \\
& \text{sujet à:} \\
& c_p(y^l) + \sum_{s \in S} p_s \left[\sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c(\alpha_{cit} - \alpha_{cit}^l) \zeta_{its}^l \right. \\
& \left. + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w(\gamma_{ijwt} - \gamma_{ijwt}^l) \zeta_{ijts}^l \right] \leq \tilde{\theta}, l = 1, \dots, L \\
& \inf_{x \in X} \{ (H(x, y) + u^{jt} G(x, y)) \} \leq y_0; \quad \forall j = 1, \dots, p \\
& \inf_{x \in X} \{ \lambda^{jt} G(x, y) \} \leq 0; \quad \forall j = 1, \dots, q \\
& y \in Y, \quad y_0 \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\theta} \in \mathbb{R}^+
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Remarques:

- La valeur optimale obtenue en résolvant le PMRE-R est une borne inférieure \underline{z} de PMR tandis que $\min_{\{l=1, \dots, L\}} \{ F(y^l) + c_p(y^l) + y_0^l \}$ est une borne supérieure \bar{z} .
- À une étape l , la précision de l'approximation de la solution est donnée par la marge $\Delta = \bar{z} - \underline{z}$.

Les questions qui se posent sont:

- Comment construire cette suite $\{y^l\}$ à une itération quelconque de l'algorithme de Benders?
- Quel est le critère d'arrêt que nous allons utiliser?

Les réponses sont les suivantes:

- Supposons que nous sommes à l'itération k de l'algorithme de Benders. Nous construisons la suite $\{y^{kl}\}$ comme suit: $y^{k1} = y^k$,
 y^{k2} est la solution optimale du PMRE-R1 (PMRE + contrainte en y^{k1}), ...
 y^{kl} sera la solution optimale du PMRE-R(l-1) (PMRE + contraintes en $y^{k1}, \dots, y^{k(l-1)}$).
- Nous arrêtons de générer ces contraintes quand $\Delta^k = \bar{z}^k - \underline{z}^k < \epsilon$ où ϵ est une variable de tolérance donnée d'avance, \bar{z}^k et \underline{z}^k désignent respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de la valeur optimale du PMR à une étape k de l'algorithme de Benders.

L'algorithme suivant résume la démarche que nous proposons. Cet algorithme est une variante de la méthode décomposition de Benders.

4.6.2 Algorithme général de résolution

- **DBG₁: Initialisation**

Soit $k = 1$, y^k une configuration initiale réalisable. Poser:

C_r : l'ensemble d'indices des coupes "réalisables"; $C_r = \emptyset$

C_n : l'ensemble d'indices des coupes "non réalisables"; $C_n = \emptyset$

Z_i : la borne inférieure de la fonction objectif; $Z_i = -\infty$

Z_s : la borne supérieure de la fonction objectif; $Z_s = +\infty$

$\epsilon > 0$: un niveau de tolérance donné.

- **DBG₂: Calcul de $c_p(y^k)$**

Pour chaque scénario $s \in S$, résoudre le problème:

$$\begin{aligned}
 \min \tilde{Z} &= \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} e_{it} s_{it} + \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in E} e_{ijt} s_{ijt} \\
 \text{sujet à:} & \\
 \sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} - s_{it} &\leq \sum_{c \in C} c \alpha_{cit}^k; \quad i \in I, \quad t \in T \\
 x_{ijt} - s_{ijt} &\leq \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}^k; \quad (i,j) \in E, \quad t \in T \\
 x_{ijt} + s_{ijt} &\leq M \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}^k; \quad (i,j) \in E, \quad t \in T \\
 \sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} &= d_{jts}^k; \quad j \in J, \quad t \in T, s \in S \\
 s_{it}, s_{ijt} &\geq 0;
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

évaluer sa valeur optimale $D_s(y^k)$ ainsi que $c_p(y^k)$ et aller à **DBG₃**.

- **DBG₃: Résolution du sous problème et génération des coupes réalisables**

Résoudre (**SP_{y^k}**):

$$\begin{aligned}
 \min Z(x) &= H(x, y^k) \\
 \text{sujet à:} & \\
 \sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt} &\leq \sum_{c \in C} c \alpha_{cit}^k; \quad i \in I, \quad t \in T \\
 x_{ijt} &\leq \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}^k; \quad (i,j) \in E, \quad t \in T \\
 \sum_{i \in \Gamma_j^-} x_{ijt} - \sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{jit} &= d_{jts}^k; \quad j \in J, \quad t \in T \\
 x_{ijt} &\geq 0
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Si (**SP_{y^k}**) n'est pas réalisable, aller à **DBG₄**;

Sinon, soit $C_r = C_r \cup \{k\}$, et p_{it}^k, l_{ijt}^k les multiplicateurs associés respectivement aux deux premières contraintes du sous problème,

soit x^k une solution optimale de (SP_{y^k}) , $Z_s = \min\{Z_s, H(x^k, y^k) + F(y^k) + c_p(y^k)\}$
et aller à DBG_5 .

• **DBG_4 : Génération des coupes non réalisables:**

Définir l'ensemble N où il y a problème de flot.

Soit $\rho_{it} = 1$ si $i \in N$ et 0 sinon.

Poser $\lambda_{it} = \rho_{it}$, $i \in I$, $t \in T$.

et

$\lambda_{ijt} = [\rho_{jt} - \rho_{it}]^+$ ($i, j \in E$, $t \in T$).

Aller à DBG_5 .

• **DBG_5 : Résolution du problème maître**

Pour résoudre le problème maître relaxé (PMR):

$$\begin{aligned} & \min F(y) + c_p(y) + y_0 \\ & \text{sujet à :} \\ & H(x^k, y) + \sum_{i,j,t} l_{ijt}^m (x_{ijt}^k - \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}) \leq y_0; \quad m \in C_r, \\ & \sum_{i,t} \lambda_{it}^m \left(\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt}^k - \sum_{c \in C} c \alpha_{cit} \right) + \sum_{i,j,t} \lambda_{ijt}^m (x_{ijt}^k - \sum_{w \in S} U_w \gamma_{ijwt}) \leq 0; m \in C_n, \quad (4.55) \\ & y_0 \in \mathbb{R}, \quad y \in Y \end{aligned}$$

résoudre le PMRE-R:

$$\begin{aligned} & \min F(y) + \tilde{\theta} + y_0 \\ & \text{sujet à :} \\ & c_p(y^l) + \sum_{s \in S} p_s \left[\sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c (\alpha_{cit} - \alpha_{cit}^{kl}) \zeta_{its}^{kl} \right. \\ & \left. + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w (\gamma_{ijwt} - \gamma_{ijwt}^{kl}) \zeta_{ijts}^{kl} \right] \leq \tilde{\theta}; l = 1 \dots L \\ & H(x^k, y) + \sum_{i,j,t} l_{ijt}^m (x_{ijt}^k - \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}) \leq y_0; \quad m \in C_r, \quad (4.56) \\ & \sum_{i,t} \lambda_{it}^m \left(\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt}^k - \sum_{c \in C} c \alpha_{cit} \right) + \sum_{i,j,t} \lambda_{ijt}^m (x_{ijt}^k - \sum_{w \in S} U_w \gamma_{ijwt}) \leq 0; m \in C_n, \\ & y_0 \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\theta} \in \mathbb{R}^+, \quad y \in Y \end{aligned}$$

Soit $(y^{kl}, y_0^{kl}, \tilde{\theta}^k)$ la solution optimale du PMRE-R.

Soit $(y^{k+1}, y_0^{k+1}) = (y^{kl}, y_0^{kl})$ et $Z_i = \max\{Z_i, F(y^{k+1}) + c_p(y^{k+1}) + y_0^{k+1}\}$

- *DBG*₅: Critère D'arrêt

Si $|Z_i - Z_s| \leq \epsilon$ alors (x^k, y^{k+1}) est une solution ϵ -optimale; sinon aller à *DBG*₃.

4.6.3 Résolution du problème maître relaxé équivalent

Pour résoudre le problème maître relaxé équivalent, nous proposons deux approches.

Résolution directe par CPLEX:(Branch-and-Bound)

Le problème maître relaxé équivalent est un problème linéaire mixte. Pour sa résolution, plusieurs logiciels sont disponibles. Pour notre part nous avons choisi le logiciel CPLEX. Le choix est motivé par le fait que ce logiciel est disponible sur les machines SUN, facile à utiliser, de plus il est conçu pour résoudre des problèmes de programmation linéaire mixte de taille moyenne.

Le paragraphe suivant décrit une autre méthode qui résout le problème maître relaxé équivalent et qui met en évidence la structure de réseau.

Relaxation lagrangienne

Rappelons que c'est le problème maître qui détermine la structure du réseau. Pour mettre cette structure en évidence lors de la résolution, nous appliquons la méthode de relaxation lagrangienne. Nous conservons les contraintes qui déterminent le réseau et nous envoyons les autres dans la fonction économique.

L'expression du problème maître relaxé équivalent est la suivante:

$$\min f_1(\alpha) - f_2(\beta) + f_3(\gamma) + \tilde{\theta} + y_0$$

sujet à :

$$c_p(y^l) + \left[\sum_{s \in S} p_s \left(\sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c(\alpha_{cit} - \alpha_{cit}^{kl}) \zeta_{its}^{kl} + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w (\gamma_{ijwt} - \gamma_{ijwt}^{kl}) \zeta_{ijts}^{kl} \right) \right] \leq \tilde{\theta};$$

$$l = 1 \dots L$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in \Omega} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \gamma_{ijwt} x_{ijt}^k + \sum_{i,j,t} l_{ijt}^m (x_{ijt}^k - \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}) \leq y_0; \quad m \in C_r,$$

$$\sum_{i,t} \lambda_{it}^m \left(\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt}^k - \sum_{c \in C} c \alpha_{cit} \right) + \sum_{i,j,t} \lambda_{ijt}^m (x_{ijt}^k - \sum_{w \in S} U_w \gamma_{ijwt}) \leq 0; m \in C_n,$$

$$\sum_{c \in C} \alpha_{cit} \leq b_i; \quad i \in I, \quad t \in T$$

$$\alpha_{cit} \geq \alpha_{cit-1}; \quad c \in C, \quad i \in I, \quad t \in T - \{0\}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{c \in C} c \alpha_{cit} \geq \sum_{j \in J} d_{jt} \quad t \in T$$

$$\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt} \leq 0, \quad (i,j) \in E, w \in \Omega, t \in T - \{0\}$$

$$\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt-1} - \gamma_{jiwt-1} \leq 0, \quad (i,j) \in F, w \in \Omega, t \in T - \{0\}$$

$$\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt-1} \leq 0, \quad (i,j) \in \bar{F}, w \in \Omega, t \in T - \{0\}$$

$$\alpha_{cit} = 0, 1, \dots, b_i; \quad i \in I, \quad c \in C, \quad t \in T$$

$$\beta_{ijwt} = 0 \text{ ou } 1, (i,j) \in E, w \in \Omega, t \in T - \{0\}$$

$$\gamma \in \hat{\Gamma}$$

(4.57)

avec:

$$C_r = \{1, \dots, p\}$$

$$C_n = \{1, \dots, q\}$$

$$f_1(\alpha) = P_f(\alpha) + P_e(\alpha)$$

$$f_3(\gamma) = L_e(\gamma) + f_1(\gamma)$$

$\hat{\Gamma}$: l'ensemble des contraintes suivantes:

$$\sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} + \sum_{w \in \Omega} \gamma_{jiwt} \leq 1; \quad (i,j) \in F, \quad t \in T$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \leq 1; \quad j \in J, \quad t \in T$$

$$\sum_i \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \geq \sum_k \sum_{w \in \Omega} \gamma_{jkwt} \quad j \in J, t \in T$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} = 1; \quad j \in J_t, \quad t \in T$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^+} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \leq M' \sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \quad j \in J - J_t, \quad t \in T$$

$$\gamma_{ijwt} = 0 \quad \text{ou} \quad 1, (i, j) \in E, w \in \Omega, t \in T$$

Remarque:

La structure d'arborescence est dûe aux contraintes $\gamma \in \hat{\Gamma}$.

Posons:

$$L(y, \zeta^l) = c_p(y^l) + \left[\sum_{s \in S} p_s \left(\sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c(\alpha_{cit} - \alpha_{cit}^{kl}) \zeta_{its}^{kl} + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w (\gamma_{ijwt} - \gamma_{ijwt}^{kl}) \zeta_{ijts}^{kl} \right) \right] - \tilde{\theta}$$

$$L_1(y, l^k) = \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in \Omega} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \gamma_{ijwt} (x_{ijt}^k)^2 + \sum_{(i,j) \in E, t \in T} l_{ijt}^k (x_{ijt}^k - \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}) - y_0$$

$$L_2(y, \lambda^k) = \sum_{i \in I, t \in T} \lambda_{it}^k \left(\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt}^k - \sum_{c \in C} c \alpha_{cit} \right) + \sum_{(i,j) \in E, t \in T} \lambda_{ijt}^k \left(x_{ijt}^k - \sum_{w \in S} U_w \gamma_{ijwt} \right)$$

avec les nouvelles notations, le problème devient:

$$\min z = f_1(\alpha) - f_2(\beta) + f_3(\gamma) + \tilde{\theta} + y_0$$

sujet à :

$$L(y, \zeta^l) \leq 0 \quad l = 1, \dots, L \quad (4.58)$$

$$L_1(y, l^k) \leq 0, \quad k = 1, \dots, p \quad (4.59)$$

$$L_2(y, \lambda^k) \leq 0, \quad k = 1, \dots, q \quad (4.60)$$

$$\sum_{c \in C} \alpha_{cit} \leq b_i; \quad i \in I, \quad t \in T \quad (4.61)$$

$$\alpha_{cit} - \alpha_{cit-1} \geq 0; \quad c \in C, \quad i \in I, \quad t \in T - \{0\} \quad (4.62)$$

$$\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt} \leq 0, \quad (i, j) \in E, w \in \Omega, t \in T - \{0\} \quad (4.63)$$

$$\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt} - \gamma_{jiwt} \leq 0, \quad (i, j) \in F, w \in \Omega, t \in T - \{0\} \quad (4.64)$$

$$\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt-1} \leq 0, \quad (i, j) \in \bar{F}, w \in \Omega, t \in T - \{0\} \quad (4.65)$$

$$\beta_{ijwt} = 0 \quad \text{ou} \quad 1, (i, j) \in E, w \in \Omega, t \in T - \{0\} \quad (4.66)$$

$$\alpha_{cit} \in N \quad (4.67)$$

$$y_0 \in \mathbb{R} \quad (4.68)$$

$$\tilde{\theta} \in \mathbb{R}^+ \quad (4.69)$$

$$\gamma \in \hat{\Gamma} \quad (4.70)$$

Soit $\eta_l, \mu_k, \nu_k, \tau_{ijwt}^1, \tau_{ijwt}^2$ et τ_{ijwt}^3 , les multiplicateurs associés respectivement aux con-

traintes (4.58)-(4.60) et (4.63)-(4.65). La relaxation lagrangienne du problème maître relaxé équivalent donne:

$$\begin{aligned}
\min z = & y_0 + \tilde{\theta} + f_1(\alpha) + f_3(\gamma) - f_2(\beta) + \tilde{\theta} + \sum_{k=1}^{p+q} \sum_{l=1}^L \eta_l L(y, \zeta^l) + \sum_{k=1}^p \mu_k L_1(y, l^k) \\
& + \sum_{k=1}^q \nu_k L_2(y, \lambda^k) + \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in \Omega} \tau_{ijwt}^1 (\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt}) \\
& + \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in F} \sum_{w \in \Omega} \tau_{ijwt}^2 (\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt} - \gamma_{jiwt}) \\
& + \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in \bar{F}} \sum_{w \in \Omega} \tau_{ijwt}^3 (\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt-1})
\end{aligned}$$

sujet à :

(4.71)

$$\begin{aligned}
\sum_{c \in C} \alpha_{cit} & \leq b_i; \quad i \in I, \quad t \in T \\
\alpha_{cit} - \alpha_{cit-1} & \geq 0; \quad c \in C, \quad i \in I, \quad t \in T - \{0\} \\
\beta_{ijwt} & = 0 \quad \text{ou} \quad 1, \quad (i,j) \in E, \quad w \in \Omega, \quad t \in T - \{0\} \\
\alpha_{cit} & \in N \\
\gamma & \in \hat{\Gamma} \\
y_0 & \in \mathbb{R} \\
\tilde{\theta} & \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

Pour obtenir la meilleure borne inférieure du problème maître relaxé équivalent, nous

résolvons le dual lagrangien suivant:

$$\begin{aligned} & \max[V(4.71)] \\ & \text{sujet à :} \\ & \eta \geq 0 \\ & \mu \geq 0 \\ & \nu \geq 0 \\ & \tau_{ijwt}^1 \geq 0 \\ & \tau_{ijwt}^2 \geq 0 \\ & \tau_{ijwt}^3 \geq 0 \end{aligned} \tag{4.72}$$

où $[V(4.71)]$ est la valeur optimale du problème (4.71).

Cependant, il existe en général une marge duale entre les valeurs optimales du primal et du dual. Pour évaluer l'écart, nous cherchons la borne supérieure du problème maître relaxé équivalent. Nous obtenons une telle borne en construisant une solution réalisable de ce problème.

Remarques:

- La solution obtenue par la relaxation lagrangienne peut ne pas être réalisable pour le problème maître relaxé équivalent.
- La valeur optimale du problème maître relaxé est bornée inférieurement par la valeur optimale de la relaxation lagrangienne et bornée supérieurement par la valeur du problème maître relaxé équivalent évaluée en une solution réalisable. Donc, pour que l'intervalle entre les deux bornes soit assez petit, nous essayerons de construire la solution réalisable à partir de la solution optimale de la relaxation lagrangienne.

Pour résoudre le dual lagrangien, nous utilisons la méthode du sous gradient. Cette méthode nous conduit à résoudre le problème (4.71), ce dernier est séparable (fonction

objectif et contraintes), nous le décomposons alors en trois sous problèmes: un premier sous-problème en α_{cit} , un deuxième en β_{ijwt} et un dernier en γ_{ijwt} que nous pouvons résoudre facilement.

Sous problème en α_{cit} :

Le sous problème en α_{cit} obtenu après la décomposition du problème de la relaxation lagrangienne est le suivant:

(P_α) :

$$\min z = \sum_{t=1}^T \sum_{c \in C} \sum_{i \in I} [(K_{cit} + E_{cit} + \sum_{k=1}^{p+q} \sum_{s=1}^N \sum_{l=1}^L cp_s c_{its}^{kl}) \alpha_{cit} - K_{cit} \alpha_{cit-1}]$$

sujet à :

(4.73)

$$\sum_{c \in C} \alpha_{cit} \leq b_i; \quad i \in I, \quad t \in T$$

$$\alpha_{cit} - \alpha_{cit-1} \geq 0; \quad c \in C, \quad i \in I, \quad t \in T - \{0\}$$

$$\alpha_{cit} \in \mathbb{N}$$

Malgré le fait que le sous problème (P_α) présente un aspect dynamique, ce dernier n'a pas d'effet sur sa résolution puisque l'objectif et les contraintes sont linéaires. Le sous problème (P_α) est un problème linéaire en nombre entier de taille relativement petite, l'approche de résolution la plus adéquate sera alors la méthode de branch-and-bound et le logiciel utilisé sera CPLEX.

Sous problème en β_{ijwt} :

Le sous problème en β_{ijwt} obtenu après la décomposition du problème de la relaxation lagrangienne est le suivant:

(P_β) :

$$\min z = \sum_{t=1}^T \sum_{w \in S} [\sum_{(i,j) \in E} (K'_{wt} l_{ij} + \sum_{(i,j) \in F} (\tau_{ijwt}^1 + \tau_{ijwt}^2)) + \sum_{(i,j) \in \bar{F}} (\tau_{ijwt}^1 + \tau_{ijwt}^3)] \beta_{ijwt}$$

sujet à :

(4.74)

$$\beta_{ijwt} = 0 \quad \text{ou} \quad 1$$

Le sous problème (P_β) est linéaire à variables binaires, les coefficients des variables β_{ijwt} sont connus donc sa résolution est triviale. En effet:

- Si le coefficient de β_{wijt} est positif ou nul, alors $\beta_{ijwt} = 0$.
- Si le coefficient de β_{wijt} est négatif, alors $\beta_{ijwt} = 1$.

Le dernier sous problème est celui en γ_{ijwt} , nous l'avons laissé en dernier car sa résolution demande plus d'efforts.

Sous problème en γ_{ijwt} :

À part les variables γ_{ijwt} , le sous problème (P_γ) traite aussi les variables y_0 et $\tilde{\theta}$, ainsi que les termes constants provenant du problème de la relaxation lagrangienne.

Le sous problème en γ_{ijwt} est le suivant:

$$\begin{aligned}
\min z = & (1 - \sum_{k=1}^p \mu^k) y_0 + (1 - \sum_{k=1}^{p+q} \sum_{l=1}^L \eta^{lk}) \tilde{\theta} \\
& + [\sum_{(i,j) \in F} \sum_{w \in S} (-\tau_{ijw1}^2 - \tau_{jiw1}^2 + \sum_{s=1}^N \sum_{k=1}^{p+q} \sum_{l=1}^L \eta_{lk} p_s U_w \zeta_{ij0s}^{lk}) \gamma_{ijw0}] \\
& + [\sum_{(i,j) \in \bar{F}} \sum_{w \in S} (-\tau_{ijw0}^3 + \sum_{s=1}^N \sum_{k=1}^{p+q} \sum_{l=1}^L \eta_{lk} p_s U_w \zeta_{ij0s}^{lk}) \gamma_{ijw0}] \\
& + \sum_{t=1}^{T-1} \{ \sum_{(i,j) \in F} \sum_{w \in S} [-\tau_{ijwt}^1 - \tau_{ijwt+1}^2 - \tau_{jiwt+1}^2] \\
& + \sum_{k=1}^p \mu_k (\frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{ijwt} (x_{ijt}^k)^2 - l_{ijt}^k U_w) \\
& + \sum_{k=1}^q \nu_k (-U_w \lambda_{ijt}^k + l_{ij}(K'_{wt} + E'_{ijt}) + \sum_{s=1}^N \sum_{k=1}^{p+q} \sum_{l=1}^L \eta_{lk} p_s U_w \zeta_{ijts}^{lk}) \gamma_{ijwt} \\
& + \sum_{(i,j) \in \bar{F}} \sum_{w \in S} [\tau_{ijwt}^1 - \tau_{ijwt+1}^3 + \sum_{k=1}^p \mu_k (\frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{ijwt} (x_{ijt}^k)^2 - l_{ijt}^k U_w) \\
& + \sum_{k=1}^q \nu_k (-U_w \lambda_{ijt}^k + l_{ij}(K'_{wt} + E'_{ijt}) + \sum_{s=1}^N \sum_{k=1}^{p+q} \sum_{l=1}^L \eta_{lk} p_s U_w \zeta_{ijts}^{lk}) \gamma_{ijwt} \} \\
& + [\sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in S} [-\tau_{ijwt}^1 + \sum_{k=1}^p \mu_k (\frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{ijwt} (x_{ijT}^k)^2 - l_{ijT}^k U_w) \\
& + \sum_{k=1}^q \nu_k (-U_w \lambda_{ijT}^k + l_{ij}(K'_{wT} + E'_{ijT}) + \sum_{s=1}^N \sum_{k=1}^{p+q} \sum_{l=1}^L \eta_{lk} p_s U_w \zeta_{ijTs}^{lk}) \gamma_{ijwT}] \\
& + \sum_{k=1}^{p+q} \sum_{l=1}^L [c_p(y^{lk}) - \sum_{s \in S} p_s (\sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c \alpha_{cit}^{kl} \zeta_{its}^{kl} \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}^{kl} \zeta_{ijts}^{kl})] \\
& + \sum_{k=1}^p \mu^k (\sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} l_{ijt}^k x_{ijt}^k) + \sum_{k=1}^q \nu_k (\sum_{t=1}^T \sum_{i \in I} \lambda_{it}^k (\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt}^k) + \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \lambda_{ijt}^k x_{ijt}^k)
\end{aligned}$$

(4.75)

sujet à :

$$\gamma \in \hat{\Gamma}$$

$$y_0 \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{\theta} \in \mathbb{R}^+$$

Remarques:

- Nous avons décomposé (P_γ) en $T + 1$ problèmes, la raison de la décomposition est évidente puisque cela permet d'affecter aux lignes du réseau des coûts qui ne dépendent pas du réseau de la période précédente. Remarquons qu'il y a deux types de problèmes, un pour $t = 1$ à $T - 1$ et un autre pour $t = T$.
- Pour chaque période de l'horizon, le sous problème (P_γ) détermine un réseau de distribution donc c'est un problème de détermination de T arborescences de poids minimum où T désigne le nombre de périodes (pour la période $t = 0$ le réseau est connu). L'algorithme de détermination d'une arborescence de poids minimum sera utilisé pour résoudre chacun des T problèmes.
- Nous posons $\sum_{k=1}^p \mu^k = 1$ et $\sum_{k=1}^{p+q} \sum_{l=1}^L \eta^{lk} = 1$, où p et q désignent respectivement le nombre des coupes réalisables et des coupes non réalisables et L représente le nombre de contraintes générées lors de la relaxation du problème maître relaxé, car dans le cas contraire l'objectif de $(P_{\gamma_{ijwt}})$ tend vers l'infini.

Détermination d'une arborescence de poids minimum:

Rappelons que les contraintes de (P_γ) sont les suivantes:

$$\sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} + \sum_{w \in \Omega} \gamma_{jiwt} \leq 1; \quad (i, j) \in F, \quad t \in T$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \leq 1; \quad j \in J, \quad t \in T$$

$$\sum_i \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \geq \sum_k \sum_{w \in \Omega} \gamma_{jkw} \quad j \in J, t \in T$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} = 1; \quad j \in J_t, \quad t \in T$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^+} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \leq M' \sum_{i \in \Gamma_j^-} \sum_{w \in \Omega} \gamma_{ijwt} \quad j \in J - J_t, \quad t \in T$$

$$\gamma_{ijwt} = 0 \quad \text{ou} \quad 1, (i, j) \in E, w \in \Omega, t \in T - \{0\}$$

Nous avons désigné ces contraintes par l'ensemble $\hat{\Gamma}$. Les caractéristiques de cet ensemble sont les suivantes: les arêtes sont orientées, les noeuds ayant une demande positive doivent être alimentés, le réseau est radial, un poste est considéré comme une racine. Ces caractéristiques correspondent bien à celle d'arborescence.

Définition d'une arborescence: [63]

Un graphe $G = (N, E)$ est une **arborescence** de racine $r \in N$ si:

- G est un arbre (ne contient pas de cycles).
- Pour tout sommet $j \in N$, il existe dans G un chemin allant de r à j .

Algorithme de détermination d'une arborescence de poids minimum: [63]

Nous présentons ici l'algorithme de Tarjan [9].

1. Iteration $t = 0$.

$$G^0 = G$$

$$p^0(u) = p(u) \quad \forall u \in E.$$

2. À l'itération t déterminer le graphe partiel H^t de G^t en sélectionnant, pour chaque sommet de G^t (différent de la racine) l'arc incident intérieurement (arc qui a pour destination le sommet considéré) et de poids minimum (en fonction des poids p^t).
3. Si H^t ne contient pas de circuit, alors H^t est une arborescence de poids minimum dans G^t , et on en déduit une arborescence de poids minimum dans G^0 . Fin de l'algorithme.

Sinon:

4. Si H^t contient un circuit μ , définir: $G^{t+1} = G^t / \mu$ et les poids des arcs de G^{t+1} par:

$$p^{t+1}(u) = p^t(u) \quad \text{pour} \quad u = (i, j), \quad j \notin \mu$$

$$p^{t+1}(u) = p^t(u) - p^t(u') \quad \text{pour } u = (i, j), \quad i \notin \mu, \quad j \in \mu$$

avec $u' = (k, j) \in \mu$.

(Si H^t contient plusieurs circuits, μ_1, μ_2, μ_p , contracter G^t par rapport à μ_1 , puis le graphe obtenu par rapport à μ_2 , etc.)

Faire $t = t + 1$ et retourner à l'étape 2.

Remarque:

À l'étape 3, si le graphe partiel ne contient pas de circuit, nous arrêtons l'algorithme. Nous terminons l'algorithme avec une arborescence de poids minimum qui peut avoir des super-sommets formés par des noeuds contractés. Il faut enlever ces super-sommets en retirant de chacun des circuits l'arc qui brisera le circuit. La procédure pour le faire est bien connue.

4.6.4 Résolution du dual lagrangien du problème maître

Rappelons que le dual lagrangien du problème maître est:

$$\begin{aligned} & \max[V(4.71)] \\ & \text{sujet à :} \\ & \quad \eta \geq 0 \\ & \quad \mu \geq 0 \\ & \quad \nu \geq 0 \\ & \quad \tau_{ijwt}^1 \geq 0 \\ & \quad \tau_{ijwt}^2 \geq 0 \\ & \quad \tau_{ijwt}^3 \geq 0 \end{aligned} \tag{4.76}$$

où $[V(4.71)]$ est la valeur optimale du problème (4.71).

Pour résoudre ce problème, nous utilisons la méthode du sous gradient.

Méthode du sous gradient selon Gondran et Minoux[63]

Dans cette section, nous donnons une brève présentation de la méthode du sous gradient.

Soit le problème:

$$\max L(\pi)$$

sujet à :

$$\pi \in \mathbb{R}^{m+}$$

avec $L(\pi) = \min_{x \in X} (f(x) + \pi g(x))$ et X est ensemble fini discret $X = \{x^1, x^2, \dots, x^K\}$.

L'algorithme de la méthode du sous gradient est le suivant:

1. À l'étape 0, partir d'un point π^0 et définir une suite de nombres λ_j telle que $\lambda_j \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow +\infty$.

2. À l'étape j , on est au point π^j .

Calculer:

$$L(\pi^j) = f(x^j) + \pi^j \cdot g(x^j) = \min_{x \in X} \{f(x) + \pi^j g(x)\}$$

$\gamma(\pi^j) = g(x^j)$ est un sous gradient de L en π^j .

3. Définir π^{j+1} par :

$$\pi^{j+1} = \pi^j + \lambda_j \gamma(\pi^j)$$

si $\pi^{j+1} \notin \mathbb{R}^{m+}$, projeter π^{j+1} sur \mathbb{R}^{m+} et retourner à l'étape 2.

Polyak [3] a montré que la suite $L(\pi^j)$ converge vers l'optimum $L(\pi^*)$ sous les conditions suivantes: $\lambda_j \rightarrow 0$ et $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = +\infty$.

En choisissant

$$\lambda_j = \rho_j \frac{L(\pi^*) - L(\pi^j)}{\|\gamma(\pi^j)\|^2}$$

où le coefficient ρ_j vérifie $\epsilon \leq \rho_j \leq 2$ ($\forall j$), Polyak montre que la suite $L(\pi^j)$ converge vers l'optimum $L(\pi^*)$ et que la convergence est géométrique. $L(\pi^*)$ n'est généralement

pas connue, Held, Wolfe et Crowder [5] ont montré que l'on peut remplacer $L(\pi^*)$ par un estimé $\bar{L} \geq L(\pi^*)$ sans que la convergence de l'algorithme soit affectée. Dans ce cas, la condition $\lambda_j \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow +\infty$ oblige à choisir $\rho_j \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow +\infty$. En pratique, \bar{L} correspond à la valeur de la la meilleure solution du problème original obtenue dans les étapes précédentes.

Pour le choix des coefficients ρ_j , Held, Wolfe et Crowder [5] ont présenté la règle suivante:

- Poser $\rho = 2$ pendant $2m$ itérations (où m est le nombre de variables π ou encore la taille du problème).
- Diviser par 2 la valeur de ρ et le nombre d'itérations jusqu'à atteindre une limite inférieure q (fixée à l'avance).
- Diviser par 2 la valeur de ρ à toutes les q itérations (généralement 5) jusqu'à ce que les λ_j soient suffisamment petits ($\leq \epsilon$ fixé).

Adaptation de l'algorithme à notre modèle

Pour notre modèle, $\gamma(\pi)$ correspond au vecteur des contraintes relaxées auxquelles sont associés les multiplicateurs $\eta, \mu, \nu, \tau^1, \tau^2, \tau^3$ et évalués en la solution optimale de $L(\pi^j)$ c'est à dire:

$$\begin{aligned} \gamma(\pi^j) = \{ & c_p(y^l) + [\sum_{s \in S} p_s (\sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c(\alpha_{cit}^j - \alpha_{cit}^{kl}) \zeta_{its} \\ & + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w (\gamma_{ijwt}^j - \gamma_{ijwt}^{kl}) \zeta_{ijts}] - \tilde{\theta}; \\ & \sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in \Omega} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \gamma_{ijwt}^j (x_{ijt}^k)^2 + \sum_{(i,j) \in E, t \in T} l_{ijt}^k (x_{ijt}^k - \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt}^j) - y_0; \\ & \sum_{i \in I, t \in T} \lambda_{it}^k (\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt}^k - \sum_{c \in C} c \alpha_{cit}^j) + \sum_{(i,j) \in E, t \in T} \lambda_{ijt}^k (x_{ijt}^k - \sum_{w \in S} U_w \gamma_{ijwt}^j); \\ & \beta_{ijwt}^j - \gamma_{ijwt}^j; \\ & \beta_{ijwt}^j - \gamma_{ijwt-1}^j \} \end{aligned}$$

\bar{L} doit être un estimateur en excès de $L(\pi^j)$ c'est à dire de la valeur optimale du $V(4.71)$ où les multiplicateurs considérés sont $\pi^j = (\eta_j, \mu_j, \nu_j, \tau_j^1, \tau_j^2, \tau_j^3)$. Nous allons prendre pour \bar{L} , la valeur de la fonction économique du problème original correspondant à la solution initiale. \bar{L} est alors supérieur ou égal à la valeur optimale du problème maître, d'autre part la valeur optimale de la relaxation lagrangienne constitue une borne inférieure donc \bar{L} est bien un estimateur en excès de $L(\pi^j)$.

Le critère d'arrêt de la méthode est le suivant: Si $\| \pi^{j+1} - \pi^j \| \leq \epsilon$, alors arrêt. (ϵ est un scalaire positif assez petit).

Remarques:

- La solution optimale du dual lagrangien n'est pas nécessairement réalisable pour le problème maître relaxé équivalent. Pour poursuivre l'application de la méthode de décomposition de Benders, nous devons fournir au sous problème une solution optimale du problème maître sinon au moins une bonne solution réalisable.
- Pour déterminer une solution réalisable au problème maître, nous utilisons la solution optimale du dual lagrangien, puis nous vérifions si les contraintes relaxées sont satisfaites, si elles ne le sont pas, la méthode décrite ci dessous permet à partir de la solution donnée par la relaxation de construire une solution réalisable.

La méthode suivante est inspirée de l'heuristique proposée par Gascon [16].

Description de la méthode:

La solution optimale du dual lagrangien est non réalisable pour le problème maître relaxé équivalent si elle ne vérifie pas au moins un des quatres groupes de contraintes suivants:

1. Les contraintes permettant d'explicitier $c_p(y)$.
2. Les coupes réalisables.
3. Les coupes non réalisables.

4. Les contraintes en β_{ijwt}

Nous allons traiter chacun des cas et indiquer comment construire la solution réalisable.

1. Au moins une des contraintes permettant d'explicitier $c_p(y)$ n'est pas satisfaite:

En posant $\sum_{k=1}^{p+q} \sum_{l=1}^L \eta^{lk} = 1$, nous n'aurons pas besoin de déterminer la valeur de $\tilde{\theta}$ lors de la résolution du problème maître relaxé équivalent par la relaxation lagrangienne.

Nous posons

$$\tilde{\theta} = \max_{1 \leq k \leq p+q} \max_{1 \leq l \leq L} \{c_p(y^l) + [\sum_{s \in S} p_s (\sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c(\alpha_{cit} - \alpha_{cit}^{kl}) \zeta_{its}^{kl} + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w (\gamma_{ijwt} - \gamma_{ijwt}^{kl}) \zeta_{ijts}^{kl})]\}$$

Ainsi toutes les $(p+q)l$ contraintes du type

$$c_p(y^l) + [\sum_{s \in S} p_s (\sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c(\alpha_{cit} - \alpha_{cit}^{kl}) \zeta_{its}^{kl} + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w (\gamma_{ijwt} - \gamma_{ijwt}^{kl}) \zeta_{ijts}^{kl})] \leq \tilde{\theta}$$

seront toujours satisfaites.

2. Au moins une des p contraintes correspondantes à une des coupes réalisables n'est pas satisfaite:

De la même façon, en posant $\sum_{k=1}^p \mu^k = 1$, nous n'aurons pas besoin de déterminer explicitement la valeur de y_0 lors de la résolution du problème maître relaxé équivalent par la relaxation lagrangienne.

Nous choisissons:

$$\bar{y}_0 = \max_{1 \leq k \leq p} [\sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in \Omega} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \gamma_{ijwt} x_{ijt}^k + \sum_{(i,j) \in E, t \in T} l_{ijt}^k (x_{ijt}^k - \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt})].$$

De cette façon, toutes les coupes réalisables

$$[\sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in \Omega} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \gamma_{ijwt} x_{ijt}^k + \sum_{(i,j) \in E, t \in T} l_{ijt}^k (x_{ijt}^k - \sum_{w \in \Omega} U_w \gamma_{ijwt})] \leq y_0$$

seront toujours satisfaites.

3. Au moins une des q contraintes correspondantes à une coupe non réalisable n'est pas satisfaite:

Rappelons qu'une coupe non réalisable est de la forme:

$$\sum_{i \in I, t \in T} \lambda_{it}^k \left(\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt}^k - \sum_{c \in C} c \alpha_{cit} \right) + \sum_{(i,j) \in E, t \in T} \lambda_{ijt}^k \left(x_{ijt}^k - \sum_{w \in S} U_w \gamma_{ijwt} \right) \leq 0$$

où λ_{it}^k et λ_{ijt}^k valent 0 ou 1 (section 4.4). Cette coupe est non satisfaite si une des trois situations se produit:

- (a) Il existe au moins un poste $i \in I$ tel que $\lambda_{it}^k = 1$ et $\left(\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt}^k - \sum_{c \in C} c \alpha_{cit} \right) > 0$ et aucun arc (i, j) tel que $\lambda_{ijt}^k = 1$. Cette situation reflète un problème de capacité à un poste.

Dans ce cas

$$\sum_{i \in I, t \in T} \lambda_{it}^k \left(\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt}^k - \sum_{c \in C} c \alpha_{cit} \right) > 0.$$

Soit $i_0 \in I$ tel que $\lambda_{i_0 t}^k = 1$. Pour régler le problème de ce poste, nous devons choisir au moins une des propositions:

- augmenter le nombre de transformateurs qui lui sont associés,
- modifier la capacité de ses transformateurs,
- changer la configuration du réseau.

Nous privilégions les deux premières propositions car nous avons l'avantage de garder le réseau courant, de plus l'augmentation du nombre de transformateurs ou la modification de la capacité de ces transformateurs est moins coûteuse que le changement complet de la configuration du réseau.

- (b) Il existe au moins un arc (i, j) tel que $\lambda_{ijt}^k = 1$ et $\left(x_{ijt}^k - \sum_{w \in S} U_w \gamma_{ijwt} \right) > 0$ et aucun poste $i \in I$ tel que $\lambda_{it}^k = 1$. Cette situation indique qu'il y a un problème de flot sur une ligne dont la capacité est insuffisante.

Dans ce cas

$$\sum_{(i,j) \in E, t \in T} \lambda_{ijt}^k (x_{ijt}^k - \sum_{w \in S} U_w \gamma_{ijwt}) > 0,$$

et nous retirons l'arc (i, j) de type de ligne w de l'ensemble des arcs admissibles. Dans la pratique, nous forçons l'arc (i, j) ayant $\lambda_{ijt}^k = 1$ à faire partie du réseau. Néanmoins cet arc sera de capacité plus grande. Nous considérons le nouvel ensemble réduit des arcs admissibles et l'arc imposé dans le réseau et nous appliquons l'algorithme de détermination d'une arborescence de poids minimum pour déterminer une nouvelle configuration. Si cette configuration satisfait la coupe non réalisable, le problème est réglé sinon nous répétons la même analyse en retirant un autre arc et ainsi de suite jusqu'à ce que la contrainte soit satisfaite.

Remarque:

Par période, nous retirons juste un arc de l'ensemble des arcs admissibles et nous ajoutons un seul arc car sinon nous pouvons augmenter rapidement la valeur de la fonction économique.

- (c) Il existe au moins un poste $i \in I$ tel que $\lambda_{it}^k = 1$ et $(\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt}^k - \sum_{c \in C} c\alpha_{cit}) > 0$ et au moins un arc (i, j) tel que $\lambda_{ijt}^k = 1$ et $\sum_{(i,j) \in E, t \in T} \lambda_{ijt}^k (x_{ijt}^k - \sum_{w \in S} U_w \gamma_{ijwt}) > 0$, dans ce cas

$$\sum_{i \in I, t \in T} \lambda_{it}^k (\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt}^k - \sum_{c \in C} c\alpha_{cit}) + \sum_{(i,j) \in E, t \in T} \lambda_{ijt}^k (x_{ijt}^k - \sum_{w \in S} U_w \gamma_{ijwt}) \cdot 0.$$

Nous pouvons toujours nous ramener à l'une des situations (b) ou (c).

- S'il y a un problème à un poste i et sur un arc (i, j) appartenant à une branche issue de ce poste, alors nous nous ramenons à la situation (a) car λ_{ijt}^k valent zéro pour tous les arcs (i, j) appartenant à la même branche que i et donc le problème de flot sur l'arc (i, j) sera masqué.

- S'il y a un problème à un poste i et sur arc (i, j) n'appartenant pas à une branche issue de ce poste, alors nous réglons le problème de l'arc (i, j) en premier lieu. Si la coupe non réalisable demeure non satisfaite alors nous réglons aussi le problème du poste.

4. **Au moins une des contraintes en β n'est pas satisfaite:**

- (a) Si $\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt} \leq 0$ n'est pas vérifiée alors nécessairement $\beta_{ijwt} = 1$ et $\gamma_{ijwt} = 0$.
En posant $\beta_{ijwt} = 0$, la contrainte devient satisfaite.
- (b) Si $\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt-1} - \gamma_{jiwt-1} \leq 0$ n'est pas vérifiée, alors $\beta_{ijwt} = 1$, $\gamma_{ijwt-1} = 0$ et $\gamma_{jiwt-1} = 0$. Il faut juste prendre $\beta_{ijwt} = 1$ et la contrainte sera satisfaite.
- (c) Si $\beta_{ijwt} - \gamma_{ijwt-1} \leq 0$ n'est pas vérifiée alors nécessairement $\beta_{ijwt} = 1$ et γ_{ijwt-1} , de la même façon, nous posons $\beta_{ijwt} = 0$ et la contrainte devient satisfaite.

Donc pour régler la non satisfaction des contraintes impliquant la variable β , il faut juste poser $\beta_{ijwt} = 0$.

Algorithme de détermination d'une solution réalisable pour le problème maître

1. Inialisation:

Soit $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ la solution optimale du dual lagrangien du problème maître relaxé équivalent ($\bar{\alpha}$ optimale de P_α , $\bar{\beta}$ optimale de P_β et $\bar{\gamma}$ optimale de P_γ).

2. Vérification de la réalisabilité des coupes non réalisables:

$$L_2(y^k, \lambda^k) = \sum_{i \in I, t \in T} \lambda_{it}^k \left(\sum_{j \in \Gamma_i^+} x_{ijt}^k - \sum_{c \in C} c \alpha_{cit}^k \right) + \sum_{(i,j) \in E, t \in T} \lambda_{ijt}^k \left(x_{ijt}^k - \sum_{w \in S} U_w \gamma_{ijwt}^k \right)$$

Si $L_2(y^k, \lambda^k) > 0$ pour au moins un k alors identifier les arcs $(i, j) \in E$ de type w ayant les conditions suivantes:

$$\lambda_{ijt}^k = 1$$

et

$$\lambda_{ijt}^k (x_{ijt}^k - \sum_{w \in S} U_w \gamma_{ijwt}^k) > 0,$$

forcer l'arc (i, j) de type w' de plus faible coût à faire partie du réseau et retirer de l'ensemble des arcs admissibles l'arc (i, j) de type w à la période t .

Résoudre (P_γ) avec le nouvel ensemble des arcs admissibles et le nouvel arc ajouté par l'algorithme d'une arborescence de poids minimum. Soit $\tilde{\gamma}$ la nouvelle solution optimale de (P_γ) .

3. (a) Si pour toutes les coupes non réalisables, les $L_2(y^k, \lambda^k)$ évalués en $\tilde{\gamma}$ sont tel que $L_2(y^k, \lambda^k) \leq 0$ alors ajuster les autres groupes de contraintes

- les coupes permettant d'expliquer $c_p(y)$ sont satisfaites en posant:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} = & \max_{1 \leq k \leq p+q} \max_{1 \leq l \leq L} \{c_p(y^l) + [\sum_{s \in S} p_s (\sum_{t \in T, i \in I, c \in C} c(\alpha_{cit} - \alpha_{cit}^{kl}) \zeta_{its}^{kl} \\ & + \sum_{t \in T, (i,j) \in E, w \in \Omega} U_w (\tilde{\gamma}_{ijwt} - \gamma_{ijwt}^{kl}) \zeta_{ijts}^{kl}]\} \end{aligned}$$

- les coupes réalisables sont satisfaites en posant:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_0 = & \max_{1 \leq k \leq p} [\sum_{t=1}^T \sum_{(i,j) \in E} \sum_{w \in \Omega} \frac{\sqrt{3}}{V_N} a_t \Delta_{wij} \tilde{\gamma}_{ijwt} x_{ijt}^k]^2 \\ & + \sum_{(i,j) \in E, t \in T} l_{ijt}^k (x_{ijt}^k - \sum_{w \in \Omega} U_w \tilde{\gamma}_{ijwt}) \end{aligned}$$

- Si une des contraintes en β_{ijwt} est non satisfaite, poser $\beta_{ijwt} = 0$

Fin de l'algorithme.

- (b) Si au moins une coupe non réalisable évaluée en $\tilde{\gamma}$ est non satisfaite, aller à l'étape 2.

CHAPITRE 5

Tests numériques

Dans ce chapitre, nous proposons tester la validité de la méthode que nous avons utilisé pour résoudre le problème de planification de la distribution de l'énergie électrique avec demande incertaine.

Pour faire des tests numériques nous avons développé une version préliminaire d'un logiciel d'aide à la décision lors de la planification de la distribution de l'énergie électrique avec demande incertaine.

Ce logiciel est composé d'un programme écrit en C++ qui fait appel au logiciel Cplex.

5.1 Le logiciel Cplex

Cplex est un logiciel d'optimisation commerciale développé dans le langage de programmation C.

Le nom Cplex provient de la combinaison de la lettre "C" reflétant le langage de programmation et du mot "Simplex" indiquant la méthode du simplexe pour les programmes linéaires.

Depuis sa première version, plusieurs améliorations se sont apportées à ce logiciel pour le rendre flexible à d'autres types de problèmes: problème quadratique, problème mixte

... comme c'est le cas pour notre problème.

Pour résoudre le problème maître qui est de nature entier mixte, nous utilisons la commande "mipopt" qui fait appel au solveur entier mixte. Ce solveur utilise l'algorithme de "Branch-and-bound".

Le paragraphe suivant est un rappel de la méthode de "Branch-and-Bound".

5.2 Méthode de "Branch-and-Bound"

Comme son nom l'indique, la méthode de "Branch-and-Bound" est basée sur deux concepts: le branchement et l'évaluation.

Dans cette méthode une suite de sous problème LP est résolue et un arbre de sous problème est construite comme suit: le noeud racine est une relaxation PL du problème en question (entier mixte). Si la solution de la relaxation admet des composantes fractionnaires, une variable fractionnaire est choisie pour le branchement et deux sous problèmes seront générés chacun avec des bornes plus restreints que la variable de branchement: par exemple pour les problèmes binaires, un noeud va avoir une variable fixée à zéro, l'autre noeud va avoir la variable fixée à un.

Le résultat des sous problèmes est soit que le sous problème est non réalisable, soit que la solution est entière ou la solution est de nouveau fractionnaire. Si le dernier cas se présente (la solution est fractionnaire), nous répétons le processus.

Nous évaluons ensuite les nouveaux noeuds (sous problèmes) et éventuellement nous élaguons ceux qui sont inutiles. Un noeud peut être élagué dans trois cas possibles:

- Le sous problème est non réalisable.
- La valeur de la solution est supérieure à la valeur de la meilleure solution réalisable trouvée, dans ce cas il est inutile de continuer la recherche dans la sous arbre enracinée en ce noeud, puisque les bornes inférieures obtenues sont strictement

croissantes suivant la profondeur de l'arbre du "Branch-and-Bound".

- La solution est entière, donc réalisable.

L'algorithme s'arrête quand il n'y plus de noeud à évaluer.

Dans l'arbre construite il y trois types de noeuds pendant le déroulement de l'algorithme, le noeud courant qui est en train d'être évalué, des noeuds actifs qui sont dans la liste des noeuds qui doivent être traités, et des noeuds inactifs qui ont été élagués au cours du calcul. Quand la liste des noeuds actifs est vide, la meilleure solution réalisable obtenue est la solution optimale du problème. Notons que le choix de la stratégie de la sélection du noeud actif à traiter influe lourdement sur la taille de l'arborescence du "Branch-and-Bound" visitée, de même pour le choix de la variable de branchement.

5.3 Programme principal

Avant de passer aux tests numériques, nous proposons une brève description du programme: le processus de recherche d'une configuration optimale du réseau se fait de façon itérative, il est initié par une solution réalisable.

Pour chaque itération, le programme principal commence par calculer le coût de pénalité associé à la configuration actuelle, ensuite il détermine les flots et teste la réalisabilité de la configuration. Une des trois situations doit se présenter:

- La configuration est réalisable et le critère d'arrêt est satisfait, dans ce cas elle est optimale.
- La configuration est réalisable et le critère d'arrêt n'est pas satisfait, dans ce cas le programme détermine les coefficients de la coupe réalisable et évalue la borne supérieure.

- La configuration est non réalisable, dans ce cas le programme détermine les coefficients de la coupe non réalisable.

Une fois les coupes sont déterminées, le problème maître relaxé est bien défini. Avant de le résoudre, le programme détermine les coefficients des contraintes qui permettent de contourner la difficulté due au terme de pénalité présent dans son objectif. Ces contraintes ne vont pas être ajoutées toutes en même temps au problème maître relaxé, elles vont être relaxées et introduites progressivement quand cela est nécessaire.

Le logiciel Cplex se prête bien à cette démarche itérative de part la structure en colonnes de ses fichiers de données de format .mps. En effet chaque variable est représentée par une colonne qui contient les coefficients associés à cette variable dans chacune des contraintes. L'ajout d'une contrainte se traduit par l'ajout dans chaque colonne du coefficient qui lui est associé. Le programme principal construit alors le fichier de format .mps et appelle Cplex. Ce dernier détermine la solution du problème maître relaxé équivalent relaxé ainsi que la borne inférieure. Le programme principal lit ces résultats, évalue le critère d'arrêt et décide quant à la poursuite avec une autre itération ou l'arrêt du processus si le critère d'arrêt est satisfait.

5.4 Problèmes liés aux chutes de tension

Rappelons que les problèmes liés aux chutes de tension n'apparaissent pas explicitement dans le problème. Ce choix est fait exprès et s'explique par le fait qu'en réalité il est facile de détecter les points de charge nécessitant un ajustement de la tension.

Si tel problème existe en un point de charge $j \in J$ à une période t c'est à dire que $V_{jt} < V_N$, alors un régulateur doit être installé en ce point de charge j et la tension en ce point sera fixée à V_N pour le reste de l'horizon de planification.

5.5 Élimination des circuits

Lors de la résolution du problème maître relaxé nous pouvons avoir des solutions contenant des circuits. Pour les éliminer de la solution nous introduisons la contrainte suivante:

$$\sum_{j \in Q} \sum_{i \in \Gamma_j^-, i \notin Q} \sum_{\omega \in \mathcal{S}} \gamma_{ij\omega t} \geq 1$$

où Q est le circuit détecté.

Cette contrainte force au moins un point de charge appartenant au circuit Q à s'alimenter par une autre source (poste ou point de charge) qui n'appartient pas au circuit.

5.6 Expérimentation

Afin de bien évaluer notre approche de résolution, nous avons considéré deux exemples. Nous avons modifié certaines données des exemples traités dans la thèse de Benchakroun [12]. Les données des exemples sont résumées dans l'annexe A.

Exemple 1: Le premier exemple comporte:

- 2 postes.
- 8 points de charges.
- 3 périodes de planification.
- 2 scénarios.
- 2 types de lignes.
- 2 types de transformateurs.
- 28 arcs admissibles.

Les résultats des tests pour cet exemple et pour les exemples suivants sont résumés dans un tableau ayant six colonnes: la première colonne indique l'indice de l'itération de l'algorithme de résolution (p 70), la deuxième colonne présente le coût de pénalité pour la configuration courante, la troisième colonne indique le type de coupe générée à cette itération, la quatrième colonne est consacrée à la borne inférieure (valeur optimale du problème maître relaxé) tandis que la cinquième colonne, elle est consacrée à la borne supérieure et enfin la dernière colonne indique le temps mis par Cplex pour résoudre le problème maître relaxé.

Le tableau 5.1 qui suit résume les résultats de l'exemple 1.

En partant d'une solution surdimensionnée et très coûteuse réalisable pour tous les

itération	coût de penalité	type de coupe	B_i	B_s	temps en sec
0	0	réalisable	-	8302	0.21
1	462.84	non réalisable	4582	-	0.36
2	186.1	non réalisable	5020	-	0.51
3	84.6	non réalisable	5187	-	0.46
4	84.17	non réalisable	5278	-	0.52
5	7.86	non réalisable	5423	-	0.65
6	0	non réalisable	5482	5552.9	0.65

Table 5.1: Résultats pour exemple1

scénarios, nous avons aboutit à une meilleure solution réalisable au bout de six itérations avec une borne supérieure de 5552.900 dollars et une borne inférieure de 5482.000 dollars (une différence de 70000 dollars) au bout de moins de 15 secondes d'utilisation de Cplex. la différence relative entre B_s et B_i est de l'ordre de 0.013.

Les solutions des différentes itérations sont présentées par les figures suivantes.

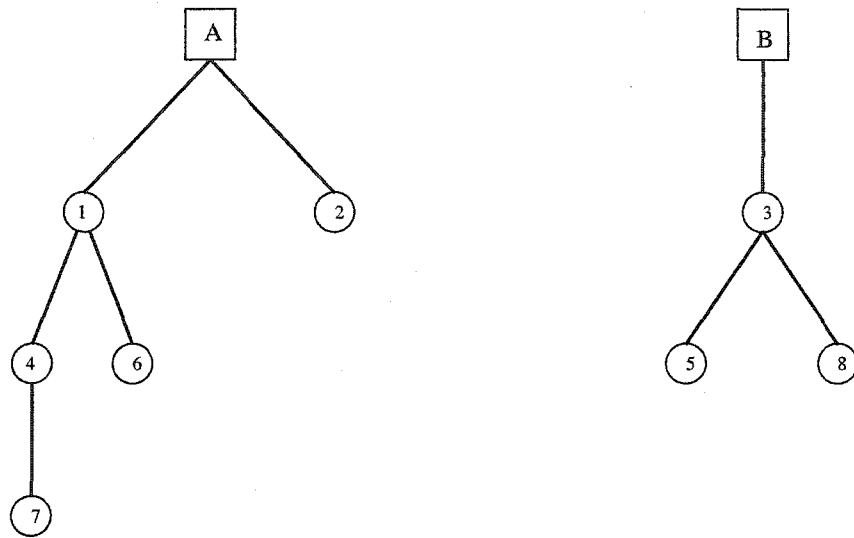


Figure 5.1: Configuration initiale pour l'exemple 1

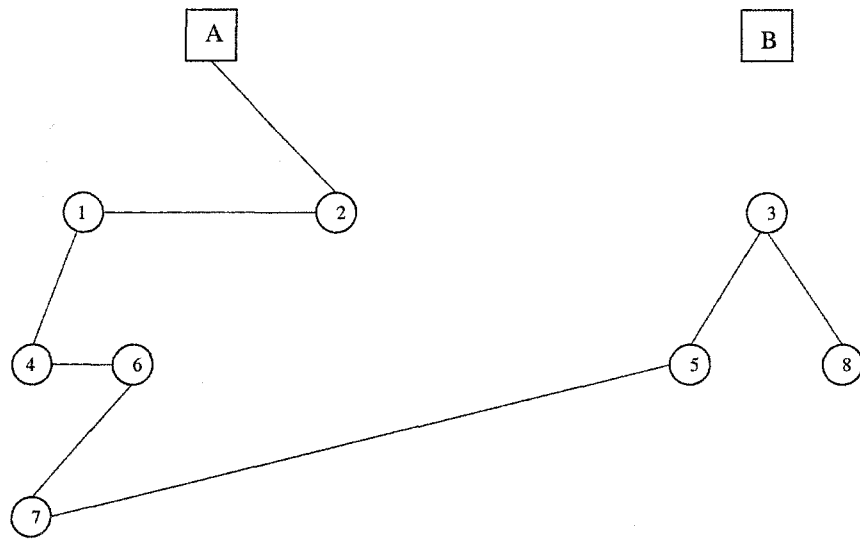


Figure 5.2: Configuration après une itération

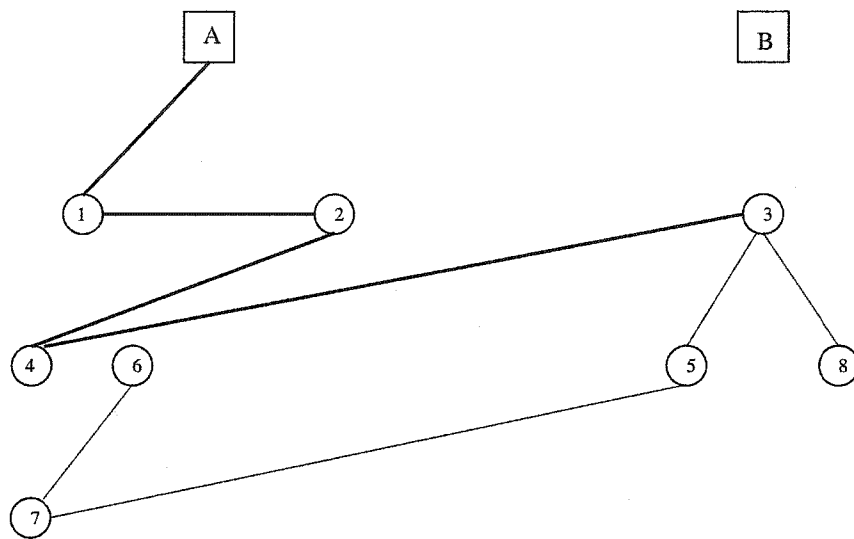


Figure 5.3: Configuration après deux itérations

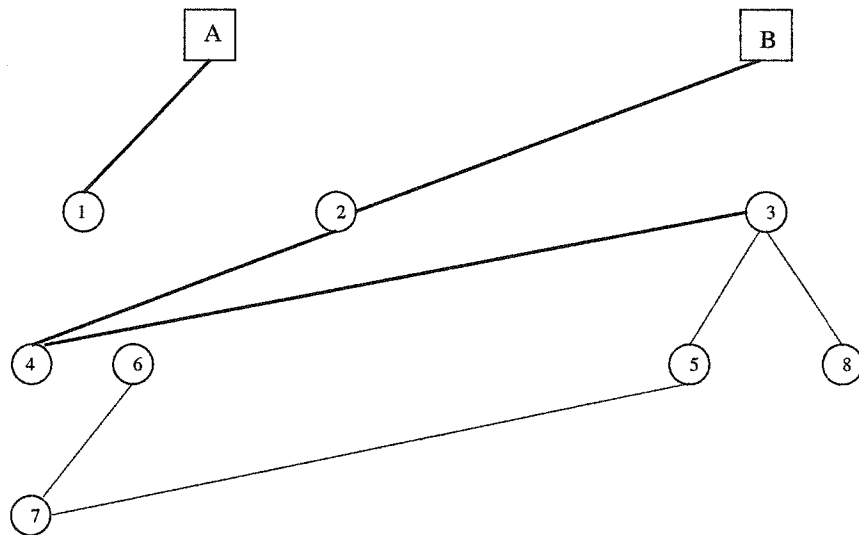


Figure 5.4: Configuration après trois itérations

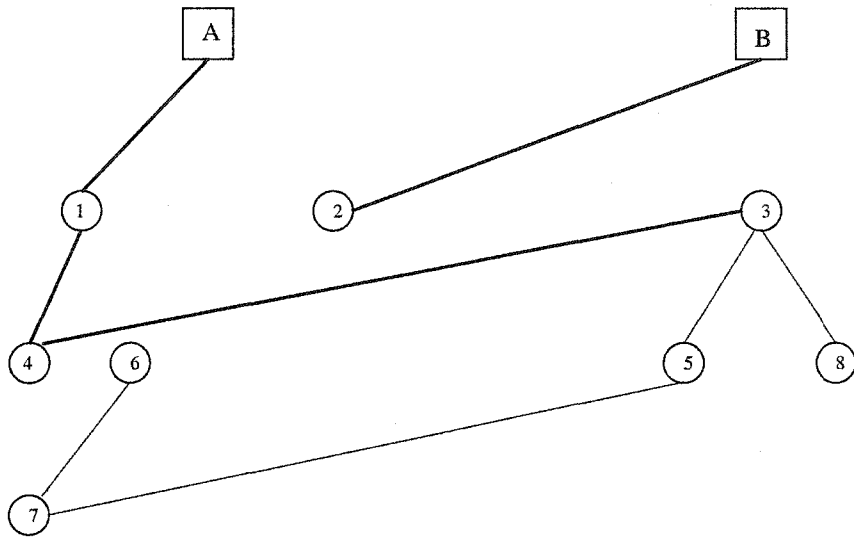


Figure 5.5: Configuration après quatre itérations

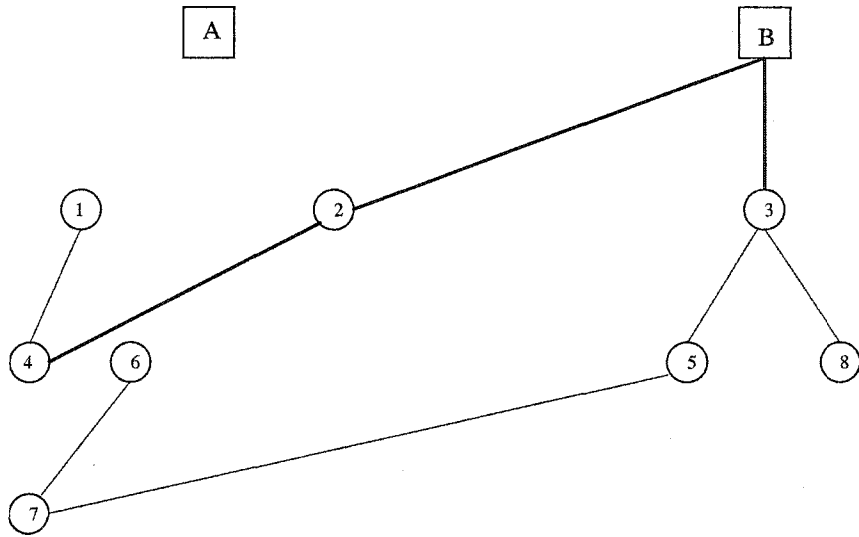


Figure 5.6: Configuration après cinq itérations

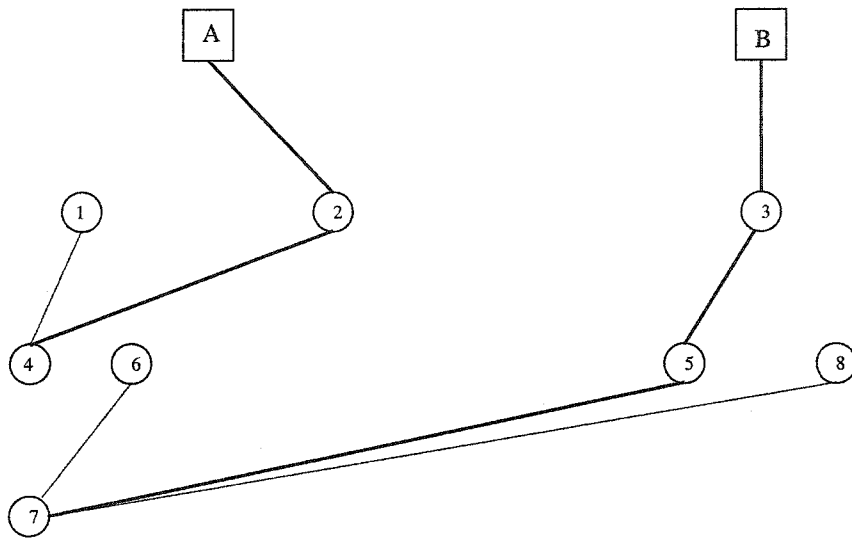


Figure 5.7: Configuration finale pour exemple 1

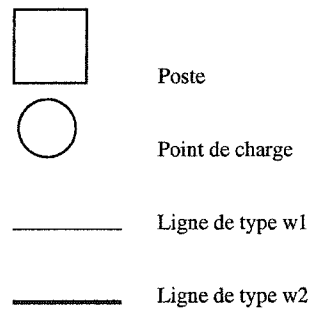


Figure 5.8: Légende pour les configurations

Exemple 2: Le deuxième exemple est relativement plus important que le premier, il comporte:

- 2 postes.
- 15 points de charges.
- 2 périodes de planification.
- 2 scénarios.

- 2 types de lignes.
- 2 types de transformateurs.
- 56 arcs admissibles.

De la même façon que l'exemple 1, la solution initiale réalisable est choisie arbitrairement.

Les résultats des tests pour cet exemple se résument dans le tableau 5.2.

itération	coût de pénalité	type de coupe	B_i	B_s	temps en sec
0	0	réalisable	-	10091	5.25
1	408.5	non réalisable	6806	-	12.36
2	334.4	non réalisable	6902	-	10.51
3	85.22	non réalisable	6914	-	1.46
4	13.35	non réalisable	6956	-	11.2
5	0.75	non réalisable	6993	7290	9.6

Table 5.2: Résultats pour exemple2

Nous obtenons une solution réalisable au bout de cinq itérations avec une borne supérieure de 7290.000 dollars et une borne inférieure de 6993.000 dollars. la borne inférieure est dans ce cas inférieure à la borne supérieure. la différence relative entre B_s et B_i est de l'ordre de 0.04. Les différentes itérations sont représentées par les figures 5.9 à 5.14.

Nous avons considéré ce dernier exemple et nous avons choisi en premier lieu le premier scénario qui est de probabilité 0.75, nous avons commencé avec la même solution initiale que celle utilisée pour l'exemple 2, au bout de six itérations nous avons obtenu une meilleure solution réalisable avec une borne supérieure de 7261.640 et une borne inférieure de 7198.000. Cette solution est représentée par la figure 5.15 . Dans un deuxième temps nous avons choisi le deuxième scénario (le pire scénario). Pour trouver une meilleure solution, il nous a fallu 18 itérations avec une borne inférieure de 6916.200 et une borne supérieure de 7337.480. La figure 5.16 représente cette solution. La meilleure solution

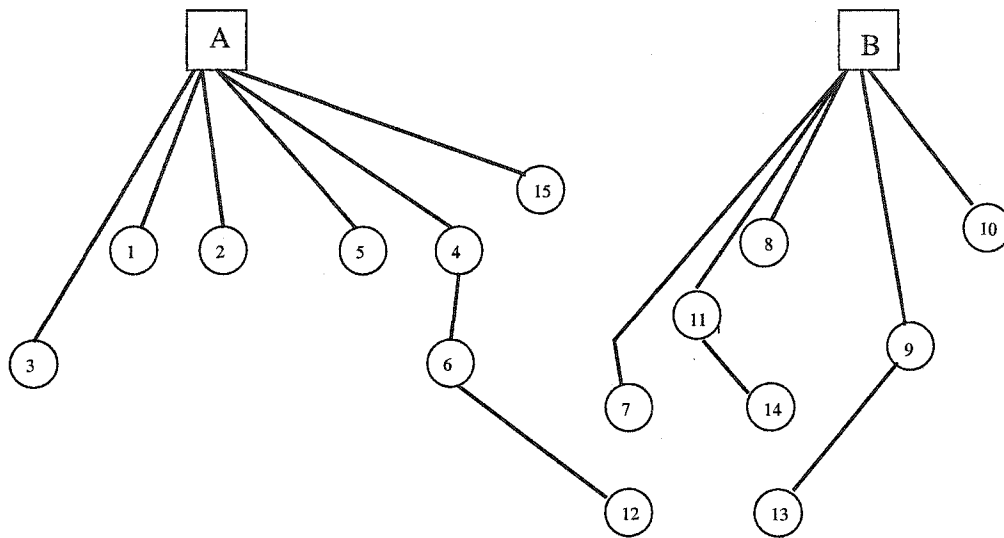


Figure 5.9: Configuration initiale pour exemple 2

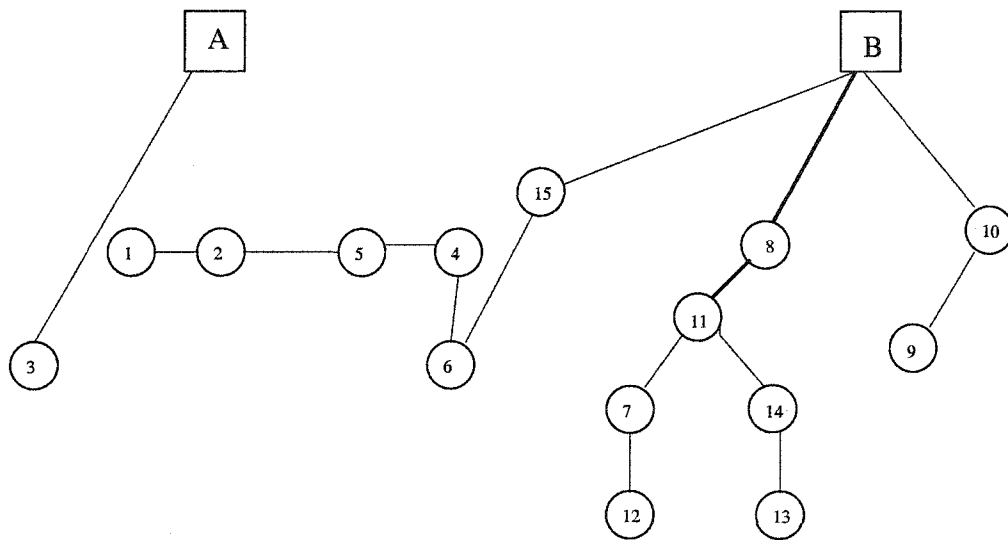


Figure 5.10: Configuration après une itération

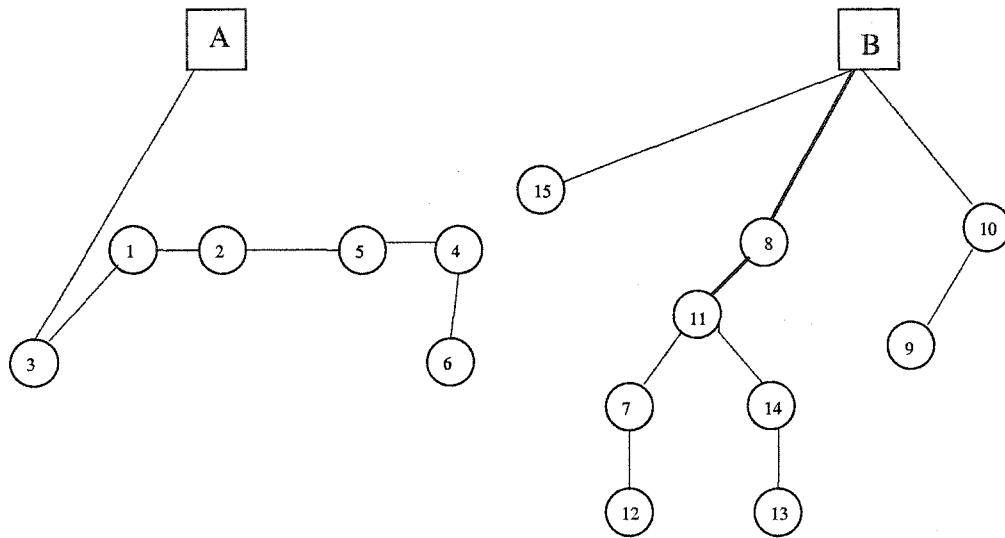


Figure 5.11: Configuration après deux itérations

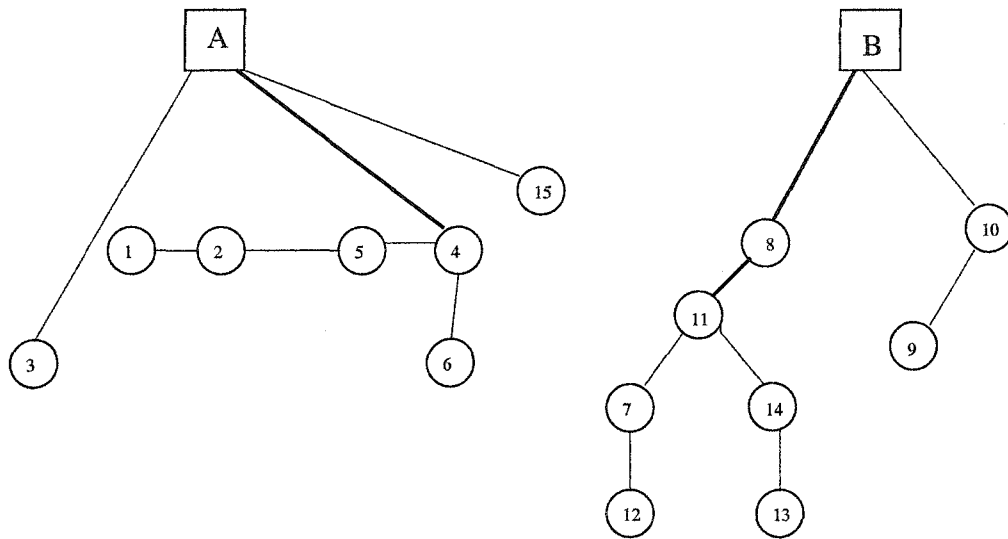


Figure 5.12: Configuration après trois itérations

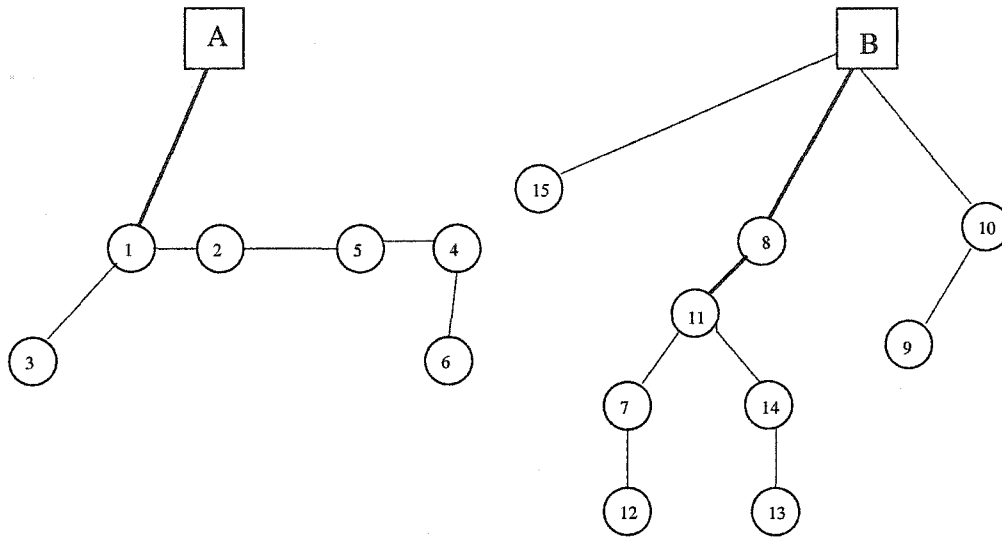


Figure 5.13: Configuration après quatre itérations

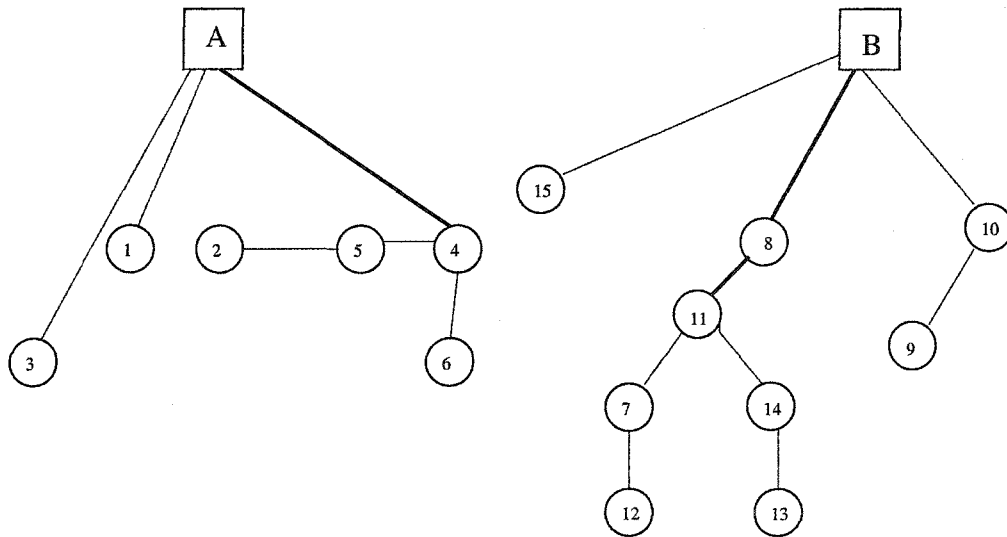


Figure 5.14: Configuration finale pour l'exemple 2

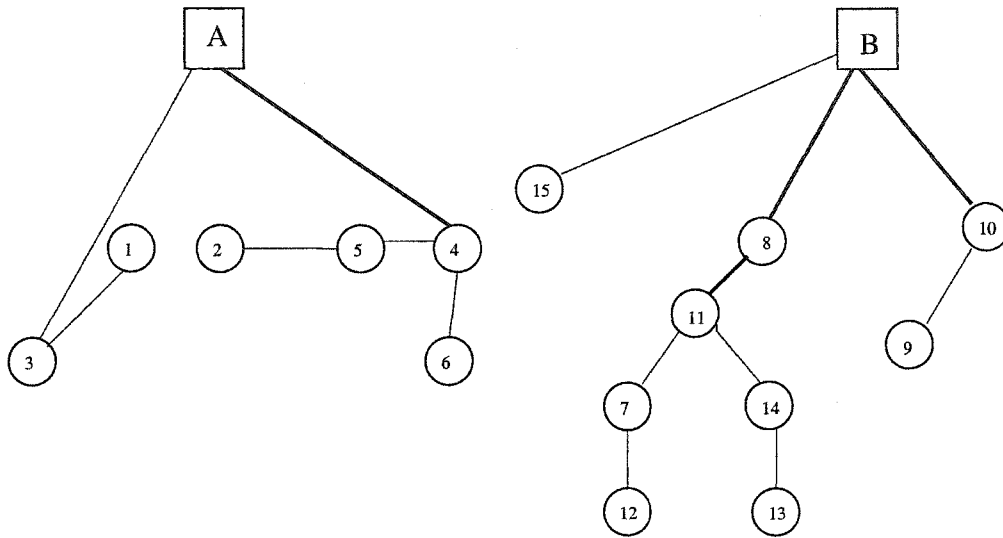


Figure 5.15: Meilleure configuration pour le scénario 1

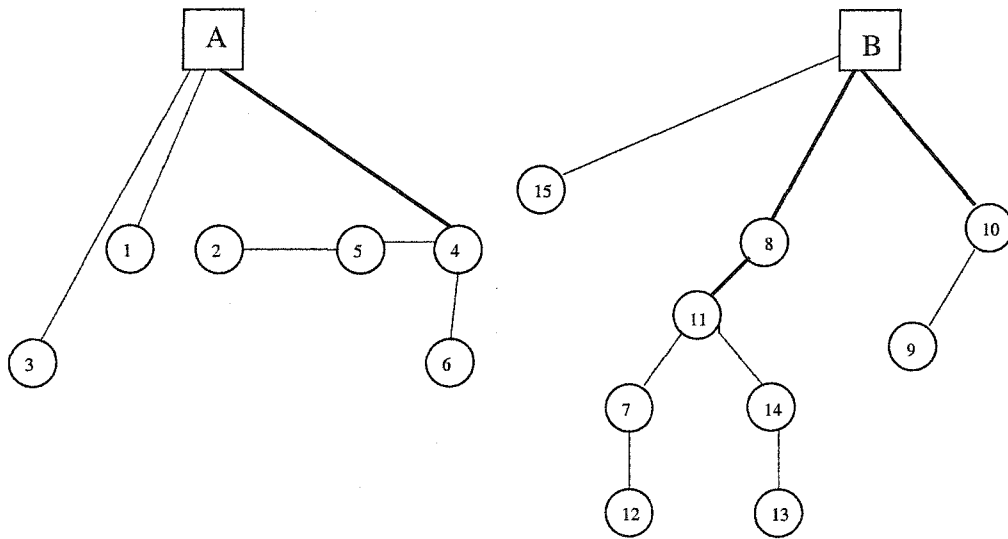


Figure 5.16: Meilleure configuration pour le scénario 2

obtenue en considérant les deux scénarios est différente de celles obtenues en considérant un seul scénario. Les solutions obtenues avec chacun des scénarios pris seul peuvent ne pas satisfaire tous les scénarios. Advenant le cas où un pire scénario se réalise, l'exploitant devrait alors défrayer des coûts supplémentaires pour satisfaire les surplus de demandes. D'autre part si un moins pire scénario se réalise, l'exploitant se trouverait à avoir investi de l'argent dans la mauvaise place.

Dans notre cas, la solution obtenue en considérant le scénario 1 tout seul, ne peut pas satisfaire le scénario 2. Si ce dernier scénario se réalise, l'exploitant devrait payer des coûts supplémentaires qu'il n'a pas prévu. D'autre part, la solution, obtenue en considérant le scénario 2 seul, peut satisfaire le scénario 1. Cependant cette solution est plus coûteuse que la solution obtenue en considérant les deux scénarios. En effet, malgré qu'il y a un coût de pénalité pour la meilleure solution obtenue en considérant les deux scénarios, cette solution est meilleure que les deux puisqu'elle reflète plus la réalité et donne des prévisions plus exactes sur les coûts, de plus les bornes supérieures et inférieures sont meilleures et le coût de pénalité est moins important que les coûts d'installation et d'entretien des équipements supplémentaires.

Conclusion:

Les tests numériques que nous avons effectués confirment bien la validité de l'approche développée dans cette thèse. Les temps d'exécutions rapportés ici concernent le temps d'utilisation du logiciel Cplex. Des réseaux encore plus importants peuvent demander beaucoup plus de temps. Cependant le logiciel Cplex offre la possibilité de limiter le temps d'exécution ainsi que l'espace mémoire utilisé par les arbres de branch and bound.

CHAPITRE 6

Conclusion

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à l'étude de la planification de la distribution de l'énergie électrique avec demande incertaine.

Nous avons construit un modèle pour la planification de la distribution de l'énergie électrique reflétant le plus possible la réalité. En plus des coûts standards, nous avons tenu compte du coût de "la pénalité" dûe à la non satisfaction de la demande. Nous avons proposé une définition de ces coûts de pénalité ainsi qu'une procédure pour les évaluer. La nature du modèle nous a incité à utiliser la méthode de décomposition de Benders comme approche de résolution. Le sous problème associé à notre modèle possède une structure spéciale rendant sa résolution particulièrement simple. Les contraintes du problème maître sont définies essentiellement par les coupes réalisables et les coupes non réalisables. Nous avons proposé une façon efficace pour générer des coupes Paréto-optimales dans le cas où le sous problème est réalisable. Pour résoudre le problème maître, nous avons été confronté à des difficultés: la première difficulté est la non linéarité de la fonction objectif, la deuxième difficulté est le fait qu'il possède beaucoup de contraintes et la dernière est que son objectif n'a pas de forme analytique bien explicite dûe au coût de pénalité. Nous avons contourné la première difficulté par l'introduction d'une variable

binaire, quant à la deuxième nous avons utilisé l'approche de relaxation et finalement pour la dernière difficulté nous avons utilisé des notions de programmation mathématique qui nous ont permis de trouver une formulation équivalente du problème maître relaxé facile à traiter. Nous avons proposé deux approches de résolutions, la méthode Branch-and-Bound et la méthode de la relaxation lagrangienne.

Pour tester la validité de la méthode, nous avons mis au point un programme expérimental écrit en langage C++ qui fait appel à Cplex pour résoudre le problème maître relaxé. Les ressources de Cplex ont été mises à contribution à une résolution du problème en un temps raisonnable pour des cas faisant intervenir plus d'une centaine de variables.

Il reste à développer des interfaces plus conviviales pour le programme pour le rendre accessible à des utilisateurs qui ne sont pas nécessairement familiers avec la programmation mathématique.

Le logiciel Cplex peut devenir lent et consommer beaucoup d'espace mémoire pour des problèmes possédant un nombre exponentiel d'inéquations dans leur formulation.

La méthode de "branch-and-cut" décrite dans l'annexe A est une méthode qui conjugue les efforts de l'algorithme de "branch-and-bound" et de la méthode des coupes polyédrales. Son application au problème de planification peut être une voie de recherche intéressante à explorer.

ANNEXE A

Données des tests numériques

A.1 Exemple 1

noeuds	A	B	1	2	3	4	5	6	7	8
A	-	-	15	8	-	-	-	-	-	-
B	-	-	-	14	2	-	-	-	-	-
1	15	-	-	12	-	12	-	22	-	-
2	8	14	12	-	-	17	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	11	11	-	-	16
4	-	-	12	17	11	-	-	13	12	-
5	-	-	-	-	11	-	-	-	10	-
6	-	-	22	-	-	13	-	-	7	-
7	-	-	-	-	-	12	10	7	-	16
8	-	-	-	-	16	-	-	-	16	-

Table A.1: Distances

pts de charges	t=0	t=1	t=2
1	2500	3100	2513
2	2014	3023	2100
3	1012	2122	1238
4	976	1982	899
5	688	1652	673
6	120	1345	367
7	223	1221	238
8	164	1189	219

Table A.2: Demandes pour le scénario 1

pts de charges	t=0	t=1	t=2
1	2500	3300	2513
2	2014	3023	2100
3	1012	1622	1238
4	976	1982	899
5	688	1952	673
6	120	1845	367
7	223	1421	238
8	164	1589	219

Table A.3: Demandes pour le scénario 2

C	t=0	t=1	t=2	Capacité
C1	800	850	900	22500
C2	1800	2400	2800	47000

Table A.4: Coûts et capacités des transformateurs

w	t=0	t=1	t=2	Capacité maximale	Rw	Xw
w1	30	32	34	3753	0.56	0.51
w2	35	38	40	8660	0.13	0.39

Table A.5: Coûts-capacité-réactance et résistance des conducteurs

	t=0	t=1	t=2
Perte de puissance	0.85	1.00	1.30
Coût des régulateurs	73	76	78

Table A.6: Coûts des pertes de puissance et des régulateurs

Postes	t=0	t=1	t=2
A	0.1	0.12	0.15
B	0.14	0.18	0.2

Table A.7: Coûts de pénalité des postes en millier de dollars par KVA

noeuds	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0.015	0.08	-	-	-	-	-	-
B	-	0.014	0.021	-	-	-	-	-
1	-	0.012	-	0.012	-	0.022	-	-
2	0.012	-	-	0.017	-	-	-	-
3	-	-	-	0.011	0.011	-	-	0.016
4	0.012	0.017	0.011	-	-	0.013	0.012	-
5	-	-	0.011	-	-	-	0.01	-
6	0.022	-	-	0.013	-	-	0.007	-
7	-	-	-	0.012	0.01	0.007	-	0.016
8	-	-	0.016	-	-	-	0.016	-

Table A.8: Coûts de pénalité des lignes en millier de dollars par KVA

scenario	1	2
probabilité	0.75	0.25

Table A.9: Probabilité des scénarios

A.2 Exemple 2

noeuds	A	B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	-	-	12	14	10	10	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	12
B	-	-	-	-	-	-	-	-	13	12	10	8	12	-	-	-	10
1	12	-	-	10	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	14	-	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	10	-	12	-	-	-	-	-	-	-	-	15	-	-	-	-	-
4	10	-	-	-	-	-	8	10	-	-	-	-	-	-	-	-	13
5	15	-	-	-	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-	10	-	-	-	-	-	-	-	13	-	-	15
7	-	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	10	-	-	-
8	-	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	-	-	-	-
9	-	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	-	-	13	-	-
10	-	8	-	-	15	-	-	-	-	-	8	-	-	-	-	-	14
11	-	12	-	-	-	-	-	-	8	7	-	-	-	-	-	5	-
12	-	-	-	-	-	-	-	13	10	-	-	-	-	-	-	-	-
13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	13	-	-	-	-	9	-
14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	9	-	-
15	12	10	-	-	-	13	-	15	-	-	-	14	-	-	-	-	-

Table A.10: Distances

pts de charges	t=0	t=1
1	2800	3200
2	2300	2700
3	2800	3200
4	1800	2200
5	1300	1700
6	2300	2700
7	1800	1900
8	2300	2600
9	1800	2000
10	3800	3700
11	1300	1300
12	200	700
13	2800	2700
14	1100	1300
15	200	700

Table A.11: Demandes pour le scénario 1

pts de charges	t=0	t=1
1	2800	3700
2	2300	2900
3	2800	3600
4	1800	2000
5	1300	1900
6	2300	2900
7	1800	1000
8	2300	2900
9	1800	2900
10	3800	3900
11	1300	1600
12	200	1700
13	2800	2700
14	1100	1300
15	200	1700

Table A.12: Demandes pour le scénario 2

C	t=0	t=1	capacité
C1	800	850	22500
C2	1800	2400	47000

Table A.13: Coûts et capacités des transformateurs

w	t=0	t=1	Capacité maximale	Rw	Xw
w1	30	32	3753	0.56	0.51
w2	35	38	8660	0.13	0.39

Table A.14: Coûts-capacité-réactance et résistance des conducteurs

	t=0	t=1
Perte de puissance	0.85	1.00
Coût des régulateurs	73	76

Table A.15: Coûts des pertes de puissance et des régulateurs

Postes	t=0	t=1
A	0.01	0.012
B	0.014	0.018

Table A.16: Coûts de pénalité des postes en millier de dollars par KVA

noeuds	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	12	14	10	10	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	12
B	-	-	-	-	-	-	13	12	10	8	12	-	-	-	10
1	-	10	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	12	-	-	-	-	-	-	-	-	15	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	8	10	-	-	-	-	-	-	-	-	13
5	-	-	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	-	-	-	10	-	-	-	-	-	-	-	13	-	-	15
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	10	-	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	-	-	13	-	-
10	-	-	15	-	-	-	-	-	8	-	-	-	-	-	14
11	-	-	-	-	-	-	8	7	-	-	-	-	-	5	-
12	-	-	-	13	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	-	-	-	-	-	-	-	-	13	-	-	-	-	9	-
14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	9	-	-
15	-	-	-	13	-	15	-	-	-	14	-	-	-	-	-

Table A.17: Coûts de pénalité des lignes en centaines de dollars par KVA

scenario	1	2
probabilité	0.75	0.25

Table A.18: Probabilité des scénarios

ANNEXE B

Méthode de Branch-and-cut

B.1 La méthode de branch-and-cut

Au milieu des années 80, Padberg et Rinaldi [57] ont introduit la nouvelle méthodologie qui combine efficacement les deux techniques "branch-and-bound" et "la méthode des coupes", ils l'ont appelé "**branch-and-cut**". Parmi les ingrédients principaux de cette méthodologie, nous pouvons citer: la génération des coupes à chaque noeud et la validité globale de ces coupes le long de tout l'arbre de branch-and-cut.

La méthode de "branch-and-cut" présente plusieurs avantages par rapport à chacun des deux techniques. En effet, par rapport à "branch-and-bound", l'ajout des nouvelles coupes à chaque noeud de branchement améliore la relaxation PL. D'autre part, le fait qu'on peut commencer le branchement dès qu'on détecte le phénomène "Tailing-off" (arrêt d'exécution quand il n'y pas une amélioration significative) rend la méthode "branch-and-cut" plus efficace que la "méthode de coupes de Gomory". De plus, puisque la convergence globale est assurée par le branchement, les coupes de séparation peuvent être de type heuristique ou bien des sous familles de coupes pour des problèmes spécifiques qui prennent en main quelques structures du problème.

Ces avantages, parmi d'autres, rendent cette méthodologie populaire pour résoudre les problèmes linéaire mixte de taille variable. Cette méthode a été utilisée avec succès pour différentes applications citons [68], [69], [64], [65], [66], [67]

Dans ce qui suit, nous présentons les principales idées de la méthode, puis nous exposons l'algorithme de "branch-and-cut".

Dans la méthode de branch-and-cut, nous distinguons deux phases principales différentes:

- phase d'énumération,
- phase de calcul des bornes inférieures et supérieures.

Remarquons que le calcul des bornes inférieures et bornes supérieures est aussi un ingrédient important pour la méthode.

Les bornes inférieures sont obtenues en appliquant un algorithme ordinaire de génération des coupes pour chaque sous problème. Pour le calcul des bornes supérieures, il y a deux techniques de base qui sont couramment utilisées. La première méthode consiste à utiliser des heuristiques avant d'examiner le noeud racine de l'arbre de "branch-and-cut". Si la solution du PL est une meilleure solution pour le problème original, cette borne peut être améliorée. L'autre méthode est d'exploiter les solutions fractionnelles pour calculer les bornes supérieures. Cette dernière méthode exige plus de temps que la première, cependant elle diminue le temps total d'exécution de l'algorithme de "branch-and-cut" puisque elle diminue la taille de l'arbre de "branch-and-cut".

Les différentes étapes de l'algorithme de "branch-and-cut" se résume dans l'organigramme de la figure B.2. Les deux colonnes à gauche décrivent la phase de génération des coupes pour un seul sous problème, la troisième colonne montre l'exécution de l'opération de branchement et la colonne à droite est l'étape de saturation des noeuds.

B.1.1 Terminologie

Nous décrivons simplement chaque étape de l'organigramme, mais avant d'aller aux détails, nous avons besoin de définir certaine terminologie.

Comme dans l'algorithme de "branch-and-bound", l'étape de branchement permet de générer deux (ou plusieurs) sous problèmes. L'ensemble de tous ces sous problèmes peut être représenté par un arbre binaire (k-naire) appelé "**arbre de branch-and-cut**".

Donc, nous pouvons nommer un sous problème "**un noeud de branch-and-cut**".

Nous distinguons quatre types de noeud de branch-and-cut:

- Le noeud active: c'est le noeud qui est couramment examiné,
- Le noeud non examiné,
- Le noeud examiné saturé,
- Le noeud examiné non saturé.

La figure B.1 est un exemple d'arbre de branch-and-cut.

Durant le calcul, chaque variable possède un des attributs suivants:

- Libre,
- Mis à la borne inférieure,
- Mis à la borne supérieure,
- Fixé à la borne inférieure,
- Fixé à la borne supérieure.

Remarque:

Lorsque la variable est **fixée** à l'une de ces bornes, alors elle va avoir cette même valeur pendant tout le reste du calcul, mais si une variable est **mis** à l'une de ces bornes, alors

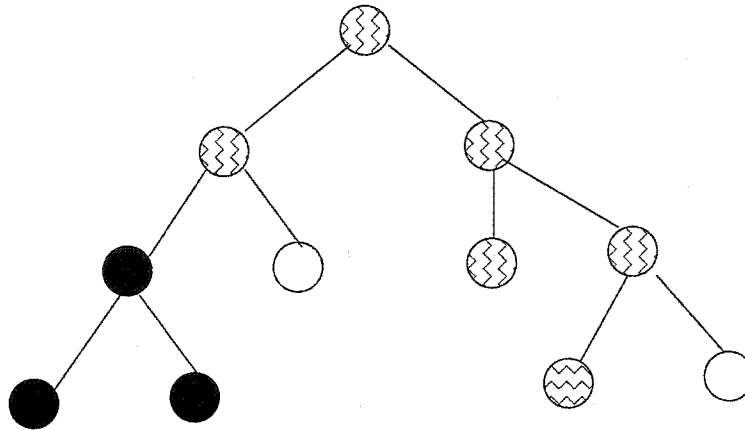


Figure B.1: Arbre de branch-and-cut.

cette valeur demeure valide seulement pour le noeud active de "branch-and-cut" et pour les noeuds des sous arbres ayant comme racine ce noeud active. Les conditions pour fixer et mettre les variables seront expliquées plus tard.

Dès que les programmes linéaires seront résolus, chaque variable qui n'est pas enlevée du programme linéaire (parce qu'elle est mis ou fixée) reçoit par la méthode du simplexe révisé, un des attributs suivants: **à la borne inférieure, de base, à la borne supérieure.**

Finalement, désignons par

- **val-PL**: la valeur optimale du dernier programme linéaire résolu, qui est aussi une borne inférieure local **b-i-l** pour le noeud couramment examiné,
- **b-i-g**: minimum des bornes inférieures des noeuds de "branch-and-cut" non examinés et du noeud active,
- **b-s-g**: la borne supérieure globale et c'est la valeur de la meilleure solution réalisable courante.

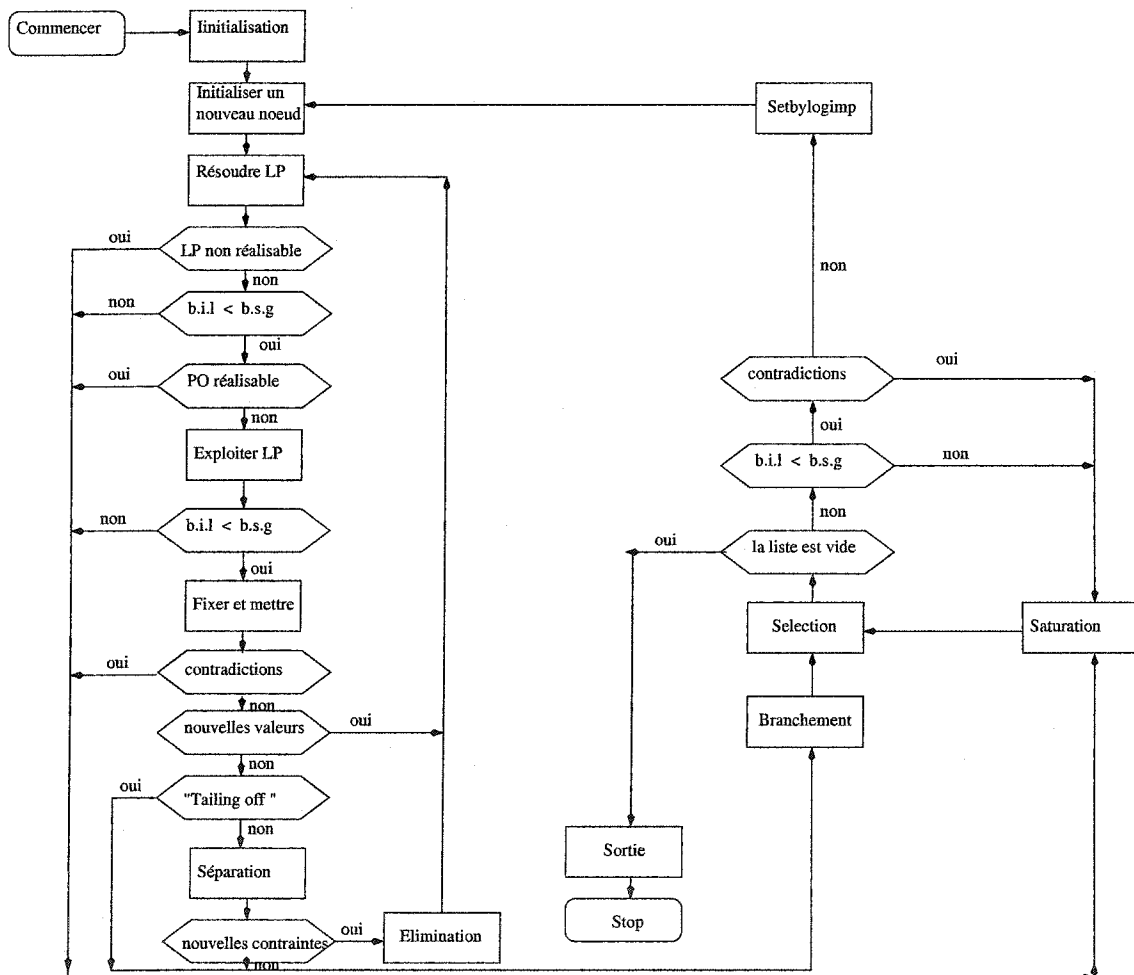


Figure B.2: Organigramme de branch-and-cut.

Le sous arbre ayant comme racine le plus haut ancêtre commun du noeud active et de tout les noeuds ouverts est appelé "arbre de branch-and-cut restante". Le plus haut ancêtre est la racine de l'arbre de branch-and-cut restante et la borne inférieure local de ce noeud est appelé **b-i-rac**. La différence entre **b-i-rac** et **b-i-l** sera expliquée ultérieurement.

La partie centrale de l'algorithme est le calcul des bornes inférieures, elle sera accomplie après la sélection d'un nouveau sous problème active et elle consiste à résoudre le problème active en optimisant les relaxation PL qui seront à leurs tours enrichies par l'ajout des coupes.

Nous quittons la phase de calcul des bornes inférieures si une de ces situations suivantes se présente:

- La borne supérieure n'excède pas la borne inférieure,
- La solution PL est une solution réalisable du problème original (mixte),
- On ne peut plus générer des coupes,
- Le sous problème active est non réalisable,
- La borne inférieure ne diminue pas d'une façon significative même si les coupes sont ajoutées.

B.1.2 La phase d'énumération

Dans cette phase, nous discutons en détail comment exécuter les opérations de branchement et de sélection.

Initialisation:

L'ensemble des noeuds ouverts de "branch-and-cut" est initialisé à l'ensemble vide. Pour initialiser la borne supérieure globale (b-s-g), des solutions réalisables peuvent être calculé par des méthodes heuristiques. Nous expliquerons ça en détails plus tard. Ensuite,

nous examinons le noeud racine de l'arbre complète de "branch-and-cut" par la première phase (calcul des bornes inférieures et supérieures).

Calcul des bornes:

Il ne fait pas partie de la phase d'énumération. Le calcul des bornes inférieures et supérieures sera expliqué dans les sections ultérieures.

Nous poursuivons l'explication de la phase d'énumération. Si une de ces situations suivantes se présentent:

- Le noeud active de "branch-and-cut" ne peut pas contenir une solution réalisable meilleure que celle déjà connue,
- La solution finale du PL est une solution réalisable du problème original,
- Fixer ou mettre des variables cause une contradiction.

alors, Le noeud est saturé. Sinon, nous nous préparons à une opération de branchement et de sélection d'un autre noeud de "branch-and-cut".

Branchement:

Dans cette opération, un ensemble de nouveaux sous problèmes ayant les mêmes propriétés entières que le problème original, sera généré tel que la réunion de leurs solutions réalisables soit l'ensemble des solutions réalisables du sous problème active. Normalement les nouveaux sous problèmes ont des ensembles réalisables disjoints.

Pour générer les nouveaux sous problèmes, il existe plusieurs stratégies. La plus répandue est le branchement d'une seule variable. Comme c'est déjà connue, certaines variables fractionnelles i ayant des valeurs \bar{x}_i , qui doivent être des solutions réalisables entières du problème original (mixte), sont choisies comme des variables de branchement et deux nouveaux noeuds qui sont les noeuds-fils seront créés et ajoutés à l'ensemble des noeuds de l'arbre de "branch-and-cut" non examinés. Dans ce cas, la nouvelle borne supérieure de la variable i dans le le premier nouveau sous problème est $\lfloor \bar{x}_i \rfloor$ tandis que la borne inférieure,

elle demeure inchangée. Dans l'autre sous problème, la borne supérieure garde sa valeur ancienne alors que la nouvelle borne inférieure, elle prend la valeur $\lceil \bar{x}_i \rceil = \lfloor \bar{x}_i \rfloor + 1$.

Il existe une variété de stratégies différentes pour la sélection des variables de branchement, ici nous présentons seulement quelques'unes. Soit \bar{x} une solution du dernier programme linéaire résolu et z le vecteur des parties fractionnelles des valeurs des variables ($\bar{z}_i \equiv \bar{x}_i(1)$ pour tout les variables i).

1. Choisir une variable ayant une partie fractionnelle proche de 0.5 et le coefficient le plus petit en valeur absolu dans la fonction objectif.
2. Choisir une variable ayant une partie fractionnelle proche de 0.5.
3. Choisir la variable fractionnelle ayant le coefficient le plus petit dans la fonction objectif.
4. Si dans la meilleure solution réalisable courante connue il existe des variables fractionnelles non nulles, choisir celle ayant le coefficient le plus petit dans la fonction objectif, sinon appliquer la stratégie 1.
5. Choisir une variable i^* avec $\bar{x}_{i^*} = \max\{\bar{x}_i / \bar{x}_i \leq 0.999\}$, cette stratégie est utilisée seulement pour les problèmes d'optimisation mixte (0-1).

Sélection:

Le noeud de "branch-and-cut" est choisi à partir de l'ensemble des noeuds ouverts de "branch-and-cut". Si la liste est vide, alors la meilleure solution réalisable connue est une solution optimale, sinon, le noeud choisi sera examiné. Après la sélection, l'ensemble des variables incluant les variables de branchement doit être ajusté. Si au même temps, certaines variables doivent être mises à l'une de leurs bornes (inférieures ou supérieures), déjà ils étaient fixées à une valeur opposée, nous aboutissons alors à une contradiction. Dans ce cas le noeud sera saturé. Si la borne supérieure du noeud choisi n'excède pas

la borne inférieure, alors ce noeud est saturé immédiatement et le processus de sélection continue.

Pour la sélection, il existe trois stratégies connues:

- recherche selon la profondeur,
- recherche selon la largeur,
- recherche selon le meilleur.

Nous définissons le niveau d'un noeud A de "branch-and-cut" comme étant le nombre d'arêtes dans le chemin allant de la racine de l'arbre de "branch-and-cut" jusqu'à A. Dans le cas de la recherche selon la profondeur, le noeud avec le niveau le plus élevé sera choisi à partir des noeuds ouverts de l'arbre de "branch-and-cut" tandis que dans la recherche selon la largeur, le noeud ayant le niveau le plus bas sera considéré. Dans la recherche selon le meilleur, le noeud ayant le plus de promess devient le noeud active. Pour un problème de minimisation, le noeud ayant la borne inférieure la plus petite est supposé le noeud ayant le plus de promess.

Une autre stratégie populaire d'énumération est la stratégie de plongée, elle consiste à trouver une solution réalisable avec la recherche selon la profondeur, puis continuer l'énumération avec la recherche selon le meilleur.

Pour le problème de "voyageur de commerce", les expériences [58] ont montré que la recherche selon la profondeur présente le risque de dépenser beaucoup de temps dans l'étape de branchement qui sera utile pour calculer des meilleures bornes supérieures et inférieures. De plus, fréquemment, la borne inférieure du sous problème active peut dépasser la valeur de la fonction objective de la solution optimale, cependant, ce noeud peut ne pas être saturé car aucune meilleure borne inférieure est connue (note: le problème de "voyageur de commerce" est un problème de minimisation). Le même phénomène se produit quand nous utilisons la recherche selon la largeur mais il est rare

si l'énumération utilise la recherche selon le meilleur.

Bien que recherche selon le meilleur soit par défaut la meilleure stratégie d'énumération, les autres stratégies mentionnées et les stratégies spécifiques au problème doivent être considérée durant la mise en œuvre.

En 1991, Padberg et Rinaldi [59] proposent l'idée de "branch pausing" qui consiste à considérer une valeur "objectif" comme une estimation de la valeur de la solution optimale. Si la borne supérieure est inférieure à la valeur "objectif", le noeud (avec sa nouvelle borne supérieure) sera remis dans l'ensemble des noeuds ouverts sans exécuter une opération de branchement.

Notons qu'il est préférable d'exécuter le processus de branchement et de sélection d'un nouveau noeud d'une façon différente. Au lieu de créer immédiatement deux noeuds-fils (ou plus) dans l'étape de branchement, Padberg et Rinaldi [59] suggèrent ajouter le noeud active de l'arbre de "branch-and-cut" à l'ensemble des noeuds ouverts. Quand ce noeud est choisi parmi l'ensemble des noeuds ouverts, il sera examiné de nouveau, puisque des coupes de plus doivent être générées à partir de **pool** (structure qui sera définie plus tard) n'étaient pas disponible durant le premier processus. Après cette seconde phase de coupe pour le sous problème, les noeuds-fils correspondants seront créés si ce noeud n'est pas saturé au même temps.

Saturation:

Le noeud est saturé si une de ces conditions est réalisé:

- Si la borne supérieure n'excède pas la borne inférieure,
- S'il y a une contradiction,
- Si un noeud non réalisable est généré,
- Si la solution PL est une solution réalisable du problème original.

Les noeuds saturés nous conduit à une nouvelle racine de "branch-and-cut" contenant le reste des noeuds ouverts.

Remarque:

Si le noeud est saturé à cause d'une contradiction, alors non seulement ce noeud où il y a la contradiction doit être saturé mais aussi d'autres noeuds ouverts doivent être saturés. Exemple: soit e la variable ayant une contradiction, si dans un autre noeud f la variable e est mis à la "mauvaise" borne, tout les noeuds dans le sous arbre en bas de f seront enlevés de l'ensemble des noeuds ouverts.

Sortie:

Nous obtenons une solution optimale et l'algorithme s'arrête.

B.1.3 Calcul des bornes inférieures

Pour le calcul des bornes inférieures, les relaxations PL seront résolues d'une façon itérative, des contraintes valides s'ajoutent et des contraintes redondantes s'éliminent de la matrice des contraintes.

Dans cette section, nous signalons qu'une structure de données additionnelles pour les inégalités appelée "**pool**" sera utile pas nécessairement pour la correction de l'algorithme. Les inégalités actives sont des inégalités du PL courant qui seront emmagasinées dans "pool" et dans la matrice des contraintes, tandis que les contraintes inactives, elles seront présentées seulement dans "pool".

Au début, "pool" est vide. Si par l'algorithme de séparation nous générons une inégalité, elle sera emmagasinée dans "pool" et ajoutée à la matrice des contraintes.

Initialisation d'un nouveau noeud:

Si le noeud active de "branch-and-cut" est le noeud racine de l'arbre de branch-and-cut, alors le programme linéaire est initialisé par quelques contraintes du système. Les bornes supérieures et inférieures sont généralement des choix suffisants.

Pour des problèmes d'optimisation 0-1, une base réalisable primale dérivée d'une solution réalisable peut être utilisée comme base initiale afin d'éviter la phase 1 de l'algorithme du simplexe.

Pour initialiser le premier système de contraintes des sous problèmes, n'importe quel ensemble d'inégalités valides peut être utilisé. Donc, afin de garantir la monotonie des valeurs des bornes inférieures locales dans chaque branche de l'arbre d'énumération, et gagner du temps, il sera approprié d'initialiser la matrice des contraintes par des contraintes qui étaient actives dans le dernier programme linéaire résolu (noeud père dans l'arbre de "branch-and-cut". Il est aussi suffisant d'utiliser des contraintes liantes ou des contraintes avec des variables d'écarts hors base. Ces inégalités peuvent être générées de nouveau à partir de la structure "pool".

Puisque la base du noeud père est réalisable duale pour le programme initial de ces fils, alors en commençant avec cette base, nous pouvons éviter l'utilisation de la phase 1 du simplexe. Les colonnes des variables hors base et les variables fixes peuvent être enlevées de la matrice des contraintes pour garder une taille petite au programme linéaire et si la valeur d'une variable est fixé (ou mis) à être non nulle, le terme de droite de la contrainte doit être ajusté et la valeur correspondante dans la fonction objectif doit être ajoutée à la valeur optimale retournée par l'algorithme du simplexe afin d'obtenir une valeur correcte de la valeur **val-PL**. La procédure "**fixer ou mettre**" des variables ne doit pas être enlevée car elle nous guide soit à une base réalisable primale ou à une base réalisable duale. L'ajustement de ces variables peut être accompli en adaptant leurs bornes inférieures et supérieures.

Résoudre PL:

Si la base est réalisable primale alors, le programme linéaire est résolu par la méthode primale du simplexe mais si la base est réalisable duale, il sera résolu par méthode duale du simplexe. Dans le cas contraire, (la base est ni réalisable primale, ni réalisable duale), nous devons appliquer la méthode des deux phases du simplexe, ce dernier cas peut se

produire si les contraintes nécessaires pour l'initialisation du programme linéaire du sous problème ne sont pas disponibles.

Remarquons que dans certains cas, 90% du temps de calcul sera dépensé dans la résolution du programme linéaire.

Aujourd'hui, il y a plusieurs logiciels concurrents pour la résolution des programmes linéaires ex: Cplex, OSL, OBI, LOQO, cependant, l'algorithme de "branch-and-cut" exige le logiciel le plus rapide.

La méthode du simplexe satisfait toutes les conditions de l'algorithme de "branch-and-cut" et elle est utilisée presque dans tout les algorithmes de génération des coupes, or les programmes linéaires qui doivent être résolus dans l'algorithme des coupes sont souvent dégénérés, donc il faut choisir une bonne stratégie de sélection des variables de pivot.

les méthodes du point intérieur sont moins sensibles à la dégénérescence et il paraît qu'elles sont plus efficaces pour les problèmes de grande taille.

Exploiter PL:

Premièrement, nous devons vérifier si la solution du PL est une solution réalisable du problème original. Si c'est le cas, alors nous quittons "la phase de calcul des bornes", et ce noeud active de "branch-and-cut" est saturé, sinon, nous continuons avec la phase de génération des coupes. Cependant, dans [60] et [58], il est suggéré d'exploiter les solutions fractionnelles de PL pour améliorer les bornes inférieures avant de générer des coupes additionnelles. Nous parlerons plus en détails de ça plus tard.

Fix and set:

Ce sous programme consiste au quatre procédures suivantes: "**Fixbyredcost**", "**Fixbylogimp**", "**Setbyredcost**", et finalement "**Setbylogimp**". Si le noeud active est le noeud racine de l'arbre de "branch-and-cut", les coûts réduits des variables hors base obtenus par le logiciel de résolution PL peuvent être utilisé pour les fixer à jamais à leur valeurs courantes par la procédure "**Fixbyredcost**". Soit e une variable hors base, r_e le coût réduit de e , et \bar{x}_e sa valeur courante. Si x_e change de \bar{x}_e à $\bar{x}_e + t$, alors la valeur de

fonction objectif change par $t.r_e$. Puisque la variation minimale en valeur absolu d'une variable entière est 1, nous pouvons utiliser le coût réduit pour fixer la variable à sa valeur courante. La liste des candidats pour fixer et la valeur de **b-i-rac** peut être mis à jour chaque fois qu'on a une nouvelle racine de l'arbre de "branch-and-cut" restante.

Signalons que nous avons une nouvelle racine de l'arbre de "branch-and-cut" restante si tout les noeuds des sous arbres sont saturés à l'exception du sous arbre du noeud racine précédent.

Puisque l'emmagasinage de ces listes à chaque noeud (qui peut éventuellement devenir le noeud racine des noeuds ouverts de l'arbre de "branch-and-cut") utilise beaucoup d'espace mémoire, la partie de calcul des bornes doit être faite dans un deuxième temps pour ce noeud (quand il devient une nouvelle racine).

Si le système de contrainte pour la calcul doit être initialisé par ces contraintes qui étaient présentes dans le dernier programme linéaire du premier noeud examiné alors un seul appel de l'algorithme du simplexe est nécessaire. Cependant, l'emmagasinage de tout ces contraintes doit exiger encore beaucoup d'espace mémoire. Le système de contrainte peut être initialisé par exemple avec des contraintes valides globales. Si certaines contraintes sont séparées d'une façon heuristique, il n'est pas garanti que la même borne inférieure local peut être achevé comme dans la phase de calcul des bornes précédentes. Alors, non seulement les coûts réduits et les attribus des variables de ce calcul doit être utilisé mais aussi la borne inférieure local correspondante comme **b-s-rac** dans les appels successives de la procédure "**Fixbyredcost**"; ceci explique la difference entre **b-i-rac** et **b-i-l**.

Aussi ce calcul n'est pas nécessaire si la racine de l'arbre de "branch-and-cut" restante est couramment examiné , par exemple le premier noeud examiné.

La liste des candidats pour fixer doit être contrôlée par la procédure "**Fixbyredcost**" quand elle est fraîchement compilée ou si la valeur de **b-s-g** a été amélioré depuis le dernier appel de "**Fixbyredcost**".

"**Fixbyredcost**" peut trouver qu'une variable peut être fixé à une valeur opposée à

celle ou elle est mise. nous aurons une contradiction. Ceci veut dire que pendant le processus de calcul, une mauvaise décision a été prise avant par "**Setbyredcost**" ou "**Setbylogimp**". Ce noeud active doit être saturé immédiatement.

Après que les variables sont fixées par "**Fixbyredcost**", nous devons faire appel à "**Fixbylogimp**". Cette procédure essaye de fixer plus de variables par des implications logiques en exploitant la structure spéciale du problème d'optimisation. Ce fait n'a pas d'influence directe sur le processus d'optimisation, cependant il peut diminuer la taille du programme linéaire.

Rappelons que si nous fixons une variable à une certaine valeur, elle demeure avec cette valeur pendant le reste du calcul tandis que si on la mis à une certaine valeur, cette valeur est valide seulement pour le noeud active et les sous arbre ayant comme racine ce noeud active. "**Setbyredcost**" met les variables par le même critère que "**Fixbyredcost**" mais il se base sur les coûts réduits locaux et la borne inférieure local du sous problème active plutôt que sur les coûts réduits valides globaux et la borne inférieure du noeud racine **b-i-rac**. Les contradictions sont possibles si les variables sont fixées après par des valeurs opposés. Dans ces cas le noeud active est saturé.

La procédure "**Setbylogimp**" essaie de mettre plus de variables par des implications logiques semblables à ceux de "**Fixbylogimp**", elle est appelé quand la procédure "**Setbyredcost**" a fixé les variables d'une façon efficace après la phase de sélection où la procédure de branchement doit causer des implications logiques semblables à "**Fixbylogimp**".

Certaines variables doivent être fixées ou mises à des nouvelles valeurs c'est à dire des valeurs différentes à ceux de la solution courante. Dans ce cas, il est avantageux de résoudre immédiatement le nouveau problème linéaire plutôt que de continuer à générer les coupes.

Normalement, il est suffisant d'appeler des procédures appropriées quand une borne supérieure globale est retrouvée ou lorsque la valeur de la fonction objectif a diminué

d'une façon significative.

Arrêt d'exécution "Tailing-off":

Il est raisonnable d'arrêter la partie de génération des coupes s'il n'y a pas une diminution significative de **val-PL**. Si durant au moins k (ex $k = 10$) itérations dans la partie de calcul des bornes, **val-PL** ne diminue pas par p pour 100 (ex $p = 0.01$), de nouveaux sous problèmes seront créés au lieu de générer plus de coupes. Un bon choix de paramètres p et k sont spécifiques au problème et dépendent de la qualité de la procédure disponible de génération des coupes.

Séparation:

La phase de séparation est la partie centrale de l'algorithme de "branch-and-cut". Dans cette phase, nous essayons de trouver les inégalités qui doivent être ajoutées au programme linéaire. S'il y a des nouvelles contraintes, nous passons à l'étape d'élimination (éliminer les inégalités redondantes), puis nous résolvons PL, sinon nous passons à l'étape de branchement.

Élimination:

Si les inégalités sont ajoutées à la matrice des contraintes et aucune inégalité est éliminée, alors la matrice devient très grande pour être résolu dans un temps raisonnable, encore l'emmagasinage des contraintes dans la matrice exige beaucoup d'espace mémoire, de plus il existe des inégalités qui deviennent redondantes pour le reste du calcul. Donc, il est nécessaire d'avoir stratégie qui maintient une taille raisonnable pour la matrice.

Une stratégie simple et évidente pour éliminer les contraintes est d'enlever toutes les inégalités qui sont non liées à la dernière solution PL à partir de la structure contrainte (les inégalités dont les variables d'écart sont positifs).

Pour éviter d'avoir des cycles, les contraintes doivent être enlevées seulement si la variable d'écart est assez grande ($s > 0.001$) ou bien si les contraintes sont non liées à la dernière solution PL durant plusieurs solutions PL successives.

Nous pouvons utiliser aussi le statut de la variable d'écart comme critère d'élimination.

En effet, si la variable d'écart est une variable de base, alors nous supprimons la contrainte de l'ensemble des contraintes actives. Si les contraintes sont éliminées à cause du fait que la valeur de la relaxation PL change (plus qu'une certaine tolérance) dans la dernière itération, alors aucun cycle ne se produit [62]. Cette stratégie peut être modifiée de façon que seulement les contraintes sont enlevées dont la variable d'écart est de base plus que dans ($k \geq 1$) itérations.

B.1.4 Calcul des solutions réalisables

Pour la majorité des problèmes d'optimisation, une variété d'heuristiques est valable pour calculer des solutions réalisables qui permettent d'avoir des bornes supérieures globales pour l'algorithme de "branch-and-cut".

Normalement, le calcul des bornes supérieures globales est accompli dans la procédure **Initialisation** (avant la phase d'énumération et la phase de génération des coupes). Si les solutions PL sont des solutions réalisables au problème original (mixte), alors nous obtenons les meilleures bornes supérieures, cependant, ceci se réalise rarement. Donc, il faut appliquer des heuristiques sophistiquées pour générer des meilleures bornes supérieures meilleures. Ceci doit aider à réduire la taille de l'arbre d'énumération.

Nous pouvons compléter le calcul des meilleures solutions réalisables dans la procédure **Initialisation** en intégrant le calcul des bornes supérieures de la phase de génération des coupes. Il sort que les solutions fractionnelles PL survenant dans le calcul des bornes inférieures dans l'algorithme de "branch-and-cut" donnent des allusions sur la structure de l'optimum ou les solutions voisines de l'optimum. Le temps de calcul investi dans ces heuristiques qui exploite ce fait peut être contrôlé dynamiquement.

De plus, il existe quelques problèmes d'optimisation mixte qui n'ont pas une structure utile pour l'exploiter à ces heuristiques, pour ces problèmes sophistiqués, des heuristiques contournant les solutions fractionnelles PL sont des meilleures méthodes pour la

détermination des meilleures solutions réalisables [61].

Exploiter la solution PL:

Nous pouvons observer que même si les solutions PL ont des composantes fractionnelles, ils peuvent donner des informations sur des bonnes solutions réalisables. Ils possèdent des composantes entières et d'autres proches de variables entières. Ce fait peut être exploité pour construire une bonne solution de départ qui améliore les heuristiques ultérieures.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-L. Goffin, A. Haurie and J.-Ph. Vial "*Decomposition and nondifferentiable optimization with projective algorithm*". *Management Science*, 38(2) : 284-302, 1992.
- [2] J.-L. Goffin, J. Gondzio, R. Sarkissian and J.-Ph. Vial "*Solving nonlinear multicommodity flow problems by the analytic center cutting plane method*". *Mathematical Programming*, 76 : 131-154, 1996.
- [3] B. T. Polyak "*Minimization of smooth functionals*". *USSR Computational mathematics and mathematical physics*, 9 : 509-521, 1969.
- [4] F. Blanchini, F. Rinaldi and W. Ukovich. "*A network design problem for a distribution system with uncertain demand*". *Siam Journal of optimisation*, 7(2) : 560-578, 1997.
- [5] M. Held, P. Wolfe and H.P. Crowder. "*Validation of subgradient optimization*". *Mathematical programming*, 6 : 62-88, 1974.
- [6] B. Gavish "*Topological design of centralized computer networks-formulation and algorithms*". *Networks*, 12 : 355-377, 1982.
- [7] A. Lisser, A. Ouorou , J.-Ph. Vial and J. Gondzio. "*Capacity planning under uncertain demand in telecommunication networks*", *Management Studies*, : 1-23, October 8, 1999.

- [8] S. Sen, R. D. Doverspike and S. Cosares. "*Networks planning with random demand*". Telecommunication Systems, 3 : 11-30, 1994.
- [9] R. E. Tarjan. "*Finding optimum branching*". Networks, 7 : 25-35, 1977.
- [10] D. T. Gardner and J. S. Rogers. "*Planning electric power systems under demand uncertainty with different technology lead times*". Management Science, (45)10 : 1289-1306, Octobre 1999.
- [11] A. Marin and J. Salmeron. "*Electric capacity expansion under uncertain demand: decomposition approaches*". IEEE Transactions on Power Systems, (13)2 : 333-339, May 1998 .
- [12] A. Benchakroun. "*Un modèle de planification des réseaux de distribution de l'énergie électrique*". Ph.D. thesis, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Université de Montréal, 1988.
- [13] A. Benchakroun. "*Une approche constructive pour la planification des réseaux de distribution d'énergie électrique*". Investigación Operativa, (2)1 : 5-22, Décembre 1990.
- [14] A. Benchakroun, J. A. Ferland and V. Gascon. "*Benders decomposition for network design problems with underlying tree structure*". Investigación Operativa, (6)1,2,3 , January-December 1998.
- [15] A. Benchakroun, J. A. Ferland and R. Cléroux. "*Benders decomposition for network design problems with underlying tree structure*". European Journal of Operational Research, 62: 149-162, 1991.
- [16] V. Gascon. "*Modèle de distribution de l'énergie électrique avec structure de réseau*". Ph.D. thesis, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Université de Montréal, 1990.

- [17] D. I. Sun, D. R. Farris, P. J. Cote, R. R. Shoults and M. S. Chen. "Optimal distribution substation and primary feeder planning via the fixed charge network formulation". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-101 : 602-609, March 1982.
- [18] D. L. Wall , G. L. Thompson and J. E. D. Northcote-Green. "An optimization model for planning radial distribution networks. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", PAS-98 : 1061-1067, May/June 1979.
- [19] D. M. Crawford and S. B. Holt. "A mathematical optimization technique for locating and sizing distribution substation and deriving their optimal service areas". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-94 : 230-235, March/April 1975.
- [20] G. L. Thompson and D. L. Wall. "A branch-and-bound model for choosing optimal substation locations". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-100: 2683-2687, May 1981.
- [21] Temraz H.K. and Quintana V.H. "Distribution system expansion planning models: an overview". Electric Power Systems Research, 26 : 61-70, June 1993.
- [22] J. Partanen. "A Modified dynamic programming algorithm for sizing, locating and timing of feeder reinforcements". Transactions on Power Delivery, PWRD-5 : 277-283, January 1990.
- [23] J. L. Chen and Y. Y. Hsu. "An expert system for load allocation in distribution expansion planning". IEEE Transactions on Power Delivery, PWRD-4 : 1910-1917, July 1989.
- [24] K. Aoki , K. Nara , T. Satoh , M. Kitagawa and K. Yamanaka. "New approximate optimization method for distribution system planning". IEEE Transactions on Power Systems, 5(1) : 126-132, February 1990.

- [25] K. Nara , T. Satoh , H. Kuwabara , K. Aoki , M. T. Kitagawa , K. Yamanaka and T. Ishihara. "*Distribution systems expansion planning by multi-stage branch exchange*". IEEE Transactions on Power Systems, 7(1) : 208-214, February 1992.
- [26] M. Blanchard , L. Delorme , C. Simard and Y. Nadeau. "Experience with optimization software for distribution system planning". *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(4) : 1891-1898, November 1996.
- [27] M. Carneiro , P. M. França and P. D. Silveira. "*Long-range planning of power distribution systems: primary networks*". Electric Power Systems Research, 27 : 223-231, 1993.
- [28] M. Ponnavaikko , K. S. Prakasa Rao and S. S. Venkata. "*Distribution system planning through a quadratic mixed integer programming approach*". IEEE Transactions on Power Delivery, PWRD-2 : 1157-1163, October 1987.
- [29] M. A. El-Kady. "*Computer-aided planning of distribution substation and primary feeders*". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-103(6) : 230-235, June 1984.
- [30] R. N. Adams and M. A. Laughon. "*Optimal planning of power network using mixed-integer programming*". Proc IEE, 121(2) : 139-148, 1974.
- [31] T. Gonen and B. L. Floote. "*Distribution-system planning using mixed-integer programming*". IEE Proc. C, Gen. Trans. and Distrib, 128(2) : 70-79, May/June 1981.
- [32] T. Gonen and B. L. Floote. "*Mathematical dynamic optimization model for electrical distribution system planning*". Electr.Power and Energy Syst., 4(2) : 129-136, May/June 1982.
- [33] T. Gonen and I. Ramirez-Rosado. "*Optimal multi-stage planning of power distribution systems*". Transactions on Power Delivery, PWRD-2 : 512-519, April 1987.

- [34] T. H. Fawzi , K. F. Ali and S. M. El-Sobki. "*A new planning model for distribution systems*". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-102(9) : 3010-3017, september 1979.
- [35] V. H. Quintana , H. K. Temraz and K. W. Hipel. "*Two-stage power system distribution planning algorithm*". IEE Proc-C, 104(1) : 17-29, 1993.
- [36] A. M. Geoffrion. "*Duality in nonlinear programming: a simplified application-oriented development*". SIAM Review, 13(1), 1971.
- [37] A. M. Geoffrion. "*Generalized Benders decomposition*". Journal Of Optimization Theory And Applications, 10(4) : 237-260, 1972.
- [38] J. F. Benders. "*Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems*". Numerische Mathematik, 4 , 1962.
- [39] R. J. B. Wets. "*Programming under uncertainty: the equivalent convex program*". J. SIAM Appl. Math., 14(1) : 89-105, January 1966.
- [40] R. J. B. Wets. "*Programming under uncertainty: the solution set*". J. SIAM Appl. Math., 14(5) : 1143-1151, September 1966.
- [41] R. J. B. Wets. "*Stochastic programs with fixed recourse: the equivalent deterministic program*". SIAM Review, 16(3) : 309-338, July 1974.
- [42] A. M. Geoffrion. "*Duality in nonlinear programming: a simplified application-oriented development*". SIAM Review, 13(1) : 237-260, 1971.
- [43] M. G. Florian, G. Guerin and G. Bushel. "*The engine scheduling problem in a railway network*". INFOR J., 14 : 121-138, 1976.
- [44] R. Richardson. "*An optimization approach to routing aircraft*". Trans.sci, 10 : 52-71, 1976.

- [45] A. M. Geoffrion and G. Graves. "*Multicommodity distribution system design by benders decomposition*". *Mgmt. Sci.*, 5 : 822-844, 1974.
- [46] M. L. Fisher and R. Jaikumer. "*A decomposition algorithm for large scale vehicle routing*". Report No.78-11-05, Department of Decision Science, University of Pennsylvania.
- [47] R. T. Wong. "*Accelerating Benders decomposition for network design*". Ph.D. thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of technology, January 1978.
- [48] T. L. Magnanti and R. T. Wong. "*Accelerating Benders decomposition: Algorithmic Enhancement and model selection criteria*". *Operations Research*, 29(3) : 464-484, May/June 1981.
- [49] R. T. Rockafellar. "*Convex analysis*". Princeton University Press, Princeton, N.J, 1970.
- [50] R. E. Gomory. "*Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs*". *Bulletin of American Mathematical Society*, 64 : 275-278, 1958.
- [51] R. E. Gomory. "*Solving linear programming problems in integers*". *Proceedings of the Symposium on Applied Mathematics*, 10 : 211-215, 1960.
- [52] A. H. Land and A. G. Doig. "*An automatic method for solving discrete programming problems*". *Econometrica*, 28 : 493-520, 1960.
- [53] R. E. Gomory. "*An algorithm for integer solutions to linear programs*". in: R. L. Graves and P. Wolfe (eds), *Recent Advances in Mathematical Programming*, McGraw Hill, New York : 269-302, 1963.

- [54] E. Balas. "An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables". Operations Research, 13 : 517-546, 1965.
- [55] R. J. Dakin. "a tree search algorithm for mixed integer programming problems". Computer Journal, 8 : 250-255, 1965.
- [56] P. Miliotis. "Integer programming approaches to the traveling salesman problem". Mathematical programming, 10 : 367-378, 1976.
- [57] M. W. Padberg and G. Rinaldi. "Optimization of a 532 city symmetric traveling salesman problem by branch-and-cut". Operations Research Letters, 10 : 1-7, 1987.
- [58] M. Jünger, G. Reinelt and S. Thienel . "Provably good solutions for the traveling salesman problem". Zeitschrift für Operations Research, 40 : 183-217, 1994.
- [59] M. W. Padberg and G. Rinaldi. " A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems". SIAM Review, 33 : 60-100, 1991.
- [60] M. Grötschel, A. Jünger and G. Reinelt. "A cutting plane algorithm for the linear ordering problem". Operations Research, 32 : 1195-1220, 1984.
- [61] K. Hoffman and M. W. Padberg. "Solving airline crew scheduling problems by branch-and-cut". Management Science, 39 : 657-682, 1993.
- [62] M. W. Padberg. "Linear optimization and extensions". Springer, Berlin, 1995.
- [63] M. Gondran and M. Minoux "Graphes et algorithmes". Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France, 1995.
- [64] P. Kesavan and P. I. Barton. "Generalized branch-and-cut framework for mixed-integer nonlinear optimization problems". Computers and Chemical Engineering, 24 : 1361-1366, 2000.

- [65] C. Audet, P. Hansen, B. Jaumard and G. Savard. "A branch and cut algorithm for nonconvex quadratically constrained quadratic programming". *Mathematical Programming, Serie A* 87 : 131-152, 2000.
- [66] Y. Lee, H. D. Sherali, J. Han and S. kim. "A branch and cut algorithm for solving an intraring synchronous optical network design problem". *Networks*, 35(3) : 223-232, 2000.
- [67] G. Ghiani and G. Laporte. "A branch-and-cut algorithm for the undirected rural postman problem". *Mathematical Programming, Serie A* 87 : 467-481, 2000.
- [68] O. Günlük. "A branch-and-cut algorithm for capacitated network design problems". *Mathematical Programming, Serie A* 86: 17-39, 1999.
- [69] R. A. Stubbs and S. Mehrotra. "A branch-and-cut algorithm for 0-1 mixed convex programming". *Mathematical Programming, Serie A* 86 : 515-532, 1999.
- [70] R. Ranjan, B. Venkatesh and D. Das. "A new algorithm for power distribution system planning". *Electric Power Systems Research, Serie A* 86 : 55-65, 2002.